Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 04-12-2020

En las preguntas tipo test hay que contestar razonadamente, al igual que en el resto de preguntas. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sea $A=\left\{x\in R \,/\, \left|\dfrac{4}{x^2-1}\right|\le 2\right\}$ y sea $I=\text{Infimo}(A)$, $S=\text{Supremo}(A)$

a) $I=\sqrt{3}$, no existe S b) no existen c) no existe I, $S=-\sqrt{3}$ d) ninguna de las anteriores

(1.2p.)

Solución.

$$\left|\frac{4}{x^2-1}\right|\le 2 \Leftrightarrow \frac{4}{\left|x^2-1\right|}\le 2 \Leftrightarrow \frac{\left|x^2-1\right|}{4}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left|x^2-1\right|\ge 2 \Leftrightarrow x^2-1\ge 2 \text{ o } x^2-1\le -2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\ge 3 \text{ o } x^2\le -1 \Leftrightarrow x^2\ge 3\Leftrightarrow |x|\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge\sqrt{3} \text{ o } x\le-\sqrt{3}$$

$A=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$ es un conjunto no acotado superiormente ni inferiormente. Por tanto, no existe el ínfimo ni el supremo de A. La respuesta correcta es la b).

De otra forma (más largo y más complicado seguramente)

$$\left|\frac{4}{x^2-1}\right|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\frac{4}{x^2-1}\le 2\Leftrightarrow -1\le\frac{2}{x^2-1}\le 1$$

Sean $B=\left\{x\in R \,/\, \dfrac{2}{x^2-1}\le 1\right\}$, $C=\left\{x\in R \,/\, -1\le\dfrac{2}{x^2-1}\right\}$ $\Rightarrow A=B\cap C$

Si $x\in(-1,1) \Rightarrow x^2-1<0 \Rightarrow \dfrac{2}{x^2-1}<0 \Rightarrow x\in B$

Si $x>1$ ó $x<-1 \Rightarrow x^2-1>0$. En este caso, $\dfrac{2}{x^2-1}\le 1\Leftrightarrow 2\le x^2-1\Leftrightarrow x^2\ge 3\Leftrightarrow x\ge\sqrt{3}$ ó $x\le-\sqrt{3}$

Por tanto, $B=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup(-1,1)\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

Si $x>1$ ó $x<-1 \Rightarrow x^2-1>0 \Rightarrow \dfrac{2}{x^2-1}>0 \Rightarrow x\in C$

Si $x\in(-1,1) \Rightarrow x^2-1<0$. En este caso, $-1\le\dfrac{2}{x^2-1}\Leftrightarrow -x^2+1\ge 2\Leftrightarrow -x^2\ge 1\Leftrightarrow x^2\le -1$ (imposible)

Por tanto, $C=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Así pues, $A=B\cap C=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

2) Sea g una función real definida en D y sea f tal que $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2+1}\quad x\in D$. Se verifica:

a) f es acotada en D b) f tiene alguna asíntota horizontal
c) f no tiene ninguna asíntota vertical d) ninguna de las anteriores

(1.2p.)

Solución.

Si elegimos $g(x)=x^3$ entonces $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}\quad x\in R$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Por tanto, la función f no es acotada superiormente ni inferiormente y no tiene ninguna asíntota horizontal. Descartamos las opciones a) y b).

Si elegimos $g(x)=\log(x)$ entonces $f(x)=\dfrac{\log(x)}{x^2+1}\quad x>0$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(x)}{x^2+1}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$ la recta $x=0$ es asíntota vertical por la derecha de f.

Descartamos también la opción c). La respuesta correcta es la d).

3)
a) Sea $f:D\subset R\ \to\ R$ una función real de variable real. Definir, con lenguaje matemático, cuando f es inyectiva en su dominio D y cuando es estrictamente decreciente en un subconjunto $S\subset D$.

b) Enunciar el teorema de Rolle y un corolario de este teorema que nos sirva para obtener el número máximo de ceros reales de una función f.

c) Determinar, usando el corolario anterior, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=2\log(x)-\dfrac{1}{x-1}$ ¿cuántos ceros reales tiene exactamente f? Separarlos en intervalos de longitud 1.

