Solução. Tem-se que $g(x) = 1 - |x|$ e $h(x) = 1 + x^2$ são funções contínuas, logo $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 1 - |0| = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1 + 0^2 = 1$. Desde que f está limitada pelas funções g e h, pelo Teorema do Confronto (Teorema 1.3) tem-se que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1.$$

Assim, desde que $f(0) = 1$ tem-se que f é contínua em $x = 0$, pois $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

■

Exemplo 1.10 (EN 2022). *Se* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$*, então* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x^2 - 1)}{x - 1} =$*?*

Solução. Tem-se que

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 2 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \overset{(w = x^2 - 1)}{=} \lim_{w \to 0} \frac{f(w)}{w} = 2L.$$

■

1.3 Propriedades aritméticas dos limites finitos

Nesta seção trataremos das propriedades aritméticas dos limites finitos. Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{(P1)} \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2. \tag{1.20}$$

Demonstração. Deve-se mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| < \epsilon. \tag{1.21}$$

Seja $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4}$. Desde que, por hipótese, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, então em correspondência a $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1, \text{ então } |f(x) - l_1| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.22}$$

Da mesma forma, consideremos agora a função g e desde que ela tem limite l_2 em x_0, seja $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$, então em correspondência a $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ então } |g(x) - l_2| < \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.23}$$

Seja então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se então que as desigualdades dadas em (1.22) e (1.23) são válidas e desde que o módulo da soma é menor que a soma dos módulos, segue-se de (1.21) que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| &\leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

∎

$$(P2) \quad \lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = k \cdot l_1. \tag{1.24}$$

Demonstração. Deve-se provar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|kf(x) - kl_1| < \epsilon$. Note que essa última condição pode ser expressa como

$$|k| \cdot |f(x) - l_1| < \epsilon. \tag{1.25}$$

Se $k = 0$, então para todo $\delta > 0$ tem-se que (1.25) estará satisfeita, ou equivalentemente, $|kf(x) - kl_1| < \epsilon$ e a propriedade está demonstrada no caso $k = 0$.

Seja $k \neq 0$. A condição $|kf(x) - kl_1| < \epsilon$ pode ser expressa como $|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{|k|}$ e da hipótese que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ segue-se que dado $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|k|} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{|k|} \iff |kf(x) - kl_1| < \epsilon.$$

∎

$$(P3) \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2. \tag{1.26}$$

Demonstração. Tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \to x_0} [f(x) + (-g(x))] \overset{(P1)}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} (-g(x)) \overset{(P2)}{=} \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2.\end{aligned}$$

■

$$\text{(P4)} \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2. \tag{1.27}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x)g(x) - l_1 g(x) + l_1 g(x) - l_1 l_2 + l_1 l_2 \\ &= g(x)(f(x) - l_1) + l_1(g(x) - l_2) + l_1 l_2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Tomando o limite em (1.28) e usando (P1) as funções $w_1(x) := g(x)(f(x) - l_1) + l_1(g(x) - l_2)$ e $w_2(x) := l_1 l_2$ segue-se que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} [g(x)(f(x) - l_1) + l_1(g(x) - l_2) + l_1 l_2] = \lim_{x\to x_0} (w_1(x) + w_2(x))$$
$$\stackrel{(P1)}{=} \lim_{x\to x_0} w_1(x) + \lim_{x\to x_0} w_2(x) = \lim_{x\to x_0} [g(x)(f(x) - l_1) + l_1(g(x) - l_2)] + \lim_{x\to x_0} l_1 l_2 \stackrel{(P1)}{=}$$
$$= \lim_{x\to x_0} [g(x)(f(x) - l_1)] + \lim_{x\to x_0} [l_1(g(x) - l_2)] + \lim_{x\to x_0} l_1 l_2 = 0 + 0 + l_1 l_2 = l_1 l_2,$$

pois da Proposição 1.2 tem-se que $\lim_{x\to x_0} (f(x) - l_1) = \lim_{x\to x_0} (g(x) - l_2) = 0$, ademais do Corolário 1.2 tem-se que $\lim_{x\to x_0} [g(x)(f(x) - l_1)] = \lim_{x\to x_0} [l_1(g(x) - l_2)] = 0$ e da Proposição 1.1 tem-se que $\lim_{x\to x_0} l_1 l_2 = l_1 l_2$.

