Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 1-12-2017 (9:15-11)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto.

1) Sea f continua en R y sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado de la recta real. La igualdad

$$\text{int}(f,x,a,b) = \text{int}(f,x,a,c) + \text{int}(f,x,c,b)$$

se verifica si, y sólo si,

a) $c \in R$; b) $c \in (a,b)$; c) $c \le a$; d) $c \ge b$

(1p.)

2) Sea $f(x) = 1/x$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Una primitiva de f en R es:

a) $F(x) = \left|\log(|x|)\right|$, si $x \neq 0$, $F(0) = 0$; b) $F(x) = \log(|x|)$, si $x \neq 0$, $F(0) = 0$

c) $F(x) = -1/x^2$, si $x \neq 0$, $F(0) = 0$; d) f no tiene primitiva en R.

(1p.)

3) La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx$ es:

a) propia ; b) impropia convergente a 1 ; c) impropia convergente a 3 ; d) impropia divergente

(1p.)

4) a) Enunciar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

b) Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{1+x^2}}^{x} \frac{t^3}{t^4+1}dt$, obtener $F'(1)$. Todos los pasos se han de justificar en base a resultados teóricos conocidos.

(0.75p.+1p.)

Solución.

a) Si la función $f:[a,b] \to R$ es continua en $[a,b]$, la función $F:[a,b] \to R$ definida de la forma siguiente: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, es una primitiva de f en (a,b), es decir, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

b) $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{1+x^2}}^{x} \frac{t^3}{t^4+1}dt =$ (propiedad de aditividad) $\displaystyle\int_{\sqrt{1+x^2}}^{0} \frac{t^3}{t^4+1}dt + \int_0^x \frac{t^3}{t^4+1}dt =$

$$= \int_0^x \frac{t^3}{t^4+1}dt - \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{t^3}{t^4+1}dt$$

Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{t^4+1}dt$. Aplicando el primer teorema fundamental resulta $G'(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}$

Sea $H(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{t^3}{t^4+1}dt$. Aplicando la regla de la cadena y el primer teorema fundamental resulta

$$H'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2+1} = \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)^2+1}$$

Así pues,

$$F'(1) = G'(1) - H'(1) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

5)

a) Sean $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$, $g(x) = \dfrac{sen(\pi.x/2)}{4}$. Obtener una primitiva de f y una primitiva de g.

b) Sea $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ g(x) & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

Obtener una función $H(x)$, continua en $[0,2]$, que sea una primitiva de $h(x)$ en $(0,2)$. Usar H para calcular $\int_0^2 h(x)dx$.

(1.5p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x+1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x+2-1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x+2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int f(x)dx = \int dx - \int \frac{2x+2}{(x+1)^2}dx + \int (x+1)^{-2}dx = x - \log(x+1)^2 - (x+1)^{-1} + C$$

Una primitiva de f es: $x - 2\log(|x+1|) - (x+1)^{-1}, \quad x \neq 1$

$$\int g(x)dx = \frac{1}{4}\int sen\left(\frac{\pi.x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\frac{2}{\pi}\int \frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{1}{2.\pi}\cos\left(\frac{\pi.x}{2}\right) + K$$

Una primitiva de g es: $-\dfrac{1}{2.\pi}\cos\left(\dfrac{\pi.x}{2}\right)$

b) La función f es continua en $R - \{-1\}$ y la función g es continua en R; por tanto, la función h es continua en $[0,2]$ excepto, si acaso, en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{sen(\pi.x/2)}{4} = \frac{1}{4} \quad ; \quad h(1) = f(1) = \frac{1}{4}$$

Así pues, h es continua en $[0,2]$. Se garantiza que h es integrable en $[0,2]$ y tiene una primitiva en $(0,2)$.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

$$H(x)=\begin{cases} x-2\log(|x+1|)-(x+1)^{-1}+C & \text{si} \quad x\in[0,1] \\ -\dfrac{1}{2\pi}\cos\left(\dfrac{\pi.x}{2}\right)+K & \text{si} \quad x\in(1,2] \end{cases}$$

Vamos a determinar un valor de C y un valor de K para que $H(x)$ sea continua en $x=1$. De esta manera, la función $H(x)$ será continua en $[0,2]$ y una primitiva de $h(x)$ en $(0,2)$.

