Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

# EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
# GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-11-2019 (9-10:30)

**Cada pregunta tipo test mal contestada penaliza 0.3. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.**

1) Sean $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. El dominio de la función compuesta $gof$ es:

a) $(1,+\infty)$ , b) $R-[-1,1]$ , c) $R-\{1,-1\}$ , d) $R-(-1,1)$

(1.25 p.)

2) Sea $D=(0,+\infty)$ el dominio de una función $f$ que es continua en $D-\{2\}$, siendo la discontinuidad esencial de salto finito. Si $f$ tiene una asíntota horizontal y otra vertical, se verifica:

a) $f$ no es acotada ni superiormente ni inferiormente en $D$ b) $f$ es acotada en $D$

c) $f$ es acotada o superiormente o inferiormente en $D$ d) $f$ tiene una asíntota oblicua

(1.25 p.)

3)
a) Definir, con rigor matemático, cuando una función $f$ es estrictamente creciente en un dominio $D$ y cuando es inyectiva en $D$.

b) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente. Si $f$ es una función inyectiva en un dominio $D$ entonces $f$ es estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente en $D$.

c) Determinar, usando una consecuencia del teorema de Rolle, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=-3+x+\dfrac{8}{x^4}$ definida en $R-\{0\}$.

(0.7 p.+0.8 p.+1 p.)

Solución.
a)

$f$ es estrictamente creciente en $D$ $\Leftrightarrow: \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$f$ es inyectiva en $D$ $\Leftrightarrow: \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

b) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ que es inyectiva en $D=R-\{0\}$ y no es creciente ni decreciente en $D$. Veámoslo.

Sean $x_1, x_2 \in R-\{0\} \,/\, \dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2}$ ; se verifica trivialmente que $x_1=x_2$, es decir, $f$ es inyectiva en $D$.

Si elegimos $x_1=1$, $x_2=2$ resulta $f(1)=1>\dfrac{1}{2}=f(2)$, $f$ no es est. creciente (ni creciente) en $D$

Si elegimos $x_1=-1$, $x_2=1$ resulta $f(-1)=-1<1=f(1)$, $f$ no es est. decreciente (ni decrec.) en $D$

c) La consecuencia del teorema de Rolle que vamos a usar es la siguiente:

Si $f$ es derivable en $(a\,,b)$ y $f\,'(x)\neq 0\quad \forall x\in(a\,,b)$ se verifica que en dicho intervalo la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero.

La función $f(x)=-3+x+\dfrac{8}{x^4}$ es suma de una función polinomica y de una función racional; por tanto, es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f\,'(x)=1-\dfrac{32}{x^5}$ ; $\quad f\,'(x)=0\Leftrightarrow x^5=32\Leftrightarrow x=2$

En cada uno de los intervalos de monotonía $(-\infty\,,0)$ , $(0\,,2)$ y $(2\,,+\infty)$ la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero; además, $x=2$ no es un cero de $f$ . Por tanto, el número máximo de ceros reales de la función $f$ es tres

4) Sea $f(x)=\log\left(1-|x|+x^2\right)$ definida en el intervalo $[-1\,,1]$ **.**

a) Estudiar la derivabilidad lateral de $f$ en el 0, usando las definiciones correspondientes y sin aplicar la regla de L'Hopital. Obtener $f\,'(x)\quad \forall x\in(-1\,,1)$ donde $f$ sea derivable.

b) Determinar, de forma razonada, todos los puntos críticos de $f$ en $[-1\,,1]$ ¿Existe $m=\min\limits_{x\in[-1\,,1]} f(x)$ ? ¿Existe $M=\max\limits_{x\in[-1\,,1]} f(x)$ ? Obtenerlos, en su caso ¿quién es el conjunto imagen de $f$ definida en $[-1\,,1]$?

(1.5 p.+1.5 p.)

Solución.

$$\text{Si } x\in[-1\,,1],\quad f(x)=\log\left(1-|x|+x^2\right)=\begin{cases}\log\left(1-x+x^2\right) & ,\ x\in[0\,,1]\\ \log\left(1+x+x^2\right) & ,\ x\in[-1\,,0]\end{cases}$$

a)

$f$ es derivable por la derecha en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1-h+h^2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1+h^2-h\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-1)}{h}=-1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h\to 0^+$, $h^2-h\to 0$ . Resulta, $\log\left(1+h^2-h\right)\approx h^2-h$

$f$ es derivable por la izquierda en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(1+h)}{h}=1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ . Si $h\to 0^-$, $h+h^2\to 0$ . Resulta, $\log\left(1+h+h^2\right)\approx h+h^2$

Hemos obtenido que $f$ es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. Más concretamente, $f\,'\left(0^+\right)=-1$ y $f\,'\left(0^-\right)=1$. Al ser distintas las derivadas laterales resulta que $f$ no es derivable en el 0.

