Tema 4

Funciones de varias variables

Contenido

4.1. Preliminares: el espacio $\mathbb{R}^n$

4.1.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1.1 (Producto escalar euclídeo) *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Se define el producto escalar euclídeo de* $\mathbf{x}$ *por* $\mathbf{y}$, *y se denota* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, *como el número real*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera. El producto escalar verifica las siguientes propiedades:

- Definido positivo:
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0.$$
Además, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si, y solo si, $\mathbf{x} = 0$.

- Simetría:
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

- Bilinealidad:
$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}),$$
$$\mathbf{w} \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}).$$

Definición 4.1.2 (Norma euclídea) *Se llama norma euclídea de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y se denota por $\|\mathbf{x}\|$, al número real*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

La norma verifica las siguientes propiedades: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera, entonces

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.
- $\|\mathbf{x}\| = 0$ si, y solo si, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, para cualquier número real λ.
- Desigualdad de Minkowski: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Definición 4.1.3 (Vector unitario) *Se dice que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|\mathbf{x}\| = 1$.*

Definición 4.1.4 (Distancia euclídea) *Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La distancia euclídea entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se define como el número real*

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

La distancia euclídea satisface las siguientes propiedades: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ cualesquiera, entonces

- $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.
- $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, si, y solo si, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

4.1.2. Subconjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1.5 (Bola abierta) *Sean* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r \in \mathbb{R},\ r > 0$. *Se llama bola abierta de centro* $\mathbf{a}$ *y radio* r *al conjunto*

$$\mathcal{B}(a, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathrm{d}(x, a) < r\}.$$

O equivalentemente,

$$\mathcal{B}(a, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

Observaciones

- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{B}(a, r) = (a - r, a + r)$.
- Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, la bola $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ es el círculo de centro $\mathbf{a}$ y radio r (sin la correspondiente circunferencia).

Definición 4.1.6 (Conjunto abierto) *Se dice que un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es abierto si para cada punto* $\mathbf{a} \in X$ *existe una bola centrada en* $\mathbf{a}$ *que está contenida en* X.

Definición 4.1.7 (Entorno de un punto) *Se dice que un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un entorno de un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *si* X *es abierto y además* $x \in X$.

Definición 4.1.8 (Conjunto cerrado) *Se dice que un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es cerrado si su complementario* $\mathbb{R}^n - X$ *es abierto.*

Definición 4.1.9 (Conjunto acotado) *Se dice que un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es acotado si* X *está contenido en una bola.*

Definición 4.1.10 (Conjunto compacto) *Se dice que un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es compacto si es cerrado y acotado.*

Definición 4.1.11 (Punto de acumulación) *Se dice que* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *es un punto de acumulación de* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *si para todo* $r > 0$ *se cumple:*

$$(\mathcal{B}(x_0, r) - \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos de acumulación de X *se suele denotar por* X'.

Teorema 4.1.12 (Bolzano-Weierstrass) *Todo subconjunto infinito de número reales tiene un punto de acumulación.*

4.2. Funciones reales de dos variables

4.2.1. Funciones reales de dos variables

Definición 4.2.1 (Función real de dos variables) *Una función real de dos variables f es una aplicación*

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nótese que $f(x, y) = z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

Definición 4.2.2 (Dominio e imagen) *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, al conjunto A se llama dominio de la función f, y se denota* $\mathrm{Dom}f$. *A veces nos referimos a una función sin mencionar su dominio, por ejemplo*

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

En ese caso es necesario determinar el dominio de la función, i.e.,

$$\mathrm{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

Se llama imagen de la función f, y se denota $\mathrm{Im}f$, *al conjunto*

$$\mathrm{Im}f = \{z \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe } (x, y) \in \mathrm{Dom}f,\ f(x, y) = z\}.$$

Definición 4.2.3 (Gráfica) *Se llama gráfica o grafo de una función f al conjunto*

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in \mathrm{Dom}f\}.$$

Definición 4.2.4 (Curva de nivel) *Se llama curva de nivel c de una función f al conjunto*

$$\{(x, y) \in \mathrm{Dom}f \,:\, f(x, y) = c\}.$$

En lo que sigue f denota una función real de dos variables.

