Лабораторная работа № 2

Моделирование нелинейных динамических систем

Цель работы: научиться численно моделировать нелинейные динамические системы.

Теоретические сведения

Динамические уравнения

Динамической системой называют математическую модель системы, процессы в которой развиваются во времени. Состояние динамической системы характеризуется фазовыми координатами, которые принадлежат фазовому пространству.

Развитие состояния системы во времени описывается дифференциальными динамическими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases} \quad (1)$$

где *x1,... xn* — фазовые координаты (они зависят от времени — параметра *t*), точка — производная по времени *t*. Соответственно, n-мерное пространство, координатами в котором являются *x1,... xn*, называется фазовым пространством.

Решение системы — векторная функция времени, который обращает уравнения системы (1) в тождества:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения и системы имеют бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения требуется задать дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения или системы. Таким образом, начальные условия представляют собой точку в фазовом пространстве.

Решение уравнения (1) при заданных начальных условиях *x(0)* представляет собой *интегральную кривую*. График этого решения в фазовом пространстве, а также часто и само решение, называется *фазовой траекторией* исследуемой системы.

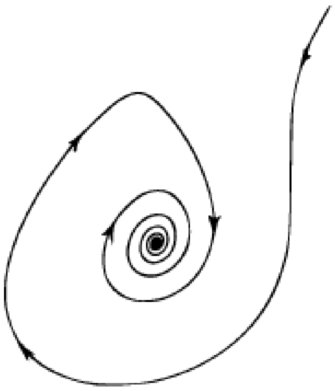

Рис.1. Фазовая траектория

Уравнение (1) можно представить как векторное поле (в каждой точке фазового пространства правые части (1) образуют вектор). Фазовая траектория в любой точке касается соответствующего вектора.

Совокупность множества фазовых траекторий, которая даёт достаточно полное представление о динамике системы, называется *фазовым портретом* системы.

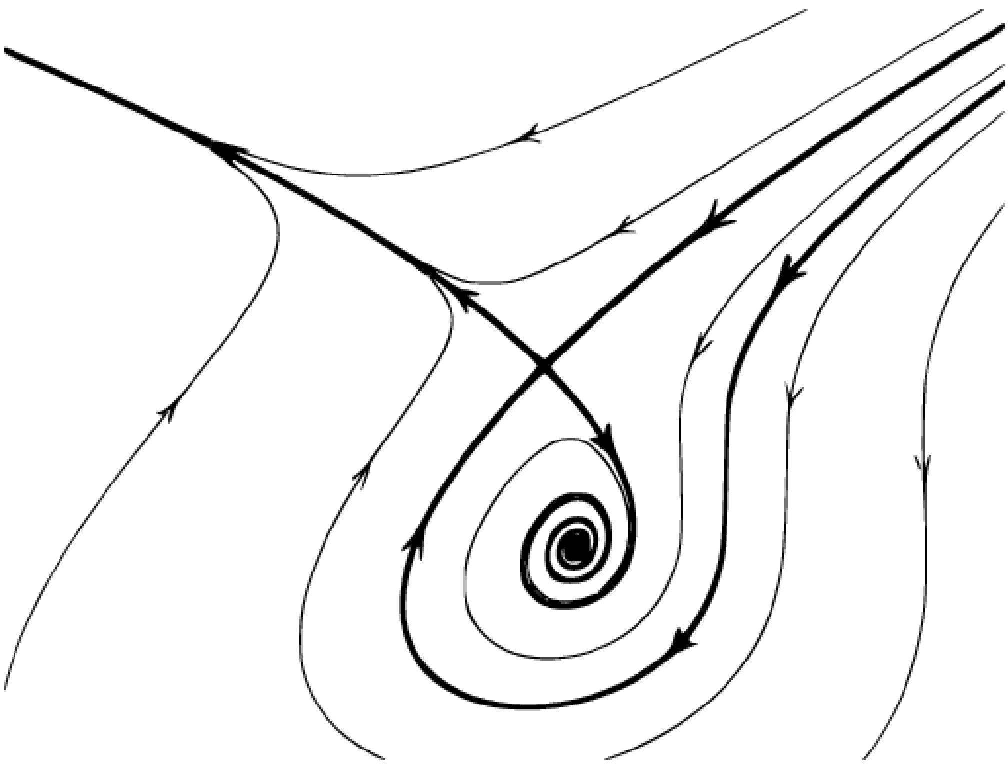

Рис.2. Фазовый портрет

В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают: *задачу Коши* — все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала; *краевую задачу* — дополнительные условия указаны на границах интервала. Для динамических систем обычно известно только начальное состояние и законы развития, что соответствует задаче Коши.