La función $f$ es derivable en todo punto $x \in (-1,1)-\{0\}$ por ser composición de dos funciones derivables; se sabe que las funciones polinomicas son derivables en todo punto y la función logaritmo neperiano es derivable en todo su dominio. Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{1-x+x^2} & \text{si } x \in (0,1) \\ \dfrac{2x+1}{1+x+x^2} & \text{si } x \in (-1,0) \end{cases}$$

b)

Si $x \in (0,1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = 1/2$
Si $x \in (-1,0)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -1/2$

Los puntos críticos de $f$ en $[-1,1]$ son :
-1 , 1 (puntos frontera del intervalo)
0 (punto interior al intervalo donde la función no es derivable)
1/2 , -1/2 (puntos interiores al intervalo donde la derivada se anula).

La función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[-1,1]$. Lo es en el 0, ya que es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. En el resto de puntos del intervalo $[-1,1]$ también es continua por ser composición de funciones continuas. El teorema de Weiertrass nos garantiza la existencia del máximo absoluto( $M$ ) y del mínimo absoluto( $m$ ) de $f(x)$ para los $x \in [-1,1]$. Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en uno de los puntos críticos de $f$ pertenecientes al intervalo $[-1,1]$.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = \log(1) = 0 \quad , \quad f(1/2) = f(-1/2) = \log(3/4) < 0$$

Por tanto, $m = \log(3/4)$ y $M = 0$. Así pues, $\operatorname{Im} f = [m, M] = [\log(3/4), 0]$

5)

a) Razonar si la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+4}}.\cos(n^2+3)$ es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite en su caso.

b) Sea $\{a_n\} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de $\{a_n\}$.

(0.75 p.+1.25 p.)

Solución.
a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{4}{n^2}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La sucesión $\{\cos(n^2+3)\}$ es acotada ya que $-1 \le \cos(n^2+3) \le 1 \quad \forall n$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente a 0 ( producto de una sucesión convergente a 0 por otra que es acotada).

b)

$$\{a_n\}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

Para un $n$ suficientemente grande se verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}>\frac{2}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{2}{\sqrt{n^2+2}}<\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}}>\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}}<\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Por tanto,

$$a_n>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$$

Sucesión minorante: $\left\{\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}}\right\}$ ; Sucesión mayorante: $\left\{\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+1}}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+1}}=+\infty$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=+\infty$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

# EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
## GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-11-2019 (10:30-12)

**Cada pregunta tipo test mal contestada penaliza 0.3. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.**

1) Sean $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. El dominio de la función compuesta $gof$ es:

a) $(1,+\infty)$ , b) $R-\{1,-1\}$ , c) $R-[-1,1]$ , d) $R-(-1,1)$

(1.25 p.)

2) Sea $D=(0,+\infty)$ el dominio de una función $f$ que es continua en $D-\{2\}$, siendo la discontinuidad esencial de salto finito. Si $f$ tiene una asíntota horizontal y otra vertical, se verifica:

a) $f$ es acotada o superiormente o inferiormente en $D$ b) $f$ es acotada en $D$

c) $f$ no es acotada ni superiormente ni inferiormente en $D$ d) $f$ tiene una asíntota oblicua

(1.25 p.)

3)
a) Definir, con rigor matemático, cuando una función $f$ es estrictamente creciente en un dominio $D$ y cuando es inyectiva en $D$.

b) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente. Si $f$ es una función inyectiva en un dominio $D$ entonces $f$ es estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente en $D$.

c) Determinar, usando una consecuencia del teorema de Rolle, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=-3+x+\dfrac{8}{x^4}$ definida en $R-\{0\}$.

(0.7 p.+0.8 p.+1 p.)

Solución.
a)

$f$ es estrictamente creciente en $D$ $\Leftrightarrow: \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$f$ es inyectiva en $D$ $\Leftrightarrow: \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in D \,/\, f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

b) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ que es inyectiva en $D=R-\{0\}$ y no es creciente ni decreciente en $D$. Veámoslo.