4.2.2. Límites

Definición 4.2.5 (Límite de una función en un punto) *Se dice que el límite de una función f en el punto (x_0, y_0) (en acumulación de Domf) es $l \in \mathbb{R}$, si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε y de (x_0, y_0)) tal que si* $(x, y) \in \mathrm{Dom}f$ *y*

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \text{ entonces } |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Esta expresión también puede escribirse utilizando el concepto de bola abierta:

$$\text{si } (x,y) \in \mathcal{B}((x_0,y_0),\delta),\ (x,y) \neq (x_0,y_0),\ \text{entonces } f(x,y) \in \mathcal{B}(l,\varepsilon).$$

Se denota

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l.$$

Observación

Para que la definición tenga sentido es necesario que (x_0, y_0) sea un punto de acumulación. De aquí en adelante, siempre que consideremos el límite de una función en un punto, sopondremos que el punto es de acumulación del dominio.

Teorema 4.2.6 *El límite de una función en un punto, si existe, es único.*

Propiedades de los límites

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y sean f y g tales que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,y) = \alpha l_1,$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = l_1 + l_2,$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = l_1 l_2,$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$.

Definición 4.2.7 (Límite de una función relativo a un conjunto) *Sea $S \subset \mathrm{Dom} f$ y (x_0, y_0) un punto de acumulación de S, se dice que el límite de una función f en el punto (x_0, y_0) relativo al conjunto S es l, si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε y de (x_0, y_0)) tal que si $(x, y) \in \mathrm{Dom} f \cap S$ y*

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta, \text{ entonces } |f(x,y) - l| < \varepsilon.$$

Se denota

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in S}} f(x,y) = l.$$

Teorema 4.2.8 *Si existe el límite de f en (x_0, y_0) y es l, entonces también existe el límite de f en (x_0, y_0) relativo a cualquier conjunto $S \subset \mathrm{Dom} f$ y es l.*

Observaciones

- El resultado anterior es útil para demostrar que una función no tiene límite en un punto. Si se verifica que existen dos subconjuntos $S, R \subset \text{Dom} f$ tales que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in S}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in R}} f(x,y),$$

  o bien no existe uno de estos límites, entonces no existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

- Los conjuntos más utilizados para el cálculo de límites son rectas y curvas.

Teorema 4.2.9 (Cambio a coordenadas polares) *Para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, *existe un único punto* $(r,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi)$ *tal que*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{4.1}$$

Definición 4.2.10 (Cambio a coordenadas polares) *Llamaremos coordenadas polares del punto* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *al único punto* $(r,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi)$ *que satisface pol.*

Observaciones

Llamaremos cambio de coordenadas cartesianas a polares a la función inyectiva

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & (0,+\infty) \times [0,2\pi) \\ & & (x,y) & \longrightarrow & \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \end{array}$$

A su inversa, la llamaremos cambio de coordenadas polares a cartesianas, i.e.,

$$\begin{array}{rcccl} \Phi^{-1} & : & (0,+\infty) \times [0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ & & (r,\theta) & \longrightarrow & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

Teorema 4.2.11 (Criterio de la mayorante) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Son equivalentes:*

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$;
- *Existe una función* $h : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *tal que para cualquier* $\theta \in [0,2\pi)$ *se tiene que*

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - l| \leq h(r) \qquad \textit{para todo } r > 0$$
$$\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0.$$

Observaciones

- El teorema anterior es válido solo para funciones reales de dos variables.
- En el teorema, es suficiente que la función h esté definida en un entorno del origen.
- Aunque el teorema anterior es válido solo para límites en el origen puede aplicarse a límites en otros puntos teniendo en cuenta el siguiente resultado:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \text{si, y solo si,} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = l$$

4.2.3. Continuidad

Definición 4.2.12 (Continuidad de una función en un punto) *Se dice que f es continua en el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ (un punto de acumulación de $\mathrm{Dom} f$) si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Definición 4.2.13 (Función continua en un conjunto) *Se dice que f es continua en $A \subset \mathrm{Dom} f$ si f es continua en todos los puntos de A.*

Observaciones

- Los polinomios de dos variables son funciones continuas.
- Al operar con funciones continuas de dos variables se obtienen funciones que son también continuas en sus dominios.

