Funções geradoras, polinômios que contam.

Carlos A. Gomes , Iesus C. Diniz

Departamento de Matamática,CCET - UFRN
XXIV Semana da Matemática - CCET www.ccet.ufrn.br

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x + y + z = 6$?

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Inicialmente observemos algumas soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Inicialmente observemos algumas soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$:

x	y	z	x+y+z
2	3	1	6
2	2	2	6
1	3	2	6
3	0	3	6
0	0	6	6

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (2, 3, 1) \rightarrow \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (2, 3, 1) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x,y,z) = (2,3,1) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

$$(x,y,z) = (2,2,2) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x,y,z) = (1,3,2) \to \bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (2, 3, 1) \rightarrow \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) \rightarrow \bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x, y, z) = (1, 3, 2) \rightarrow \bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x, y, z) = (3, 0, 3) \rightarrow \bullet\bullet\bullet|\ |\bullet\bullet\bullet$$

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (2, 3, 1) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) \to \bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x, y, z) = (1, 3, 2) \to \bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x, y, z) = (3, 0, 3) \to \bullet\bullet\bullet|\ |\bullet\bullet\bullet$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 6) \to |\ |\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Cada uma das soluções pode ser representada da seguinte forma:

$$(x,y,z) = (2,3,1) \rightarrow \bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet$$

$$(x,y,z) = (2,2,2) \rightarrow \bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x,y,z) = (1,3,2) \rightarrow \bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

$$(x,y,z) = (3,0,3) \rightarrow \bullet\bullet\bullet|\;|\bullet\bullet\bullet$$

$$(x,y,z) = (0,0,6) \rightarrow |\;|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

- Como para cada solução (x, y, z) inteira e não negativa da equação $x = y + z = 6$ há uma representação usando-se 6 pontos e 2 barras, segue que há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das possíveis configurações existentes usando-se 6 pontos e 2 barras.

- Como para cada solução (x, y, z) inteira e não negativa da equação $x = y + z = 6$ há uma representação usando-se 6 pontos e 2 barras, segue que há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das possíveis configurações existentes usando-se 6 pontos e 2 barras.

- Como há uma bijeção $f : A \rightarrow B$, segue que $\#A = \#B$.

- Como para cada solução (x, y, z) inteira e não negativa da equação $x = y + z = 6$ há uma representação usando-se 6 pontos e 2 barras, segue que há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das possíveis configurações existentes usando-se 6 pontos e 2 barras.

- Como há uma bijeção $f : A \to B$, segue que $\#A = \#B$.

- Mas, o número de elementos do conjunto B é o número de mareiras de permutar 8 objetos (6 pontos e 2 barras), ou seja:

- Como para cada solução (x, y, z) inteira e não negativa da equação $x = y + z = 6$ há uma representação usando-se 6 pontos e 2 barras, segue que há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das possíveis configurações existentes usando-se 6 pontos e 2 barras.

- Como há uma bijeção $f : A \to B$, segue que $\#A = \#B$.

- Mas, o número de elementos do conjunto B é o número de mareiras de permutar 8 objetos (6 pontos e 2 barras), ou seja:

$$P_8^{2,6} = \frac{8!}{2!.6!} = \frac{8.7.6!}{2.6!} = \frac{8.7}{2} = 28$$

- Como para cada solução (x, y, z) inteira e não negativa da equação $x = y + z = 6$ há uma representação usando-se 6 pontos e 2 barras, segue que há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das possíveis configurações existentes usando-se 6 pontos e 2 barras.

- Como há uma bijeção $f : A \to B$, segue que $\#A = \#B$.

- Mas, o número de elementos do conjunto B é o número de mareiras de permutar 8 objetos (6 pontos e 2 barras), ou seja:

$$P_8^{2,6} = \frac{8!}{2!.6!} = \frac{8.7.6!}{2.6!} = \frac{8.7}{2} = 28$$

Teorema (Equações lineares com coeficientes inteiros)

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, onde $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ possui $\binom{m+n-1}{n-1}$ soluções.

Teorema (Equações lineares com coeficientes inteiros)

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ *a equação* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$*, onde* $x_i \in \mathbb{Z}$ *e* $x_i \geq 0$ *para* $i = 1, 2, \cdots, n$ *possui* $\binom{m+n-1}{n-1}$ *soluções.*

Demonstração:

Teorema (Equações lineares com coeficientes inteiros)

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, onde $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ possui $\binom{m+n-1}{n-1}$ soluções.

