Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 11-01-2021

En las preguntas tipo test hay que contestar razonadamente, al igual que en el resto de preguntas. Cualquier resultado, no trivial, no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario, no se valorará. No está permitido usar calculadora.

1) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$

a) converge a 0 b) converge a $-\log(2)$ c) converge a $\log(2)$ d) es divergente

(1.5p.)

Solución.

$$a_n = \log\left(\frac{n^2}{n-1}\right) = \log\left(\frac{n}{n+1}.\frac{n}{n-1}\right) = \log\left(\frac{n}{n+1}\right) + \log\left(\frac{n}{n-1}\right) = \log\left(\frac{n}{n+1}\right) - \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = b_{n+1} - b_n$$

$$S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n =$$

$$= b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + b_5 - b_4 + \ldots + b_{n-1} - b_{n-2} + b_n - b_{n-1} + b_{n+1} - b_n = -b_2 + b_{n+1} = -\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(1) = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2)$$

2) Si f es continua en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ entonces

a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ b) $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ c) $\exists x \in [a,b] \;/\; f(x) = 0$ d) ninguna de las anteriores

(1.25p.)

Solución.

Si elegimos $f(x) = x$, $[a,b] = [-1,2]$ resulta $\int_{-1}^{2} x\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$

Si $x \in [-1,0)$, $f(x) = x < 0$ y si $x = 0$, $f(x) = 0$ descartamos las opciones a) y b)

Si elegimos $f(x) = x$, $[a,b] = [1,2]$ resulta $\int_{1}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$

$f(x) = x \neq 0 \quad \forall x \in [1,2]$ descartamos también la opción c).

La respuesta correcta es d) ninguna de las anteriores.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

3)
a) ¿Cuándo se dice que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b)?

Sea $f(x)=\begin{cases}\cos(2x) & \text{si } x\ge 0\\ (2x)/(x^2+1) & \text{si } x<0\end{cases}$ ¿Cuántas primitivas tiene en R la función $f(x)$ dada? Razónese.

b) Sea f una función continua en $[a, b]$. Definir la llamada "función integral" de la función f y enunciar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

c) Sea $f(x)=\begin{cases}x/(x-2)^2 & \text{si } x\le 0\\ \log(x^2+1) & \text{si } x>0\end{cases}$

Obtener una función $F(x)$ que sea una primitiva de $f(x)$ en R y usarla para calcular la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$, sin utilizar $F(0)$.

(0.5p.+0.5 p.+1.5p.)

Solución.

a) $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) $\Leftrightarrow$: F es derivable en (a, b) tal que $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a, b)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x^2+1}=\frac{0}{1}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos(2x)=\cos(0)=1$$

La función f presenta una discontinuidad esencial de 1ª especie de salto finito en el 0. Por tanto, f no tiene primitiva en R. La respuesta es: *ninguna*

b) Sea f continua en $[a, b]$. La "función integral" de f es:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x\in[a, b]$$

Primer teorema fundamental del cálculo integral.

Si f es continua en $[a, b]$, su función integral $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f en (a, b), es decir, F es derivable en (a, b) y $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a, b)$.

c) Si $x>0$ la función $f(x)$ es continua por ser composición de funciones continuas en su dominio. Si $x<0$ también es continua por ser una función racional y no anularse el denominador.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{0}{4}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\log(x^2+1)=\log(1)=0 \qquad f(0)=\frac{0}{4}=0$$

f es continua en todo R; por tanto, la función $f(x)$ tiene primitiva en R. Para obtener una primitiva de $f(x)$ en R, vamos a calcular las integrales indefinidas (conjunto de primitivas) de las funciones $x/(x-2)^2$ y $\log(x^2+1)$.

$$\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} \quad ; \quad x=A(x-2)+B \quad ; \quad A=1 \ , \ -2A+B=0 \quad ; \ A=1,\ B=2$$

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}dx=\int \frac{1}{x-2}dx+2\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=\log|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$ método de integración por partes

Sea $u=\log\left(x^2+1\right)$ y $dv=dx$, es decir, $du=\frac{2x}{x^2+1}dx$ y $v=x$

$$\int \log\left(x^2+1\right)dx=x.\log\left(x^2+1\right)-\int x\frac{2x}{x^2+1}dx=x.\log\left(x^2+1\right)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=x.\log\left(x^2+1\right)-2x+2arctg(x)+K$$

