Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 19-11-2018 (9-10:30)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sea $f(x)=1/\left(x^2+1\right)$ definida en R. Si $x\in R$,

a) $\min f(x)=0$ b) $f(x)$ no es acotada c) $\inf f(x)=0$ d) $f(x)$ es inyectiva

(1p.)

2) La función $f(x)=\dfrac{x.sen(x)}{|x|}$ si $x\neq 0$ y $f(0)=1$, presenta en $x=0$ una discontinuidad

a) evitable b) esencial de salto finito c) esencial de salto infinito d) ninguna de las anteriores

(1p.)

3) Sean $f(x)=\log(x)$ y $g(x)=2\sqrt{x}$

a) $(g\ o\ f)'(e)=e$ b) $(g\ o\ f)'(e)=e^{-1}$ c) $(g\ o\ f)'(e)=2e$ d) $(g\ o\ f)'(e)=2e^{-1}$

(1p.)

4)
a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) Como corolario del teorema de Rolle, demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en (a,b) y $f'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a,b)$, se verifica que en dicho intervalo la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz.

c) Sea $f(x)=x^5-80x+2$. Usar el resultado anterior para determinar el número máximo de raíces reales de la ecuación $f(x)=0$.

(0.5p.+0.6p.+0.6p.)

Solución.
a)
Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f´(c)=0$, es decir, la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(c,f(c))$ es paralela al eje de abscisas.

b)
Supongamos que f es derivable en (a,b) y que la ecuación $f(x)=0$ tuviese(al menos) dos raíces x_1 y $x_2\in(a,b)$ tales que $x_1<x_2$. En este caso, f sería continua en $[x_1,x_2]$, derivable en (x_1,x_2) y $f(x_1)=f(x_2)=0$; por el teorema de Rolle, existiría un punto $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ tal que $f´(c)=0$, lo que contradice la hipótesis $f'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a,b)$.

c) f es derivable en R y $f'(x)=5x^4-80\quad \forall x\in R$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^4=16\Leftrightarrow x=-2 \text{ ó } x=2$$

En cada uno de los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,+\infty)$ la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz. Por tanto, el número máximo de raíces reales de la ecuación $f(x)=0$ es tres.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

5) Sea $f(x)=(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ si $x\neq 1$ y $f(1)=0$

a) Obtener, si existen y sin aplicar la regla de L'Hôpital, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha) y las horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$).

b) ¿Es f derivable por la izquierda en $x=1$? Determinar, con justificación, los puntos críticos de f.

c) ¿Alcanza f un extremo local en $x=1$?

(1p.+1.3p.+0.7p.)

Solución.

a)

Si $x\neq 1$ la función $f(x)$ es continua. La única recta que podría ser asíntota vertical de f es la recta $x=1$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(-\infty)=0.0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(\infty)=0.\infty \qquad \text{indeterminación}$$

Sea $t=\dfrac{1}{x-1}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(t)}{t}=+\infty$

ya que $\exp(t)$ es un infinito de orden superior a t si $t\to+\infty$

Así pues, la recta $x=1$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\infty.\exp(0)=-\infty.1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=+\infty.\exp(0)=+\infty.1=+\infty$$

Ninguno de los dos límites anteriores es un nº real. Por tanto, la función f no tiene asíntotas horizontales.

b)

La función f es continua por la izquierda en $x=1$. Veamos si es derivable por la izquierda en $x=1$.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h.\exp\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\exp\left(\frac{1}{h}\right)=\exp(-\infty)=0$$

f es derivable por la izquierda en $x=1$ y $f'(1^-)=0$

La función f no es continua por la derecha en $x=1$. Por tanto, no es derivable por la derecha en $x=1$.
Los puntos críticos de f serán los x reales donde $f'(x)=0$ ó donde no exista $f'(x)$.

Si $x\neq 1$, $f'(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\dfrac{1}{(x-1)^2}=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\left[1-\dfrac{1}{x-1}\right]=0\Leftrightarrow x=2$

El único punto x donde $f'(x)=0$ es $x=2$ y el único punto x donde no existe $f'(x)$ es $x=1$.

c)
En $x=1$ la función f no es continua. Por tanto, no podemos aplicar el criterio de la derivada primera para determinar si f alcanza un extremo local en dicho punto.
Veamos, aplicando la definición, si f alcanza un extremo local en $x=1$.

$$f(1)=0$$

$$\text{Si } x<1 \;,\; f(x)=(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)<0$$

$$\text{Si } x>1 \;,\; f(x)=(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)>0$$

No existe $r>0$ tal que $f(x)>f(1)$ $\forall x\in(1-r,1+r)$; así pues, f no alcanza un mínimo local en $x=1$.
No existe $r>0$ tal que $f(x)<f(1)$ $\forall x\in(1-r,1+r)$; así pues, f no alcanza un máximo local en $x=1$.

