Tema 2

Cálculo integral de funciones de una variable

Contenido

2.1. Integral indefinida

2.1.1. Primitiva de una función

En lo que sigue f es una función real de variable real.

Definición 2.1.1 (Primitiva de una función) *Se llama primitiva de f a una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \operatorname{Dom} f$.*

Observación

Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Si F es una primitiva de f, entonces la función $G(x) = F(x) + c$ también es una primitiva de f.

Definición 2.1.2 (Integral indefinida de una función) *Se llama integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas; se denota*

$$\int f(x)dx.$$

Si F es una primitiva arbitraria de f, entonces

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.1.3 (Linealidad de la integral) *Sean f y g funciones reales de variable real y k una constante. Entonces*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \text{y} \qquad \int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx.$$

2.1.2. Técnicas de integración

Cambio de variable

Teorema 2.1.4 (Cambio de variable) *Sea ϕ una función con derivada ϕ' continua y que admite inversa, y sea f una función continua. Entonces, haciendo $x = \phi(t)$, se tiene*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Observación

Al utilizar el cambio de variable se intenta transformar la integral en otra que sea más sencilla de calcular. Una vez resuelta esta integral en la nueva variable t se deshace el cambio de variable para obtener el resultado de la integral de partida.

Integración por partes

Teorema 2.1.5 (Integración por partes) *Sean u y v funciones derivables. Entonces*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Observación

El resultado anterior suele expresarse abreviadamente de la forma

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Integrales de funciones racionales

Se trata de integrar funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Supondremos que P y Q no tienen raíces comunes y que el grado de P es menor estrictamente que el grado de Q (si no es así se divide P entre Q).

Se puede demostrar que un cociente de polinomios se puede descomponer en suma de fracciones simples; esta descomposición depende de las raíces del denominador Q:

- Por cada raíz real simple α se escribe un sumando de la forma:

$$\frac{A}{x-\alpha}$$

- Por cada raíz real α de multiplicidad n se escriben n sumandos de la forma:

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

- Por cada par de raíces complejas simples $\alpha = a + ib$ y $\bar{\alpha} = a - ib$ se escribe un sumando de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+rx+s}$$

  donde $x^2 + rx + s = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 + b^2$.

- Por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha = a+ib$ y $\bar{\alpha} = a-ib$ de multiplicidad n se escriben n sumandos de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+rx+s} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+rx+s)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+rx+s)^n}$$

  donde $x^2 + rx + s = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 + b^2$. La resolución de este tipo de integrales no se incluye en este curso.

En los dos primeros casos las integrales que resultan de la descomposición son directas. En el tercer caso la integral se trasforma de manera que el resultado es suma de una función logaritmo y de una función arcotangente.

Integrales de funciones trigonométricas

- Funciones del tipo
$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx,$$
donde R es una función racional.
  - Cambio de variable universal: se reducen a una integral racional con el cambio de variable:
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
Al hacer este cambio se tiene
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$
  - En algunos casos existen cambios de variable más sencillos para reducir la integral a una integral racional:
    - Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ (R impar en $\operatorname{sen} x$):
$$t = \cos x.$$
    - Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ (R impar en $\cos x$):
$$t = \operatorname{sen} x.$$
    - Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ (R par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$):
$$t = \operatorname{tg} x.$$
    Al hacer este cambio se tiene
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$
- Integrales del tipo
$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx \quad \text{y} \quad \int \cos^n x\, dx,$$
con n exponente positivo par. Se utilizan las fórmulas
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$
- Integrales de los tipos
$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx, \qquad \int \cos ax \cos bx\, dx.$$
Se aplican las fórmulas:
$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$
$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B))$$

Integrales de funciones irracionales cuadráticas

Denotamos por R una función racional.

- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$. Se realiza el cambio $x = a \operatorname{sen} t$ o $x = a \cos t$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$. Se realiza el cambio $x = a \operatorname{tg} t$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$. Se realiza el cambio $x = a \sec t$.

2.2. Integral definida

La integral definida es un concepto matemático que da respuesta al problema de calcular el área de una región plana limitada por una curva.