Для численного решения уравнений (1) и графического отображения решений предназначены как специализированные программы, такие, как Dynpao, Phaseplan, Stollenwurm, так и функции универсальных сред.

Для решения дифференциальных уравнений и систем в Scilab предусмотрена функция

```
[x,w,iw]=ode([txpe],x0,t0,t [,rtol [,atol]],f [,jac] [,w,iw])
```

для которой обязательными входными параметрами являются:

x0 — вектор начальных условий; *t0* — начальная точка интервала интегрирования; *t* — координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения (для динамических уравнений *t* — вектор, содержащий моменты времени, в которых происходит поиск решения); *f* — внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений (1); *x* — вектор решений (2).

Таким образом, для того чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида $dx/dt = f(t, x), x(t0) = x0$, необходимо вызвать функцию

```
x=ode(x0,t0,t,f).
```

Рассмотрим необязательные параметры функции *ode*:

type — параметр, с помощью которого можно выбрать метод решения или тип решаемой задачи, указав одну из строк: *adams* применяют при решении дифференциальных уравнений или систем методом прогноза-коррекции Адамса; *stiff* указывают при решении жёстких задач; *rk* используют при решении дифференциальных уравнений или систем методом Рунге-Кутты четвёртого порядка; *rkf* указывают при выборе пятиэтапного метода Рунге-Кутты четвёртого порядка; *fix* — тот же метод Рунге Кутты, но с фиксированным шагом;

rtol, atol — относительная и абсолютная погрешности вычислений, вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора *x*, по умолчанию rtol=0.00001, atol=0.0000001, при использовании параметров *rkf* и *fix* — rtol=0.001, atol=0.0001;

jac — матрица, представляющая собой якобиан правой части жёсткой системы дифференциальных уравнений, задают матрицу в виде внешней функции вида *J=jak(t,x);*

w, *iw* — векторы, предназначенные для сохранения информации о параметрах интегрирования, которые применяют для того, чтобы последующие вычисления выполнялись с теми же параметрами.

Используя вектор *t* и полученные значения *x*, можно построить зависимости *xi(t)*. На плоскости для этого предназначены функции *plot* и *plot2d*, в трёхмерном пространстве — *param3d* и *param3d1*.

Рассмотрим использование функции *ode* на примере следующей задачи.

Пример 1

Решить задачу Коши

$x1' = cos(x1*x2)$,

$x2' = sin(x1 + t*x2)$,

$x1(0) = 0, x2(0) = 0.$

на интервале [0; 10].

Далее приведена функция, описывающая заданную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и команды Scilab, необходимые для её численного и графического решения (листинг 1). Обозначим вектор-столбец $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ переменной *x*.

Листинг 1

```
//Функция, описывающая систему дифференциальных уравнений
function dx=syst(t,x)
dx=zeros(2,1);    // нулевой вектор-столбец размерности 2
dx(1)=cos(x(1)*x(2));
dx(2)=sin(x(1)+x(2)*t);
endfunction
//Решение системы дифференциальных уравнений
x0=[0;0];t0=0;t=0:0.1:10;x=ode(x0,t0,t,syst);
//Формирование графического решения
xset("window",1)  // создание (или активация, если уже есть)
графического окна с номером 1
plot(t,x)   // графики x1(t) и x2(t)
xset("window",2)
plot(x(1,:),x(2,:)) // фазовая траектория в пространстве (x1,x2)
```

Меняя начальные условия, можно получить множество траекторий системы.

Фазовые траектории на плоскости

Динамическая система на плоскости задаётся системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_{1,} x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_{1,} x_2) \end{cases} \qquad (2)$$

Фазовые переменные x1 и x2 также часто обозначаются x и y.

P и Q — функции фазовых переменных x1 и x2 (в общем случае нелинейные). Разделив почленно уравнения (2), получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Q(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)}$$

то есть отношение Q и P в каждой точке плоскости есть тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории в этой точке.