Sean $x_1, x_2 \in R-\{0\} \,/\, \dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2}$ ; se verifica trivialmente que $x_1=x_2$, es decir, $f$ es inyectiva en $D$.

Si elegimos $x_1=1$, $x_2=2$ resulta $f(1)=1>\dfrac{1}{2}=f(2)$, $f$ no es est. creciente (ni creciente) en $D$

Si elegimos $x_1=-1$, $x_2=1$ resulta $f(-1)=-1<1=f(1)$, $f$ no es est. decreciente (ni decrec.) en $D$

c) La consecuencia del teorema de Rolle que vamos a usar es la siguiente:

Si $f$ es derivable en $(a,b)$ y $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ se verifica que en dicho intervalo la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero.

La función $f(x)=-3+x+\dfrac{8}{x^4}$ es suma de una función polinomica y de una función racional; por tanto, es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f'(x)=1-\dfrac{32}{x^5}$ ; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^5=32\Leftrightarrow x=2$

En cada uno de los intervalos de monotonía $(-\infty,0)$, $(0,2)$ y $(2,+\infty)$ la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero; además, $x=2$ no es un cero de $f$. Por tanto, el número máximo de ceros reales de la función $f$ es tres

4) Sea $f(x)=\log\left(1-|x|+x^2\right)$ definida en el intervalo $[-1,1]$ **.**

a) Estudiar la derivabilidad lateral de $f$ en el 0, usando las definiciones correspondientes y sin aplicar la regla de L'Hopital. Obtener $f'(x)$ $\forall x\in(-1,1)$ donde $f$ sea derivable.

b) Determinar, de forma razonada, todos los puntos críticos de $f$ en $[-1,1]$ ¿Existe $m=\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$ ? ¿Existe $M=\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$ ? Obtenerlos, en su caso ¿quién es el conjunto imagen de $f$ definida en $[-1,1]$?

(1.5 p.+1.5 p.)

Solución.

Si $x\in[-1,1]$, $f(x)=\log\left(1-|x|+x^2\right)=\begin{cases}\log\left(1-x+x^2\right) & ,\ x\in[0,1]\\ \log\left(1+x+x^2\right) & ,\ x\in[-1,0]\end{cases}$

a)

$f$ es derivable por la derecha en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1-h+h^2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1+h^2-h\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-1)}{h}=-1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h\to 0^+$, $h^2-h\to 0$. Resulta, $\log\left(1+h^2-h\right)\approx h^2-h$

$f$ es derivable por la izquierda en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(1+h)}{h}=1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ . Si $h\to 0^-$, $h+h^2\to 0$. Resulta, $\log\left(1+h+h^2\right)\approx h+h^2$

Hemos obtenido que $f$ es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. Más concretamente, $f'\left(0^+\right)=-1$ y $f'\left(0^-\right)=1$. Al ser distintas las derivadas laterales resulta que $f$ no es derivable en el 0.

La función $f$ es derivable en todo punto $x \in (-1,1)-\{0\}$ por ser composición de dos funciones derivables; se sabe que las funciones polinomicas son derivables en todo punto y la función logaritmo neperiano es derivable en todo su dominio. Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{1-x+x^2} & \text{si } x\in(0,1) \\[2ex] \dfrac{2x+1}{1+x+x^2} & \text{si } x\in(-1,0) \end{cases}$$

b)

Si $x\in(0,1)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=1/2$
Si $x\in(-1,0)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1/2$

Los puntos críticos de $f$ en $[-1,1]$ son :
-1 , 1 (puntos frontera del intervalo)
0 (punto interior al intervalo donde la función no es derivable)
1/2 , -1/2 (puntos interiores al intervalo donde la derivada se anula).

La función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[-1,1]$. Lo es en el 0, ya que es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. En el resto de puntos del intervalo $[-1,1]$ también es continua por ser composición de funciones continuas. El teorema de Weiertrass nos garantiza la existencia del máximo absoluto($M$) y del mínimo absoluto($m$) de $f(x)$ para los $x\in[-1,1]$. Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en uno de los puntos críticos de $f$ pertenecientes al intervalo $[-1,1]$.

$$f(-1)=f(1)=f(0)=\log(1)=0 \quad , \quad f(1/2)=f(-1/2)=\log(3/4)<0$$

Por tanto, $m=\log(3/4)$ y $M=0$. Así pues, $\operatorname{Im} f=[m,M]=[\log(3/4),0]$

5)

a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+4}}.\cos(n^2+3)$ es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite en su caso.

b) Sea $\{a_n\}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de $\{a_n\}$.