Demonstração:

Neste caso poderíamos estabelecer uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ e o conjunto B das possíveis configurações entre m pontos e $n - 1$ barras, ou seja:

Teorema (Equações lineares com coeficientes inteiros)

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, onde $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ possui $\binom{m+n-1}{n-1}$ soluções.

Demonstração:

Neste caso poderíamos estabelecer uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ e o conjunto B das possíveis configurações entre m pontos e $n - 1$ barras, ou seja:

$$P_{m+n-1}^{m,n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m!.(n-1)!} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Agora queremos que $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x > 0, y > 0$ e $z > 0$. Neste caso podemos usar o seguinte artifício:

$$x = x_1 + 1, y = y_1 + 1, z = z_1 + 1$$

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Agora queremos que $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x > 0, y > 0$ e $z > 0$. Neste caso podemos usar o seguinte artifício:

$$x = x_1 + 1, y = y_1 + 1, z = z_1 + 1$$

Note que se $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$ e $z_1 \geq 0$ teremos que $x \geq 1, y \geq 1$ e $z \geq 1$.

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Agora queremos que $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x > 0, y > 0$ e $z > 0$. Neste caso podemos usar o seguinte artifício:

$$x = x_1 + 1, y = y_1 + 1, z = z_1 + 1$$

Note que se $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$ e $z_1 \geq 0$ teremos que $x \geq 1, y \geq 1$ e $z \geq 1$.

Assim,

$$x = x_1+1, y = y_1+1, z = z_1+1, x+y+z = 6 \Rightarrow x_1+y_1+z_1 = 3$$

- Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $x + y + z = 6$?

Resolução:

Agora queremos que $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x > 0, y > 0$ e $z > 0$. Neste caso podemos usar o seguinte artifício:

$$x = x_1 + 1, y = y_1 + 1, z = z_1 + 1$$

Note que se $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$ e $z_1 \geq 0$ teremos que $x \geq 1, y \geq 1$ e $z \geq 1$.

Assim,

$$x = x_1+1, y = y_1+1, z = z_1+1, x+y+z = 6 \Rightarrow x_1+y_1+z_1 = 3$$

Assim há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + y_1 + z_1 = 3$. Portanto:

Assim há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + y_1 + z_1 = 3$. Portanto:

$$\#A = \#B = \binom{3 + (3 - 1)}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{2!} = 10$$

Assim há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 6$ e o conjunto B das soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + y_1 + z_1 = 3$. Portanto:

$$\#A = \#B = \binom{3 + (3 - 1)}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{2!} = 10$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a inequação $x + y + z < 6$?

  Resolução:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a inequação $x + y + z < 6$?

Resolução:

Como $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$ e portanto $x + y + z \geq 0$. Assim,

$$0 \leq x + y + z < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \Rightarrow \binom{2}{2} \text{ soluções} \\ x + y + z = 1 \Rightarrow \binom{3}{2} \text{ soluções} \\ x + y + z = 2 \Rightarrow \binom{4}{2} \text{ soluções} \\ x + y + z = 3 \Rightarrow \binom{5}{2} \text{ soluções} \\ x + y + z = 4 \Rightarrow \binom{6}{2} \text{ soluções} \\ x + y + z = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} \text{ soluções} \end{cases}$$

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

- Uma outra saida seria introduzir uma nova variável w a inequação $x + y + z < 6$ (“variável folga"), transformando a inequação $x + y + z < 6$ na equação $x + y + z + w = 6$

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

- Uma outra saida seria introduzir uma nova variável w a inequação $x + y + z < 6$ (“variável folga"), transformando a inequação $x + y + z < 6$ na equação $x + y + z + w = 6$ e determinarmos o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x + y + z + w = 6$$

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

- Uma outra saida seria introduzir uma nova variável w a inequação $x + y + z < 6$ (“variável folga"), transformando a inequação $x + y + z < 6$ na equação $x + y + z + w = 6$ e determinarmos o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x + y + z + w = 6$$

que, como já vimos é $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$

Então o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ é:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

- Uma outra saida seria introduzir uma nova variável w a inequação $x + y + z < 6$ ("variável folga"), transformando a inequação $x + y + z < 6$ na equação $x + y + z + w = 6$ e determinarmos o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x + y + z + w = 6$$

que, como já vimos é $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w = 0$, pois