H es continua en $x=1 \Leftrightarrow 1-2\log(2)-\dfrac{1}{2}+C=-\dfrac{1}{2\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+K \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}-2\log(2)+C=K$

Podemos elegir $C=2\log(2)$ y $K=1/2$

$$\int_0^2 h(x)dx=H(2)-H(0)=-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi)+\frac{1}{2}-(-1+2\log(2))=\frac{1}{2\pi}+\frac{3}{2}-2\log(2)$$

6)

a) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y=xe^x$, las rectas $x=-1$, $x=1$ y el eje de abscisas.

b) Obtener el volumen del cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje de abscisas la región del plano delimitada por la parte positiva de la curva $y=\sqrt[4]{4-x^2}$ desde $x=0$ hasta $x=2$. Usar la fórmula del cambio de variable en la integral definida.

(1.25p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$A=\int_{-1}^{1}\left|xe^x\right|dx=\int_0^1 xe^x dx-\int_{-1}^{0}xe^x dx$$

El método de integración por partes nos permite obtener una primitiva de la función xe^x

$$u=x \;\Rightarrow\; du=dx \;, \qquad dv=e^x dx \;\Rightarrow\; v=e^x$$

Una primitiva es $uv-\int vdu=xe^x-e^x=(x-1)e^x$

$$A=1-(-1+2e^{-1})=2-\frac{2}{e}$$

b) $V=\pi\displaystyle\int_0^2\left(\sqrt[4]{4-x^2}\right)^2dx=\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4sen^2(t)}\;2\cos(t)\,dt=4\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt=$

Se ha hecho el cambio de variable $x=2sen(t)$, $t\in[0,\pi/2]$

$$=4\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=2\pi\left[t+sen(2t)/2\right]_0^{\pi/2}=2\pi\pi/2=\pi^2$$

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 1-12-2017 (11-12:45)

Una única pregunta tipo test mal contestada no penaliza. Si son dos, penalizaría medio punto y si son las tres, penalizaría un punto.

1) La integral $\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx$ es:

a) propia ; b) impropia convergente a 3 ; c) impropia convergente a 1 ; d) impropia divergente

(1p.)

2) Sea $f(x)=1/x$, si $x\neq 0$, $f(0)=0$. Una primitiva de f en R es:

a) $F(x)=\left|\log(|x|)\right|$, si $x\neq 0, F(0)=0$; b) $F(x)=\log(|x|)$, si $x\neq 0$, $F(0)=0$

c) f no tiene primitiva en R ; d) $F(x)=-1/x^2$, si $x\neq 0$, $F(0)=0$

(1p.)

3) Sea f continua en R y sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado de la recta real. La igualdad

$$\text{int}(f,x,a,b) = \text{int}(f,x,a,c)+\text{int}(f,x,c,b)$$

se verifica si, y sólo si,

a) $c\in(a,b)$; b) $c\leq a$; c) $c\geq b$; d) $c\in R$

(1p.)

4) a) Enunciar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

b) Dada la función $F(x)=\int_{\sqrt{1+x^2}}^{x}\frac{t^3}{t^4+1}dt$, obtener $F'(1)$. Todos los pasos se han de justificar en base a resultados teóricos conocidos.

(0.75p.+1p.)

Solución.

a) Si la función $f:[a,b]\to R$ es continua en $[a,b]$, la función $F:[a,b]\to R$ definida de la forma siguiente: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, es una primitiva de f en (a,b), es decir, $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$.

b) $F(x)=\int_{\sqrt{1+x^2}}^{x}\frac{t^3}{t^4+1}dt=$ (propiedad de aditividad) $\int_{\sqrt{1+x^2}}^{0}\frac{t^3}{t^4+1}dt+\int_0^x\frac{t^3}{t^4+1}dt=$

$$=\int_0^x\frac{t^3}{t^4+1}dt-\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{t^3}{t^4+1}dt$$

Sea $G(x)=\int_0^x\frac{t^3}{t^4+1}dt$. Aplicando el primer teorema fundamental resulta $G'(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$

Sea $H(x)=\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{t^3}{t^4+1}dt$. Aplicando la regla de la cadena y el primer teorema fundamental resulta

$$H'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2+1}=\frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)^2+1}$$

Así pues,

$$F'(1)=G'(1)-H'(1)=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

5)

a) Sean $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$, $g(x)=\frac{sen(\pi .x/2)}{4}$. Obtener una primitiva de f y una primitiva de g.

b) Sea $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in[0,1] \\ g(x) & \text{si } x\in(1,2] \end{cases}$

Obtener una función $H(x)$, continua en $[0,2]$, que sea una primitiva de $h(x)$ en $(0,2)$. Usar H para calcular $\int_0^2 h(x)dx$.

