Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 02-12-2021

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sean $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ y $g(x)=\dfrac{6}{x^2}$. Obtener el dominio de f y de la función compuesta gof.

(1.25p.)

Solución.

$$\text{Dom } f=\left\{x\in R\,/\,\sqrt{x^2-9}\in R\right\}=\left\{x\in R\,/\,x^2-9\geq 0\right\}=\left\{x\in R\,/\,x^2\geq 9\right\}=\left\{x\in R\,/\,|x|\geq 3\right\}=$$

$$=\left\{x\in R\,/\,x\geq 3 \text{ ó } x\leq -3\right\}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$

$$\text{Dom } g=R-\{0\}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x^2-9}\right)=\frac{6}{\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2}=\frac{6}{x^2-9}$$

$$\text{Dom } gof=\left\{x\in \text{Dom } f\,/\,f(x)\in \text{Dom } g\right\}=\left\{x\in \text{Dom } f\,/\,\sqrt{x^2-9}\neq 0\right\}=\left\{x\in \text{Dom } f\,/\,x\neq -3,\,x\neq 3\right\}=$$

$$=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$$

2) Razonar la certeza o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Si f es una función acotada en R entonces f tiene alguna asíntota horizontal.
b) Si el dominio de f es un conjunto acotado entonces f no tiene ninguna asíntota horizontal.
c) Si f es una función, no definida a trozos, con una asíntota horizontal entonces f no tiene ninguna asíntota oblicua.

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

(0.5p.+0.5p.+1p.)

Solución.

a) La función $f(x)=sen(x)$ es acotada en R ya que su conjunto imagen $[-1.1]$ es acotado. Al no existir ninguno de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} sen(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} sen(x)$$

resulta que la función $f(x)=sen(x)$ no tiene ninguna asíntota horizontal. Por tanto, la afirmación es falsa.

b) Si el dominio de f es un conjunto acotado entonces dicho conjunto es acotado tanto superiormente como inferiormente. En este caso, no tiene sentido plantearse la obtención de ninguno de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

La función no tiene ninguna asíntota horizontal. La afirmación es cierta

c) La función $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$ verifica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\infty+0}=0$, es decir, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de f en el $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to-\infty}-xe^x=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

La recta $y=x$ es asíntota oblicua de f en el $-\infty$. Así pues, la afirmación es falsa.

3)

a) Enunciar el teorema de Bolzano. Dibujar la gráfica de una función f que verifique las hipótesis del teorema de Bolzano y tenga dos ceros, uno simple y uno doble.

b) Sea $f(x)=\log(x^2)+(4/x),\ x\neq 0.$ Determinar, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de la función f ¿Cuántos ceros reales negativos tiene exactamente f ?

c) Sea $f(x)=\log(x^2)+(4/x),\ x\in[1,3]$ ¿Se puede garantizar que la función f alcanza el máximo absoluto en algún punto del intervalo $[1,3]$? Si la respuesta es afirmativa, obtener $M=\max\limits_{x\in[1,3]} f(x)$ sin utilizar la derivada segunda de f .

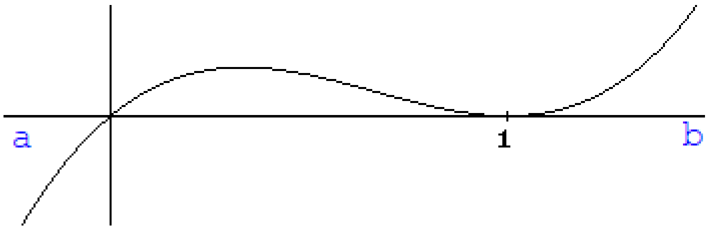
$$\log(2)\approx 0.7 \qquad \log(3)\approx 1.1$$

(0.75p.+1p.+1p.)

Solución.

a)

Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a).f(b)<0$, es decir, f cambia de signo en los puntos frontera del intervalo, se verifica que existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$. Se dice que c es un cero de f .



$c=0$ es un cero simple ya que $f(0)=0$ y $f'(0)\neq 0$

$c=1$ es un cero doble ya que $f(1)=f'(1)=0$ y $f''(1)\neq 0$

b) La función $f(x)=\log(x^2)+(4/x),\ x\neq 0$ es continua y derivable en todo punto de su dominio. Nótese que f es suma, cociente y composición de funciones derivables en su dominio.

Si $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{2x-4}{x^2}$ $\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Los intervalos de monotonía de f (intervalos abiertos donde la función es derivable y la derivada es distinta de cero) son: $(-\infty,0),(0,2)$ y $(2,+\infty)$.

En cada uno de los intervalos anteriores se verifica que la función f tiene, a lo sumo, un cero real (consecuencia del teorema de Rolle). Por tanto, el número máximo de ceros reales de f es tres. Nótese que $c=2$ no es cero de f.

Sabemos que el número de ceros reales negativos de f es, a lo sumo, uno. Veamos si se verifican las hipótesis del teorema de Bolzano (versión generalizada) en el intervalo $(-\infty,0)$.

f es continua en el intervalo $(-\infty,0)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\log(x^2)+\frac{4}{x}=+\infty+0=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\log(x^2)+\frac{4}{x}=-\infty-\infty=-\infty$$

El teorema de Bolzano nos garantiza que la función f tiene, al menos, un cero real negativo. Así pues, la función f tiene (exactamente) un cero real negativo

c) La función $f(x)=\log(x^2)+(4/x), x\in[1,3]$, es continua en todo punto del intervalo $[1,3]$. El teorema de Weiestrass nos garantiza que f alcanza el máximo absoluto en algún punto de dicho intervalo (en un punto crítico).