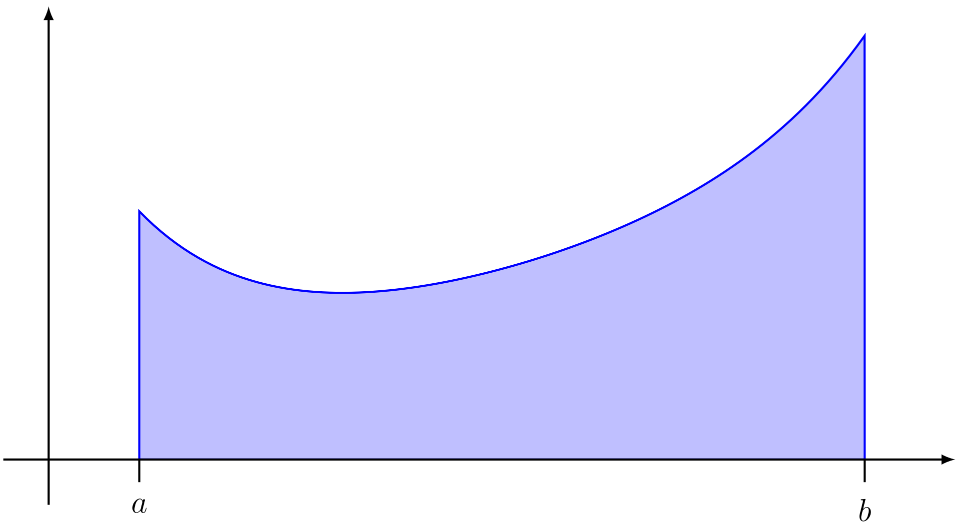

Figura 2.1: Una región plana limitada por una curva.

2.2.1. Integral de Riemann

Definición 2.2.1 (Partición) *Una partición P de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado de la forma*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

Sean P_1 y P_2 son dos particiones de $[a, b]$. Se dice que P_1 es más fina que P_2 si $P_2 \subset P_1$.

Por simplicidad, en lo que sigue f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ (en general, es suficiente con que la función f sea acotada en el intervalo $[a, b]$).

Puesto que f es continua en $[a, b]$, entonces también es continua en cualquier subintervalo de $[a, b]$, es decir, para cualquier $[x_{i-1}, x_i]$ existen números reales m_i y M_i tales que

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad \text{para cualquier } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

En lo que sigue $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$.

Definición 2.2.2 (Suma superior y suma inferior) *Se llama suma superior de f relativa a la partición P a la suma*

$$S(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

Se llama suma inferior de f relativa a la partición P a la suma

$$s(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

Observación

Sea A el área de la región encerrada por la gráfica de una función positiva f entre a y b y el eje de abscisas.

Cada uno de los sumandos que aparece en la suma superior representa el área de un rectángulo de base $x_i - x_{i-1}$ y altura M_i. Lo mismo ocurre en la suma inferior pero, en este caso, la altura es m_i. El valor de la suma de las áreas de estos rectángulos constituye una aproximación del área A. Es claro que cuanto más fina sea la partición P mejor es la aproximación del área. Se puede demostrar que

$$s(f, P) \leq A \leq S(f, P)$$

para cualquier partición P del intervalo $[a, b]$.

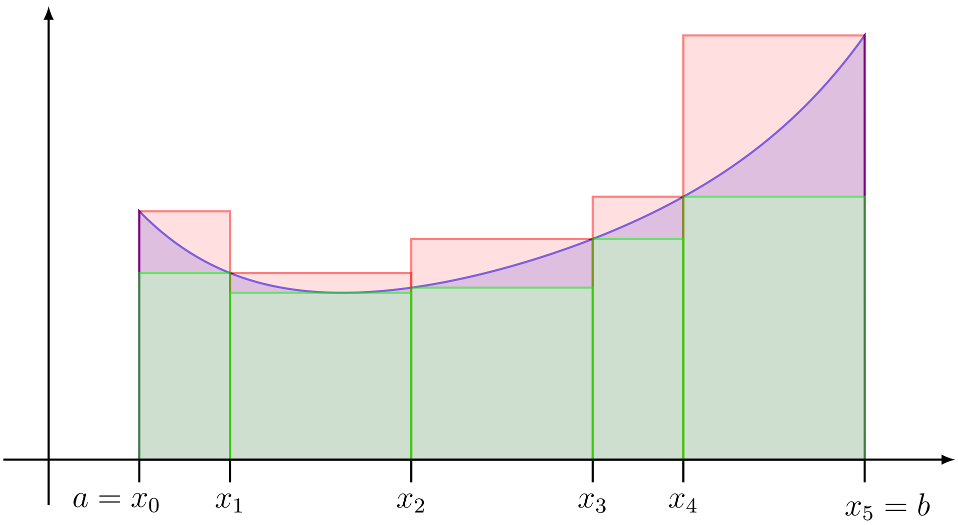

Figura 2.2: Suma inferior y suma superior asociadas a una partición.