6)
a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=n\ sen((2n-1)\ \pi/2)$ es convergente, divergente (con límite o sin límite) u oscilante.

b) Dada la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}+...+\dfrac{n+n-1}{n+n}$,

b1) Demostrar que es estrictamente creciente.

b2) Demostrar que es divergente a $+\infty$, encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$.

(0.6p.+0.7p.+1p.)

Solución.
a)

$$sen((2n-1)\ \pi/2)=(-1)^{n+1}=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ impar}\\ -1 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\{a_n\}=(-1)^{n+1}n=\begin{cases}n & \text{si } n \text{ impar}\\ -n & \text{si } n \text{ par}\end{cases} \qquad ; \qquad \{|a_n|\}=n$$

La sucesión de los valores absolutos tiene límite $+\infty$. Es una sucesión divergente sin límite ya que la subsucesión de los n impares tiene límite $+\infty$ mientras que la de los n pares tiene límite $-\infty$.

b)

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow$ $a_{n+1}-a_n>0 \quad \forall n$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n+3}+...+\frac{2n-1}{2n}+\frac{2n}{2n+1}+\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{n+3}-...-\frac{2n-1}{2n}=$$

$$=\frac{2n}{2n+1}+\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{2n}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>0 \qquad \forall n$$

$$a_n\geq\frac{n}{n+n}+\frac{n+1}{n+n}+...+\frac{n+n-1}{n+n}=\frac{n^2+1+2+...+n-1}{2n}=\frac{n^2+(n-1)n/2}{2n}=\frac{3n^2-n}{4n}\longrightarrow+\infty$$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 19-11-2018 (10.30-12)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora

1) Sea $f(x) = 1/\left(x^2+1\right)$ definida en R. Si $x \in R$,

a) $\inf f(x) = 0$ b) $f(x)$ no es acotada c) $\min f(x) = 0$ d) $f(x)$ es inyectiva

(1p.)

2) La función $f(x) = \dfrac{x.sen(x)}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, presenta en $x = 0$ una discontinuidad

a) esencial de salto finito b) esencial de salto infinito c) evitable d) ninguna de las anteriores

(1p.)

3) Sean $f(x) = \log(x)$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$

a) $(g\ o\ f)'(e) = e$ b) $(g\ o\ f)'(e) = 2e$ c) $(g\ o\ f)'(e) = e^{-1}$ d) $(g\ o\ f)'(e) = 2e^{-1}$

(1p.)

4)
a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) Como corolario del teorema de Rolle, demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en (a,b) y $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$, se verifica que en dicho intervalo la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz.

c) Sea $f(x) = x^5 - 80x + 2$. Usar el resultado anterior para determinar el número máximo de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

(0.5p.+0.6p.+0.6p.)

Solución.
a)
Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje de abscisas.

b)
Supongamos que f es derivable en (a,b) y que la ecuación $f(x) = 0$ tuviese(al menos) dos raíces x_1 y $x_2 \in (a,b)$ tales que $x_1 < x_2$. En este caso, f sería continua en $[x_1, x_2]$, derivable en (x_1, x_2) y $f(x_1) = f(x_2) = 0$; por el teorema de Rolle, existiría un punto $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$, lo que contradice la hipótesis $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$.

c) f es derivable en R y $f'(x) = 5x^4 - 80 \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2$$

En cada uno de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$ la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz. Por tanto, el número máximo de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ es tres.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

5) Sea $f(x)=(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ si $x\neq 1$ y $f(1)=0$

a) Obtener, si existen y sin aplicar la regla de L'Hôpital, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha) y las horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$).

b) ¿Es f derivable por la izquierda en $x=1$? Determinar, con justificación, los puntos críticos de f.

c) ¿Alcanza f un extremo local en $x=1$?

(1p.+1.3p.+0.7p.)