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w = 0$, pois

$$w = 0\ ,\ x + y + z + w = 6 \Leftrightarrow x + y + z = 6$$

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w = 0$, pois

$$w = 0\ ,\ x + y + z + w = 6 \Leftrightarrow x + y + z = 6$$

que não estamos interessados, visto que queremos o número de soluções inteiras e não negativas da inequação

$$x + y + z < 6\,(\Rightarrow x + y + z \neq 6)$$

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w = 0$, pois

$$w = 0\ ,\ x + y + z + w = 6 \Leftrightarrow x + y + z = 6$$

que não estamos interessados, visto que queremos o número de soluções inteiras e não negativas da inequação

$$x + y + z < 6\,(\Rightarrow x + y + z \neq 6)$$

Assim, se $w = 0$ a equação $x + y + z = 6$ possui $\binom{8}{2} = 28$ soluções inteiras e não negativas. Portanto a resposta final do problema é:

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x+y+z+w=6$ em que $w=0$, pois

$$w=0\ ,\ x+y+z+w=6 \Leftrightarrow x+y+z=6$$

que não estamos interessados, visto que queremos o número de soluções inteiras e não negativas da inequação

$$x+y+z<6\,(\Rightarrow x+y+z\neq 6)$$

Assim, se $w=0$ a equação $x+y+z=6$ possui $\binom{8}{2}=28$ soluções inteiras e não negativas. Portanto a resposta final do problema é:

$$\binom{8}{3}-\binom{8}{2}=56-28=28$$

E deste número subtrair o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w = 0$, pois

$$w = 0\ ,\ x + y + z + w = 6 \Leftrightarrow x + y + z = 6$$

que não estamos interessados, visto que queremos o número de soluções inteiras e não negativas da inequação

$$x + y + z < 6\,(\Rightarrow x + y + z \neq 6)$$

Assim, se $w = 0$ a equação $x + y + z = 6$ possui $\binom{8}{2} = 28$ soluções inteiras e não negativas. Portanto a resposta final do problema é:

$$\binom{8}{3} - \binom{8}{2} = 56 - 28 = 28$$

Mas porque isso funciona?

- Basta observar que para cada solução inteira e não negativa da inequação $x + y + z < 6$ fica determinada uma única solução inteira e não negativa da equação $x + y + z + w = 6$ com $w \neq 0$.

- Basta observar que para cada solução inteira e não negativa da inequação $x + y + z < 6$ fica determinada uma única solução inteira e não negativa da equação $x + y + z + w = 6$ com $w \neq 0$.
- Bastando para isso definir o valor de w como

$$w = 6 - (x + y + z)$$

- Basta observar que para cada solução inteira e não negativa da inequação $x + y + z < 6$ fica determinada uma única solução inteira e não negativa da equação $x + y + z + w = 6$ com $w \neq 0$.
- Bastando para isso definir o valor de w como

$$w = 6 - (x + y + z)$$

- A tabela abaixo ilustra essa fato:

- Basta observar que para cada solução inteira e não negativa da inequação $x + y + z < 6$ fica determinada uma única solução inteira e não negativa da equação $x + y + z + w = 6$ com $w \neq 0$.
- Bastando para isso definir o valor de w como

$$w = 6 - (x + y + z)$$

- A tabela abaixo ilustra essa fato:

x	y	z	x+y+z	w=6-(x+y+z)
2	2	1	5	1
0	1	2	3	3

- Assim há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ e o conjunto B das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w \neq 0$.

- Assim há uma bijeção entre o conjunto A das soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z < 6$ e o conjunto B das soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 6$ em que $w \neq 0$.

  Portanto $\#A = \#B = \binom{8}{3} - \binom{8}{2} = 56 - 28 = 28$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $2x + y + z + w = 5$?

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $2x + y + z + w = 5$?

  Resolução:

  Neste caso perceba que a variável x só pode assumir três valores, a saber:

  $$x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ \text{ou}\ \ x = 2$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $2x + y + z + w = 5$?

  Resolução:

  Neste caso perceba que a variável x só pode assumir três valores, a saber:

$$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \text{ ou } \ x = 2$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=0} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 5$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $2x + y + z + w = 5$?