Definición 2.2.3 (Función integrable) *Se dice que f es integrable en $[a,b]$ si existe un único número real I tal que*

$$s(f,P) \leq I \leq S(f,P)$$

para cualquier partición P del intervalo $[a,b]$. Al valor de I se le llama integral definida de f en $[a,b]$ y se denota

$$\int_a^b f \qquad o \qquad \int_a^b f(x)dx.$$

Proposición 2.2.4 *f es integrable en $[a,b]$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe P_ε una partición del intervalo tal que*

$$S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Proposición 2.2.5 *Si f es monótona en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$.*

Proposición 2.2.6 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$.*

Proposición 2.2.7 (Linealidad de la integral definida) *Sean f y g integrables en $[a,b]$ y sea k una constante real. Entonces $f+g$ y kf son integrables en $[a,b]$ y además,*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad y \qquad \int_a^b k\,f = k\int_a^b f.$$

Propiedades de la integral definida

Sean f y g integrables en $[a,b]$. Se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- f es integrable en cualquier subintervalo de $[a,b]$.
- $f \cdot g$ es integrable en $[a,b]$.
- $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$
- Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$
En particular, si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f \geq 0.$$

Proposición 2.2.8 *Si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y se verifica*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Observación

Por convenio:

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Teorema 2.2.9 (Teorema del valor promedio) *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

A $f(c)$ se le llama valor promedio de f en $[a,b]$.

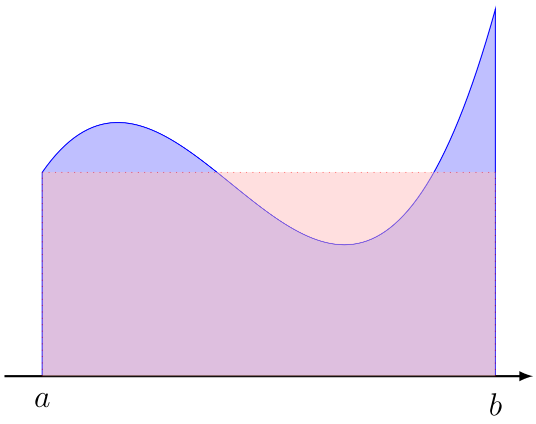

Figura 2.3: Interpretación geométrica del Teorema del valor promedio.

2.2.2. El teorema fundamental del Cálculo

La función integral

Sea f una función integrable en $[a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,x]$ para cualquier $x \in [a,b]$. Llamaremos función integral a la función

$$\begin{array}{rccl} F: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & F(x) = \int_a^x f \end{array}$$

Teorema 2.2.10 (Teorema fundamental del Cálculo)

1. *La función integral F es continua en $[a,b]$.*
2. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función integral F es derivable en $[a,b]$ y en este intervalo*

$$F'(x) = f(x).$$

Observación

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que toda función continua posee primitiva, ya que la correspondiente función integral es una primitiva de la función.

Teorema 2.2.11 (Regla de Barrow) *Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea G una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Observaciones

- La regla de Barrow suele escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b.$$

- Como consecuencia de la regla de Barrow, para calcular la integral definida de una función basta encontrar una primitiva de esta función.

Teorema 2.2.12 (Cambio de variable) *Sea ϕ una función con derivada ϕ' continua en $[\alpha,\beta]$, con $\phi(\alpha) = a$ y $\phi(\beta) = b$. Entonces, haciendo $x = \phi(t)$, se tiene*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Teorema 2.2.13 (Integración por partes) *Sean u y v funciones con derivada continua. Entonces*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Observación

El resultado anterior suele expresarse abreviadamente de la forma

$$\int_a^b u\,dv = [u\,v]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

2.3. Integrales impropias

La integral de Riemann se definió para funciones acotadas en intervalos de la forma $[a,b]$. En esta sección extenderemos el concepto de integral definida para funciones no acotadas o que están definidas en intervalos no acotados.

Definición 2.3.1 (Integral impropia) *Se dice que la integral* $\int_a^b f$ *es impropia si el intervalo de integración es no acotado o si la función* f *no está acotada en el intervalo de integración.*

2.3.1. Integrales impropias de primera especie

Definición 2.3.2 (Integral impropia de primera especie) *Diremos que una integral impropia* $\int_a^b f$ *es de primera especie si el intervalo de integración es no acotado, es decir, si es de la forma*

$$\int_a^{+\infty} f\,, \qquad \int_{-\infty}^{b} f\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f\,.$$

Se definen:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx,$$

donde c *es un número real arbitrario.*

Definición 2.3.3 (Integral convergente, divergente y oscilante) *Se dice que una integral impropia de primera especie es:*

- *convergente, si el límite que la define existe y es un número real,*
- *divergente, si el límite que la define es infinito,*
- *oscilante o que no tiene sentido, si el límite que la define no existe.*