Значениям

$$\begin{cases} P(x_{1,} x_2) = 0 \\ Q(x_{1,} x_2) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

соответствует $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, и, следовательно, это остановка движения. Таким образом, решения системы уравнений (3) есть состояния равновесия. В этих точках наклон касательной не определён. Поэтому эти точки *(x1, x2)* называются особыми точками фазовой плоскости.

Линейная система (2) имеет одну (единственную) особую точку — одно состояние равновесия, т.к. линейные уравнения (3) допускают лишь единственное решение. У нелинейной системы (P и Q — нелинейные функции) может быть несколько таких состояний, т.к. нелинейные уравнения (3) могут иметь сколько угодно решений. При исследовании процессов на фазовой плоскости необходимо:

1. Определить положения особых точек на фазовой плоскости, т.е. решить уравнения (3).

2. Выяснить тип особых точек, от которого зависит, будет ли состояние равновесия устойчивым или неустойчивым, а также качественные особенности движения вблизи особых точек.

При нелинейных функциях P и Q тип особой точки можно определить по уравнениям первого приближения, которые получаются в результате линеаризации функций P и Q:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \approx a\,x_1 + b\,x_2 \\ \dot{x}_2 \approx c\,x_1 + d\,x_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Характер фазовых траекторий зависит от корней характеристического уравнения системы (4):

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad (5)$$

Если хотя бы один корень уравнения (4) равен 0, точка называется *вырожденной*.

Если оба корня ненулевые и вещественные, каждому из них соответствует определённых собственный вектор. Траектории, идущие вдоль собственного вектора вблизи особой точки, приближённо линейны и направлены либо строго в особую точку (притяжение), либо строго от неё (отталкивание).

Различают три основных вида невырожденных особых точек:

— **узел:** притяжение вдоль обоих собственных векторов (притягивающий узел) либо отталкивание вдоль обоих собственных векторов (отталкивающий узел);

— **седло:** притяжение вдоль одного собственного вектора и отталкивание вдоль другого;

— **фокус:** траектории закручиваются спиралью вокруг особой точки (притягивающий или отталкивающий фокус).

При точном совпадении собственных чисел λ1 = λ2 = λ узел называется дикритическим (одно λ, два неколлинеарных собственных вектора) или жордановым (одно λ, только один собственный вектора). При малом изменении параметров дикритический или жорданов узел превращается в обычный узел или фокус.

При точном равенстве вещественной части λ1 и λ2 нулю особая точка не притягивает и не отталкивает (нейтральная) — **центр.** При малом изменении параметров центр превращается в слабо притягивающий или слабо отталкивающий фокус.

Внешний вид фазовых траекторий вблизи невырожденных особых точек разных типов показан на рис. 1.

