Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-01-2022

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Razonar la certeza o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tal que $a_n \geq 0 \quad \forall n$, es convergente o bien divergente a $+\infty$.

b) Sea f continua (no trigonométrica) en $[-a, a]$, $a>0$. Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx \neq 0$

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

(1p.+0.75p.)

Solución.

a) El carácter de una serie se corresponde con el carácter de su sucesión de sumas parciales.

$$s_1 = a_1 \qquad s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \geq s_1 \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \geq s_2 \quad \ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$$

Si $a_n \geq 0 \quad \forall n$ resulta que la sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente. Así pues, esta sucesión es convergente (caso de ser acotada) o bien divergente a $+\infty$ (caso de ser no acotada).

La afirmación es cierta.

b) La afirmación es falsa. La función $f(x) = x^2 - 1$ es un ejemplo de función par y continua en R; vamos a obtener el valor de $a>0$ tal que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$\int_{-a}^{a} (x^2-1)\,dx = 2\int_{0}^{a} (x^2-1)\,dx = 2\left(\frac{a^3}{3} - a\right) \qquad \int_{-a}^{a} (x^2-1)\,dx = 0 \Leftrightarrow a^3 = 3a \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}\ (a>0)$$

Se verifica $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-1)\,dx = 0$

2)
a) ¿Qué familia de funciones es la integral indefinida de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$? Justifíquese la respuesta.

b) Enunciar el 2º teorema fundamental del cálculo integral (regla de Barrow). Si la función $f(x) = e^{x^2}$ es continua en cualquier intervalo $[a, b]$ ¿por qué no es posible resolver la integral $\int_{a}^{b} e^{x^2}\,dx$ usando dicha regla?

c) Sea $f(x)=\begin{cases}(x+1)\cos(x) & \text{si } x\le 0\\ \cos^3(x) & \text{si } x>0\end{cases}$

Obtener, si es posible, dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ que sean primitivas de $f(x)$ en R y usar una de ellas para obtener la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$, usando la regla de Barrow una sola vez.

(0.5p.+1p.+1.5p.)

Solución.

a) La función $F(x)=\log(-x)$ es derivable en su dominio, es decir, en el intervalo $(-\infty,0)$ y $F'(x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$ $\forall x<0$. Por tanto, la función $F(x)=\log(-x)$ es una primitiva de $f(x)=1/x$ en el intervalo $(-\infty,0)$. Así pues, la familia de funciones $F(x,C)=\log(-x)+C$, siendo C una constante real arbitraria, es la integral indefinida de $f(x)=1/x$ en el intervalo $(-\infty,0)$.

b) Si f es continua en $[a,b]$ y G es una función continua en $[a,b]$ y primitiva de f en (a,b) entonces: $\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$

Existen funciones f continuas cuyas primitivas no se pueden expresar mediante funciones elementales. Así, por ejemplo, $f(x)=e^{x^2}$. En estos casos, la regla de Barrow no tiene utilidad y se hace necesaria la utilización de métodos numéricos.

c) Si $x>0$ la función $f(x)=\cos^3(x)$ es continua. Si $x<0$ la función $f(x)=(x+1)\cos(x)$ también es continua, por ser producto de funciones continuas.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)\cos(x)=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos^3(x)=1 \qquad f(0)=1$$

f es continua en todo R; por tanto, la función $f(x)$ tiene primitiva en R. Para obtener dos primitivas de $f(x)$ en R, vamos a calcular las integrales indefinidas (conjunto de primitivas) de las funciones $(x+1)\cos(x)$ y $\cos^3(x)$.

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$ método de integración por partes

Sea $u=x+1$ y $dv=\cos(x)\,dx$, es decir, $du=dx$ y $v=sen(x)$

$$\int (x+1)\cos(x)\,dx=(x+1)sen(x)-\int sen(x)\,dx=(x+1)sen(x)+\cos(x)+C$$

$$\int \cos^3(x)\,dx=\int \cos(x)\cos^2(x)\,dx=\int \cos(x)\left(1-sen^2(x)\right)dx=\int \cos(x)\,dx-\int sen^2(x)\cos(x)\,dx=$$

$$=sen(x)-\frac{sen^3(x)}{3}+K$$

Si elegimos adecuadamente las constantes C y K, resulta que la función siguiente

$$F(x) = \begin{cases} (x+1)sen(x) + \cos(x) + C, & x \le 0 \\ sen(x) - sen^3(x)/3 + K, & x > 0 \end{cases}$$

sería una primitiva de $f(x)$ en R. Para ello, la función $F(x)$ habría de ser continua en $x = 0$

$F(x)$ es continua en $x = 0 \Leftrightarrow 1 + C = K.$ Si elegimos $C = 0$ resulta $K = 1$

$$F(x) = \begin{cases} (x+1)sen(x) + \cos(x), & x \le 0 \\ sen(x) - sen^3(x)/3 + 1, & x > 0 \end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Si elegimos $K = 0$ resulta $C = -1$

$$G(x) = \begin{cases} (x+1)sen(x) + \cos(x) - 1, & x \le 0 \\ sen(x) - sen^3(x)/3, & x > 0 \end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(-\pi) = sen(\pi) - sen^3(\pi)/3 + 1 - \big((1-\pi)sen(-\pi) + \cos(-\pi)\big) = 1 - (-1) = 2$$

3)

a) Obtener una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{4+36x^2}$, sin realizar cambio de variable y sin alargar el proceso de manera innecesaria ¿es convergente la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0, +\infty)$?

b) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y = \dfrac{x-1}{1+\sqrt[3]{x}}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 8$. Aplicar el teorema del cambio de variable en la integral definida.