■

$$\text{(P5)} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \;\; l_2 \neq 0. \tag{1.29}$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}. \tag{1.30}$$

Note que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2}\right| < \epsilon \iff \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)||l_2|} < \epsilon. \tag{1.31}$$

Da condição $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ tem-se que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1, \text{ então } |g(x)| > \frac{|l_2|}{2}. \tag{1.32}$$

Novamente da condição $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, seja $\epsilon_1 = \epsilon \frac{|l_2|}{2}|l_2| > 0$ dado, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ então } |g(x) - l_2| < \epsilon_1 = \epsilon \frac{|l_2|}{2}|l_2|. \tag{1.33}$$

Seja então $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. De (1.32) e (1.33) segue-se que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |g(x) - l_2| < \epsilon|g(x)||l_2| \iff \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2}\right| < \epsilon.$$

O resultado agora segue, simplesmente, aplicando (P4), pois

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] \overset{(P4)}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

■

Observação 1.3. *As propriedades* (P1) *e* (P4) *podem ser generalizadas, respectivamente, para uma soma e produto de uma quantidade* **finita** *de funções. Assim, sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *funções com, respectivamente, limites* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *em um ponto* x_0 *no qual as funções estejam definidas em uma vizinhança dele. Tem-se que*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \\ &= \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \\ &\lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n. \end{aligned}$$

Se $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ *são tais que* $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$*, então*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n = l^n.$$

Exemplo 1.11 (ITA-1998). *Sabendo que* $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=L$, *calcule*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p-h)}{h}.$$

Solução. Note inicialmente que da condição

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=L \tag{1.34}$$

a partir das mudanças de variável $h=x-p$ e $h=p-x$ segue-se que

$$\begin{aligned} L=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} &\overset{(h=x-p)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\\ L=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} &\overset{(h=p-x)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(p-h)-f(p)}{h} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Somando e subtraindo-se $f(p)$ ao limite pedido tem-se que

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)+f(p)-f(p)-f(p-h)}{h}\\ &\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)}{h}-\frac{(f(p-h)-f(p))}{h}\right]\overset{(1.35)}{=}L-L=0. \end{aligned}$$

Em que a última igualdade é justificada pelo fato de ambos os limites existirem e serem finitos.

■

Observação 1.4. *Esse mesmo exercício foi a questão* 1 *para a Escola Naval* 2019 *em que* b *aparece em lugar de* p *e no lugar da variável* x *é usada a variável* p.

1.4 Continuidade

Definição 1.3 (Função contínua num ponto). *Uma função* $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é contínua em* $x_0\in A$ *se*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1.36}$$

Observação 1.5. *Para falarmos em* **continuidade de uma função num ponto**, *esse* **ponto deve, necessariamente, pertencer** *ao domínio da função. Essa condição difere de quando falamos de limite de uma função no ponto, em que a função não necessariamente precisa estar definida no ponto, mas tão somente numa vizinhança à esquerda e à direita do ponto.*

Se uma função é contínua no ponto, então a função tem limite no ponto e o limite coincide com o valor da função no ponto.

Equivalentemente a Definição 1.3 define-se a **continuidade de f em x_0**

$$\text{se } \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que se } |x - x_0| < \delta,\ \text{então } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.37}$$

Se f não é contínua em x_0, então $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Definição 1.4. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita contínua se for contínua em todos os pontos de A.*

Teorema 1.4 (Teorema da Conservação do Sinal)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in A$. Se $f(x_0) \neq 0$, então $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0) \cap A$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(x_0)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos $f(x_0) > 0$. Desde que f é contínua em x_0, então o limite de f em x_0 vale $f(x_0)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0))| < e$, mas essa última condição é equivalente a

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon, \tag{1.38}$$

sendo suficiente escolher qualquer $\epsilon \in (0, f(x_0))$.

∎

Teorema 1.5. *Sejam f e g funções tais que $\forall x \in V^*_\delta(x_0) := \{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0\}$ tem-se que $f(x) = g(x)$ e se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Demonstração. Da condição $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ tem-se que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1,\ \text{então } |g(x) - l| < \epsilon. \tag{1.39}$$

Desde que f e g coincidem numa vizinhança de raio δ, é suficiente tomar $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\}$ e segue-se que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2,\ \text{então } |f(x) - l| < \epsilon.$$

∎

Observação 1.6. *A situação de maior interesse do Teorema 1.5 é quando uma das funções é contínua. Comumente substituímos a função que não sabemos calcular o limite por uma função contínua e que coincida com a primeira numa vizinhança do ponto.*

Exemplo 1.12. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) := \begin{cases} x^3 + ax + a + 1 & \text{se } x < 1; \\ 3 & \text{se } x = 1; \\ x^2 - (b+1)x + b & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determine a *para que:* $a)$ f *seja contínua à esquerda em* $x_0 = 1$, $b)$ *exista* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *e* $c)$ *Pode* f *ser contínua em* $x_0 = 1$*?*

