Tema 3

Sucesiones y series. Series de potencias

Contenido

3.1. Sucesiones

3.1.1. Sucesiones de números reales

Definición 3.1.1 (Sucesión) *Una sucesión de números reales es una aplicación*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a un número natural n *un número real* $a(n)$.

Denotaremos $a(n) = a_n$ para cada número natural n. Identificaremos la sucesión con el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que denotaremos por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{a_n\}$.

La sucesiones pueden venir definidas por el término general; por ejemplo, $a_n = 2n$ es el término general de la sucesión $\{2, 4, 6, ...\}$.

Definición 3.1.2 (Límite de una sucesión) *Se dice que el límite de una sucesión* $\{a_n\}$ *es* l *si para cada número real* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* n_0 *(que depende de* ε*) tal que si* $n > n_0$*, entonces* $|a_n - l| < \varepsilon$*. Se denota*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad o \qquad \lim_n a_n = l.$$

Definición 3.1.3 (Sucesión convergente) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice convergente si su límite es un número real, es decir,*

$$\lim_n a_n = l \in \mathbb{R}.$$

Definición 3.1.4 (Sucesión divergente) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice divergente con límite* $+\infty$ *si para cada número real* $M > 0$ *existe un número natural* n_0 *(que depende de* M*) tal que si* $n > n_0$*, entonces* $a_n > M$*. Se denota*

$$\lim_n a_n = +\infty.$$

Una sucesión $\{a_n\}$ *se dice divergente con límite* $-\infty$ *si para cada número real* $M > 0$ *existe un número natural* n_0 *(que depende de* M*) tal que si* $n > n_0$*, entonces* $a_n < -M$*. Se denota*

$$\lim_n a_n = -\infty.$$

Teorema 3.1.5 *El límite de una sucesión, si existe, es único.*

Teorema 3.1.6 *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión. Entonces,* $\lim_n a_n = 0$ *si, y sólo si,* $\lim_n |a_n| = 0$.

Definición 3.1.7 (Sucesión acotada) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice acotada si existen números reales* a *y* b *tales que*

$$a \leq a_n \leq b, \quad \textit{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.1.8 (Sucesión creciente, decreciente y monótona) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice creciente si*

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \textit{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Una sucesión $\{a_n\}$ *se dice decreciente si*

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \textit{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Una sucesión se dice monótona si es o bien creciente o bien decreciente.

Teorema 3.1.9 *Si una sucesión es monótona y acotada, entonces es convergente.*

3.1.2. Cálculo de límites de sucesiones

Propiedades de los límites

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera y sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales tales que

$$\lim_n a_n = l_1 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_n b_n = l_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

- $\lim_n \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot l_1$,
- $\lim_n (a_n + b_n) = l_1 + l_2$,
- $\lim_n a_n \cdot b_n = l_1 \cdot l_2$,
- $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$.

Observación

Las propiedades anteriores se pueden generalizar al caso de sucesiones divergentes sin más que aplicar los conceptos correspondientes. Por ejemplo, si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$.

Teorema 3.1.10 *Sea f una función continua en I. Sea $\{a_n\} \subset \mathrm{Dom} f$ tal que $\lim_n a_n \in I$. Entonces,*

$$\lim_n f(a_n) = f\left(\lim_n a_n\right).$$

Observación

Algunos casos particulares del teorema anterior son:

- $\lim_n e^{a_n} = e^{\lim_n a_n}$.
- $\lim_n \ln a_n = \ln\left(\lim_n a_n\right)$.
- $\lim_n {a_n}^{b_n} = \lim_n a_n^{\lim_n b_n}$ ($a_n > 0$ para cualquier $n \geq 1$, $\lim_n b_n \neq 0$ y $\lim_n a_n > 0$).

Indeterminaciones

Al efectuar el cálculo de límites aparecen en ocasiones expresiones cuyo valor es desconocido, es decir, el cálculo del límite no es inmediato utilizando las propiedades anteriores y requiere la utilización de otro tipo de técnicas. Estas expresiones se llaman indeterminaciones, y se representan abreviadamente mediante los símbolos:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad \infty-\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

Teorema 3.1.11 *Sea $f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ (l puede ser $\pm\infty$). Entonces,*

$$\lim_n f(n)=l.$$

Observación

El teorema anterior nos permite utilizar la regal de L'Hôpital para resolver algunos casos de indeterminación en el cálculo de límites de sucesiones. Por ejemplo, para calcular

$$\lim_n \frac{\ln n}{n}$$

podemos considerar el límite de la función

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Y por tanto

$$\lim_n \frac{\ln n}{n}=0.$$

Infinitésimos

Definición 3.1.12 (Infinitésimo) *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es un infinitésimo si*

$$\lim_n a_n=0.$$

Definición 3.1.13 (Infinitésimos equivalentes) *Se dice que dos infinitésimos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n}=1.$$

Se denota $a_n\sim b_n$ o también $\{a_n\}\sim\{b_n\}$.