Los puntos críticos son los puntos frontera del intervalo $\{1,3\}$ y el punto interior $\{2\}$ donde la derivada se anula. Nótese que f es derivable en todo punto interior del intervalo.

$$M=\max_{x\in[1,3]} f(x)=\max\{f(1),f(2),f(3)\}=\max\{4,2\log(2)+2,2\log(3)+4/3\}=4$$

$$2\log(2)+2\approx 3.4 \qquad 2\log(3)+4/3\approx 3.5$$

4) Sea f la función real definida en todo R de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} e^{2-x} & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar, sin aplicar la regla de L'Hopital, si f es derivable por la izquierda y/o por la derecha en $c=2$.

b) Determinar los puntos críticos de f y los intervalos de monotonía. Aplicar el criterio de la derivada primera, cuando sea posible, para obtener los puntos donde la función f alcanza un máximo o un mínimo local ¿se alcanza en $c=2$ un extremo local?

(1p.+1.25p.)

Solución.

a)

f es derivable por la izquierda en $c=2 \Leftrightarrow: \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{2-(2+h)}-e^0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

f es derivable por la derecha en $c=2 \Leftrightarrow: \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+6(2+h)-8-e^0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+2h-1}{h}=-\infty$$

f es derivable por la izquierda en $c=2$ pero no lo es por la derecha.

b) f está definida en todo R que es un abierto. Los puntos críticos de f son los números reales donde f no es derivable o donde la derivada f' se anula.

Sabemos que f no es derivable en $c=2$. Por tanto, $c=2$ es un punto crítico de f. En el resto de puntos la función es derivable.

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{2-x} & \text{si} \quad x<2 \\ -2x+6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

$-e^{2-x}<0$, es decir, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+6=0\,(x>2) \Leftrightarrow x=3$

Los puntos críticos de f son $c=2$ y $d=3$. Los intervalos de monotonía $(-\infty,2),(2,3)$ y $(3,+\infty)$

Si $x\in(-\infty,2)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty,2)$

Si $x\in(2,3)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(2,3)$

Si $x\in(3,+\infty)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(3,+\infty)$

En $d=3$ la función f es continua y "pasa" creciente a decreciente. El criterio de la derivada primera nos garantiza que la función f alcanza un máximo local en dicho punto.

$$f(3)=-9+18-8=1$$

En $c=2$ la función f no es continua (lo es por la izquierda pero no lo es por la derecha). Por tanto, el criterio de la derivada primera no es aplicable en este caso.

$$f(2)=e^0=1 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=-4+12-8=0$$

Al ser f decreciente en el intervalo $(-\infty,2)$ resulta que $f(x)>1$ si $x<2$. Al ser f creciente en el intervalo $(2,3)$ resulta que $0<f(x)<1$ si $x\in(2,3)$. Así pues, al ser $f(2)=1$, resulta que la función f no alcanza un extremo local en $c=2$.

5)
a) Definir, con rigor, cuando una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es divergente.
b) Sea $\{a_n\}=(-1)^n+\dfrac{n}{n+1}$. Obtener una sucesión mayorante de $|a_n|$ que sea convergente y utilizarla para justificar que la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente ¿es $\{a_n\}$ convergente? ¿es oscilante?
c) Encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergentes a $+\infty$ de tal manera que la sucesión $\{a_n-b_n\}$ sea oscilante.

(0.5p.+0.75p.+0.5p.)

Solución.
a) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *divergente* $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$

b) $$|a_n|=\left|(-1)^n+\frac{n}{n+1}\right|\le\left|(-1)^n\right|+\left|\frac{n}{n+1}\right|=1+\frac{n}{n+1}$$

$\left\{1+\dfrac{n}{n+1}\right\}$ es una sucesión mayorante de $\{|a_n|\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{1}{1+1/n}=2$

La sucesión mayorante tiene límite finito, es decir, es una sucesión convergente. Por tanto, no es posible que el límite de la sucesión $\{|a_n|\}$ sea ∞. Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente.

$$\{a_{2n}\}=(-1)^{2n}+\frac{2n}{2n+1}=1+\frac{2n}{2n+1} \qquad \text{es convergente a } 2$$

$$\{a_{2n-1}\}=(-1)^{2n-1}+\frac{2n-1}{2n}=-1+\frac{2n-1}{2n} \qquad \text{es convergente a } 0$$

La sucesión $\{a_n\}$ no es convergente ya que la subsucesión de los términos que ocupan lugar par tiene límite distinto que la subsucesión de los que ocupan lugar impar. Se trata de una sucesión oscilante.

c) $\{a_n\}=n+(-1)^n$ diverge a $+\infty$ ya que $a_n\ge n-1$ y $n-1\to+\infty$, $\{b_n\}=n$ diverge a $+\infty$

$\{a_n-b_n\}=(-1)^n$ es oscilante $\qquad \{a_n-b_n\}=1$ si n es par , $\{a_n-b_n\}=-1$ si n es impar