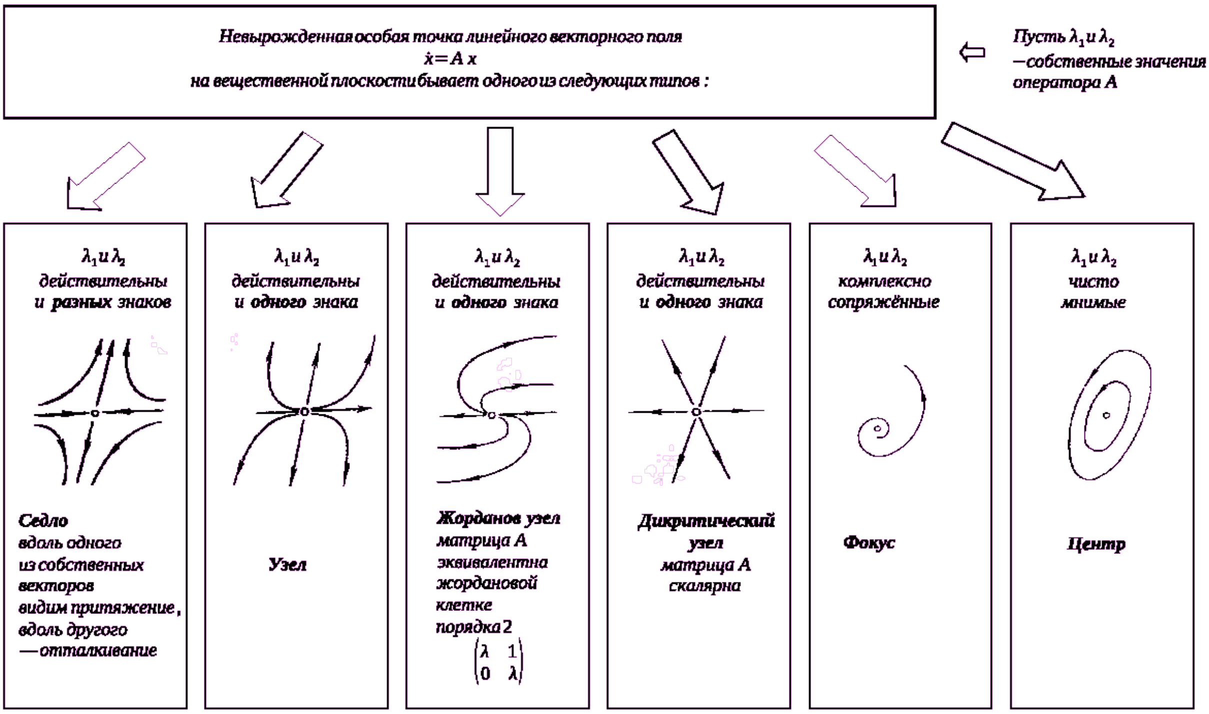

Рис.3. . Классификация невырожденных особых точек

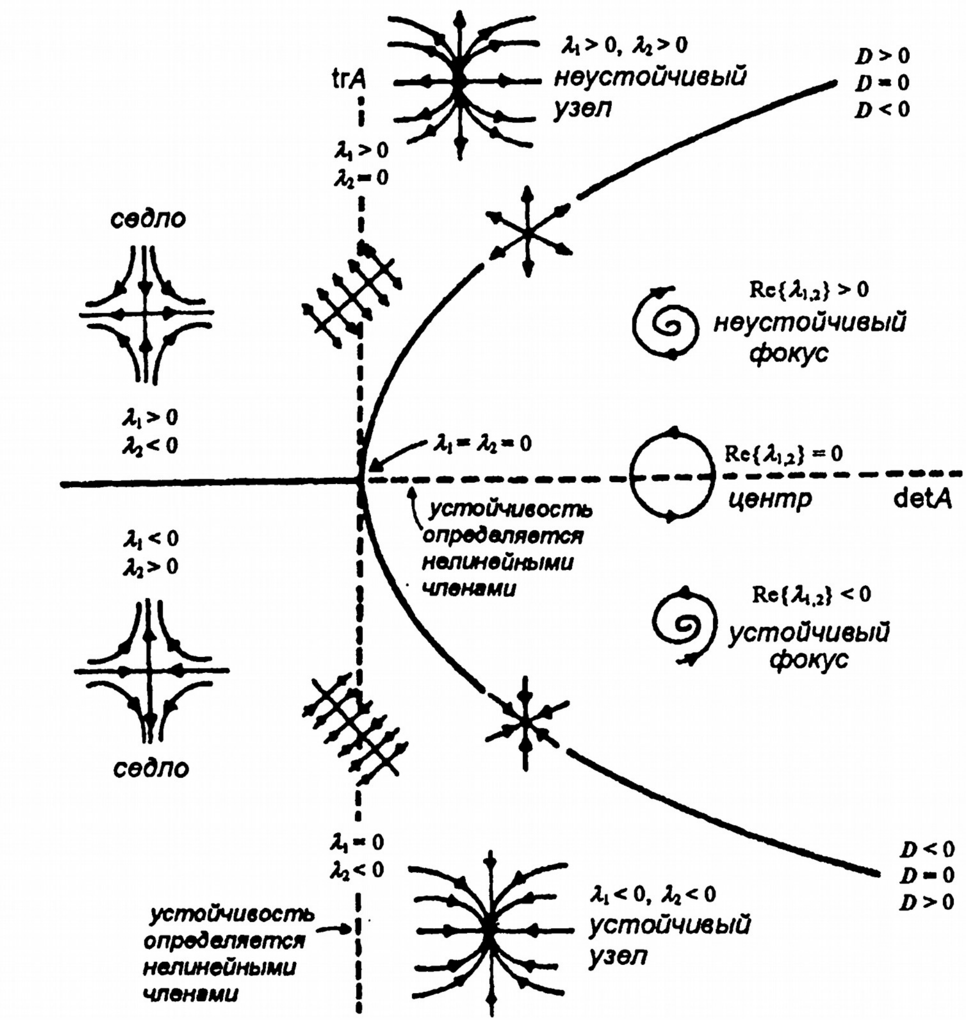

Рис.4.

