Grado en Ingeniería - Rama Industrial
1º Curso - Grupo D

Cálculo
Curso 2018-2019

Examen final convocatoria de Julio

1. Se diseña un almacén de 900 m^2 de planta. La planta del almacén es rectangular con tres paredes de ladrillo y un frente de cristal. Se ha calculado que la pérdida de calor a través del cristal es de 71 kcal por metro lineal y a través del ladrillo es de 50 kcal por metro lineal.

   a) Halla las dimensiones de la planta del almacén para que la pérdida de calor sea mínima. **[1 punto]**

   b) Si añadimos la condición de que la pared de cristal no mida menos de 30 m ni más de 45 m, ¿cúales deben ser en este caso las dimensiones de la planta para optimizar la pérdida de calor? **[1 punto]**

2. Sea la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

   a) Estudiar el carácter de la siguiente integral y calcular su valor en caso de ser convergente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \qquad \textbf{[1 punto]}$$

   b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas. **[1 punto]**

3. *a*) Si $\alpha \neq -1$, calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}. \qquad \textbf{[0.9 punto]}$$

   ¿Qúe ocurre cuando $\alpha = -1$? **[0.1 punto]**

   b) Desarrollar en serie de potencias de x la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. **[1 punto]**

   c) Aplicar el desarrollo anterior para probar que

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cancel{x^{2n+1}}\ 1}{(2n+1)(2n+1)!}. \qquad \textbf{[1 punto]}$$

   d) Estimar el error que se cometería al considerar solo 4 sumandos de la serie para aproximar su valor. **[1 punto]**

   e) Estudiar el intervalo de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2 - n}. \qquad \textbf{[1 punto]}$$

4. Demostrar que la derivada direccional de la función

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x}$$

evaluada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = c^2$, con $c \in \mathbb{R}$ distinto de 0, a lo largo de la normal exterior a la misma, es igual a cero. **[1 punto]**