Solução. $a)$ Para que f seja contínua à esquerda deve-se ter que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1), \text{ ou seja, } 1^3 + a \cdot 1 + a + 1 = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$b)$ O limite de f quando $x \to 1$ existe se, e somente se, os limites laterais existirem e forem iguais. Assim,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x), \text{ ou seja, } 1^3 + a \cdot 1 + a + 1 = 1^2 - (b+1) \cdot 1 + b \Rightarrow a = -1.$$

$c)$ Para que f seja contínua em $x_0 = 1$ deve-se ter que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) := 3$$

em particular, como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 - (b+1) \cdot 1 + b \neq 3 = f(1)$, segue-se que f não é contínua em $x_0 = 1$.

■

Exemplo 1.13 (EN-1998)**.** *Determine* $a \in \mathbb{R}$ *para que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \text{ se } x \neq 3; \\ a \text{ se } x = 3. \end{cases}$$

seja contínua em $x_0 = a$.

Solução. Tem-se da Definição 1.3 que f é contínua em $x_0 = 3$ se

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow a = \lim_{x \to 3} \left[\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)}{(x-3) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)} \right] = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

■

Exemplo 1.14 (IME 1963). *Calcule o limite da função* $y = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$, *quando* x *tende para* a.

Solução. O limite pedido é uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Fatorando $x^m - a^m$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{m-1} + x^{m-2}a^1 + \ldots + x^1a^{m-2} + a^{m-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left(x^{m-1}a^0 + x^{m-2}a^1 + \ldots + x^1a^{m-2} + x^0a^{m-1}\right) \\
&= \underbrace{a^{m-1}a^0 + a^{m-2}a^1 + \ldots + a^1a^{m-2} + a^0a^{m-1}}_{m \text{ termos}} = ma^{m-1}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.15 (IFRN). *Considere o polinômio* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *com* a, b, c *e* d *reais com* $a \neq 0$. *Se* $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{p(x)}{x+1}\right) = 21$ *e* $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{p(x)}{x-2}\right) = 6$, *então a soma* $a + b + c + d$ *é igual a:*

$a) - 2 \quad b) - 1 \quad c)2 \quad d)1.$

Solução. Inicialmente note que

$$\begin{aligned}
p(1) =& a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d \\
=& a + b + c + d
\end{aligned}$$

Diante do exposto precisamos achar o polinômio p para que possamos calcular o valor de $p(1)$, que é o que queremos determinar. Para isso vamos usar as duas informações dadas, ou seja, $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{p(x)}{x+1}\right) = 21$ e $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{p(x)}{x-2}\right) = 6$. Ora, como esse limites são finitos, segue que $p(-1) = 0$ e $p(2) = 2$, pois se pelo menos um desses dois valores não fosse nulo, os dois limites não poderiam ter valores finitos (visto que no numerador teríamos um número real diferente de 0 e no denominador algo que tende a zero nos dois casos, o que faria com que os limites seriam iguais a $+\infty$ ou a $-\infty$, o que não ocorre!). Como $p(-1) = p(2) = 0$, segue que os números -1 e 2 são raízes do polinômio p. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ a sua terceira raiz. Diante do exposto, usando o Teorema de decomposição de polinômios, podemos escrever o polinômio p da seguinte forma:

$$p(x) = a(x - (-1))(x - 2)(x - \alpha) = a(x + 1)(x - 2)(x - \alpha).$$

Assim,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{p(x)}{x+1}\right)=21\Rightarrow \lim_{x\to -1}\left(\frac{a(x+1)(x-2)(x-\alpha)}{x+1}\right)=21\Rightarrow$$
$$a(-1-2)(-1-\alpha)=21\Rightarrow a(1+\alpha)=7.$$
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{p(x)}{x-2}\right)=6\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{a(x+1)(x-2)(x-\alpha)}{x-2}\right)=6\Rightarrow$$
$$a(2+1)(2-\alpha)=6\Rightarrow a(1+\alpha)=2.$$

Dividindo $a(1+\alpha)=7$ por $a(1+\alpha)=2$, segue que:

$$\frac{a(1+\alpha)=7}{a(1+\alpha)=2}\Rightarrow \frac{1+\alpha}{2-\alpha}=\frac{7}{2}\Rightarrow 2+2\alpha=14-7\alpha\Rightarrow 9\alpha=12\Rightarrow \alpha=\frac{4}{3}.$$