Solución.

a)

Si $x\neq 1$ la función $f(x)$ es continua. La única recta que podría ser asíntota vertical de f es la recta $x=1$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(-\infty)=0.0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(\infty)=0.\infty \qquad \text{indeterminación}$$

Sea $t=\dfrac{1}{x-1}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(t)}{t}=+\infty$

ya que $\exp(t)$ es un infinito de orden superior a t si $t\to+\infty$

Así pues, la recta $x=1$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\infty.\exp(0)=-\infty.1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=+\infty.\exp(0)=+\infty.1=+\infty$$

Ninguno de los dos límites anteriores es un nº real. Por tanto, la función f no tiene asíntotas horizontales.

b)

La función f es continua por la izquierda en $x=1$. Veamos si es derivable por la izquierda en $x=1$.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h.\exp\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\exp\left(\frac{1}{h}\right)=\exp(-\infty)=0$$

f es derivable por la izquierda en $x=1$ y $f'(1^-)=0$

La función f no es continua por la derecha en $x=1$. Por tanto, no es derivable por la derecha en $x=1$.
Los puntos críticos de f serán los x reales donde $f'(x)=0$ ó donde no exista $f'(x)$.

Si $x\neq 1$, $f'(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\dfrac{1}{(x-1)^2}=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\left[1-\dfrac{1}{x-1}\right]=0\Leftrightarrow x=2$

El único punto x donde $f'(x)=0$ es $x=2$ y el único punto x donde no existe $f'(x)$ es $x=1$.

c)
En $x=1$ la función f no es continua. Por tanto, no podemos aplicar el criterio de la derivada primera para determinar si f alcanza un extremo local en dicho punto.
Veamos, aplicando la definición, si f alcanza un extremo local en $x=1$.

$$f(1)=0$$

$$\text{Si } x<1 \ , \ f(x)=(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)<0$$

$$\text{Si } x>1 \ , \ f(x)=(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)>0$$

No existe $r>0$ tal que $f(x)>f(1) \ \ \forall x \in (1-r, 1+r)$; así pues, f no alcanza un mínimo local en $x=1$.
No existe $r>0$ tal que $f(x)<f(1) \ \ \forall x \in (1-r, 1+r)$; así pues, f no alcanza un máximo local en $x=1$.

6)
a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=n \ sen((2n-1)\,\pi/2)$ es convergente, divergente (con límite o sin límite) u oscilante.

b) Dada la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}+\ldots+\dfrac{n+n-1}{n+n}$,

b1) Demostrar que es estrictamente creciente.

b2) Demostrar que es divergente a $+\infty$, encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$.

(0.6p.+0.7p.+1p.)

Solución.
a)

$$sen((2n-1)\ \pi/2)=(-1)^{n+1}=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ impar}\\ -1 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\{a_n\}=(-1)^{n+1}n=\begin{cases}n & \text{si } n \text{ impar}\\ -n & \text{si } n \text{ par}\end{cases} \qquad ; \qquad \{|a_n|\}=n$$

La sucesión de los valores absolutos tiene límite $+\infty$. Es una sucesión divergente sin límite ya que la subsucesión de los n impares tiene límite $+\infty$ mientras que la de los n pares tiene límite $-\infty$.

b)

$$\{a_n\} \text{ es estrictamente creciente } \Leftrightarrow \ a_{n+1}-a_n>0 \qquad \forall n$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n+3}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}+\frac{2n}{2n+1}+\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{n+3}-\ldots-\frac{2n-1}{2n}=$$

$$=\frac{2n}{2n+1}+\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{2n}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>0 \qquad \forall n$$

$$a_n \geq \frac{n}{n+n}+\frac{n+1}{n+n}+\ldots+\frac{n+n-1}{n+n}=\frac{n^2+1+2+\ldots+n-1}{2n}=\frac{n^2+(n-1)n/2}{2n}=\frac{3n^2-n}{4n}\to+\infty$$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 19-11-2018 (11-12:30)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Sea $f(x)=1+1/\left(x^2+1\right)$ definida en R. Si $x\in R$,

a) $f(x)$ es inyectiva   b) $\inf f(x)=1$ c) $f(x)$ no es acotada   d) min $f(x)=1$

(1p.)

2) La función $f(x)=sen(1/x)$ si $x\neq 0$, presenta en $x=0$ una discontinuidad

a) evitable   b) esencial de salto finito   c) esencial de salto infinito   d) ninguna de las anteriores

(1p.)