(0.75 p.+1.25 p.)

Solución.
a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{n+\dfrac{4}{n^2}}}=\frac{1}{\infty}=0$$

La sucesión $\{\cos(n^2+3)\}$ es acotada ya que $-1\le\cos(n^2+3)\le 1 \quad \forall n$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente a 0 ( producto de una sucesión convergente a 0 por otra que es acotada).

b)

$$\{a_n\}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

Para un $n$ suficientemente grande se verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}>\frac{2}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{2}{\sqrt{n^2+2}}<\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}}>\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}}<\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Por tanto,

$$a_n>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$$

Sucesión minorante: $\left\{\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}}\right\}$ ; Sucesión mayorante: $\left\{\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+1}}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+1}}=+\infty$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=+\infty$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

# EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
## GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-11-2019 (11-12:30)

**Cada pregunta tipo test mal contestada penaliza 0.3. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.**

1) Sean $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$. El dominio de la función compuesta $gof$ es:

a) $(2,+\infty)$ , b) $R-(-2,2)$ , c) $R-\{2,-2\}$ , d) $R-[-2,2]$

(1.25 p.)

2) Sea $f$ una función definida y continua en $D=(0,+\infty)$ tal que $f(x)>0 \ \forall x\in D$. Si $f$ tiene una asíntota horizontal y otra vertical, se verifica:

a) $f$ no es acotada ni superiormente ni inferiormente en $D$ b) $f$ es acotada en $D$

c) $f$ es acotada superiormente y no inf. en $D$ d) $f$ es acotada inferiormente y no sup. en $D$

(1.25 p.)

3)
a) Definir, con rigor matemático, cuando una función $f$ es estrictamente decreciente en un dominio $D$ y cuando es acotada inferiormente en $D$.

b) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente. Si $f$ es una función estrictamente decreciente en $(-\infty,1)$ y en $(1,\infty)$ entonces $f$ también es estrictamente decreciente en $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

c) Determinar, usando una consecuencia del teorema de Rolle, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=5-2x-\dfrac{2}{3x^3}$ definida en $R-\{0\}$.

(0.7 p.+0.8 p.+1 p.)

Solución.
a)

$f$ es estrictamente decreciente en $D \Leftrightarrow: \forall\, x_1, x_2\in D \,/\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$f$ es acotada inferiormente en $D \Leftrightarrow: \exists m\in R \ / \ f(x)\geq m \ , \ \forall\, x\in D$

b) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ que es estrictamente decreciente en $(-\infty,1)$ y en $(1,\infty)$. Veámoslo.

Si $x_1, x_2\in(-\infty,1) \ / \ x_1<x_2 \ \Rightarrow x_1-1<x_2-1<0 \ \Rightarrow \dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}$ , es decir, $f(x_1)>f(x_2)$

Si $x_1, x_2\in(1,\infty) \ / \ x_1<x_2 \ \Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1 \ \Rightarrow \dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}$ , es decir, $f(x_1)>f(x_2)$

Veamos ahora que $f$ no es estrictamente decreciente en $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

Si elegimos $x_1=0$, $x_2=2$ resulta $f(0)<f(2)$

c) La consecuencia del teorema de Rolle que vamos a usar es la siguiente:

Si $f$ es derivable en $(a,b)$ y $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ se verifica que en dicho intervalo la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero.

La función $f(x)=5-2x-\dfrac{2}{3x^3}$ es diferencia de una función polinomica y de una función racional; por tanto, es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f'(x)=-2+\dfrac{2}{x^4}$ ; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=1$ ó $x=-1$

En cada uno de los intervalos de monotonía $(-\infty,-1)$ , $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,+\infty)$ la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero; además, $x=1$ y $x=-1$ no son ceros de $f$ . Por tanto, el número máximo de ceros reales de la función $f$ es cuatro.