(0.5 p.+0.6 +1.2p.)

Solución.

a)

f es *inyectiva en* $D \Leftrightarrow: \forall x_1,x_2\in D\ /\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

f es estrictamente decreciente en $S\subset D\ \Leftrightarrow:\ \forall x_1,x_2\in S\ /\ x_1<x_2\ \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

b)
Teorema de Rolle.

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$, es decir, la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(c,f(c))$ es paralela al eje de abscisas.

Como consecuencia (corolario) de este teorema se deduce que si f es derivable en R y $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in R$ entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz real. Análogamente en un intervalo (a,b).

c) $f(x)=2\log(x)-\dfrac{1}{x-1}=g(x)-h(x)$ siendo $g(x)=2\log(x)$ y $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$Dom\, g=(0,+\infty)\ ,\ Dom\, h=R-\{1\}\ \Rightarrow\ Dom\, f=Dom\, g\cap Dom\, h=(0,1)\cup(1,+\infty)=D$$

Las funciones g y h son continuas y derivables en sus dominios respectivos; por tanto, la función f (diferencia de las dos anteriores) es continua y derivable en su dominio D.

Si $x\in D$, $f'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Nótese que $\dfrac{2}{x}$ es mayor que cero $\forall x\in D$ y $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ también lo es. Por tanto, $f'(x)>0$ $\forall x\in D$

Así pues, los intervalos de monotonía de f son $(0,1)$ y $(1,+\infty)$. En cada uno de estos intervalos, la función f es derivable y la derivada es siempre distinta de cero. Aplicando el corolario del teorema de Rolle enunciado anteriormente, resulta que el número máximo de ceros reales de f es 2 (uno, a lo sumo, en cada intervalo).

En el intervalo $(0,1)$ la función f es continua. Además,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2(-\infty)-(-1)=-\infty+1=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=0-(-\infty)=+\infty$$

El teorema de Bolzano (versión generalizada) nos garantiza que en el intervalo $(0,1)$ la función f tiene, al menos, un cero. Así pues, en el intervalo $(0,1)$ la función f tiene exactamente un cero.

En el intervalo $(1,+\infty)$ la función f es continua. Además,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0-(+\infty)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty-0=+\infty$$

El teorema de Bolzano (versión generalizada) nos garantiza que en el intervalo $(1,+\infty)$ la función f tiene, al menos, un cero. Así pues, en el intervalo $(1,+\infty)$ la función f tiene exactamente un cero.

En consecuencia, la función tiene exactamente dos ceros reales.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty \ ,\ f(2)=2\log(2)-1>0$$

Los dos ceros reales están separados en los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$

4) Sea f la función real definida en el intervalo cerrado $I=[-2,3]$ de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} |x|\text{-}1 & \text{si} \quad x\in[-2,1] \\ 4(x-1)\,e^{-x} & \text{si} \quad x\in(1,3] \end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar la derivabilidad de f en $c=0$ y $c=1$.

b) Obtener $f\,'(x) \quad \forall x\in(-2,3)$ donde f sea derivable y determinar razonadamente los puntos críticos de f en I.

c) Enunciar el teorema de Weiertrass ¿Existe $m=$ mínimo de $f(x)$, si $x\in I$? ¿Existe M = máximo de $f(x)$, si $x\in I$? obténganse, en su caso.

(0.8 p.+1p. +1p.)

Solución.