3) Sean $f(x)=4\sqrt{x}$ y $g(x)=\log(x)$

a) $(f\ o\ g)'(e)=2e^{-1}$ b) $(f\ o\ g)'(e)=e^{-1}$ c) $(f\ o\ g)'(e)=2e$ d) $(f\ o\ g)'(e)=e$

(1p.)

4)
a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Como corolario del teorema del valor medio, demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en (a,b) y $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)$, se verifica que en dicho intervalo la función f es estrictamente creciente.

c) Sea $f(x)=x^3+x^2+x-5$ ¿es f estrictamente creciente en R?

(0.5p.+0.6p.+0.6p.)

Solución.

a) Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$f´(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

b) Sean $x_1,x_2\in(a,b)$ tales que $x_1<x_2$. Al ser f continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2), el teorema del valor medio nos garantiza que existe, al menos, un punto $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ tal que

$$f´(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(c)>0 \quad \text{y} \quad x_2-x_1>0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1)>0\text{, es decir, } \ f(x_1)<f(x_2)$$

c) La función f es derivable en R por ser un polinomio. Si $x\in R$, $f'(x)=3x^2+2x+1$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{6}\notin R$$

La función f' es continua y $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in R$; por tanto, los valores de $f'(x)$ son todos positivos o todos negativos. Se verifica que $f'(x)>0 \quad \forall x\in R$. Así pues, la función f es estrictamente creciente en R. La respuesta es afirmativa.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

5) Sea $f(x)=(x-2)\exp\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ si $x\neq 2$ y $f(2)=0$

a) Obtener, si existen y sin aplicar la regla de L'Hopital, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha) y las horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$).

b) ¿Es f derivable por la izquierda en $x=2$? Determinar, con justificación, los puntos críticos de f.

c) ¿Alcanza f un extremo local en $x=2$?

(1p.+1.3p.+0.7p.)

Solución.

a)

Si $x\neq 2$ la función $f(x)$ es continua. La única recta que podría ser asíntota vertical de f es la recta $x=2$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)=0.\exp(-\infty)=0.0=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)=0.\exp(\infty)=0.\infty \qquad \text{indeterminación}$$

Sea $t=\dfrac{1}{x-2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(t)}{t}=+\infty$

ya que $\exp(t)$ es un infinito de orden superior a t si $t\to+\infty$

Así pues, la recta $x=2$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty.\exp(0)=-\infty.1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty.\exp(0)=+\infty.1=+\infty$$

Ninguno de los dos límites anteriores es un nº real. Por tanto, la función f no tiene asíntotas horizontales.

b)

La función f es continua por la izquierda en $x=2$. Veamos si es derivable por la izquierda en $x=2$.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h.\exp\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\exp\left(\frac{1}{h}\right)=\exp(-\infty)=0$$

f es derivable por la izquierda en $x=2$ y $f'(2^-)=0$

La función f no es continua por la derecha en $x=2$. Por tanto, no es derivable por la derecha en $x=2$.
Los puntos críticos de f serán los x reales donde $f'(x)=0$ ó donde no exista $f'(x)$.

Si $x\neq 2$, $f'(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x-2}\right)-(x-2)\exp\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\dfrac{1}{(x-2)^2}=\exp\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\left[1-\dfrac{1}{x-2}\right]=0\Leftrightarrow x=3$

El único punto x donde $f'(x)=0$ es $x=3$ y el único punto x donde no existe $f'(x)$ es $x=2$.

c)
En $x=2$ la función f no es continua. Por tanto, no podemos aplicar el criterio de la derivada primera para determinar si f alcanza un extremo local en dicho punto.
Veamos, aplicando la definición, si f alcanza un extremo local en $x=2$.

$$f(2)=0$$

$$\text{Si } x<2\ ,\ f(x)=(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)<0$$

$$\text{Si } x>2\ ,\ f(x)=(x-2)\exp\left(\frac{1}{x-2}\right)>0$$

No existe $r>0$ tal que $f(x)>f(2)\ \ \forall x\in(2-r\,,2+r)$; así pues, f no alcanza un mínimo local en $x=2$.
No existe $r>0$ tal que $f(x)<f(2)\ \ \forall x\in(2-r\,,2+r)$; así pues, f no alcanza un máximo local en $x=2$.

