

## PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

### QUESTÕES 1 A 3

#### QUESTÃO 1

Prove que a seguinte equação é verdadeira para todo natural  $n > 0$ .

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

#### QUESTÃO 2

Prove que a equação

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

É verdadeira para todo natural  $n > 0$ .

#### QUESTÃO 3

Prove que

$$2_{n+1} < 3_n$$

É verdadeira para todo natural  $n > 1$ .

## NÚMEROS NATURAIS (ADIÇÃO)

### QUESTÕES 4 A 8

#### QUESTÃO 4

Demonstre, a partir da associatividade da adição que:

- $((a+b)+c)+d = (a+(b+c))+d$ .
- $((a+b)+c)+d = a+((b+c)+d)$ .
- $((a+b)+c)+d = a+(b+(c+d))$ .

#### QUESTÃO 5

Demonstre que  $x + 1 = 1 + x$ .

#### QUESTÃO 6

Demonstre que para todo  $x, y \in P$ ,  $S(y) + x = S(y + x)$ .

#### QUESTÃO 7

Demonstre que para todo  $x, y \in P$ ,  $x + y = y + x$  (comutatividade da adição).

### QUESTÃO 8

Demonstre que para todo  $x, y, z \in P$  "Se  $x + z = y + z$  então  $x = y$ " (lei do cancelamento da adição).

## NÚMEROS NATURAIS (MULTIPLICAÇÃO)

### QUESTÕES 9 A 15

#### QUESTÕES 9

Demonstre que

- a)  $2 \times 3 = 6$ ;
- b)  $3 \times 2 = 6$  ; e
- c)  $3 \times 3 = 9$ .

#### QUESTÕES 10

- a) Demonstre que  $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$  (Distributividade à esquerda);
- b) Demonstre que  $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$  (Dist. à dir.).

#### QUESTÕES 11

Demonstre que  $2 \times x = x + x$ .

#### QUESTÕES 12

Demonstre que  $x \times 1 = 1 \times x$  (Lema3).

#### QUESTÕES 13

Demonstre que  $x \times y = y \times x$  (comutatividade da multiplicação).

#### QUESTÕES 14

Demonstre que  $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$  (associatividade da multiplicação).

#### QUESTÕES 15

Demonstre que  $(a \times b) \times (c \times d) = (a \times c) \times (b \times d)$ .

## NÚMEROS NATURAIS (ORDEM)

### QUESTÕES 16 A 19

#### QUESTÕES 16

Demonstre que  $x < S(x)$ .

#### QUESTÕES 17

Demonstre que  $\neg \exists y. (x < y < S(x))$ .

### QUESTÕES 18

Demonstre que a relação  $\leq$  é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

### QUESTÕES 19

Demonstre que se  $x < y$  então  $x \times z < y \times z$ .

## NÚMEROS NATURAIS (EXPONENCIAÇÃO)

### QUESTÕES 20 A 23

Usando a notação  $x^2$  para  $x \times x$  e  $x^3$  para  $x^2 \times x$  e assim sucessivamente. Demonstre que:

### QUESTÕES 20

$$1^2 = 1.$$

### QUESTÕES 21

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \times x \times y + y^2.$$

### QUESTÕES 22

Considerando qualquer sistema de Peano  $(P, S, 1)$ . Existe uma única operação binária  $\tau(x, y)$  sobre  $P$  tal que:

$$(\lambda) \quad \tau(x, 1) = x \text{ for all } x \in P.$$

$$(\sigma) \quad \tau(x, S(y)) = \tau(x, y) \times x, \text{ for all } x, y \in P.$$

### QUESTÕES 23

$$(x \times y)^z = x^y \times x^z$$

## NÚMEROS NATURAIS (ISOMORFISMO)

### QUESTÕES 24

Demonstre que quaisquer dois sistemas de Peano são isomorfos.