Teorema 3.1.14 *El producto de una sucesión acotada por un infinitésimo es un infinitésimo.*

Si a_n es un infinitésimo, entonces:

- $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$
- $\operatorname{tg} a_n \sim a_n$
- $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$
- $\ln(1 + a_n) \sim a_n$
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$

Además, si $\lim\limits_n a_n = 1$, entonces $a_n - 1$ es un infinitésimo, y $a_n - 1 \sim \ln a_n$.

Teorema 3.1.15 (Principio de sustitución) *Si $a_n \sim b_n$, entonces*

$$\lim_n a_n \cdot c_n = \lim_n b_n \cdot c_n \qquad y \qquad \lim_n \frac{c_n}{a_n} = \lim_n \frac{c_n}{b_n}\,.$$

Observación

Una sucesión se dice que es un infinito si es divergente. La comparación de infinitos en el caso de las sucesiones es análogo al realizado en su momento para funciones que son infinitos en un punto.

Teorema 3.1.16 (Criterio de Stolz) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que*

- $\lim\limits_n a_n = 0$ *y* $\{b_n\}$ *es monótona y* $\lim\limits_n b_n = 0$;

o

- $\{b_n\}$ *es monótona y es divergente.*

Entonces, si existe $\lim\limits_n \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$, *entonces también existe* $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Progresiones aritméticas y geométricas

- Se llama progresión aritmética a una sucesión de la forma

  $$a_{n+1} = a_n + d, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}, \quad d \text{ constante.}$$

  Por tanto

  $$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

  A la constante d se le llama distancia. Se puede demostrar que la suma s_n de los n primeros términos de una progresión aritmética es

  $$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\,.$$

- Se llama progresión geométrica a una sucesión de la forma

$$a_{n+1} = ra_n, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}, \quad r \text{ constante.}$$

Por tanto

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

A la constante r se le llama razón. Se puede demostrar que la suma s_n de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $r \neq 1$ es

$$s_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}.$$

3.2. Series

3.2.1. Series de números reales

Definición 3.2.1 (Serie) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La suma*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

se llama suma parcial n-ésima de la sucesión.

Se llama serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ a la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$. La serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ se denota

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Se dice que a_n es el término general de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definición 3.2.2 (Serie convergente, divergente y oscilante) *Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si existe $\lim_n s_n = s$. El límite s se dice que es la suma de la serie y se denota*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es divergente.

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es oscilante si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no tiene límite.

Observación

El carácter de una serie no varía si prescindimos de una cantidad finita de términos, pero sí varía la suma en el caso de que sea convergente, i.e., para cualquier $k \in \mathbb{N}$ fijo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ es convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ es convergente;}$$

pero, en general,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \neq \sum_{n=k}^{+\infty} a_n.$$

Teorema 3.2.3 (Condición necesaria de convergencia) *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim_n a_n = 0$.

Series geométricas

Una serie geométrica es una serie asociada a una progresión geométrica. Si $\{a_n\}$ es una progresión geométrica de razón $r \neq 1$, se tiene que

$$s_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$a_n = a_1 r^{n-1},$$

podemos escribir

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}.$$

- Si $|r| < 1$, entonces $r^n \to 0$ y $s_n \to \dfrac{a_1}{1-r}$. Por tanto, en este caso la serie es convergente y su suma es
$$s = \frac{a_1}{1 - r}\,.$$
- Si $r > 1$, entonces $r^n \to +\infty$ y la serie diverge.
- Si $r < -1$, entonces la serie es oscilante (y no acotada).
- Si $r = 1$ la serie es divergente puesto que, en este caso, $s_n = n\,a_1$.
- Si $r = -1$ la serie es oscilante puesto que, en este caso, $s_n = a_1 - a_1 + a_1 - \cdots - a_1 = 0$ si n es par y $s_n = a_1 - a_1 + a_1 - \cdots + a_1 = a_1$ si n es impar.

Operaciones con series

- Si las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ también es convergente y además
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$
- Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n$ es convergente y además
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

3.2.2. Series de términos positivos

En esta sección consideraremos series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de términos positivos, es decir, $a_n \geq 0$, para cualquier $n \geq 1$.

Propiedades

- Las series de términos positivos son convergentes o bien divergentes a $+\infty$ pero no pueden ser nunca oscilantes.
- Se puede alterar el orden de los términos de una serie de términos positivos sin que varíe el carácter de la serie ni su suma.