6)
a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=n\ \ sen((2n+1)\,\pi/2)$ es convergente, divergente (con límite o sin límite) u oscilante.

b) Dada la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n-1}{n+1}+\dfrac{n}{n+2}+\ldots+\dfrac{n+n-2}{n+n}$,

b1) Demostrar que es estrictamente creciente.

b2) Demostrar que es divergente a $+\infty$, encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$.

(0.6p.+0.7p.+1p.)

Solución.
a)

$$sen\left((2n+1)\ \pi/2\right)=(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{si } n \text{ impar}\\ 1 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\{a_n\}=(-1)^n n=\begin{cases}-n & \text{si } n \text{ impar}\\ n & \text{si } n \text{ par}\end{cases}\qquad ;\qquad \{|a_n|\}=n$$

La sucesión de los valores absolutos tiene límite $+\infty$. Es una sucesión divergente sin límite ya que la subsucesión de los n impares tiene límite $-\infty$ mientras que la de los n pares tiene límite $+\infty$.

b)

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow\ \ a_{n+1}-a_n>0 \quad \forall n$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n}{n+2}+\frac{n+1}{n+3}+\ldots+\frac{2n-2}{2n}+\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2n}{2n+2}-\frac{n-1}{n+1}-\frac{n}{n+2}-\frac{n+1}{n+3}-\ldots-\frac{2n-2}{2n}=$$

$$=\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2n}{2n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2}{2n+2}>0 \qquad \forall n$$

$$a_n\geq\frac{n-1}{n+n}+\frac{n}{n+n}+\ldots+\frac{n+n-2}{n+n}=\frac{n^2-1+1+\ldots+n-2}{2n}=\frac{n^2-1+(n-2)(n-1)/2}{2n}=\frac{3n^2-3n}{4n}\longrightarrow+\infty$$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 19-11-2018 (13-14:30)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto. En el resto de preguntas se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora

1) Sea $f(x)=1+1/\left(x^2+1\right)$ definida en R. Si $x\in R$,

a) $f(x)$ es inyectiva   b) min $f(x)=1$ c) inf $f(x)=1$ d) $f(x)$ no es acotada

(1p.)

2) La función $f(x)=\cos(1/x)$ si $x\neq 0$, presenta en $x=0$ una discontinuidad

a) evitable   b) esencial de salto finito   c) esencial de salto infinito   d) ninguna de las anteriores

(1p.)

3) Sean $f(x)=4\sqrt{x}$ y $g(x)=\log(x)$

a) $(f\ o\ g)'(e)=e^{-1}$ b) $(f\ o\ g)'(e)=2e^{-1}$ c) $(f\ o\ g)'(e)=e$ d) $(f\ o\ g)'(e)=2e$

(1p.)

4)
a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Como corolario del teorema del valor medio, demostrar lo siguiente: si f es derivable en (a,b) y $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)$, se verifica que en dicho intervalo la función f es estrictamente decreciente.

c) Sea $f(x)=-x^3+x^2-x+4$ ¿es f estrictamente decreciente en R?

(0.5p.+0.6p.+0.6p.)

Solución.

a) Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$f\,'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

b) Sean $x_1,x_2\in(a,b)$ tales que $x_1<x_2$. Al ser f continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2), el teorema del valor medio nos garantiza que existe, al menos, un punto $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ tal que

$$f\,'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f\,'(c)<0 \quad \text{y} \quad x_2-x_1>0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1)<0, \text{ es decir, } \quad f(x_1)>f(x_2)$$

c) La función f es derivable en R por ser un polinomio. Si $x\in R$, $f\,'(x)=-3x^2+2x-1$

$$f\,'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{6}\notin R$$

La función $f\,'$es continua y $f\,'(x)\neq 0\quad \forall x\in R$; por tanto, los valores de $f\,'(x)$ son todos positivos o todos negativos. Se verifica que $f\,'(x)<0\quad \forall x\in R$. Así pues, la función f es estrictamente decreciente en R. La respuesta es afirmativa.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

5) Sea $f(x)=(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$ si $x\neq -1$ y $f(-1)=0$

a) Obtener, si existen y sin aplicar la regla de L'Hopital, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha) y las horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$).

b) ¿Es f derivable por la izquierda en $x=-1$? Determinar, con justificación, los puntos críticos de f.

c) ¿Alcanza f un extremo local en $x=-1$?

(1p.+1.3p.+0.7p.)