(0.75p.+2p.)

Solución.

a) $$f(x) = \frac{1}{4+36x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(3x)^2} = \frac{1}{12}\frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{1}{12}\frac{g'(x)}{1+\big(g(x)\big)^2}$$

Una primitiva de $f(x)$ es $\dfrac{1}{12}arctg\big(g(x)\big) = \dfrac{1}{12}arctg(3x)$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx = \frac{1}{12}\lim_{b\to+\infty}\big(arctg(3b) - arctg(0)\big) = \frac{1}{12}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}$$

La integral es convergente ya que define un número real.

b)

Sea $f(x)=\dfrac{x-1}{1+\sqrt[3]{x}}$. Si $x\in[0,1]\Rightarrow f(x)\le 0$. Si $x\in[1,8]\Rightarrow f(x)\ge 0$

$$A=\int_0^8 |f(x)|\,dx=-\int_0^1 \frac{x-1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx+\int_1^8 \frac{x-1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=-\int_0^1 \frac{t^3-1}{1+t}3t^2\,dt+\int_1^2 \frac{t^3-1}{1+t}3t^2\,dt$$

Se ha realizado el cambio de variable $x=t^3$ con $t\in[0,1]$ y $t\in[1,2]$.

$$A=-3\int_0^1\left(t^4-t^3+t^2-2t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt+3\int_1^2\left(t^4-t^3+t^2-2t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=$$

$$A=-3\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+2t-2\log|t+1|\right]_0^1+3\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+2t-2\log|t+1|\right]_1^2=$$

$$A=-3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1+2-2\log(2)\right)+3\left(\frac{32}{5}-4+\frac{8}{3}-4+4-2\log(3)\right)-3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1+2-2\log(2)\right)$$

$$=\frac{15}{2}+6\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

4)

a) Demostrar que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente si $r\in(-1,1)$ y obtener la suma de la serie ¿Para qué valor o valores de r es oscilante? Justifíquese la respuesta.

b) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)\,3^{\alpha.n}}{n^2+2}$ $(\alpha\in R,\alpha<0)$, usando el criterio de comparación.

c) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$

Nota.
En ningún caso se puede aplicar la regla de L' Hôpital en límites de sucesiones.

(1p.+0.75p.+0.75p.)

Solución.

a)

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} r^k=r+r^2+\ldots+r^n \quad , \quad r.s_n=r^2+r^3+\ldots+r^n+r^{n+1}$$

$(1-r)s_n=r-r^{n+1}$. Así pues, si $r\ne 1$, $s_n=\dfrac{r-r^{n+1}}{1-r}$

Si $r \in (-1,1)$, entonces $r^{n+1} \to 0$ y por tanto $s_n \to \dfrac{r}{1-r}$ convergente $S = \dfrac{r}{1-r}$

Si $r = -1$, $s_n = \dfrac{-1-(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 0 & ,n \text{ par} \\ -1 & ,n \text{ impar} \end{cases}$ oscilante

Para los restantes valores de r la serie es divergente,

Si $r > 1$, entonces r^{n+1} es divergente a $+\infty$ y por tanto s_n es divergente a $+\infty$.

Si $r < -1$, entonces r^{n+1} es divergente sin límite y por tanto s_n es divergente sin límite.

Si $r = 1$, $s_n = n \to +\infty$ divergente a $+\infty$

b) La serie a estudiar es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\,3^{\alpha.n}}{n^2+2}$ $(\alpha \in R, \alpha < 0)$. Sea $a_n = \dfrac{(n^2+1)\,3^{\alpha.n}}{n^2+2}$

Si $\alpha < 0$ entonces $3^{\alpha} = \dfrac{1}{3^{-\alpha}} \in (0,1)$

Sea $b_n = 3^{\alpha.n}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_b = \sum_{n=1}^{\infty} (3^{\alpha})^n$ es una serie geométrica convergente de razón $r = 3^{\alpha} \in (-1,1)$

Las dos series son de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2}{1+2/n^2} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \text{ (el límite es distinto de cero y de infinito)}$$

Aplicando el criterio de comparación resulta que las dos series tienen el mismo carácter. Así pues, la serie de término general a_n es convergente.

c) Para estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,n!}{n^n}$ usaremos el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^n}{(n+1)^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

La serie es convergente