4.2.4. Derivadas parciales

Definición 4.2.14 (Derivada direccional) *Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario. La derivada direccional de f según el vector $\mathbf{u}$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ (interior del $\mathrm{Dom} f$) se define como el valor del límite*

$$f_u(x_0, y_0) = D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(u_1, u_2)) - f(x_0, y_0)}{t},$$

siempre que este límite exista y sea un número real.

Observación

De forma análoga se puede definir la derivada de f en un punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ según un vector $\mathbf{v}$ no unitario (en este caso la derivada no se denomina direccional). Se puede demostrar que si $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$, con $\|\mathbf{u}\| = 1$, entonces

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \|\mathbf{v}\| D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0).$$

Definición 4.2.15 (Derivadas parciales) *Se define la derivada parcial de f respecto de x en el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ como el valor del límite*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t},$$

siempre que este límite exista y sea un número real.

Se define la derivada parcial de f respecto de y en el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ como el valor del límite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t},$$

siempre que este límite exista y sea un número real.

Observaciones

- La derivada parcial de f respecto de x en el punto (x_0, y_0) se corresponde con la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) según el vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Por tanto,

$$D_{\mathbf{e}_1} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- La derivada parcial de f respecto de x es la derivada de f respecto de x manteniendo constante la variable y. En el conjunto de puntos $A \subset \mathrm{Dom} f$ donde exista la derivada parcial de f respecto de x podemos definir la función

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$$

  Es habitual utilizar la siguiente notación

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) .$$

- La derivada parcial de f respecto de y en el punto (x_0, y_0) se corresponde con la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) según el vector $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Por tanto,

$$D_{\mathbf{e}_2} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

- La derivada parcial de f respecto de y es la derivada de f respecto de y manteniendo constante la variable x. En el conjunto de puntos $B \subset \mathrm{Dom} f$ donde exista la derivada parcial de f respecto de y podemos definir la función

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial y} : & B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array}$$

  Es habitual utilizar la siguiente notación

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) .$$

4.2.5. Diferenciabilidad

Definición 4.2.16 (Función diferenciable en un punto) *Se dice que f es diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - L(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0. \quad \text{(Condición de diferenciabilidad)}$$

Proposición 4.2.17 *La aplicación lineal L que verifica la condición anterior es única y está definida por*

$$L(h_1,h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Esta aplicación se llama diferencial de f en (x_0, y_0), y se denota $df(x_0, y_0)$:

$$\begin{array}{rccl} df(x_0,y_0) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h_1,h_2) & \longrightarrow & df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}$$

Teniendo en cuenta la proposición anterior, la condición de diferenciabilidad puede escribirse de la forma

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Nótese que la aplicación diferencial $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y su representación matricial es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Observaciones

- Los polinomios de dos variables son diferenciables.
- Al operar con funciones diferenciables de dos variables se obtienen funciones que son también diferenciables en sus dominios.

Teorema 4.2.18 *Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).*

Teorema 4.2.19 (Condición suficiente de diferenciabilidad) *Si existen las derivada parciales de f en un punto (x_0, y_0) y al menos una de ellas es continua en una bola centrada en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).*

Observación

Los recíprocos de los dos teoremas anteriores no se verifican en general.