Solución.
a)
Si $x\neq -1$ la función $f(x)$ es continua. La única recta que podría ser asíntota vertical de f es la recta $x=-1$
Veámoslo.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)=0.\exp(-\infty)=0.0=0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)=0.\exp(\infty)=0.\infty \qquad \text{indeterminación}$$

Sea $t=\frac{1}{x+1}$, $\lim_{x\to -1^+}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(t)}{t}=+\infty$

ya que $\exp(t)$ es un infinito de orden superior a t si $t\to+\infty$

Así pues, la recta $x=-1$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\infty.\exp(0)=-\infty.1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)=+\infty.\exp(0)=+\infty.1=+\infty$$

Ninguno de los dos límites anteriores es un nº real. Por tanto, la función f no tiene asíntotas horizontales.

b)
La función f es continua por la izquierda en $x=-1$. Veamos si es derivable por la izquierda en $x=-1$.

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h.\exp\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\exp\left(\frac{1}{h}\right)=\exp(-\infty)=0$$

f es derivable por la izquierda en $x=-1$ y $f'(-1^-)=0$

La función f no es continua por la derecha en $x=-1$. Por tanto, no es derivable por la derecha en $x=-1$.
Los puntos críticos de f serán los x reales donde $f'(x)=0$ ó donde no exista $f'(x)$.

Si $x\neq-1$, $f'(x)=\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)-(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2}=\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\left[1-\frac{1}{x+1}\right]=0\Leftrightarrow x=0$

El único punto x donde $f'(x)=0$ es $x=0$ y el único punto x donde no existe $f'(x)$ es $x=-1$.

c)
En $x=-1$ la función f no es continua. Por tanto, no podemos aplicar el criterio de la derivada primera para determinar si f alcanza un extremo local en dicho punto.
Veamos, aplicando la definición, si f alcanza un extremo local en $x=-1$.

$$f(-1)=0$$

$$\text{Si } x<-1 \ , \ f(x)=(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)<0$$

$$\text{Si } x>-1 \ , \ f(x)=(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)>0$$

No existe $r>0/\ f(x)>f(-1)\ \ \forall x\in(-1-r,-1+r)$; así pues, f no alcanza un mínimo local en $x=-1$.
No existe $r>0/\ f(x)<f(-1)\ \ \forall x\in(-1-r,-1+r)$; así pues, f no alcanza un máximo local en $x=-1$.

6)
a) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=n^2\ sen\left((2n+1)\,\pi/2\right)$ es convergente, divergente (con límite o sin límite) u oscilante.

b) Dada la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n-1}{n+1}+\dfrac{n}{n+2}+\ldots+\dfrac{n+n-2}{n+n}$,

b1) Demostrar que es estrictamente creciente.

b2) Demostrar que es divergente a $+\infty$, encontrando una sucesión minorante que diverja a $+\infty$.

(0.6p.+0.7p.+1p.)

Solución.
a)

$$sen\left((2n+1)\ \pi/2\right)=(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{si } n \text{ impar}\\ 1 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\{a_n\}=(-1)^n n=\begin{cases}-n & \text{si } n \text{ impar}\\ n & \text{si } n \text{ par}\end{cases} \qquad ; \qquad \{|a_n|\}=n$$

La sucesión de los valores absolutos tiene límite $+\infty$. Es una sucesión divergente sin límite ya que la subsucesión de los n impares tiene límite $-\infty$ mientras que la de los n pares tiene límite $+\infty$.

b)

$$\{a_n\} \text{ es estrictamente creciente } \Leftrightarrow \ a_{n+1}-a_n>0 \qquad \forall n$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n}{n+2}+\frac{n+1}{n+3}+\ldots+\frac{2n-2}{2n}+\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2n}{2n+2}-\frac{n-1}{n+1}-\frac{n}{n+2}-\frac{n+1}{n+3}-\ldots-\frac{2n-2}{2n}=$$

$$=\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2n}{2n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}+\frac{2}{2n+2}>0 \qquad \forall n$$

$$a_n\geq\frac{n-1}{n+n}+\frac{n}{n+n}+\ldots+\frac{n+n-2}{n+n}=\frac{n^2-1+1+\ldots+n-2}{2n}=\frac{n^2-1+(n-2)(n-1)/2}{2n}=\frac{3n^2-3n}{4n}\rightarrow+\infty$$