EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 02-12-2021

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sean $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ y $g(x)=\dfrac{6}{x^2}$. Obtener el dominio de f y de la función compuesta gof.

(1.25p.)

2) Razonar la certeza o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Si f es una función acotada en R entonces f tiene alguna asíntota horizontal.
b) Si el dominio de f es un conjunto acotado entonces f no tiene ninguna asíntota horizontal.
c) Si f es una función, no definida a trozos, con una asíntota horizontal entonces f no tiene ninguna asíntota oblicua.

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

(0.5p.+0.5p.+1p.)

3)
a) Enunciar el teorema de Bolzano. Dibujar la gráfica de una función f que verifique las hipótesis del teorema de Bolzano y tenga dos ceros, uno simple y uno doble.

b) Sea $f(x)=\log(x^2)+(4/x),\ x\neq 0.$ Determinar, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de la función f ¿Cuántos ceros reales negativos tiene exactamente f?

c) Sea $f(x)=\log(x^2)+(4/x),\ x\in[1,3]$ ¿Se puede garantizar que la función f alcanza el máximo absoluto en algún punto del intervalo $[1,3]$? Si la respuesta es afirmativa, obtener $M=\max\limits_{x\in[1,3]} f(x)$ sin utilizar la derivada segunda de f.

$$\log(2)\approx 0.7 \qquad \log(3)\approx 1.1$$

(0.75p.+1p.+1p.)

4) Sea f la función real definida en todo R de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} e^{2-x} & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar, sin aplicar la regla de L'Hopital, si f es derivable por la izquierda y/o por la derecha en $c=2$.
b) Determinar los puntos críticos de f y los intervalos de monotonía. Aplicar el criterio de la derivada primera, cuando sea posible, para obtener los puntos donde la función f alcanza un máximo o un mínimo local ¿se alcanza en $c=2$ un extremo local?

(1p.+1.25p.)

5)
a) Definir, con rigor, cuando una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es divergente.
b) Sea $\{a_n\}=(-1)^n+\dfrac{n}{n+1}$. Obtener una sucesión mayorante de $|a_n|$ que sea convergente y utilizarla para justificar que la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente ¿es $\{a_n\}$ convergente? ¿es oscilante?
c) Encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergentes a $+\infty$ de tal manera que la sucesión $\{a_n-b_n\}$ sea oscilante.

(0.5p.+0.75p.+0.5p.)