Si elegimos adecuadamente las constantes C y K, resulta que la función siguiente

$$F(x)=\begin{cases}\log|x-2|-\dfrac{2}{x-2}+C, & x\le 0\\ x.\log(x^2+1)-2x+2arctg(x)+K, & x>0\end{cases}$$

sería una primitiva de $f(x)$ en R. Para ello, la función $F(x)$ habría de ser continua en $x=0$

$F(x)$ es continua en $x=0$ $\Leftrightarrow$ $\log(2)+1+C=K$. Si elegimos $C=0$ resulta $K=\log(2)+1$

$$F(x)=\begin{cases}\log|x-2|-\dfrac{2}{x-2}, & x\le 0\\ x.\log(x^2+1)-2x+2arctg(x)+\log(2)+1, & x>0\end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi,2]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=F(1)-F(-1)=\log(2)-2+2arctg(1)+\log(2)+1-\log(3)-\frac{2}{3}=\log\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{5}{3}$$

4)

a) Resolver la siguiente integral, relacionada con la función Gamma, mediante un cambio de variable.

$$\int_0^{+\infty} 4x^2e^{-x^2}dx$$

b) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y=x\sqrt{9-x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x=-3$ y $x=3$. Aplicar el teorema del cambio de variable en la integral definida mediante un cambio trigonométrico.

(1p.+1.5p.)

Solución.

a)

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \qquad \Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \qquad p>0 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Hacemos el cambio de variable $x=g(t)=\sqrt{t}$, $t\in[0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} 4x^2e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} 4\,t\,e^{-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=2\int_0^{+\infty} t^{1/2}e^{-t}dt=2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=2\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

b) Sea $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$, Dom $f=\{x\in R\,/\,x^2\le 9\}=\{x\in R\,/\,|x|\le 3\}=[-3,3]$

$f(x)$ es continua en todo su dominio. Además, $f(x)\le 0\quad \forall x\in[-3,0]$ y $f(x)\ge 0\quad \forall x\in[0,3]$

$$A=\int_{-3}^{3}|\,f(x)\,|\;dx=\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\;dx-\int_{-3}^{0} x\sqrt{9-x^2}\;dx$$

$f(x)$ es producto de una función impar por otra que es par, es decir, $f(x)$ es impar. Por tanto,

$$0=\int_{-3}^{3} f(x)\;dx=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx\text{ , es decir, }\int_{-3}^{0} x\sqrt{9-x^2}\;dx=-\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\;dx$$

Así pues, $A=\int_{-3}^{3}|\,f(x)\,|\;dx=2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\;dx$ (nótese que $|\,f(x)\,|$ es una función par)

Hacemos el cambio de variable $x=g(t)=3sen(t)$, $t\in[0.\pi/2]$ Nótese que $g(0)=0, g(\pi/2)=3$ y la función $g(t)$ es inyectiva en el intervalo $[0.\pi/2]$.

$$A=2\int_0^{\pi/2} 3sen(t)\sqrt{9-9sen^2(t)}\;3\cos(t)\,dt=54\int_0^{\pi/2} sen(t)\sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt=54\int_0^{\pi/2} sen(t)\cos^2(t)\,dt=$$

$$=54\left[-\frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{54}{3}\left(\cos^3(\pi/2)-\cos^3(0)\right)=-\frac{54}{3}(-1)=18u^2$$

5)

a) Enunciar una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente. Justificar el resultado.

b) Estudiar el carácter de las series siguientes: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$

(0.75p.+1.5p.)

Nota.
En ningún caso se puede aplicar la regla de L' Hopital en límites de sucesiones.

Solución.

a) Una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente significa que $\lim_{n\to\infty} S_n = l \in R$, siendo $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$a_n = S_n - S_{n-1} \to l - l = 0$

b) Estudiamos el carácter de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ mediante el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El límite anterior es inferior a uno; por tanto, la serie es convergente.

Para estudiar el carácter de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$ aplicamos el criterio de comparación con la serie armónica básica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right) = \lim_{n\to\infty} n \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2} + n\right)}{\sqrt{n^2+2} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n^2 + 2 - n^2\right)}{\sqrt{n^2+2} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Ambas series tienen el mismo carácter, es decir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$ es divergente a $+\infty$.