Узлы и фокусы могут быть притягивающими (устойчивыми, аттракторами) или отталкивающими (неустойчивыми, репеллерами), в зависимости от того, стремятся ли траектории при увеличении времени t к особой точке или от неё. Такие точки называются обобщёнными узлами.

Седло вдоль одного направления притягивает, вдоль другого — отталкивает, так что траектории вблизи седла являются гиперболами,которые проходят рядом с седловой точкой, но не стремятся к ней. Притягивающее и отталкивающее направления являются асимптотами этих гипербол.

Вблизи узла также можно выделить два направления — оба либо отталкивающие, либо притягивающие в соответствии со знаком $\lambda 1$ и $\lambda 2$; траектории, не лежащие на этих направлениях, имеют вид парабол. Частными случаями узла являются жорданов и дикритический узлы, для которых совпадают значения $\lambda 1 = \lambda 2 = \lambda$. При небольшом изменении параметров эти частные случаи превращаются в узел общего вида или фокус.

Центр при малом изменении параметров превращается в притягивающий или отталкивающий фокус.

Рассчитав и прорисовав несколько траекторий вблизи особой точки, можно определить её тип «по внешнему виду». Так, на рис.2 можно увидеть седло и притягивающий фокус.

В отдалении от особой точки система (2) уже не может быть описана линейным приближением (4) и картина может искажаться.

Поведение траекторий вблизи вырожденной особой точки более разнообразно. Существуют притягивающие и отталкивающие обобщённые узлы (среди них иногда можно выделить вырожденные фокусы), сёдла, и более сложные типы точек. При небольшом изменении параметров вырожденная особая точка исчезает или распадается на несколько невырожденных.

Контрольные вопросы

1. Что такое динамическая система?
2. Что такое особая точка?
3. Перечислите типы невырожденных особых точек.

Задание на лабораторную работу

Внимание!

Данная лабораторная работа выполняется парой студентов. По результатам работы оформляется один отчёт.

1. Изобразить фазовый портрет системы, соответствующей номеру варианта (параметры выбирается произвольно).

2. Найти особые точки системы (визуально или аналитически), определить их тип.

Таблица 1

Варианты заданий

ПК	Задание	
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29	Модель отбора на основе конкурентных отношений и модель Вольтерра (взаимодействие видов типа хищник-жертва)	$\frac{dx}{dt}=ax-bxy$ $\frac{dy}{dt}=cy-dxy$ $\frac{dx}{dt}=ax-bxy$ $\frac{dy}{dt}=cxy-dy$
2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30	Модель альтернативного синтеза двух ферментов Жакоба и Моно	$\frac{dx}{dt}=\frac{a_1}{b_1+y^m}-q_1 x$ $\frac{dy}{dt}=\frac{a_2}{b_2+x^m}-q_2 y$
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31	Модификация модели Вольтерра с учётом ограниченности субстрата в форме Моно	$\frac{dx}{dt}=ax-\frac{bxy}{1+\rho y}-e x^2$ $\frac{dy}{dt}=-cy+\frac{dxy}{1+\rho x}-m y^2$
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32	Модель гликолиза	$\frac{dx}{dt}=k-\chi\frac{x}{(k_{mx}+x)}\frac{y}{(k_{my}+y)}$ $\frac{dy}{dt}=\chi\frac{x}{(k_{mx}+x)}\frac{y}{(k_{my}+y)}-q\frac{y}{(k_{my2}+y)}$

Требования к отчёту

Отчёт должен содержать:

- заголовок, тему и цель лабораторной работы;
- группу и фамилии авторов, вариант;
- выбранные параметры;
- эскизы фазового портрета системы;
- листинги сценариев или история команд;
- пояснения;
- выводы.