# Fundamentos de Lógica Clássica para Computação

Prof. Dr. Anderson Paiva Cruz

Photo by Tachina Lee on Unsplash

# Argumento

Afirmação declarativa 1

⋮

Afirmação declarativa n

---

Afirmação declarativa n+1

Premissas

Conclusão

# Raciocíno Indutivo

*"Se um grande número de As foi observado sob uma ampla variedade de condições, e se todos esses As observados possuíam sem exceção a propriedade B, então todos os As têm a propriedade B."* [1]

[1] CHALMERS, Raul Fiker (tradução). O que é cinência, afinal? São Paulo: Brasiliense, 225 p. 1993.

# Raciocínio Dedutivo

Afirmação 1

⋮

Afirmação n

---

Afirmação n+1

Premissas

Conclusão

DEFINIÇÕES
HIPÓTESES
FATOS / AXIOMAS
AFIRMAÇÕES JÁ INFERIDAS anteriormente

Enunciado do TEOREMA

# Raciocínio dedutivo

Premissas

DEFINIÇÕES
HIPÓTESES
FATOS / AXIOMAS
AFIRMAÇÕES já demonstradas anteriormente

Argumento válido!

---

Conclusão

Enunciado do TEOREMA

# Uso de regras de inferência da Lógica

*Modus Ponens* (ex.1)

Todos os homens são mortais
Sócrates é homem
———————————
Sócrates é mortal

$$\frac{\forall x.(\mathrm{Homem}(x) \rightarrow \mathrm{Mortal}(x)) \quad \mathrm{Homem}(\text{Sócrates})}{\mathrm{Mortal}(\text{Sócrates})}$$

$$\frac{\forall x.(P(x) \rightarrow R(x)) \quad P(a)}{R(a)}$$

# Quandosaber que a afirmação “se... então” é *verdadeira* ou *falsa*?

**Dados do tipo booleano**

**Operadores lógicos**

- Implicação
- Negação
- Disjunção
- Conjunção
- Bi-implicação

# Operadores lógicos e operações sobre conjuntos

- **Representação de conjuntos**
  - Uma lista: {1,2,3}, {1,2,3,…}
  - Notação construtiva: $A = \{x \in \mathbb{U} \mid P(x)\}$
  - Diagramas de (Euller-)Venn
  - Convenções  de representação de conjuntos de números (notação de intervalos, representação na reta)
  - Conjuntos notáveis: { }, $\mathbb{U}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$, $\mathrm{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- **Operações**
  - $\mathbf{A \subseteq B}$
  - $A \cup B$
  - $A \cap B$
  - $A\text{-}B$
  - $A^C$ ou $\bar{A}$ ou $A$

# Introdução à Lógica

Prof. Dr. Anderson Paiva Cruz

*O que lhe vem a mente ao pensar na palavra* ***"LÓGICA"****?*

- Image by [Carlos Alvarenga] from [Pixabay]

Image by Carlos Alvarenga from Pixabay

# *O que lhe vem a mente ao pensar na palavra* ***"LÓGICA"****?*

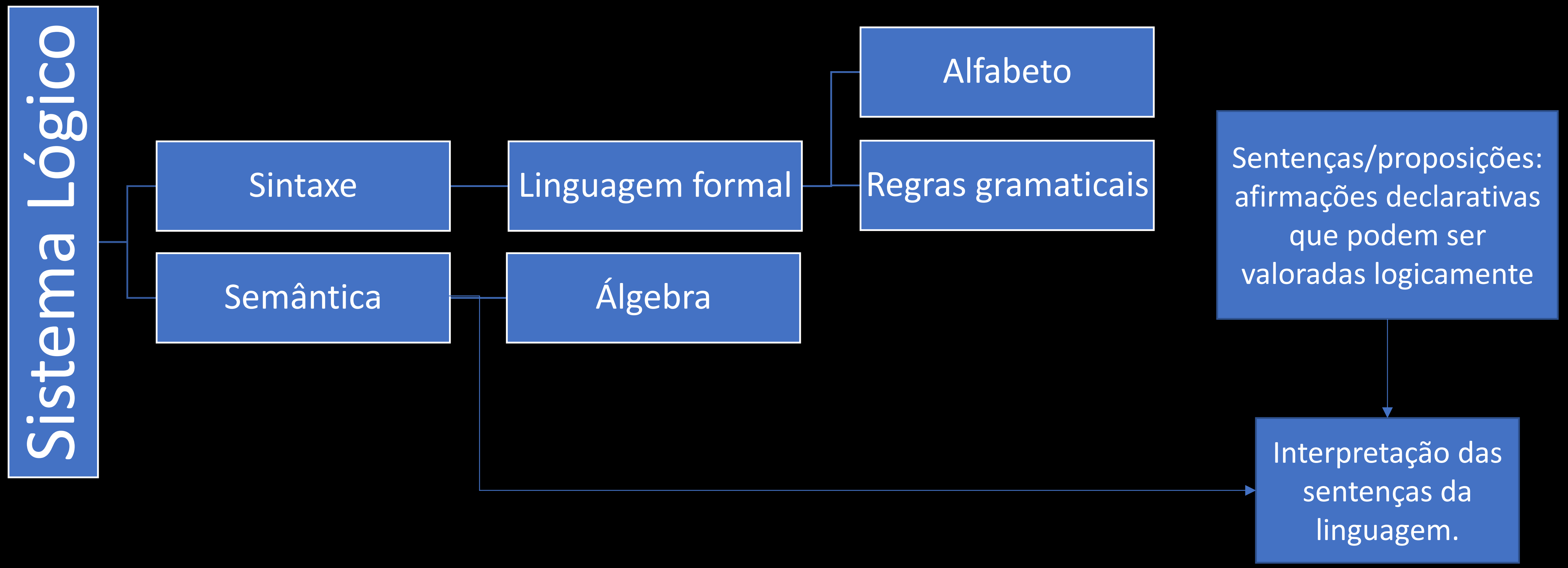
- Óbvio
- Claro/ Clareza
- Raciocínio
- Razão
- Racionalidade
- Silogismo

