EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 04-12-2020

En las preguntas tipo test hay que contestar razonadamente, al igual que en el resto de preguntas. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.
La pregunta nº 5 se ha de entregar en hoja aparte.

1) Sea $A=\left\{x\in R \,/\, \left|\dfrac{4}{x^2-1}\right|\le 2\right\}$ y sea $I=\text{Infimo}(A)$, $S=\text{Supremo}(A)$

a) $I=\sqrt{3}$, no existe S b) no existen c) no existe I, $S=-\sqrt{3}$ d) ninguna de las anteriores

(1.2p.)

2) Sea g una función real definida en D y sea f tal que $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2+1}$ $x\in D$. Se verifica:

a) f es acotada en D
b) f tiene alguna asíntota horizontal
c) f no tiene ninguna asíntota vertical
d) ninguna de las anteriores

(1.2p.)

3)
a) Sea $f: D\subset R \rightarrow R$ una función real de variable real. Definir, con lenguaje matemático, cuando f es inyectiva en su dominio D y cuando es estrictamente decreciente en un subconjunto $S\subset D$.

b) Enunciar el teorema de Rolle y un corolario de este teorema que nos sirva para obtener el número máximo de ceros reales de una función f.

c) Determinar, usando el corolario anterior, el número máximo de ceros reales de la función $f(x)=2\log(x)-\dfrac{1}{x-1}$ ¿cuántos ceros reales tiene exactamente f ? Separarlos en intervalos de longitud 1.

(0.5 p.+0.6 +1.2p.)

4) Sea f la función real definida en el intervalo cerrado $I=[-2,3]$ de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} |x|-1 & \text{si} \quad x\in[-2,1] \\ 4(x-1)\,e^{-x} & \text{si} \quad x\in(1,3] \end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar la derivabilidad de f en $c=0$ y $c=1$.

b) Obtener $f\,'(x)$ $\forall x\in(-2,3)$ donde f sea derivable y determinar razonadamente los puntos críticos de f en I.

c) Enunciar el teorema de Weiertrass ¿Existe m = mínimo de $f(x)$, si $x\in I$? ¿Existe M = máximo de $f(x)$, si $x\in I$? obténganse, en su caso.

(0.8 p.+1p. +1p.)

5)
a) Razonar la certeza o falsedad de la siguiente afirmación: *el producto de una sucesión oscilante por otra convergente a cero da como resultado una sucesión convergente a cero.*

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}+...+\dfrac{n+n-1}{n+n}$ es estrictamente creciente y divergente a $+\infty$(encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$).

(1 p.+1.5 p.)