Proposición 2.3.4 (Criterio de convergencia o divergencia) *Consideramos la integral*

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

donde f *es una función acotada y no negativa en el interavalo* $[a, +\infty)$*. Además, Supongamos que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x^{\lambda}}\right)} = K.$$

Entonces:

- I *es convergente, si* $K \neq +\infty$ *y* $\lambda > 1$*,*
- I *es divergente, si* $K \neq 0$ *y* $\lambda \leq 1$*.*

2.3.2. Integrales impropias de segunda especie

Definición 2.3.5 (Integral impropia de segunda especie) *Diremos que una integral impropia* $\int_a^b f$ *es de segunda especie si* f *no está acotada en el intervalo de integración. Se definen:*

- *Si* f *no está acotada en ningún entorno de* a*:*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$
- *Si* f *no está acotada en ningún entorno de* b*:*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$
- *Si* f *no está acotada en ningún entorno de un punto* $c \in (a,b)$*:*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx.$$
- *Si* f *no está acotada en ningún entorno de* a *ni de* b*: sea* $c \in (a,b)$ *cualquiera tal que* f *está acotada en un entorno de* c*; entonces*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)dx.$$

Definición 2.3.6 (Integral convergente, divergente y oscilante) *Se dice que una integral impropia de segunda especie es:*

- *convergente, si el límite que la define existe y es un número real;*
- *divergente, si el límite que la define es infinito;*
- *oscilante o que no tiene sentido, si el límite que la define no existe.*

Proposición 2.3.7 (Criterio de convergencia o divergencia) *Consideramos la integral*
$$I = \int_a^b f(x)dx,$$
donde f *es una función no negativa definida en el interavalo* (a,b)*, con* $f(a) = +\infty$ *o* $f(b) = +\infty$*. Además, Supongamos que*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{(x-a)^\lambda}\right)} = K, \qquad si\ f(a) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{(b-x)^\lambda}\right)} = K, \qquad si\ f(b) = +\infty.$$

Entonces:

- *I es convergente, si $K \neq +\infty$ y $\lambda < 1$,*
- *I es divergente, si $K \neq 0$ y $\lambda \geq 1$.*

Cualquier integral impropia se puede descomponer en suma de integrales impropias de primera o segunda especie o suma de ambas. La integral es convergente cuando lo son todas las integrales de primera o segunda especie en que se descompone.

2.3.3. Funciones definidas mediante integrales

La función Γ de Euler

Definición 2.3.8 *Se llama función Γ (gamma) de Euler a la función definida por la integral impropia*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$

Se puede demostrar que esta integral es convergente para cualquier valor de $p > 0$, por tanto $\operatorname{Dom} \Gamma = (0, +\infty)$.

Propiedades de la función Γ

- Si $p > 0$, entonces $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.
- Si $p \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(p) = (p-1)!$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Si $0 < p < 1$, entonces $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$.

La función B de Euler

Definición 2.3.9 *Se llama función B (beta) de Euler a la función definida por la integral impropia*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0.$$

Se puede demostrar que esta integral es convergente para todos los valores de $p, q > 0$.

Propiedades de la función B

Para $p, q > 0$ cualesquiera:

- $B(p,q) = B(q,p)$.

- $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
- $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx$.

2.4. Aplicaciones de la integral

2.4.1. Cálculo de áreas de regiones planas

- Sea A el área de la región limitada por la gráfica de una función f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces,
$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$
- Sea A el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces,
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Observación

Las fórmulas anteriores también son válidas si $a = +\infty$ o $b = -\infty$.

2.4.2. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

Se trata de calcular el volumen de un sólido generado al girar una región plana alrededor de uno de los ejes coordenados.

Giro alrededor del eje OX

Sea V el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX la región limitada por la gráfica de una función f y el eje OX entre a y b. Entonces,
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Giro alrededor del eje OY

- Por discos: sea V el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OY la región limitada por la gráfica de una función f inyectiva en $[a,b]$, y el eje OY entre α y β. Entonces,
$$V = \pi \int_\alpha^\beta (f^{-1}(x))^2 dx,$$

donde $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$ si f es creciente en $[a, b]$; y $\alpha = f(b)$ y $\beta = f(a)$ si f es decreciente en $[a, b]$.

- Por tubos: sea V el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OY la región limitada por la gráfica de una función f y el eje OX entre a y b. Entonces,

$$V = 2\pi \int_a^b |xf(x)|dx.$$

Observación

Las fórmulas anteriores también son válidas si $a = +\infty$ o $b = -\infty$.