- Verdade → Falsidade
- Falácia
- Inferência
- Consequência/ Conclusão
- De...Para
- Método

# *Lógica como uma disciplina sistemática*

- Aristóteles e o silogismo

# Introdução à Lógica



# Proposições atômicas e compostas

Exemplos:
Que horas são?
Já pra casa, menino!
água coca latão água coca latão ... pfffff ...pa gringo...
Cinco é maior do que sete.
Existe vida em outros planetas.

~~Que horas são?~~
~~Já pra casa, menino!~~
Cinco é maior do que sete........... p
Existe vida em outros planetas.... q
Sócrates é homem........................ r

Olá! Sou uma **variável proposicional.**

Eu também.

E eu!

Cinco é maior do que sete **e** existe vida em outros planetas............................... $p \wedge q$
Cinco é maior do que sete **ou** existe vida em outros planetas............................ $P \vee q$
**Se** Cinco é maior do que sete **então** existe vida em outros planetas...................$p \longrightarrow q$
Cinco é maior do que sete **se, e somente se,** existe vida em outros planetas.....$p \longleftrightarrow q$

Cinco é maior do que sete **e** existe vida em outros planetas.
Cinco é maior do que sete **ou** existe vida em outros planetas.
**Se** Cinco é maior do que sete **então** existe vida em outros planetas.

# Proposições compostas e operadores lógicos: NEGAÇÃO (¬)

- Anderson é Professor da UFRN. (p)
- Anderson **<u>não</u>** é professor da UFRN. (¬p)

Eu me chamo **tabela verdade.**

| ¬ | p |
|---|---|
| | |

# Proposições compostas e operadores lógicos: CONJUNÇÃO (Λ)

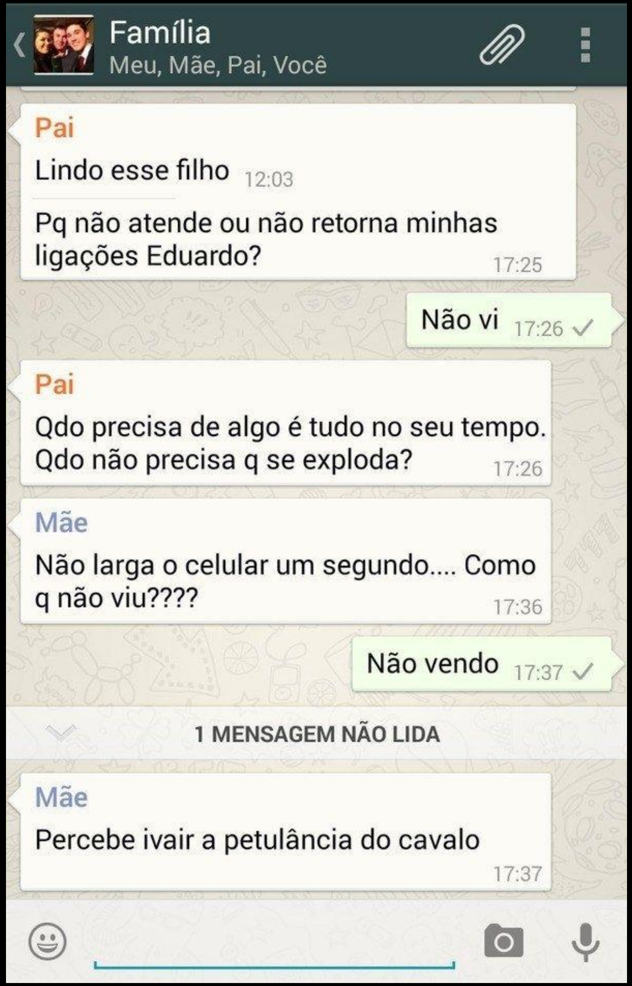
- O professor disse que vai ter prova hoje, mas é em grupo.
  - O professor disse que vai ter prova hoje. (p)
  - A prova é em grupo. (q)

| p | Λ | q |
|---|---|---|
| | | |

# Proposições compostas e operadores lógicos: DISJUNÇÃO (V)

- Luiz me bloqueou ou não abre minhas mensagens.
  - Luiz me bloqueou. (p)
  - Luiz não abre minhas mensagens. (q)

| p | V | p |
|---|---|---|

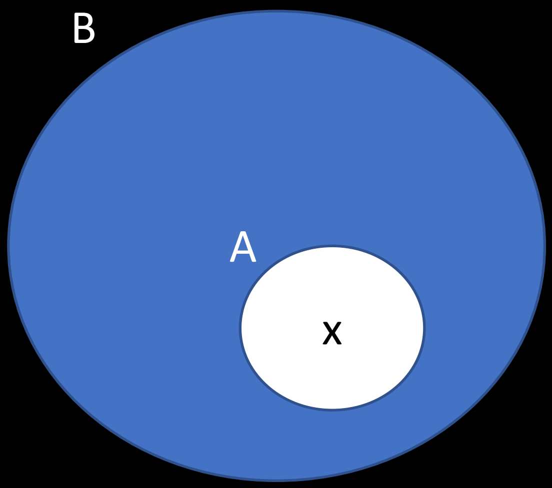


# Proposições compostas e operadores lógicos: IMPLICAÇÃO (⟶)

- Vá comprar pão... Se tiver ovo ENTÃO traga seis.
  - Tem ovo (p)
  - Traga seis pães. (q)

| p | ⟶ | q |
|---|---|---|

# Proposições compostas e operadores lógicos: IMPLICAÇÃO (⟶)




Se x ∈ A então x ∈ B.

x ∈ A é **suficiente** para dizer que x ∈ B.

x ∈ A **só se** x ∈ B. >> Pra que x ∈ A é **necessário** que x ∈ B.

