EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-01-2021

En las preguntas tipo test hay que contestar razonadamente, al igual que en el resto de preguntas. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$

a) converge a 0 b) converge a $-\log(2)$ c) converge a $\log(2)$ d) es divergente

(1.5p.)

2) Si f es continua en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ entonces

a) $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ b) $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ c) $\exists x \in [a,b] \ / \ f(x) = 0$ d) ninguna de las anteriores

(1.25p.)

3)

a) ¿Cuándo se dice que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo (a,b)?

Sea $f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x \geq 0 \\ (2x)/(x^2+1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ¿Cuántas primitivas tiene en R la función $f(x)$ dada? Razónese.

b) Sea f una función continua en $[a,b]$. Definir la llamada "función integral" de la función f y enunciar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

c) Sea $f(x) = \begin{cases} x/(x-2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \log(x^2+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Obtener una función $F(x)$ que sea una primitiva de $f(x)$ en R y usarla para calcular la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$, sin utilizar $F(0)$.

(0.5p.+0.5 p.+1.5p.)

4)

a) Resolver la siguiente integral, relacionada con la función Gamma, mediante un cambio de variable.

$$\int_0^{+\infty} 4x^2 e^{-x^2}\,dx$$

b) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y = x\sqrt{9-x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x=-3$ y $x=3$. Aplicar el teorema del cambio de variable en la integral definida mediante un cambio trigonométrico.

(1p.+1.5p.)

5)

a) Enunciar una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente. Justificar el resultado.

b) Estudiar el carácter de las series siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$$

(0.75p.+1.5p.)

Nota.

En ningún caso se puede aplicar la regla de L' Hopital en límites de sucesiones.