4.2.6. Gradiente y plano tangente

Definición 4.2.20 (Vector gradiente) *Se llama vector gradiente de f en (x_0, y_0) al vector*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Nótese que si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h_1, h_2).$$

Teorema 4.2.21 *Sea f diferenciable en (x_0, y_0). Entonces existe la derivada direccional de f en (x_0, y_0) según cualquier vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y además*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(u_1, u_2) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2).$$

Proposición 4.2.22 *El gradiente de f en (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por el punto (x_0, y_0).*

Teorema 4.2.23 *Sea f diferenciable en (x_0, y_0). Entonces el valor máximo de la derivada direccional de f en (x_0, y_0) se alcanza en la dirección y sentido del gradiente.*

Definición 4.2.24 (Plano tangente) *Sea f diferenciable en un punto (x_0, y_0). Se llama plano tangente a f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores*

$$\left\{ \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \right\};$$

es decir,

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \right\}.$$

El plano tangente afín que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se define:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right\}.$$

4.2.7. Derivadas parciales de segundo orden

Si existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en un conjunto $A \subset \text{Dom} f$, esta derivada parcial es de nuevo una función

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$$

Si esta derivada parcial tiene, a su vez, derivadas parciales, les llamaremos derivadas parciales segundas de f y denotaremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Análogamente para la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Las derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ reciben el nombre de derivadas parciales segundas cruzadas.

Otra notación para las derivadas parciales segundas es

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Teorema 4.2.25 (Schwarz) *Sea f tal que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en una bola de centro (x_0, y_0), y además $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en (x_0, y_0). Entonces existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ y ambas coinciden:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Definición 4.2.26 (Matriz hessiana, hessiano) *Se llama matriz hessiana de f en el punto (x_0, y_0) (en el caso de que exista) a la matriz*

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se llama hessiano de f en el punto (x_0, y_0) al determinante de la matriz hessiana:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

4.3. Funciones de varias variables

4.3.1. Funciones de varias variables

Definición 4.3.1 (Función real de n variables) *Una función real de n variables es una aplicación*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Entonces, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \in \mathbb{R}$

Las funciones reales de n variables también se llaman campos escalares.

Observaciones

El estudio de las funciones reales de dos variables se generaliza sin dificultad al caso de funciones reales de n variables:

- En el caso de funciones de n variables se pueden definir n derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

  Por tanto el gradiente es

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

- El espacio tangente a la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en el punto $(a, f(a))$, donde $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se define

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) x_n \right\}.$$

- Los demás conceptos se extienden a n variables de forma similar.

Definición 4.3.2 (Función vectorial de n variables) *Una función vectorial de n variables es una aplicación*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Entonces, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Definición 4.3.3 (Funciones coordenadas) *Sea f una función vectorial de n variables*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & (y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{array}$$

Se llama función coordenada i-ésima de f $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a la función real de n variables:

$$\begin{array}{cccc} f_i & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & y_i \end{array}$$

Observaciones

El estudio de las funciones vectoriales de n variables se basa en el estudio de sus funciones coordenadas:

- Una función vectorial en n variables tiene límite en un punto si sus funciones coordenadas tienen límite en ese punto:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}), \ldots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})\right) = (l_1, l_2, \ldots, l_m).$$

- Una función vectorial en n variables es continua en un punto si sus funciones coordenadas son continuas en ese punto.

4.3.2. Diferenciabilidad

Definición 4.3.4 (Función diferenciable en un punto) *Se dice que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{Dom} f$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \qquad \text{(Condición de diferenciabilidad)}$$

Proposición 4.3.5 *La aplicación lineal L que verifica la condición anterior es única y su matriz es*

$$Jf(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se llama matriz jacobiana de f en $\mathbf{x}_0$ y la aplicación lineal asociada se llama diferencial de f en $\mathbf{x}_0$ y se denota $df(\mathbf{x}_0)$.