Ora, como $a(1+\alpha)=2$, segue que

$$a\left(2-\frac{4}{3}\right)=2\Rightarrow a=3.$$

Então,

$$p(x)=a(x+1)(x-2)(x-\alpha)\Rightarrow p(x)=3(x+1)(x-2)(x-\frac{4}{3})$$

Por fim,

$$\begin{aligned} a+b+c+d=&p(1)\\ =&3(1+1)+1-2)(1-\frac{4}{3})\\ =&2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.16 (IME 1977). *Seja m uma função real de variável real definida como: $m(x)=|7-x|$. Diz-se que uma função u, real de variável real, é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\epsilon>0$, existe um número real $\delta>0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y-a|<\delta$, então $|u(y)-u(a)|<\epsilon$. Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x=-2$. Escolhe-se um $\epsilon=0,01$. Determine um δ conveniente, para este valor de ϵ.*

Exemplo 1.17 (ITA-1994). *Considere os seguinte itens:*

(a) *Suponha que* f *é contínua em* a *e* $f(a) = 0$. *Prove que se* $a \neq 0$, *então* g *dada por* $g(x) = f(x) + a$ *é diferente de zero numa vizinhança de* a.

(b) *Se existem os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, *então existe o limite* $\lim_{x\to a} g(x)$ *necessariamente?*

(c) *Dê um exemplo de uma função* f *tal que* f *não é contínua em nenhum ponto, mas* $|f|$ *é contínua em todo ponto.*

Solução. (a) Tem-se que a soma de funções contínuas ainda é uma função contínua. Assim, a função g é contínua em $x = a$, pois é a soma da função f (contínua em $x = a$) mas a constante a. Pelo Teorema da Conservação do Sinal, Teorema 1.4, existe uma vizinhança de $V_\delta(a)$ tal que que para todo $x \in V_\delta(a)$ a função g preserva o sinal de $g(a) = f(a) + a = 0 + a \neq 0$.

(b) Não! Consideremos as seguintes funções como contraexemplo e calculemos os limites no ponto $x_0 = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x-1|}\right) \text{ e } g(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x-1|}\right).$$

Tem-se que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{|x-1|} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x-1|}\right)\right) \overset{\left(w=\frac{1}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{w\to+\infty}(w + \operatorname{sen}(w))$$
$$= \lim_{w\to+\infty}\left[w\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\right)\right] = \lim_{w\to\infty} w = \infty.$$
$$\lim_{x\to 1}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|} \overset{\left(w=\frac{1}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{w\to\infty} w = \infty.$$
$$\lim_{x\to 1} g(x) = -\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x-1|}\right) \overset{\left(w=\frac{1}{|x-1|}\right)}{=} -\lim_{w\to\infty}\operatorname{sen}(w) = \nexists.$$

(c) Seja a função dada por $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Seja x_0 um ponto qualquer do Domínio de f, desde que em qualquer intervalo de f (não importando quão pequeno seja) há sempre infinitos números reais e irracionais, segue-se que dado $\epsilon \in (0, 2)$ qualquer que seja o raio δ da vizinhança de pontos centrada em x_0 sempre termos dois pontos cuja distância entre eles vale 2 que é maior que ϵ.

■

Exemplo 1.18 (ITA-1994). *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \textit{se } x \textit{ é irracional} \\ \frac{1}{q}, & \textit{se } x = \frac{p}{q}, \textit{ onde } p \textit{ e } q \textit{ são inteiros, primos entre si e } q > 0. \end{array} \right\}$$

Mostre que f é contínua num número infinito de pontos mas que entre cada dois pontos de continuidade existe um ponto de descontinuidade e vice-versa. Mais precisamente, f é descontínua em todo racional, mas é contínua em todo x irracional.

Exemplo 1.19 (ITA-1998)**.** *Calcule* $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$.

Solução. Tem-se que

$$\lim_{x\to-2}\left[\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}\right] = \lim_{x\to-2}\frac{x^2+5-9}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{1}{6}.$$

■

Exemplo 1.20 (ITA-2002)**.** *Sendo* $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$*, determine* M *para o qual a desigualdade* $|f(x) - f(2)| \leq M|x-2|$*, para todo* $x \geq 1$*. Prove que* $f(x)$ *é contínua em* $x = 2$*.*

Solução. Tem-se que $f(2) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Assim, se $x \geq 1$ é suficiente tomar $M = 1$ pois

$$\left|5 - \frac{1}{x} - \frac{9}{2}\right| \leq M|x-2| \Rightarrow \left|\frac{x-2}{x}\right| \leq M|x-2| \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq M.$$