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x\in[-2,0] \\ x-1 & \text{si} \quad x\in[0,1] \\ 4(x-1)e^{-x} & \text{si} \quad x\in(1,3] \end{cases}$$

a) f es derivable por la izquierda en $c=0$, por definición, si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-1-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

f es derivable por la derecha en $c=0$, por definición, si existe y es finto el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-1-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^{i+}}\frac{h}{h}=1$$

Hemos obtenido que f es derivable por la izquierda ($f\,'(0^-)=-1$) y por la derecha ($f\,'(0^+)=1$) en $c=0$. Por ser las derivadas laterales distintas, resulta que f no es derivable en $c=0$.

Veamos ahora si f es derivable por la izquierda y por la derecha en $c=1$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+h-1-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4(1+h-1)\,e^{-1-h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h\,e^{-1-h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}4e^{-1-h}=4e^{-1}=\frac{4}{e}$$

Hemos obtenido que f es derivable por la izquierda ($f\,'(1^-)=1$) y por la derecha ($f\,'(1^+)=4/e$) en $c=1$. Por ser las derivadas laterales distintas, resulta que f no es derivable en $c=1$.

b)

La función $f(x)$ es derivable $\forall x\in(-2,0)$ por ser una función polinomica y $f\,'(x)=-1$. Análogamente, es derivable $\forall x\in(0,1)$ y $f\,'(x)=1$. También es derivable $\forall x\in(1,3)$ por ser producto de una función polinomica por una exponencial y $f\,'(x)=4e^{-x}-4(x-1)e^{-x}=4e^{-x}(2-x)$

$$f\,'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in(-2,0)\\ 1 & \text{si } x\in(0,1)\\ 4e^{-x}(2-x) & \text{si } x\in(1,3)\end{cases}\qquad f\,'(x)=0\Leftrightarrow 4e^{-x}(2-x)=0\,/\; x\in(1,3)\Leftrightarrow x=2$$

Los puntos críticos de f en I son -1 y 3 (puntos frontera del intervalo), 0 y 1(puntos interiores al intervalo donde la función f no es derivable) y 2 (punto interior donde la derivada se anula).

c) Teorema de Weiestrass.

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en algún punto de dicho intervalo, es decir, existen x_1 , $x_2\in[a,\mathrm{b}]$ tales que $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ $\forall x\in[a,b]$. El mínimo sería $m=f(x_1)$ y el máximo $M=f(x_2)$

La función f dada es continua en $c=0$ y $c=1$ ya que es derivable tanto por la izquierda como por la derecha en ambos puntos. Por tanto, es continua en $I=[-2,3]$. El teorema de Weiertrass nos garantiza que existen el mínimo m y el máximo M de $f(x)$, si $x\in I$. Para obtenerlos es suficiente con evaluar la función en cada uno de los puntos críticos.

$$f(-2)=1\,,\qquad f(3)=8e^{-3}<1\,,\qquad f(0)=-1,\qquad f(1)=0\,,\qquad f(2)=4e^{-2}<1$$

$m=-1$ (se alcanza en $x=0$) $\qquad$ $M=1$(se alcanza en $x=-2$)

5)
a) Razonar la certeza o falsedad de la siguiente afirmación: *el producto de una sucesión oscilante por otra convergente a cero da como resultado una sucesión convergente a cero*.

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\} = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} + ... + \frac{n+n-1}{n+n}$ es estrictamente creciente y divergente a $+\infty$(encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$).

(1 p.+1.5 p.)

Solución.

a) La afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$\{a_n\} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{sucesión oscilante (no acotada)}, \quad \{b_n\} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\{a_n\, b_n\} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{sucesión oscilante}$$

b)

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} + \frac{n+2}{n+3} + ... + \frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} - ... - \frac{2n-1}{2n} =$$

$$= \frac{2n}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > 0 \qquad \forall n$$

$$a_n \geq \frac{n}{n+n} + \frac{n+1}{n+n} + ... + \frac{n+n-1}{n+n} = \frac{n^2 + 1 + 2 + ... + n-1}{2n} = \frac{n^2 + n(n-1)/2}{2n} = \frac{3n^2 - n}{4n} \to +\infty$$