EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-01-2022

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) Razonar la certeza o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tal que $a_n \geq 0 \quad \forall n$, es convergente o bien divergente a $+\infty$.

b) Sea f continua (no trigonométrica) en $[-a, a]$. Si f es par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx \neq 0$

Si la afirmación es cierta, justifíquese. Si es falsa, póngase un contraejemplo.

(1p.+0.75p.)

2)

a) ¿Qué familia de funciones es la integral indefinida de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$? Justifíquese la respuesta.

b) Enunciar el 2º teorema fundamental del cálculo integral (regla de Barrow). Si la función $f(x) = e^{x^2}$ es continua en cualquier intervalo $[a, b]$ ¿por qué no es posible resolver la integral $\int_a^b e^{x^2}\, dx$ usando dicha regla?

c) Sea $f(x) = \begin{cases} (x+1)\cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos^3(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Obtener, si es posible, dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ que sean primitivas de $f(x)$ en R y usar una de ellas para obtener la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, usando la regla de Barrow una sola vez.

(0.5p.+1p.+1.5p.)

3)

a) Obtener una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{4+36x^2}$, sin realizar cambio de variable y sin alargar el proceso de manera innecesaria ¿es convergente la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0, +\infty)$?

b) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y = \dfrac{x-1}{1+\sqrt[3]{x}}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 8$. Aplicar el teorema del cambio de variable en la integral definida.

(0.75p.+2p.)

4)

a) Demostrar que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente si $r \in (-1, 1)$ y obtener la suma de la serie ¿Para qué valor o valores de r es oscilante? Justifíquese la respuesta.

b) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2+1)\, 3^{\alpha.n}}{n^2+2}$ $(\alpha \in R, \alpha < 0)$, usando el criterio de comparación.

c) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$

Nota.
En ningún caso se puede aplicar la regla de L' Hôpital en límites de sucesiones.

(1p.+0.75p.+0.75p.)