Mostremos agora a continuidade de f em $x_0 = 2$. Deve-se provar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |5 - \frac{1}{x} - \frac{9}{2}| < \epsilon.$$

Tem-se que

$$|5 - \frac{1}{x} - \frac{9}{2}| < \epsilon|x-2| < \epsilon|2x|. \tag{1.40}$$

Desde que estamos calculando o limite de f quando $x \to 2$, seja então uma vizinhança de 2 de raio 1, i.e.,

$$|x-2| < 1 \Rightarrow 2x < 6. \tag{1.41}$$

Assim, é suficiente tomarmos $\delta = \min\{1, 6\epsilon\}$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, 6\epsilon\}$. Se $|x - 2| < \delta$, então segue-se de (1.40) e (1.41) que

$$|5 - \frac{1}{x} - \frac{9}{2}| < \epsilon.$$

■

Exemplo 1.21 (EN 2018). *Calcule* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt[3]{1 - x^3}}{2}$

Solução. Sabendo-se que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ e tomando $a = x$ e $b = \sqrt[3]{1 - x^3}$, tem-se que

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{\left(x + \sqrt[3]{1 - x^3}\right) \cdot \left(x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^3} + (\sqrt[3]{1 - x^3})^2\right)}{2 \cdot \left(x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^3} + (\sqrt[3]{1 - x^3})^2\right)} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x^2 - x \cdot x \cancelto{-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}} + x^2 \cdot \cancelto{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}\right)^2}} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3x^2} = 0.$$

■

Exemplo 1.22 (EN 2017). *Se* $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(x + 3)^2} - \sqrt[3]{9}}{x}$, $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x^2 - 2| - |x - 2|}{x}$ *e* $C = \lim\limits_{x \to 1} \left[(x - 1)^9 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x - 1)^3}\right) \right]$, *então* $A^{3B} - C$ *vale?*

Solução. Tem-se que

$$A = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(\sqrt[3]{(x + 3)^2} - \sqrt[3]{9}\right) \cdot \left((\sqrt[3]{(x + 3)^2})^2 + \sqrt[3]{(x + 3)^2}\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2\right)}{x \cdot \left(\sqrt[3]{(x + 3)^4} + \sqrt[3]{(x + 3)^2}\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2\right)} \right] =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 3)^2 - 9}{x \cdot \left(\sqrt[3]{(x + 3)^4} + \sqrt[3]{(x + 3)^2}\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x + 6)}{x \cdot \left(\sqrt[3]{(x + 3)^4} + \sqrt[3]{(x + 3)^2}\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 6}{\sqrt[3]{(x + 3)^4} + \sqrt[3]{(x + 3)^2}\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2} = \frac{6}{3\sqrt[3]{3^4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^4}}.$$

Para o cálculo de B note que se $x \to 0$, então $x^2 - 2 < 0$ com $|x^2 - 2| = -x^2 + 2$ e $|x - 2| = -x + 2$. Assim,

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + 2 - (-x + 2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 - x) = 1.$$

Por último, tem-se pelo Corolário 1.1 que $C = 0$, pois $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)$ é uma função limitada e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^9 = 0$.

Assim $A^{3B} - C = \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3^4}}\right)^3 - 0 = \dfrac{8}{3^4}$. ■

Exemplo 1.23 (EN-1992)**.** *Calcule* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^5 + 2x^2 - 3}$.

Solução. Note que 1 é raiz de $x^4 + x^2 - 2$ e $x^5 + 2x^2 - 3$. Dividindo ambos os polinômios por $x - 1$ obtém-se que

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +x^2 & & -2 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3+x^2+2x+2 \\ \cline{1-2}
 & x^3 & +x^2 & & & \\
 & -x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x^2 & & & \\
 & & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2x & -2 & \\
 & & & -2x & +2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & +2x^2 & & -3 & x-1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & & & & & x^4+x^3+x^2+3x+3 \\ \cline{1-2}
 & x^4 & & & & & \\
 & -x^4 & +x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x^3 & +2x^2 & & & \\
 & & -x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 3x^2 & & & \\
 & & & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 3x & -3 & \\
 & & & & -3x & +3 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, $x^4 + x^2 - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$ e $x^5 + 2x^2 - 3 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^5 + 2x^2 - 3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.24 (ITA-1998). *Suponha que* $|f(x)| \le x^2$ *para todo* x *real. Prove que* f *é contínua em* $x = 0$.