Observaciones

- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la matriz jacobiana de f en $\mathbf{x}_0$ coincide con el gradiente en $\mathbf{x}_0$.
- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la matiz jacobiana de f en x_0 es $f'(x_0)$.
- El espacio tangente a la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en el punto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^{n+m}$, donde $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se define

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^{n+m} : z_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) x_j, \text{ para todo } i = 1, \ldots m \right\}.$$

4.3.3. Regla de la cadena

Teorema 4.3.6 (Regla de la cadena) *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tales que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$*. Si f es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y g es diferenciable en $f(\mathbf{x_0})$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y además*

$$d(g \circ f)(\mathbf{x_0}) = dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x_0}).$$

Observaciones

- La matriz correspondiente a la composición $dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x_0})$ es el producto de las matrices jacobianas asociadas a $dg(f(\mathbf{x}_0))$ y $df(\mathbf{x_0})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_p}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

- En el caso $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0$ es su gradiente en $\mathbf{x}_0$:

$$\nabla(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\nabla f(\mathbf{x_0}) = \left(g'(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), g'(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\right).$$

- En el caso $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0$ es la derivada de la función $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\mathbf{x}_0$:

$$(g\circ f)'(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0)) \ \frac{\partial g}{\partial y}(f(x_0))\right)\begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0)f_1'(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(x_0))f_2'(x_0).$$

4.4. Teorema de la Función Implícita

Teorema 4.4.1 (Versión simple) *Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^p en un entorno del punto (x_0, y_0) tal que*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existe un único $y(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ verificando $F(x, y(x)) = 0$. En particular, se puede definir una aplicación

$$y : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

que satisface:

- $y(x_0) = y_0$
- $F(x, y(x)) = 0$ *para todo* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
- $y \in C^p(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Teorema 4.4.2 (Versión general) *Sea* $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *de clase* C^p *en un entorno del punto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\det d_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces existe $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo* $x \in B(x_0, \varepsilon)$ *existe un único* $y(x) \in B(y_0, \varepsilon)$ *verificando* $F(x, y(x)) = 0$. *En particular, se puede definir una aplicación*

$$y : B(x_0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$$

que satisface:

- $y(x_0) = y_0$
- $F(x, y(x)) = 0$ *para todo* $x \in B(x_0, \varepsilon)$.
- $y \in C^p(B(x_0, \varepsilon))$.

4.5. Extremos

4.5.1. Extremos relativos

Por simplicidad en lo que sigue utilizaremos funciones $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pero se puede generalizar con facilidad para funciones de n variables como se verá en algunos ejemplos.

Definición 4.5.1 (Extremos relativos) *Sea* f *una función real de dos variables.*

Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ *es un máximo relativo o local de* f *si existe una bola centrada en* (x_0, y_0), $\mathcal{B}((x_0, y_0), r)$, *tal que* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *para todos los valores* $(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap \mathrm{Dom} f$.

Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom} f$ *es un mínimo relativo o local de* f *si existe una bola centrada en* (x_0, y_0), $\mathcal{B}((x_0, y_0), r)$, *tal que* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *para todos los valores* $(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap \mathrm{Dom} f$.

Definición 4.5.2 (Extremos absolutos) *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función real de dos variables.*

Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in A$ *es un máximo absoluto o global de* f *en* A *si* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *para todos los valores* $(x, y) \in A$.

Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in A$ *es un mínimo absoluto o global de* f *en* A *si* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *para todos los valores* $(x, y) \in A$.

Teorema 4.5.3 (Weierstrass) *Sea f una función continua en un conjunto compacto $B \subset \mathrm{Dom} f$. Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en B.*

Teorema 4.5.4 *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in A$ es un extremo relativo de f y existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0), entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Observación

El recíproco del teorema anterior no se verifica en general.