# Proposições compostas e operadores lógicos: BIIMPLICAÇÃO ($\longleftrightarrow$)

- Eu vou pra balada se, e somente se, Anderson for.
  - Eu vou pra balada. (p)
  - Anderson vai pra balada. (q)

---

- Eu vou pra balada, **SE** Anderson for pra balada
  - p **SE** q ................. SE q **ENTÃO** p
- Eu me matriculo em IMDXXXX, **SÓ SE** Anderson for o professor da turma
  - p **SÓ SE** q ............... (q é a condição necessária)

# Como representar e interpretar quantidades na Lógica Clássica?

Quantificador Universal: $\forall x$
Quantificador Existencial: $\exists x$

Image by Gerhard G. from Pixabay

# Predicados

- Interpretação
  - DOMÍNIO
  - ESPECIFICAÇÃO DO PREDICADO E DAS FUNÇÕES (QUANDO HOUVER)
  - ATRIBUIÇÃO DE VALORES ÀS CONSTANTES (QUANDO HOUVER)
  - Eles podem ser unários, binários...

Exs.:

Ataque(x) é unário

- **Domínio**: computadores do campos universitário. / aviões do força aérea brasileira
- Ataque(x) **significa** x está sob ataque.
- Não há constantes e funções.

# Tradução para linguagem de predicados

- **Todos os urubus são pretos.**

  $\forall x.\ (U(x) \longrightarrow P(x))$

  Onde U(x) e P(x) são predicados unários

  - **Domínio**: fauna brasileira
  - U(x) **significa** x é urubu e P(x) **significa** x tem a cor preta.