Solução. Tem-se que $-x^2 \le f(x) \le x^2$ e que $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Assim, pelo Teorema do Confronto (Teorema 1.3) tem-se que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e desde que $f(0) = 0$ segue-se que f é contínua em $x_0 = 0$.

■

Teorema 1.6 (Continuidade da função composta). *Sejam* f, g, w *funções tais que* $w(x) := f(g(x))$ *e tais que* $\lim_{x\to x_0} g(x) = z_0$ *e* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = l$. *Nessas condições,*

$$\lim_{x\to x_0} w(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{1.42}$$

Demonstração. Chamemos os valores assumidos pela função g em x de z, ou seja $z = g(x)$, e note que das condições do Teorema é pedido que a função g tenha apenas limite em x_0 (não precisa ser necessariamente contínua!) e apenas a função f que seja contínua na imagem da g no ponto x_0. Deve-se provar que

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(g(x)) - l| < \epsilon. \tag{1.43}$$

Da condição $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ tem-se que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |z - z_0| < \delta_1, \text{ então } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \tag{1.44}$$

Ademais, da condição $\lim_{x\to x_0} g(x) = z_0$ tem-se que dado $\epsilon_1 = \delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |g(x) - z_0| < \delta_1. \tag{1.45}$$

Assim, segue-se de (1.44) e (1.45) que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \overset{(1.45)}{\Rightarrow} |g(x) - z_0| < \delta_1 \overset{(1.44)}{\Rightarrow} |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

∎

Observação 1.7. *Se adicionarmos a hipótese de continuidade da função* g *em* x_0*, então a função composta* $w = f \circ g$ *passa a ser contínua em* x_0 *com*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)).$$

1.5 Limites infinitos e limites na vizinhança do infinito

Em muitas situações estamos interessados em analisar o comportamento da função quando a variável assume valores arbitrariamente grandes ou pequenos, i.e., quando a variável assume valores na vizinhança do infinito, podendo esse ser positivo $+\infty$ ou negativo $-\infty$.

Exemplo 1.25. *Calcule* $\lim_{x \to \infty} \left(e^{-x} x^2\right)$.

Solução. Esse exemplo representa uma indeterminação do tipo "$0 \cdot \infty$". Quando aumentamos arbitrariamente os valores da variável x, i.e., $x \to \infty$, os valores de e^{-x} ficam cada vez mais próximos de zero, escrevemos então que $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ (limite finito na vizinhança do infinito). Por outro lado, à medida que x assume valores arbitrariamente grandes e cada vez maiores, implica que x^2 assume valores cada vez maiores e sem nenhum limitante superior, tem-se então que $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$ (limite infinito na vizinhança do infinito). Conforme veremos na Seção **??**, a função exponencial tem maior crescimento que a polinomial e esta cresce mais rapidamente que a função logarítmica. Nesse exemplo, quando $x \to \infty$ mesmo a função quadrática assumindo valores arbitrariamente grandes, mas como a função exponencial está indo a zero e esta é de maior crescimento que função polinomial (no exemplo em questão é a função quadrática), tem-se que $\lim_{x \to \infty} \left(e^{-x} x^2\right) = 0$. O limite em questão é então um limite finito (o resultado é um número $l \in \mathbb{R}$) na vizinhança do infinito, $x \to \infty$.

■

Já em outras ocasiões há interesse em se investigar a existência de pontos, não necessariamente pertencentes ao domínio da função, tais que nesses pontos ao menos um dos limites laterais ou o limite divirja.

Exemplo 1.26. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{x}$.

Solução. A função seno é contínua, assim como as funções polinomiais. Desde que a composta de funções contínuas ainda é uma função contínua tem-se que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1-x) = \operatorname{sen}(1-0) = \operatorname{sen}(1)$. Acontece que quando $x \to 0^+$, então $\dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{x}$ assume valores cada vez maiores sem um limitante superior e representamos por $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{x} = +\infty$ e quando $x \to 0^-$, então $\dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{x}$ assume valores cada vez menores sem um limitante inferior e representamos por $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{x} = -\infty$. Nesse caso a função apresenta apenas limites laterais no ponto zero e ambos divergem e a função não tem limite no ponto zero.

■

Exemplo 1.27. *Mostre que* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Solução. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Acontece que se $x \to \infty$, então $x > 0$ com $\dfrac{1}{x} \to 0$ e $-\dfrac{1}{x} \to 0$. Portanto, pelo Teorema do Confronto (Teorema 1.3), o resultado segue, pois

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \overset{(\text{Teo } 1.3)}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

■

Exemplo 1.28. *Calcule o seguinte limite* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x)(1+2x)\cdots(1+10x)}{x^{10}+345678}$.