  Resolução:

  Neste caso perceba que a variável x só pode assumir três valores, a saber:

$$x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ \text{ou}\ \ x = 2$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=0} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 5$$

que, como sabemos, possui $\binom{7}{2} = 21$ soluções.

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $2x + y + z + w = 5$?

  Resolução:

  Neste caso perceba que a variável x só pode assumir três valores, a saber:

$$x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ \text{ou}\ \ x = 2$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=0} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 5$$

que, como sabemos, possui $\binom{7}{2} = 21$ soluções.

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.
- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.
- Portanto o número de soluções inteiras e não negativas da equação $2x + y + z + w = 5$ é

- Supondo que $x = 1$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.

- Portanto o número de soluções inteiras e não negativas da equação $2x + y + z + w = 5$ é

$$\binom{7}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 21 + 10 + 3 = 34$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

  que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

  que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.

- Portanto o número de soluções inteiras e não negativas da equação $2x + y + z + w = 5$ é

- Supondo que $x = 0$ temos:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=2} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 3$$

que, como sabemos, possui $\binom{5}{2} = 10$ soluções.

- Supondo que $x = 2$ temos:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{2x}_{=4} + y + z + w = 5 \Rightarrow y + z + w = 1$$

que, como sabemos, possui $\binom{3}{2} = 3$ soluções.

- Portanto o número de soluções inteiras e não negativas da equação $2x + y + z + w = 5$ é

$$\binom{7}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 21 + 10 + 3 = 34$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

Neste ponto precisamos de uma ferramenta mais refinada...

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

Neste ponto precisamos de uma ferramenta mais refinada...

As funções geradoras

- Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. Moivre (1667-1754).

- Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. Moivre (1667-1754).
- Foi extensivamtne aplicada por Leonard Euler (1707 - 1783) - Teoria das partições.

- Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. Moivre (1667-1754).
- Foi extensivamtne aplicada por Leonard Euler (1707 - 1783) - Teoria das partições.
- Também foi usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo da probabilidade.

- Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. Moivre (1667-1754).
- Foi extensivamtne aplicada por Leonard Euler (1707 - 1783) - Teoria das partições.
- Também foi usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo da probabilidade.
- Nicolau Bernoulli (1687-1759) utilizou este método no estuda das permutações caóticas.

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$?

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$?

Resolução:

Definimos três polinômios um para cada variável x_i, com $1 \leq i \leq 3$ da seguinte forma:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$?

Resolução:

Definimos três polinômios um para cada variável x_i, com $1 \leq i \leq 3$ da seguinte forma:

$$x_1 \in \{2, 3\} \Rightarrow p_1(x) = x^2 + x^3$$

$$x_2 \in \{1, 4\} \Rightarrow p_2(x) = x + x^4$$

$$x_3 \in \{3, 4, 5\} \Rightarrow p_3(x) = x^3 + x^4 + x^5$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$?

Resolução:

Definimos três polinômios um para cada variável x_i, com $1 \leq i \leq 3$ da seguinte forma:

$$x_1 \in \{2,3\} \Rightarrow p_1(x) = x^2 + x^3$$

$$x_2 \in \{1,4\} \Rightarrow p_2(x) = x + x^4$$

$$x_3 \in \{3,4,5\} \Rightarrow p_3(x) = x^3 + x^4 + x^5$$

Agora defina o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ que é:

Agora defina o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ que é:

$$p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$$

Agora defina o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ que é:

$$
\begin{aligned}
p(x) = & \quad p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\
= & \quad (x^2 + x^3)\,.\,(x + x^4)\,.\,(x^3 + x^4 + x^5)
\end{aligned}
$$

Agora defina o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ que é:

$$
\begin{aligned}
p(x) = & \quad p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\
= & \quad \left(x^2 + x^3\right).\left(x + x^4\right).\left(x^3 + x^4 + x^5\right) \\
= & \quad x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + x^6
\end{aligned}
$$

Para obtermos o número soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$, basta observarmos o coeficiente de x^9 no polinômio p, ou seja 2.

- Mas porque isso funciona?

- Note que:

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \;\text{ e }\; x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \ \text{ e } \ x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Além disso, os ternos $(2, 4, 3)$ e $(3, 1, 5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$.