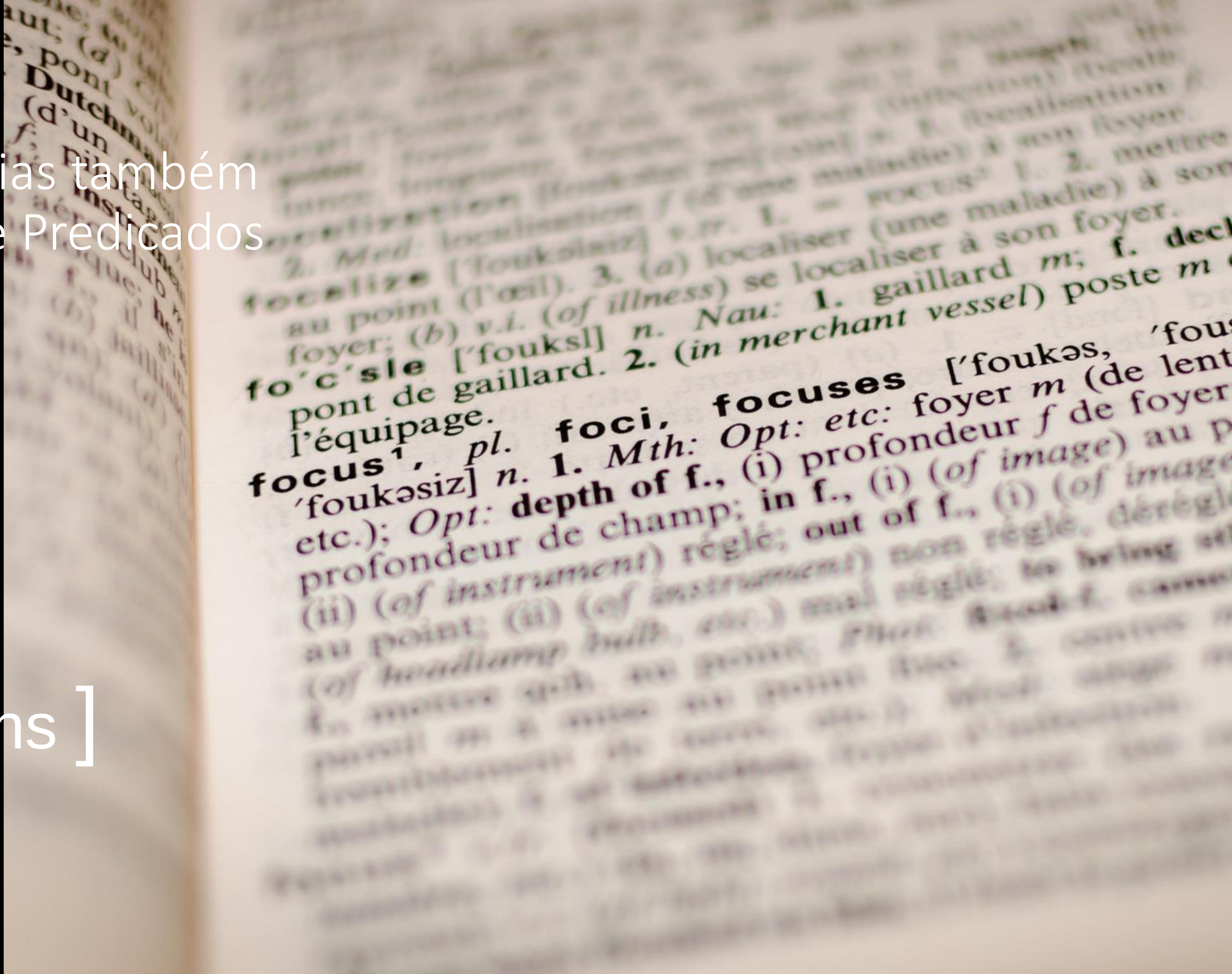
- **Existe um galo branco.**

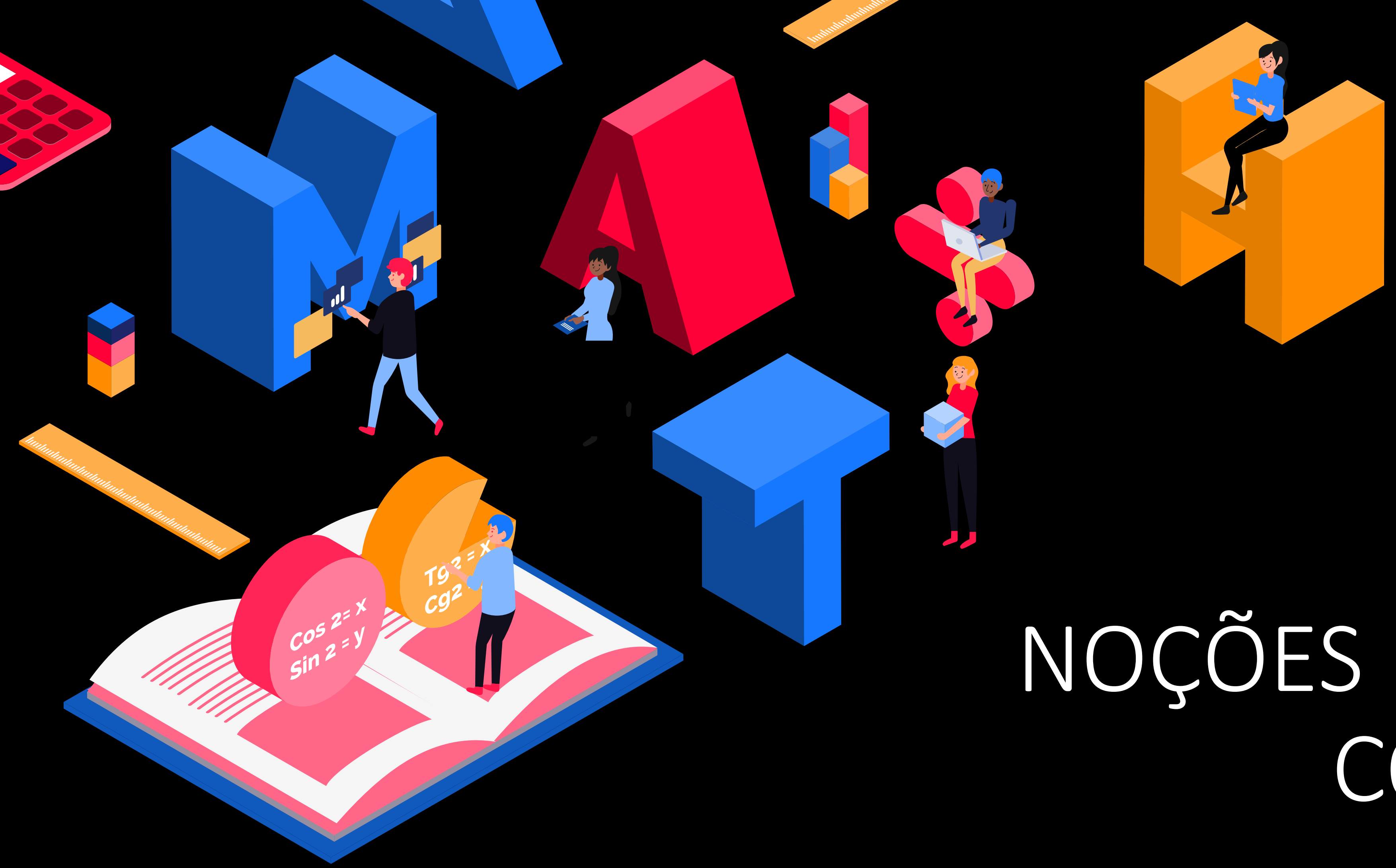
  $\exists x.\ (G(x) \wedge B(x))$

# Regras de Inferências também valem na Lógica de Predicados

$$\frac{\forall x.(R(x) \rightarrow P(x)) \quad R(a)}{P(a)}$$

[ Modus Ponens ]






Prof. Paiva Cruz

# NOÇÕES BÁSICAS DE CONJUNTOS, FUNÇÕES E RELAÇÕES

# Conjunto de Conjuntos

**Conceitos importantes**

1. $A = \{x \in S | P(x)\}$
2. $A \subseteq B$
3. $A \nsubseteq B$
4. $A \subsetneq B$ ("A é subconjunto próprio de B")
5. $A = B$
6. Operações sobre conjuntos

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ or } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \in B\},$$
$$B - A = \{x \in U \mid x \in B \text{ and } x \notin A\},$$
$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

7. União e interseção sobre uma coleção indexada de conjuntos:

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for at least one } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$
$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for at least one nonnegative integer } i\}$$
$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for all } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$
$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for all nonnegative integers } i\}.$$

# Conjunto de Conjuntos

**Partição**

- Uma coleção finita ou infinita de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, A_3 \ldots\}$ é uma partição de um conjunto A sse:
  1. $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
  2. Para todo i= 1, 2, 3, . . . Os $A_i$ s são ***mutuamente disjuntos (ou disjuntos par a par)***