Solução. O cálculo do limite de uma função racional na vizinhança do infinito é dado pelo coeficiente dos termos de maior grau do numerador e denominador. Segue-se então que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10!x^{10}}{x^{10}} = 10!$$

■

Exemplo 1.29 (EN 2020). *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+6x+9+\cos x}{x^2+x+9}$.

Solução. Tem-se que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{\cos x}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\cancelto{0}{\dfrac{6}{x}}+\cancelto{0}{\dfrac{9}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{\cos x}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\dfrac{x}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{9}{x^2}}}\right] = 1.$$

■

Exemplo 1.30 (EN 2004). *Calcule* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$.

Solução. Note que a expressão entre parênteses pode ser representada a partir da notação com somatório por

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}. \tag{1.46}$$

Ademais note que

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{3} &= \frac{1}{3^0}-\frac{1}{3^1} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9}-\frac{1}{27} &= \frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3} = \frac{2}{3^3} \\ \frac{1}{81}-\frac{1}{243} &= \frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^5} = \frac{2}{3^5} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.47}$$

Assim, a depender da paridade de n a soma dada em (1.46) pode assumir uma das seguintes formas:

◇ Se n é par, então

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = \left(\frac{(-1)^0}{3^0}-\frac{1^1}{3^1}\right)+\left(\frac{(-1)^2}{3^2}-\frac{1^3}{3^3}\right)+\ldots+\left(\frac{(-1)^{n-2}}{3^{n-2}}-\frac{1^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}} = 2\left(\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3^2}-1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{\frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3^2}-1}\right) = \frac{3}{4}.$$

◇ Se n é ímpar, então

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = \left(\frac{(-1)^0}{3^0}-\frac{1^1}{3^1}\right)+\left(\frac{(-1)^2}{3^2}-\frac{1^3}{3^3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^{n-3}}-\frac{1}{3^{n-2}}\right)+\frac{1}{3^{n-1}}$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-2}}\right)+\frac{1}{3^{n-1}} = 2\left(\frac{\frac{1}{3^{n-2}}\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3^2}-1}\right)+\frac{1}{3^{n-1}}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}.$$

■

Exemplo 1.31. *Sendo* $f(x) = \dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. *Calcule* a, b, c *e* d.

Solução. Afirmação: $a = 0$. De fato, se supuséssemos $a \neq 0$ chegaríamos a uma contradição, pois

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} ax = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0; \\ -\infty & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Tem-se então que $f(x) = \dfrac{bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$ e da condição $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ obtém-se que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+cx+d}{x^2+x-2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{bx^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} b = 1 \Rightarrow b = 1.$$ Assim,

$$f(x) = \frac{x^2+cx+d}{x^2+x-2} = \frac{x^2+cx+d}{(x-1)(x+2)}.$$

Da condição $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ tem-se que 1 é raiz de $p(x) = x^2+cx+d$, pois se 1 não fosse raiz de $p(x)$ só haveria três possibilidades para o limite: mais infinito, menos infinito ou não existir. Assim, a divisão de $p(x)$ por $x-1$ dá um quociente $q(x) = x+(c+1)$ e um resto $d+c+1=0$ $(\star)$. Tem-se então que

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+c+1)}{(x-1)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{1+c+1}{1+2} = 0 \Rightarrow c = -2 \overset{(\star)}{\Rightarrow} d = -1-(-2) = 1.$$

■

Exemplo 1.32 (IME 1968). *Determinar os valores de* a *para que a função* $f(x) = x^{\frac{a^2-a+4}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]$ *tenha limite i) finito, ii) nulo e iii) infinito quando* $x \to +\infty$.

Solução. Analisando a expressão entre colchetes tem-se que

$$\left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]\cdot\frac{\left((x^2+1)^{\frac{2}{3}} + (x^2+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right)}{\left((x^2+1)^{\frac{2}{3}} + (x^2+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right)} =$$
$$\frac{x^2+1-x^2}{x^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Por outro lado, $\frac{a^2-a+4}{3} > \frac{4}{3}$ se $a<0$ ou $a>1$. Se $0 \le a \le 1$, então $1,25 \le \frac{a^2-a+4}{3} \le \frac{4}{3}$. Assim, se $a<0$ ou $a>1$ o limite vale $+\infty$ e se $0\le a\le 1$, o limite vale 0.