4) Sea $f(x)=\log\left(1+|x|-\dfrac{x^2}{2}\right)$ definida en el intervalo $[-2,2]$ **.**

a) Estudiar la derivabilidad lateral de $f$ en el 0, usando las definiciones correspondientes y sin aplicar la regla de L'Hopital. Obtener $f'(x)$ $\forall x\in(-2,2)$ donde $f$ sea derivable.

b) Determinar, de forma razonada, todos los puntos críticos de $f$ en $[-2,2]$ ¿Existe $m=\min\limits_{x\in[-2,2]} f(x)$? ¿Existe $M=\max\limits_{x\in[-2,2]} f(x)$? Obtenerlos, en su caso ¿quién es el conjunto imagen de $f$ definida en $[-2,2]$?

(1.5 p.+1.5 p.)

Solución.

Si $x\in[-2,2]$, $f(x)=\log\left(1+|x|-\dfrac{x^2}{2}\right)=\begin{cases}\log\left(1+x-x^2/2\right) & , x\in[0,2]\\ \log\left(1-x-x^2/2\right) & , x\in[-2,0]\end{cases}$

a)

$f$ es derivable por la derecha en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1+h-h^2/2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1+h-h^2/2\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(1-h/2)}{h}=1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h\to 0^+$, $h-h^2/2\to 0$. Resulta, $\log\left(1+h-h^2/2\right)\approx h-h^2/2$

$f$ es derivable por la izquierda en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1-h-h^2/2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1-h-h^2/2\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(1+h/2)}{h}=-1$$

$\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$. Si $h\to 0^-$, $-h-h^2/2\to 0$. Resulta, $\log\left(1-h-h^2/2\right)\approx -h-h^2/2$

Hemos obtenido que $f$ es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. Más concretamente, $f'(0^+)=1$ y $f'(0^-)=-1$. Al ser distintas las derivadas laterales resulta que $f$ no es derivable en el 0.

La función $f$ es derivable en todo punto $x \in (-2,2)-\{0\}$ por ser composición de dos funciones derivables; se sabe que las funciones polinomicas son derivables en todo punto y la función logaritmo neperiano es derivable en todo su dominio. Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x-x^2/2} & \text{si } x\in(0,2) \\ \dfrac{-1-x}{1-x-x^2/2} & \text{si } x\in(-2,0) \end{cases}$$

b)

Si $x\in(0,2)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$
Si $x\in(-2,0)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -1-x=0 \Leftrightarrow x=-1$

Los puntos críticos de $f$ en $[-2,2]$ son :
-2 , 2 (puntos frontera del intervalo)
0 (punto interior al intervalo donde la función no es derivable)
1 , -1 (puntos interiores al intervalo donde la derivada se anula).

La función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$. Lo es en el 0, ya que es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. En el resto de puntos del intervalo $[-2,2]$ también es continua por ser composición de funciones continuas. El teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia del máximo absoluto($M$) y del mínimo absoluto($m$) de $f(x)$ para los $x\in[-2,2]$. Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en uno de los puntos críticos de $f$ pertenecientes al intervalo $[-2,2]$.

$$f(-2)=f(2)=f(0)=\log(1)=0 \quad , \quad f(1)=f(-1)=\log(3/2)>0$$

Por tanto, $m=0$ y $M=\log(3/2)$. Así pues, $\operatorname{Im} f=[m,M]=[0,\log(3/2)]$

5)

a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=\left(2+(-1)^n\right).\dfrac{\sqrt{n^3+4}}{n+1}$ es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite en su caso.

b) Sea $\{a_n\}=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$. Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de $\{a_n\}$.

(0.75 p.+1.25 p.)

Solución.
a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+4}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{4}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

Si $n$ es par, $\{a_n\}=3.\dfrac{\sqrt{n^3+4}}{n+1}\to+\infty$ ; Si $n$ es impar, $\{a_n\}=\dfrac{\sqrt{n^3+4}}{n+1}\to+\infty$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es divergente con límite $+\infty$

b)

$$\{a_n\} = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

Para un $n$ suficientemente grande se verifica:

$$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{n^2+n} \qquad \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{2}{n^2+2} > \frac{2}{n^2+n} \qquad \frac{2}{n^2+2} < \frac{2}{n^2+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{n-1}{n^2+n-1} > \frac{n-1}{n^2+n} \qquad \frac{n-1}{n^2+n-1} < \frac{n-1}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} \qquad \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+1}$$

Por tanto,

$$a_n > \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n-1}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}$$

$$a_n < \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n-1}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

Sucesión minorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{2n^2+2n}\right\}$ ; Sucesión mayorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{2n^2+2}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2+2/n} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2+2/n^2} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = \dfrac{1}{2}$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

# EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
# GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-11-2019 (13-14:30)

**Cada pregunta tipo test mal contestada penaliza 0.3. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.**

1) Sean $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$. El dominio de la función compuesta $gof$ es:

a) $(-\infty,2)$ , b) $(-2,2)$ , c) $R-\{2,-2\}$ , d) $[-2,2]$

(1.25 p.)