**Família de conjuntos**

- Uma coleção finita ou infinita de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, A_3 \ldots\}$ é uma família de um conjunto A sse:
  1. $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

# Conjunto das partes

- Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**(A)**, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.
  - Encontre o conjunto das partes de A={x, y, z}.
  - Prove que que o conjuto vazio é subconjunto de todos os conjuntos

# Produto Cartesiano

- DEFINIÇÃO:
  - Dados os conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, o **produto cartesiano de $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$** , denotado por **$A_1$ x $A_2$ x ..., x $A_n$**, é o conjnto de todas as n-tuplas ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$) onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$.
  - Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das famílias $f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ então

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathcal{A} |\ a_i \in A_i \ para\ todo\ i \in I\}.$$

# Relação BINÁRIA

Uma **família** é uma função f: I $\rightarrow A$, onde I é um conjunto de

Recall that the Cartesian product of $A$ and $B$, $A \times B$, consists of all ordered pairs whose first element is in $A$ and whose second element is in $B$:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ and } y \in B\}.$$

---

**• Definition**

Let $A$ and $B$ be sets. A **relation $R$ from $A$ to $B$** is a subset of $A \times B$. Given an ordered pair $(x, y)$ in $A \times B$, **$x$ is related to $y$ by $R$**, written $x \, R \, y$, if, and only if, $(x, y)$ is in $R$. The set $A$ is called the domain of $R$ and the set $B$ is called its co-domain.