■

Exemplo 1.33. *Sejam* $p, m, n \in \mathbb{N}$. *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{m=p}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{p}.$$

Solução. Note inicialmente que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{p} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{m!}{p!(m-p)!} = \frac{n!(n-p)!m!}{p!(n-p)!m!(n-m)!(m-p)!} =$$
$$= \binom{n}{p}\frac{(n-p)!}{(n-m)!(m-p)!} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{m-p}. \tag{1.48}$$

Assim, de (1.48) segue-se que

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=p}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{m=p}^{n}\binom{n}{p}\binom{n-p}{m-p} = \sum_{p=1}^{m}\binom{n}{p}\sum_{m=p}^{n}\binom{n-p}{m-p} \overset{(w=n-p)}{=}$$
$$\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\sum_{w=0}^{n-p}\binom{n-p}{w} = \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} = \binom{n}{0}2^{n} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} - \binom{n}{0}2^{n} =$$
$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} - \binom{n}{0}2^{n} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}(1)^{p} - \binom{n}{0}2^{n} = 3^{n} - 2^{n}. \tag{1.49}$$

Finalmente, de (1.49) resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{m=p}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{p} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right] = 1.$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.34. *Determine* a, *sabendo que* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-4}{ax^2-3} = \dfrac{1}{5}$.

Solução. Para o cálculo do limite de uma função racional na vizinhança do infinito os termos de maior crescimento são aqueles que apresentam o maior grau, ou seja,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-4}{ax^2-3} = \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{ax^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 25.$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.35. *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} - x - 1\right]$

Solução. Note que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\sqrt{\frac{x}{x+2}}-x-1\right] &= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\sqrt{\frac{x}{x+2}}-(x+1)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}-1\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}-1\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+2x+4}}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x}\right)}}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\left(-2-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x}}}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\left(-2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x}}\right)}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x}}}\right]=\frac{-2}{2}=-1.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 1.36. *Calcule* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}}{n+1}}$

Solução. A soma dos elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

O cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ será obtido a partir do uso da função logarítmica e de sua continuidade. De fato,

$$\ln \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{1} = 2.$$

■

Exemplo 1.37. *Determine* a *e* b*, sabendo que* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2+x+1} - ax - b\right) = 0$.

Solução. Tem-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+x+1} - ax - b\right) = \\
&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-x+2-ax^3-ax^2-ax-bx^2-bx-b}{x^2+x+1}\right) = \\
&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^3+(1-a-b)x^2-(1+a+b)x-b}{x^2+x+1}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Para que o limite dado em (1.50) seja zero, deve-se ter - necessariamente - que $1-a=0 \iff a=1$ (pois se $a>1$ o limite seria $-\infty$ e se $a<1$ o limite seria $+\infty$). Deve-se ter também que $1-a-b=0 \overset{(a=1)}{\Rightarrow} b=0$ (pois se $a=1$ e $b\neq 0$, então o limite seria $-b$ e esse valor é zero se, e somente se, $b=0$).

■

Exemplo 1.38. *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Solução. Desde que $x\to\infty$, então $x>0$ e $|x|=x$. Colocando x^2 em evidência tem-se que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}=1.$$

∎

Exemplo 1.39 (IFPB). *Determine o limite* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x^3-x^2}{2+x^3}\right)+e^{\frac{2}{x}}+2\,\mathrm{arctg}\,(x)\right]$.

Solução. Desde que uma função logarítmica, racional, exponencial e arcotangente são funções contínuas, assim como a composição de quaisquer uma delas segue-se pelo Teorema 1.6 (continuidade da função composta) que

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x^3-x^2}{2+x^3}\right)+e^{\frac{2}{x}}+2\,\mathrm{arctg}\,(x)\right]=$$

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{2+x^3}\right)\right]+e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}+2\lim_{x\to\infty}\mathrm{arctg}\,(x)=\ln 1+e^0+2\cdot\frac{\pi}{2}=1+\pi.$$

∎

1.6 Limites envolvendo o número de Euler

A constante e também chamada de *Número de Euler* foi apresentada por Jacob Bernoulli $(1654-1705)$ a partir do estudo de juros compostos continuamente cuja solução o número e aparece como $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. A constante e é um número irracional e o primeiro na matemática a ser definido a partir de um limite. Aparece na chamada *Relação de Euler* dada por $e^{i\pi}+1=0$, também conhecida como a mais bela equação matemática, além de variadas áreas da matemática como: problemas envolvendo permutações caóticas, diversos modelos probabilísticos tanto discretos como contínuos, problemas de otimização, estudo de séries e números complexos.

Teorema 1.7. *Toda função* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *crescente e limitada superiormente tem limite.*