La serie armónica generalizada

Proposición 3.2.4 (Criterio de la integral) *Si $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ monótona decreciente, son equivalentes:*

- $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *es convergente,*
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente.*

Se llama serie armónica generalizada a la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Se puede demostrar:

- La serie converge si $p > 1$.
- La serie diverge si $p \leq 1$.

Criterio general de comparación

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ series de términos positivos tales que

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces,

- Si $0 \leq L < +\infty$: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
- Si $0 < L \leq +\infty$: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente.

Criterio del cociente

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Entonces,

- Si $l < 1$, la serie es convergente.
- Si $l > 1$, la serie es divergente.
- Si $l = 1$, el criterio no decide.

Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$. Entonces,

- Si $l < 1$, la serie es convergente.
- Si $l > 1$, la serie es divergente.
- Si $l = 1$, el criterio no decide.

Observación

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, entonces

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty] \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L.$$

3.2.3. Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ es convergente.

Se puede demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente, es decir, si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también es convergente.

El resultado anterior permite aplicar los criterios para series de términos positivos a series arbitrarias.

3.2.4. Series alternadas

Teorema 3.2.5 (Criterio de Leibniz) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos decreciente tal que $\lim_n a_n = 0$. Entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

es convergente. Además, si denotamos por S su suma y por $\{S_n\}_n$ la sucesión de sumas parciales, se cumple lo siguiente:

$$S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}, \qquad |S_n - S| < a_{n+1}, \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3.3. Series de potencias

3.3.1. Series de potencias

Definición 3.3.1 *Una serie de potencias con coeficientes $\{a_n\}$ centrada en x_0 es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Una serie de potencias define una función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que es convergente. Este conjunto, en general, es un intervalo centrado en x_0 y se llama intervalo de convergencia de la serie.

El desarrollo en serie de potencias de una función es único.

Teorema 3.3.2 (Radio de convergencia) *Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias y sea*

$$L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

- *Si* $L \in \mathbb{R},\ L > 0$ *llamaremos a* $R = 1/L$ *radio de convergencia y*
    - *la serie es (absolutamente) convergente en* $(x_0 - R, x_0 + R)$,
    - *la serie no es convergente fuera del intervalo* $[x_0 - R, x_0 + R]$;
    - *la serie puede ser convergente o no convergente en los extremos del intervalo* $x_0 - R$ *y* $x_0 + R$.
- *Si* $L = +\infty$, *entonces la serie de potencias sólo converge para* $x = x_0$ *y se dice que el radio de convergencia es* $R = 0$.
- *Si* $L = 0$, *entonces la serie converge absolutamente para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *y se dice que el radio de convergencia es* $R = +\infty$.

Observación

Se puede enunciar un resultado análogo al anterior (utilizando el criterio del cociente) con $L = \lim_n \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ siempre y cuando exista el límite. Recuerda que cuando esto ocurre,

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3.3.2. Derivación e integración de series de potencias

Teorema 3.3.3 (Derivación e integración de series de potencias) *Sea* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *una serie de potencias convergente en un intervalo* $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. *Entonces en el intervalo* I *se puede definir la función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

1. f *es continua en* I.
2. f *es derivable en* I *y además*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}.$$
3. f *es integrable y además una primitiva de* f *en* I *es*
$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Observación

Si
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$
con radio de convergencia $R > 0$, entonces $f \in C^\infty((x_0 - R, x_0 + R))$ y, además,
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

3.3.3. Series de Taylor

Sea f una función con derivadas de cualquier orden (clase $\mathcal{C}^\infty$) en un entorno $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ de un número real x_0. Entonces se puede obtener la serie potencias:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in I_R,$$
donde I_R es el intervalo de convergencia de la serie. A esta dicha serie se le llama serie de Taylor generada por f en el punto $x = x_0$.

La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿en qué puntos $x \in I_R$, f coincide con la anterior serie de Taylor? Es decir,
$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

O, equivalentemente,
$$\lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| = \lim_{n\to+\infty} |R_n(x; x_0)| \stackrel{?}{=} 0,$$
donde $R_n(x; x_0)$ es el resto de Taylor de f en el punto $x = x_0$.

Teorema 3.3.4 *Sea f una función con derivadas de cualquier orden (clase $\mathcal{C}^\infty$) en un entorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ de un número real x_0. Entonces,*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$
si, y sólo si,
$$\lim_{n} R_n(x; x_0) = 0.$$

A continuación se recogen los desarrollos en serie de Taylor centrados en 0 de algunas funciones de interés.

Función	Serie de Taylor	Dominio
$f(x) = e^x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x+1)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1, 1]$
$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$(-1, 1)$