By Epp

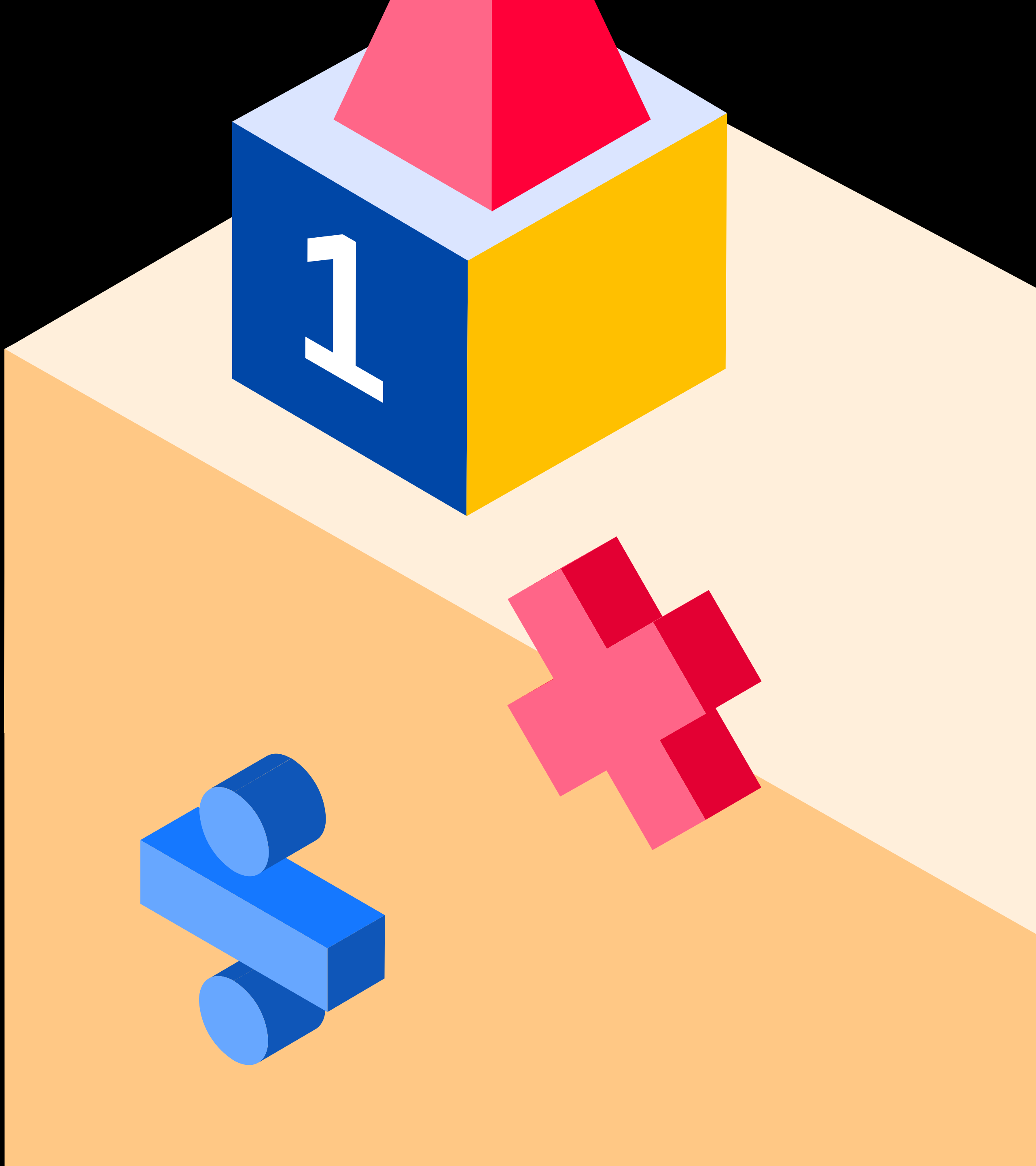

Prof. Paiva Cruz

# FUNÇÕES

01

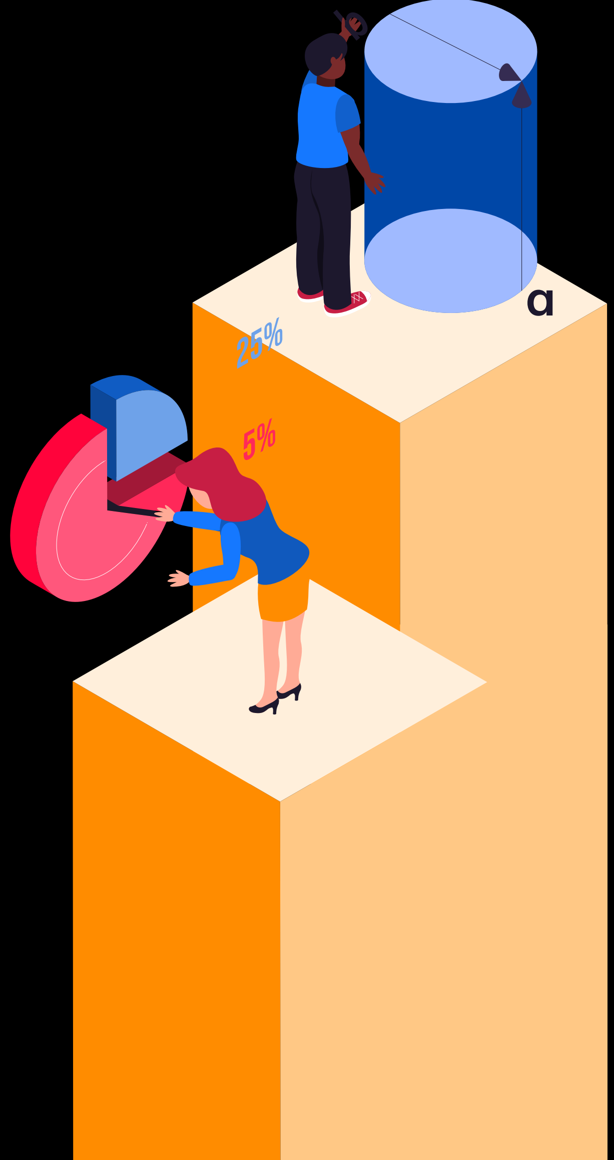
# Definição

Domínio, Imagem, Co-domínio, Total e Parcial



01

Função definida a partir de relações




02

Função como uma entidade primitiva da matemática

# Função

Mapeamento,
Relação, "Atribuição"

By Rosen

**DEFINITION 1** Let $A$ and $B$ be nonempty sets. A *function* $f$ from $A$ to $B$ is an assignment of exactly one element of $B$ to each element of $A$. We write $f(a) = b$ if $b$ is the unique element of $B$ assigned by the function $f$ to the element $a$ of $A$. If $f$ is a function from $A$ to $B$, we write $\boxed{f : A \to B.}$

By Epp

**• Definition**

A **function** $F$ **from a set** $A$ **to a set** $B$ is a relation with domain $A$ and co-domain $B$ that satisfies the following two properties:

1. For every element $x$ in $A$, there is an element $y$ in $B$ such that $(x, y) \in F$.
2. For all elements $x$ in $A$ and $y$ and $z$ in $B$,

$$\text{if} \quad (x, y) \in F \text{ and } (x, z) \in F, \quad \text{then} \quad y = z.$$

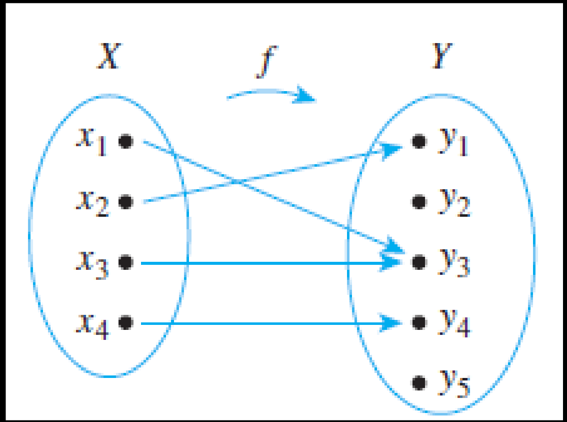



Figura 7.1.1 de Epp (p.412)

# Função

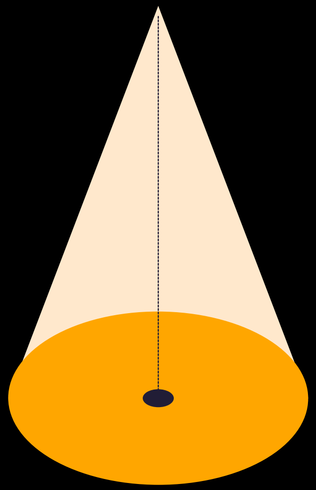
***DEFINIÇÃO ALTERNATIVA:***

*Uma função F de X em Y, denotado por F: $X \rightarrow Y$, é um mapeamento do domínio X no co-domínio Y tq satisfaz:*

$$\forall x \exists y.(x \in X \wedge y \in Y \Longrightarrow (x,y) \in F);\ e$$

$$\forall x \exists y \exists z.(x \in X \wedge y,z \in Y \wedge (x,y),\ (x,z) \in F \Longrightarrow (x,y)=(x,z))$$