(1.5p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}=1-\frac{2x+1}{(x+1)^2}=1-\frac{2x+2-1}{(x+1)^2}=1-\frac{2x+2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int f(x)dx=\int dx-\int\frac{2x+2}{(x+1)^2}dx+\int(x+1)^{-2}dx=x-\log(x+1)^2-(x+1)^{-1}+C$$

Una primitiva de f es: $x-2\log(|x+1|)-(x+1)^{-1}$, $\quad x\neq 1$

$$\int g(x)dx=\frac{1}{4}\int sen\left(\frac{\pi .x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\frac{2}{\pi}\int\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{1}{2.\pi}\cos\left(\frac{\pi .x}{2}\right)+K$$

Una primitiva de g es: $-\frac{1}{2.\pi}\cos\left(\frac{\pi .x}{2}\right)$

b) La función f es continua en $R-\{-1\}$ y la función g es continua en R; por tanto, la función h es continua en $[0,2]$ excepto, si acaso, en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}\quad ;\quad \lim_{x\to 1^+}h(x)=\lim_{x\to 1}\frac{sen(\pi .x/2)}{4}=\frac{1}{4}\quad ;\quad h(1)=f(1)=\frac{1}{4}$$

Así pues, h es continua en $[0,2]$. Se garantiza que h es integrable en $[0,2]$ y tiene una primitiva en $(0,2)$.

$$H(x)=\begin{cases} x-2\log(|x+1|)-(x+1)^{-1}+C & \text{si} \quad x\in[0,1] \\ -\dfrac{1}{2\pi}\cos\left(\dfrac{\pi.x}{2}\right)+K & \text{si} \quad x\in(1,2] \end{cases}$$

Vamos a determinar un valor de C y un valor de K para que $H(x)$ sea continua en $x=1$. De esta manera, la función $H(x)$ será continua en $[0,2]$ y una primitiva de $h(x)$ en $(0,2)$.

$$H \text{ es continua en } x=1 \Leftrightarrow 1-2\log(2)-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+K \Leftrightarrow \frac{1}{2}-2\log(2)+C=K$$

Podemos elegir $C=2\log(2)$ y $K=1/2$

$$\int_0^2 h(x)dx=H(2)-H(0)=-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi)+\frac{1}{2}-(-1+2\log(2))=\frac{1}{2\pi}+\frac{3}{2}-2\log(2)$$

6)

a) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y=xe^x$, las rectas $x=-1$, $x=1$ y el eje de abscisas.

b) Obtener el volumen del cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje de abscisas la región del plano delimitada por la parte positiva de la curva $y=\sqrt[4]{4-x^2}$ desde $x=0$ hasta $x=2$. Usar la fórmula del cambio de variable en la integral definida.

(1.25p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$A=\int_{-1}^{1}\left|xe^x\right|dx=\int_0^1 xe^x dx-\int_{-1}^{0} xe^x dx$$

El método de integración por partes nos permite obtener una primitiva de la función xe^x

$$u=x \Rightarrow du=dx \ , \qquad dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x$$

Una primitiva es $uv-\int vdu=xe^x-e^x=(x-1)e^x$

$$A=1-(-1+2e^{-1})=2-\frac{2}{e}$$

b) $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt[4]{4-x^2}\right)^2dx=\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4sen^2(t)}\;2\cos(t)\,dt=4\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt=$

Se ha hecho el cambio de variable $x=2sen(t)$, $t\in[0,\pi/2]$

$$=4\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=2\pi\left[t+sen(2t)/2\right]_0^{\pi/2}=2\pi\pi/2=\pi^2$$