Tarea 3 - Computación Científica y Ciencia de los Datos
Flujo de agua

Prof: Pablo Román

5 de Junio 2025

1 Objetivos

Desarrollar un simulador numérico de flujo incompresible bidimensional basado en la ecuación de Navier-Stokes utilizando esquemas de diferencias finitas en una malla. El sistema debe ser capaz de simular el flujo alrededor de un obstáculo circular dentro de un canal con paredes móviles. Se busca estudiar los efectos de parámetros como la viscosidad (número de Reynolds), la posición del obstáculo y la velocidad de las paredes.

2 Contexto: Ecuaciones de un fluido

Las ecuaciones de fluidos describen la evolución en el tiempo de valores promedios. Para ello, en teoría cinética de medios continuos se derivan las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones se describen con las siguientes variables en tres dimensiones:

- $\vec{V}(\vec{x},t) = (v_x, v_y, v_z)$: Velocidades promedio en el punto $\vec{x}$ del fluido y tiempo t.
- $p(\vec{x},t)$: Presión en el punto $\vec{x}$ del fluido y tiempo t.
- $\rho(\vec{x},t)$: Densidad en el punto $\vec{x}$ del fluido y tiempo t.

Existen medios continuos que se describen con una variedad de ecuaciones que varían desde sólidos casi rígidos a superfluidos. Sin embargo, nos remitiremos a las ecuaciones diferenciales que describen dichas variables sin fuerzas externas. Estas son:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\nabla p + \rho\nu\Delta\vec{V} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2}$$

La ecuación (1) se denomina ecuación de momentum. El lado izquierdo no es más que la parte masa por aceleración $m\vec{a}$ de la ley de Newton y promediada. La parte derecha indica las fuerzas que contribuyen al movimiento. El gradiente de p indica fuerzas debido a diferencias de presión. El término que contiene el Laplaciano Δ indica fuerzas de roce debido a la viscosidad del fluido. Se introduce la constante ν que indica la intensidad de dicha fuerza. La gran mayoría de los líquidos tiene dicha fuerza incluida en su movimiento; esto tiene como consecuencia que la velocidad relativa a la pared es cero en puntos infinitamente próximos a paredes o sólidos en un líquido. Esto se expresa como una condición de borde en una simulación.

La segunda ecuación (ec. 2) se denomina la ecuación de continuidad y expresa el hecho de que la materia se conserva. En nuestro caso consideramos fluidos **incompresibles** . Esto significa que la densidad ρ no depende de la posición ni del tiempo, es una constante. La ecuación de continuidad se simplifica como $\nabla\cdot\vec{V} = 0$. Ejemplo de fluidos incompresibles son el agua y el líquido de frenos.

Para este tipo de fluidos, de la ecuación (1) se puede derivar una ecuación independiente del tiempo que debe cumplir la presión. Si se aplica la divergencia en la ecuación de momentum resulta la ecuación escalar (3) donde $i = x, y, z$. Esta ecuación se denomina la ecuación de Poisson para la presión. Esta permite resolver la presión p conociendo las velocidades. Esto es particularmente útil para el caso de utilizar diferencias finitas.

$$\Delta p = -\rho \sum_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \tag{3}$$

3 Simulador

Se pide simular el movimiento de un fluido alrededor de un obstáculo circular. Se considera un fluido en dos dimensiones, lo cual simplifica las ecuaciones diferenciales. Se toma como base el curso CFD Python: 12 steps to Navier-Stokes (`https://lorenabarba.com/blog/cfd-python-12-steps-to-navier-stokes/`) basado en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de fluidos. En particular, nos remitiremos al flujo en un canal (paso 12) (`https://nbviewer.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/15_Step_12.ipynb`). Para este ejercicio se consideran condiciones de borde diferentes, se dispone del siguiente canal.

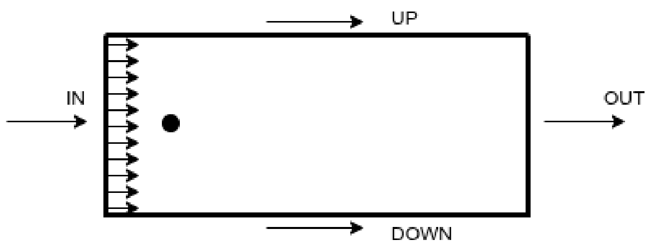

Figure 1: Canal a Simular.

Se trata de un área rectangular de alto a y ancho b. El obstáculo que está insertado en el flujo es circular, de radio $r = a/25$, ubicado justo en el medio entre la pared superior(UP) y la inferior (DOWN), y a una distancia d de la entrada de flujo de agua (IN). Este obstáculo está anclado y no se mueve. En el lado izquierdo (IN) ingresa agua con velocidad u^0 constante hacia la derecha. En el lado derecho (OUT) sale el agua sin fuerza que lo impida. Las paredes superior e inferior se mueven hacia la derecha con velocidad u^0 constante. Finalmente, el líquido tiene densidad $\rho = 1$ y constante de viscosidad ν. Se requiere que el simulador muestre el movimiento del fluido parametrizado en : a, b, d, u^0, y ν. Considere que el ancho del dominio debe ser mayor al doble del alto.

Los parámetros anteriores no son los únicos que el programa va a disponer, hay otros que dependen del método numérico a utilizar. Por ejemplo, si se considera una malla regular se tendrá que cada celda tendrá un ancho $dx = b/m$ y un alto $dy = a/n$. Donde n y m son el número de filas y columnas de la malla. El tiempo también se discretiza en pasos de $dt = T/N$, donde T es el tiempo de la simulación y N es el número de pasos en que se simula. Cuando dx,dy,dt son pequeños pueden ser usados para aproximar las derivadas de las velocidades del fluido. Por ejemplo, la ecuación de momentum 2d en $\vec{V} = (u, v)$ se discretiza para generar ecuaciones de recuerrencia.

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ &\quad + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + F_{i,j} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ &\quad + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Todo el procedimiento está descrito en la página (`\url{https://nbviewer.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/15_Step_12.ipynb}`) incluyendo el método de relajación con la ecuación de Poisson para la presión.

4 Experimentos a realizar

Debe concebir un conjunto de datos por ud mismo que sea demostrativo para la implementación que debe realizar. No se permite el uso de loop de Python en lo posible.

1. (1 pto) Documente en forma clara y prolija en jupyter notebook la resolución de sus tarea y experimentos realizados. Describa en detalle su enfoque utilizado e interprete claramente sus resultados y supuestos. Limite su documentación, aproximadamente a 8 hojas carta sin gráficos. Ejemplifique mediante gráficos y animaciones (matplotlib.animate). Un gráfico bien desarrollado vale más que mil palabras (o nulo si no es autoexplicativo).

2. (2.0 pt) Desarrolle el simulador con las condiciones de borde señaladas y ejecute con diferentes velocidades de entrada, distancia del obstaculo a la entrada y coeficiente de viscosidad. Evalúe la fuerza en el tiempo sobre el obstáculo, grafique lo simulado e interprete lo observado. Muestre en que momento su simulación deja de funcionar, es decir cuales son los rangos en que funciona y explique porque deja de funcionar.

3. (3 pts) Mejore el simulador de forma de aumentar los rangos anteriores en forma clara. Mostrando los nuevos rangos.

4. (1 pts Bonus) Ya que mejoró las posibilidades de simulación reproduzca el fenómeno de la avenida de vórtices de Von-Karman.

5 Entrega

Debe subir su Jupyter Notebook de colab en classroom con plazo al día Lunes 23 de Junio antes de las 23:55 hrs. Se descuenta 1 punto por día de atraso.