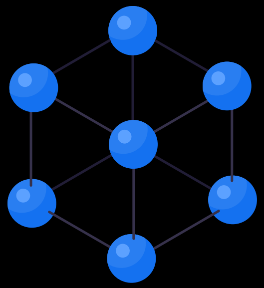
# Caracterização



## Funções sobrejetoras

$F: X \rightarrow Y$ *então*

$Im(f) = Y$

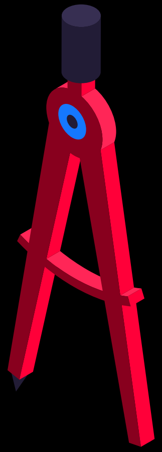


## Funções Injetoras

$F: X \rightarrow Y$ *e* $\forall x_1, x_2 \in F$,

*se* $F(x_1) = F(x_2)$ *então*

$x_1 = x_2$



## Funções bijetoras

Sobrejetora e injetora

*Relação de equivalência

*Cardinalidade

Sobrejetora e Injetora: [Canal Me salva! https://www.youtube.com/wvnn59TdMuQ](https://www.youtube.com/wvnn59TdMuQ)

# EXEMPLOS

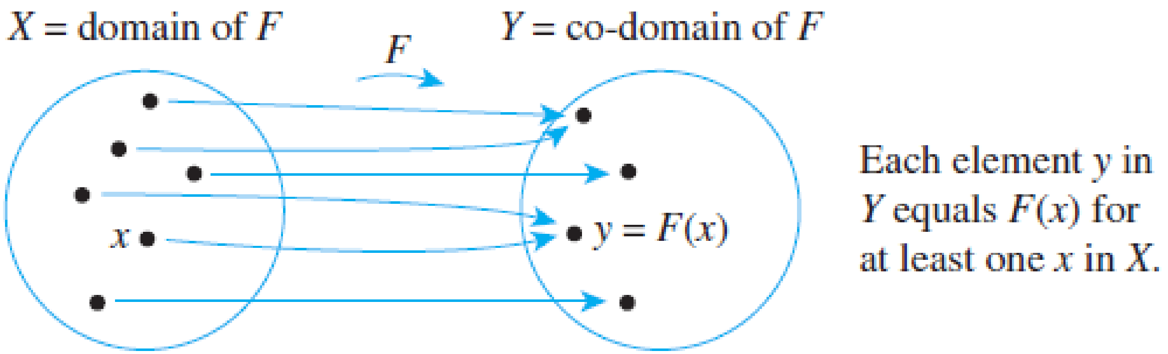



**Figure 7.2.3(a)** A Function That Is Onto

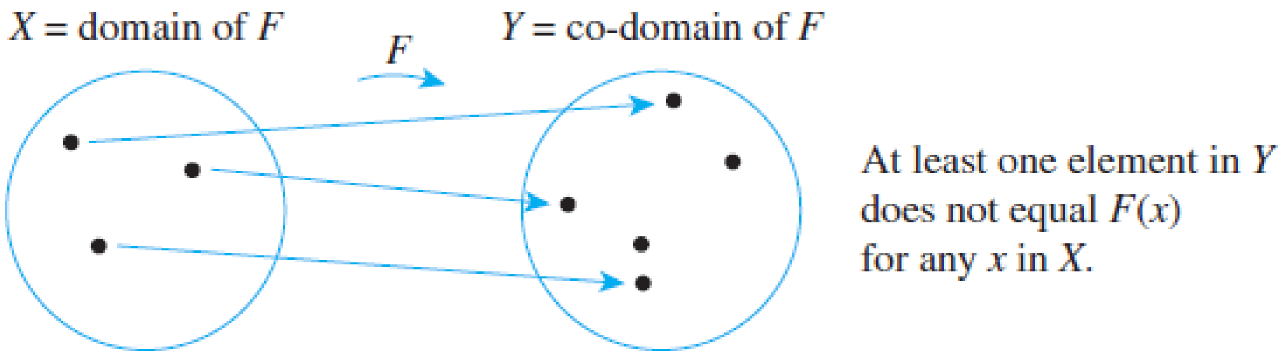



**Figure 7.2.3(b)** A Function That Is Not Onto

# Função inversa

**Theorem 7.2.2**

Suppose $F: X \to Y$ is a one-to-one correspondence; that is, suppose $F$ is one-to-one and onto. Then there is a function $F^{-1}: Y \to X$ that is defined as follows:

Given any element $y$ in $Y$,

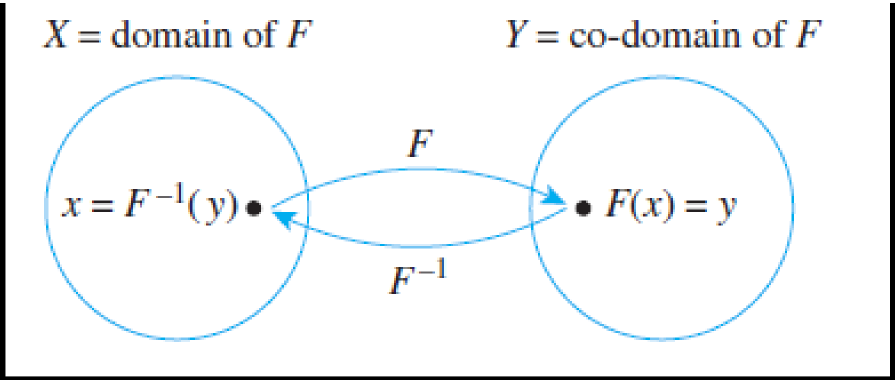
$$F^{-1}(y) = \text{that unique element } x \text{ in } X \text{ such that } F(x) \text{ equals } y.$$

