Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 16-01-2019

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sea $r \in R$. La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es divergente a $+\infty$, si y sólo si,

a) $r > 1$ b) $r = 1$ c) $r \geq 1$ d) $r < -1$

(1p.)

2) Sea f definida en $I = [-1,1]$ tal que $f(x) = x^2$ si $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + x$ si $x \in [-1,0)$. Denotamos por J el intervalo abierto $(-1,1)$.

a) f es integrable en I y tiene primitiva en J
b) f es integrable en I pero no tiene primitiva en J
c) f no es integrable en I pero tiene primitiva en J
d) f no es integrable en I ni tiene primitiva en J

(1p.)

3) Sabiendo que $\tan(\pi/4) = 1$, $\int_0^3 \frac{1}{9+x^2} dx =$

a) $\pi/12$ b) $\pi/8$ c) $\pi/4$ d) $\pi/2$

(1p.)

4)

a) De la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se conoce que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ viene dada por $S_n = \frac{3n+1}{n+2}$ $\forall n \in N$.
Obtener a_1 y el término general a_n $\forall n \geq 2$ ¿es convergente esta serie?

b) Enunciar el segundo teorema fundamental del cálculo integral (regla de Barrow).

c) Obtener $F(x)$ definida en $[0,2]$ que sea una primitiva de la función $f(x) = |x^2 - 1|$ en $(0,2)$. Utilizar $F(x)$ para calcular la integral de $f(x)$ en $[0,2]$ sin evaluar $F(x)$ en $x = 1$.

(0.75p.+0.5p.+1p.)

Solución.

a)

$$a_1 = s_1 = 4/3$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n^2+4n+1-(3n^2+4n-4)}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \geq 2$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente a 3 ya que $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n}{1+2/n} = \frac{3}{1} = 3$

b) Si f es continua en $[a,b]$ y G es una función continua en $[a,b]$ y primitiva de f en (a,b) entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

c) Consideramos la función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ restringida al intervalo $[0,2]$

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\in[0,1)\\ x^2-1 & \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$$

f es continua en $[0,2]$. Por tanto, f es integrable en $[0,2]$ y tiene primitiva en $(0,2)$.

$$F(x)=\begin{cases}x-x^3/3+C & \text{si } x\in[0,1)\\ x^3/3-x+K & \text{si } x\in[1,2]\end{cases}\qquad C,K\in R,\quad \text{familia de primitiva de } f \text{ en } (0,2)-\{1\}$$

F es continua en $x=1$ y, por tanto, en $[0,2]$ $\Leftrightarrow$ $1-1/3+C=1/3-1+K \Leftrightarrow K-C=2-2/3=4/3$

Si $C=0$ y $K=4/3$, $F(x)=\begin{cases}x-x^3/3 & \text{si } x\in[0,1)\\ x^3/3-x+4/3 & \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$ es una primitiva de f en $(0,2)$

$$\int_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0)=\frac{8}{3}-2+\frac{4}{3}-0=2$$

5)

a) Resolver la integral impropia $\int_0^1 \log^6(x)\,dx$ que está relacionada con la función Gamma. Se sugiere hacer el cambio de variable $\log(x)=-t$

b) Calcular el área determinada por la curva $y=-\dfrac{x^3}{\sqrt{8-x^2}}$, las rectas $x=0$, $x=2$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(0.75p.+1.75p.)

$sen(\pi/6)=1/2$ $\qquad$ $sen(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ $\qquad$ $sen(\pi/4)=1/\sqrt{2}$

Solución.

a)

$$\log(x)=-t \Leftrightarrow x=g(t)=e^{-t}\quad;\quad g \text{ es inyectiva}\quad,\quad g'(t)=-e^{-t}$$

$$x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to+\infty\quad,\quad x=1\Leftrightarrow t=0$$

$$\int_0^1 \log^6(x)\,dx=-\int_{+\infty}^0 (-t)^6 e^{-t}dt=\int_0^{+\infty} t^6 e^{-t}dt=\Gamma(7)=6!=720$$

b)

Cambio de variable $x=g(t)=\sqrt{8}\,sen(t)=2\sqrt{2}sen(t)$; $g'(t)=\sqrt{8}\cos(t)$

$x=0\Leftrightarrow sen(t)=0$, elegimos $t=0$ $\qquad$ $x=2\Leftrightarrow sen(t)=1/\sqrt{2}$, elegimos $t=\pi/4$

g es inyectiva en $[0,\pi/4]$

$$A=\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{8-x^2}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{8\sqrt{8}\,sen^3(t)}{\sqrt{8-8sen^2(t)}}\sqrt{8}\cos(t)\,dt=8\sqrt{8}\int_0^{\pi/4}\frac{sen^3(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\cos(t)\,dt=8\sqrt{8}\int_0^{\pi/4}sen^3(t)\,dt=$$

$$=8\sqrt{8}\int_0^{\pi/4}sen\,(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt=8\sqrt{8}\left(\int_0^{\pi/4}sen(t)\,dt-\int_0^{\pi/4}\cos^2(t)\,sen(t)dt\right)=$$

$$=8\sqrt{8}\left(-\cos(\pi/4)+\cos(0)+\cos^3(\pi/4)/3-\cos^3(0)/3\right)=8\sqrt{8}\left(-\sqrt{2}/2+1+\sqrt{2}/12-1/3\right)=$$

$$=8\sqrt{8}\left(-5\sqrt{2}/12+2/3\right)=-40/3+32\sqrt{2}/3$$

6)

a) Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2.5^2.8^2...(3n-1)^2}{1^2.4^2.7^2...(3n-2)^2}$

b) Obtener la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{3^n}$

(1p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2.5^2.8^2\ldots(3n-1)^2.(3n+2)^2}{1^2.4^2.7^2\ldots(3n-2)^2.(3n+1)^2}\frac{1^2.4^2.7^2\ldots(3n-2)^2}{2^2.5^2.8^2\ldots(3n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2}{(3n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{9n^2+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+12/n+4/n^2}{9+6/n+1/n^2}=\frac{9}{9}=1$$

El criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{9n^2+12n+4}{9n^2+6n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^2-3n}{9n^2+6n+1}=-\frac{2}{3}<1$$

La serie es divergente a $+\infty$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ serie aritmético-geométrica convergente. La razón es $\frac{1}{3}\in(-1,1)$

Sea S la suma de la serie

$$S=5\frac{1}{3}+9\left(\frac{1}{3}\right)^2+13\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ .\ .\ .+(4n-7)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+(4n-3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+(4n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ldots$$

$$\frac{S}{3}=\qquad 5\left(\frac{1}{3}\right)^2+9\left(\frac{1}{3}\right)^3+\quad .\ .\ .\quad +(4n-7)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+(4n-3)\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ldots$$

$$S - S/3 = \frac{5}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots = \frac{5}{3} + 4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{3} + 4\left(\frac{1/3}{1-1/3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{3}S = \frac{7}{3} \iff S = \frac{7}{2}$$