Definición 4.5.5 (Punto crítico) *Se dice que (x_0, y_0) es un punto crítico de la función f si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, es decir, si*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Definición 4.5.6 (Punto de silla) *Se dice que un punto crítico (x_0, y_0) de f es un punto de silla si en toda bola centrada en (x_0, y_0), $\mathcal{B}((x_0, y_0), r)$, existen puntos (x, y) tales que $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ y otros puntos (x, y) tales que $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.*

Teorema 4.5.7 (Condición suficiente para la existencia de extremos) *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales segundas continuas. Sea (x_0, y_0) un punto crítico de f.*

Denotamos por Δ_k los menores principales de la matriz hessiana de f en (x_0, y_0). Entonces,

- *Si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un mínimo relativo (estricto) de f.*
- *Si $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un máximo relativo (estricto) de f.*
- *Si $\Delta_2 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de f.*

Observaciones

- Nótese que Δ_2 es el hessiano de f en (x_0, y_0).
- Si no se dan las condiciones del teorema anterior el criterio no decide.
- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, en el teorema anterior se tiene
  - Si $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x}_0$ es un mínimo relativo (estricto) de f.
  - Si $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x}_0$ es un máximo relativo (estricto) de f.
  - Si $\Delta_n \neq 0$ y no se cumplen las condiciones de ninguno de los apartados anteriores, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de silla de f.

4.5.2. Extremos condicionados

Definición 4.5.8 (Extremos condicionados) *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean*

$$f, \phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sea X el subconjunto de A

$$X = \{(x, y) \in A \,:\, \phi(x, y) = 0\}$$

Se dice que (x_0, y_0) es un máximo de f condicionado a X (o a la ecuación $\phi(x, y) = 0$) si (x_0, y_0) es un máximo de f cuando consideramos f restringida al conjunto X.

Se dice que (x_0, y_0) es un mínimo de f condicionado a X (o a la ecuación $\phi(x, y) = 0$) si (x_0, y_0) es un mínimo de f cuando consideramos f restringida al conjunto X.

Teorema 4.5.9 (Lagrange) *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean $f, \phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en A. Sea $X = \{(x, y) \in A \,:\, \phi(x, y) = 0\}$. Si (x_0, y_0) es un extremo f condicionado a X y $\nabla\phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces existe un número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla\phi(x_0, y_0)$$

Observaciones

- A λ se le llama multiplicador de Lagrange y el método basado en el teorema anterior para hallar los extremos condicionados de una función se denomina método de los multiplicadores de Lagrange.

- Es habitual enunciar el teorema anterior definiendo una función S de la forma:

  $$S(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$$

  Bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene que si (x_0, y_0) es un extremo f condicionado a X y $\nabla\phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces existe un número real λ_0 tal que (x_0, y_0, λ_0) es un punto estacionario de la función $S(x, y, \lambda)$. A S se le llama función de Lagrange.

- Este teorema solo identifica candidatos a extremos locales, pero estos candidatos podrían no ser extremos. Existen resultados que aseguran codiciones suficientes para la existencia y clasificación de los extremos aunque su aplicación resulta, en ocasiones, compleja. Sin embargo, en muchos problemas es posible distinguir máximos y mínimos relativos teniendo en cuenta la naturaleza física o geométrica del problema. Si el conjunto X es compacto para hallar y clasificar los extremos globales es suficiente con evaluar la función en los puntos obtenidos con el método de Lagrange.

Observación

Para hallar los extremos de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ condicionados a un conjunto

$$X = \{(x, y) \in A \, : \, \phi(x, y) = 0\}$$

seguiremos los siguientes pasos:

- Planteamos las ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla \phi(x, y),$$

$$\phi(x, y) = 0.$$

- Las ecuaciones anteriores dan lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Resolvemos es sistema y evaluamos la función f en cada par (x, y) solución del sistema anterior. Clasificamos los posibles extremos teniendo en cuenta la naturaleza del problema.

Teorema 4.5.10 (Lagrange general) *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (con $m < n$) con derivadas parciales continuas en A. Sea $X = \{x \in A : \phi_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m\}$. Si x_0 es un extremo f condicionado a X y*

$$d\phi(x_0) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m \textit{ tiene rango máximo,}$$

entonces existe un vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \phi_1(x_0) + \cdots + \lambda_m \nabla \phi_m(x_0).$$