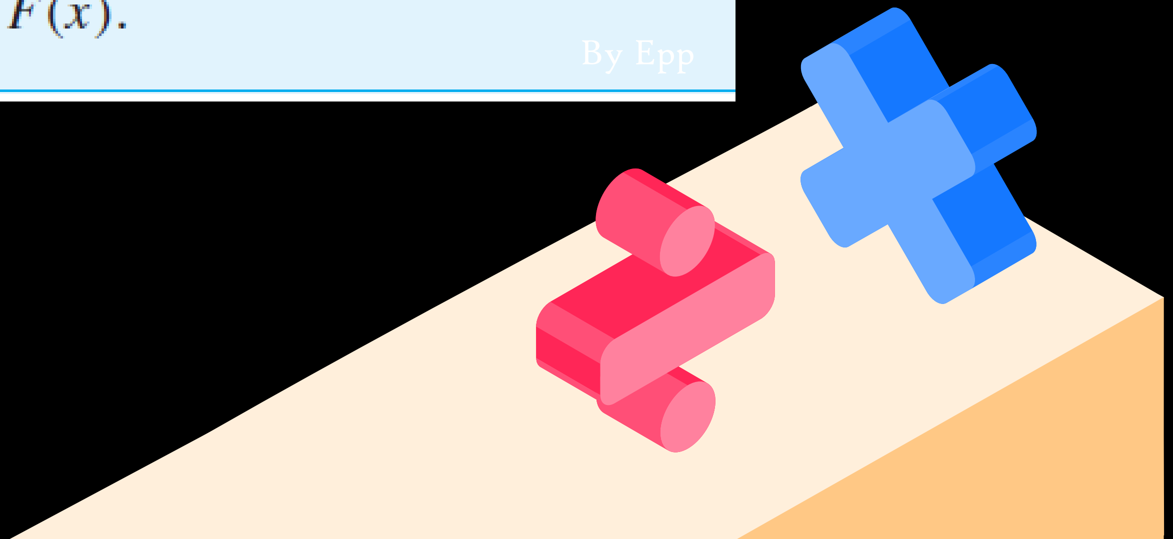
In other words,

$$F^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = F(x).$$

By Epp

dst letters and



# Função Composta

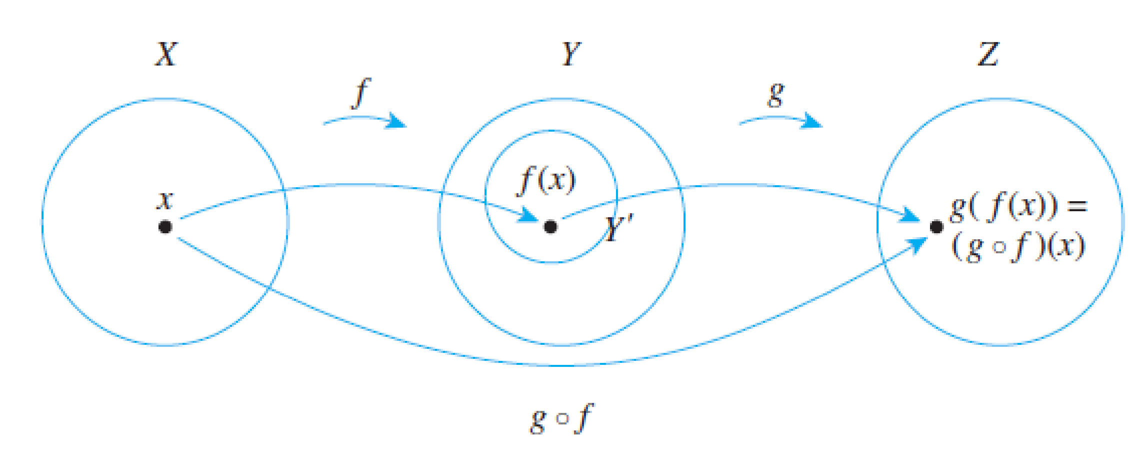
By Epp

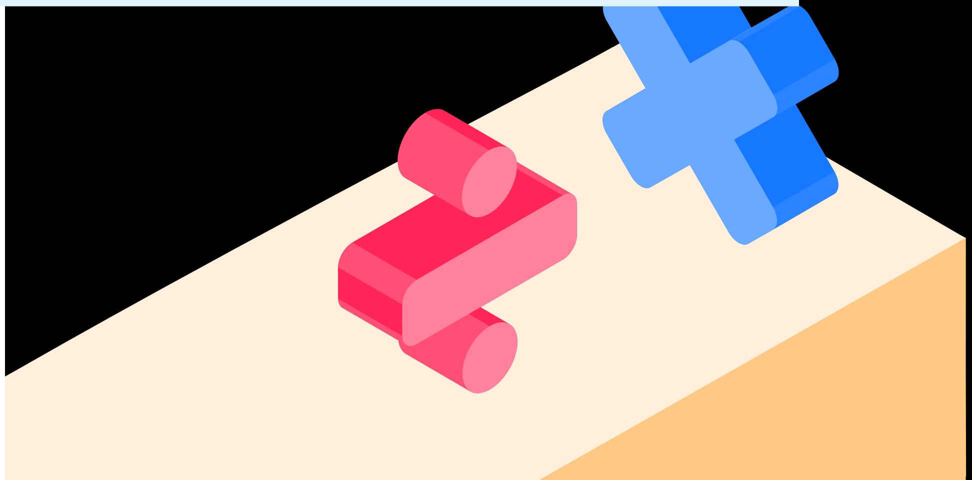
**• Definition**

Let $f: X \to Y'$ and $g: Y \to Z$ be functions with the property that the range of $f$ is a subset of the domain of $g$. Define a new function $g \circ f: X \to Z$ as follows:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{for all } x \in X,$$

where $g \circ f$ is read "$g$ circle $f$" and $g(f(x))$ is read "$g$ of $f$ of $x$." The function $g \circ f$ is called the **composition of $f$ and $g$.**



# Ciências

DEFINIÇÕES

AXIOMAS

TEOREMAS / PROPOSIÇÕES / LEMAS / COROLÁRIOS

CONJECTURAS