2) Sea $f$ una función definida y continua en $D=(-\infty,0)$ tal que $f(x)<0 \quad \forall x\in D$. Si $f$ tiene una asíntota horizontal y otra vertical, se verifica:

a) $f$ no es acotada ni superiormente ni inferiormente en $D$ b) $f$ es acotada en $D$

c) $f$ es acotada superiormente y no inf. en $D$ d) $f$ es acotada inferiormente y no sup. en $D$

(1.25 p.)

3)
a) Definir, con rigor matemático, cuando una función $f$ es estrictamente creciente en un dominio $D$ y cuando es acotada superiormente en $D$.

b) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente. Si $f$ es una función estrictamente creciente en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$ entonces $f$ también es estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

c) Determinar, usando una consecuencia del teorema de Rolle, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=2-x-\dfrac{1}{3x^3}$ definida en $R-\{0\}$.

(0.7 p.+0.8 p.+1 p.)

Solución.
a)

$f$ es estrictamente creciente en $D$ $\Leftrightarrow: \forall\, x_1, x_2\in D \,/\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$f$ es acotada superiormente en $D$ $\Leftrightarrow: \exists M\in R \,/\, f(x)\le M \;,\; \forall\, x\in D$

b) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es la función $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ que es estrictamente creciente en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$. Veámoslo.

Si $x_1, x_2\in(-\infty,0) \,/\, x_1<x_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$, es decir, $f(x_1)<f(x_2)$

Si $x_1, x_2\in(0,\infty) \,/\, x_1<x_2 \;\Rightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$ , es decir, $f(x_1)<f(x_2)$

Veamos ahora que $f$ no es estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

Si elegimos $x_1=-1$, $x_2=1$ resulta $f(-1)>f(1)$

c) La consecuencia del teorema de Rolle que vamos a usar es la siguiente:

Si $f$ es derivable en $(a\,,b)$ y $f\,'(x)\neq 0 \;\;\forall x\in(a\,,b)$ se verifica que en dicho intervalo la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero.

La función $f(x)=2-x-\dfrac{1}{3x^3}$ es diferencia de una función polinomica y de una función racional; por tanto, es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f\,'(x)=-1+\dfrac{1}{x^4}$ ; $\quad f\,'(x)=0\Leftrightarrow x^4=1\Leftrightarrow x=1$ ó $x=-1$

En cada uno de los intervalos de monotonía $(-\infty\,,-1)$ , $(-1\,,0)$, $(0\,,1)$ y $(1\,,+\infty)$ la función $f$ tiene, a lo sumo, un cero; además, $x=1$ y $x=-1$ no son ceros de $f$ . Por tanto, el número máximo de ceros reales de la función $f$ es cuatro.

4) Sea $f(x)=\log\left(1-|x|+\dfrac{x^2}{2}\right)$ definida en el intervalo $[-2\,,2]$ **.**

a) Estudiar la derivabilidad lateral de $f$ en el 0, usando las definiciones correspondientes y sin aplicar la regla de L'Hopital. Obtener $f\,'(x)\;\;\forall x\in(-2\,,2)$ donde $f$ sea derivable.

b) Determinar, de forma razonada, todos los puntos críticos de $f$ en $[-2\,,2]$ ¿Existe $m=\min\limits_{x\in[-2\,,2]} f(x)$? ¿Existe $M=\max\limits_{x\in[-2\,,2]} f(x)$? Obtenerlos, en su caso ¿quién es el conjunto imagen de $f$ definida en $[-2\,,2]$?

(1.5 p.+1.5 p.)

Solución.

$$\text{Si } x\in[-2\,,2],\;\; f(x)=\log\left(1-|x|+\frac{x^2}{2}\right)=\begin{cases}\log\left(1-x+x^2/2\right) & ,\; x\in[0\,,2]\\ \log\left(1+x+x^2/2\right) & ,\; x\in[-2\,,0]\end{cases}$$

a)

$f$ es derivable por la izquierda en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2/2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\log\left(1+h+h^2/2\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(1+h/2)}{h}=1$$

Sabemos que $\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h\to 0^-$, $h+h^2/2\to 0$. Resulta, $\log\left(1+h+h^2/2\right)\approx h+h^2/2$

$f$ es derivable por la derecha en el 0 $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1-h+h^2/2\right)-\log(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\log\left(1+h^2/2-h\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h/2-1)}{h}=-1$$

$\log(1+x)\approx x$ si $x\to 0$. Si $h\to 0^+$, $h^2/2-h\to 0$. Resulta, $\log\left(1+h^2/2-h\right)\approx h^2/2-h$

Hemos obtenido que $f$ es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. Más concretamente, $f\,'(0^+)=-1$ y $f\,'(0^-)=1$. Al ser distintas las derivadas laterales resulta que $f$ no es derivable en el 0.

La función $f$ es derivable en todo punto $x \in (-2,2)-\{0\}$ por ser composición de dos funciones derivables; se sabe que las funciones polinomicas son derivables en todo punto y la función logaritmo neperiano es derivable en todo su dominio. Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{1-x+x^2/2} & \text{si } x\in(0,2) \\[2ex] \dfrac{x+1}{1+x+x^2/2} & \text{si } x\in(-2,0) \end{cases}$$

b)

Si $x\in(0,2)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
Si $x\in(-2,0)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Los puntos críticos de $f$ en $[-2,2]$ son :
-2 , 2 (puntos frontera del intervalo)
0 (punto interior al intervalo donde la función no es derivable)
1 , -1 (puntos interiores al intervalo donde la derivada se anula).

La función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$. Lo es en el 0, ya que es derivable tanto por la derecha como por la izquierda en el 0. En el resto de puntos del intervalo $[-2,2]$ también es continua por ser composición de funciones continuas. El teorema de Weiertrass nos garantiza la existencia del máximo absoluto( $M$ ) y del mínimo absoluto( $m$ ) de $f(x)$ para los $x\in[-2,2]$. Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en uno de los puntos críticos de $f$ pertenecientes al intervalo $[-2,2]$.

$$f(-2)=f(2)=f(0)=\log(1)=0 \quad , \quad f(1)=f(-1)=\log(1/2)<0$$

Por tanto, $M=0$ y $m=\log(1/2)$ . Así pues, $\operatorname{Im} f=[m,M]=[\log(1/2),0]$

5)

a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=\left((-1)^n-2\right).\dfrac{\sqrt{n^5+3}}{n^2+1}$ es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite en su caso.

b) Sea $\{a_n\}=\dfrac{1}{2n^2+1}+\dfrac{2}{2n^2+2}+...+\dfrac{n}{2n^2+n}$ . Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de $\{a_n\}$.

(0.75 p.+1.25 p.)

Solución.
a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\dfrac{3}{n^4}}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

Si $n$ es par, $\{a_n\} = -\dfrac{\sqrt{n^5+3}}{n^2+1} \to -\infty$ ; Si $n$ es impar, $\{a_n\} = -3\dfrac{\sqrt{n^5+3}}{n^2+1} \to -\infty$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es divergente con límite $-\infty$

b)

$$\{a_n\} = \frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \ldots + \frac{n}{2n^2+n}$$

Para un $n$ suficientemente grande se verifica:

$$\frac{1}{2n^2+1} > \frac{1}{2n^2+n} \qquad \frac{1}{2n^2+1} = \frac{1}{2n^2+1}$$

$$\frac{2}{2n^2+2} > \frac{2}{2n^2+n} \qquad \frac{2}{2n^2+2} < \frac{2}{2n^2+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{n-1}{2n^2+n-1} > \frac{n-1}{2n^2+n} \qquad \frac{n-1}{2n^2+n-1} < \frac{n-1}{2n^2+1}$$

$$\frac{n}{2n^2+n} = \frac{n}{2n^2+n} \qquad \frac{n}{2n^2+n} < \frac{n}{2n^2+1}$$

Por tanto,

$$a_n > \frac{1}{2n^2+n} + \frac{2}{2n^2+n} + \ldots + \frac{n-1}{2n^2+n} + \frac{n}{2n^2+n} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{2n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}$$

$$a_n < \frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+1} + \ldots + \frac{n-1}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+1} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{2n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}$$

Sucesión minorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{4n^2+2n}\right\}$ ; Sucesión mayorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{4n^2+2}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{4n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{4+2/n} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{4n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{4+2/n^2} = \frac{1}{4}$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = \dfrac{1}{4}$