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \;\text{ e }\; x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Além disso, os ternos $(2, 4, 3)$ e $(3, 1, 5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$.
- Assim, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ corresponde ao número de maneiras de obtermos x^9 quando multiplicamos três fatores, a saber:

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \ \text{ e } \ x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Além disso, os ternos $(2,4,3)$ e $(3,1,5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$.
- Assim, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$ corresponde ao número de maneiras de obtermos x^9 quando multiplicamos três fatores, a saber:
- um do polinômio $p_1(x) = x^2 + x^3$.

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \ \text{ e } \ x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Além disso, os ternos $(2, 4, 3)$ e $(3, 1, 5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$.
- Assim, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ corresponde ao número de maneiras de obtermos x^9 quando multiplicamos três fatores, a saber:
- um do polinômio $p_1(x) = x^2 + x^3$.
- outro do polinômio $p_2(x) = x + x^4$.

- Note que:

$$x^9 = x^2.x^4.x^3 \text{ e } x^9 = x^3.x^1.x^5$$

- Além disso, os ternos $(2, 4, 3)$ e $(3, 1, 5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$.
- Assim, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ corresponde ao número de maneiras de obtermos x^9 quando multiplicamos três fatores, a saber:
- um do polinômio $p_1(x) = x^2 + x^3$.
- outro do polinômio $p_2(x) = x + x^4$.
- e outro do polinômio $p_3(x) = x^3 + x^4 + x^5$.

- Portanto o número de maneiras distintas de obter x^9 efetuando-se o produto

$$\begin{aligned} p(x) = &\quad p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\ = &\quad (x^2 + x^3)\,.\,(x + x^4)\,.\,(x^3 + x^4 + x^5) \end{aligned}$$

- Portanto o número de maneiras distintas de obter x^9 efetuando-se o produto

$$\begin{aligned} p(x) = &\quad p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\ = &\quad (x^2 + x^3)\,.\,(x + x^4)\,.\,(x^3 + x^4 + x^5) \end{aligned}$$

corresponde a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$.

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:
- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$ e $m \in \{6,7,8,9,10,11,12\}$?

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:
- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ e $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$?
  uma vez que

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:
- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ e $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$?
  uma vez que

$$p(x) = \quad p_1(x).p_2(x).p_3(x)$$

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:
- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ e $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$?
  uma vez que

$$\begin{aligned} p(x) = & \; p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\ = & \; (x^2 + x^3) \,.\, (x + x^4) \,.\, (x^3 + x^4 + x^5) \end{aligned}$$

- Na questão anterior, dizemos que o polinômio $p(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$ é a **função geradora** associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório:
- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{1, 4\}$ e $x_3 \in \{3, 4, 5\}$ e $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$?
  uma vez que

$$\begin{aligned} p(x) = & \; p_1(x).p_2(x).p_3(x) \\ = & \; (x^2 + x^3) \, . \, (x + x^4) \, . \, (x^3 + x^4 + x^5) \\ = & \; x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + x^6 \end{aligned}$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = 25x \ , \ y_1 = 10y \ , \ z_1 = 5z$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = 25x \ , \ y_1 = 10y \ , \ z_1 = 5z$$

  Como $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x \leq 37$, $0 \leq y \leq 37$ e $0 \leq z \leq 37$, segue que:

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

  $$x_1 = 25x \ , \ y_1 = 10y \ , \ z_1 = 5z$$

  Como $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x \leq 37$, $0 \leq y \leq 37$ e $0 \leq z \leq 37$, segue que:

  $$x_1 \in \{0, 25\}$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = 25x \ , \ y_1 = 10y \ , \ z_1 = 5z$$

  Como $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x \leq 37$, $0 \leq y \leq 37$ e $0 \leq z \leq 37$, segue que:

$$x_1 \in \{0, 25\}$$

$$y_1 \in \{0, 10, 20, 30\}$$

- Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x + 10y + 5z + w = 37$?

  Resolução:

  Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = 25x \ , \ y_1 = 10y \ , \ z_1 = 5z$$

  Como $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x \leq 37$, $0 \leq y \leq 37$ e $0 \leq z \leq 37$, segue que:

$$x_1 \in \{0, 25\}$$

$$y_1 \in \{0, 10, 20, 30\}$$

$$z_1 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$

$y_1 \mapsto p_2(t) = 1 + t^{10} + t^{20} + t^{30}$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$

$y_1 \mapsto p_2(t) = 1 + t^{10} + t^{20} + t^{30}$

$z_1 \mapsto p_3(t) = 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + t^{20} + t^{25} + t^{30} + t^{35}$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$

$y_1 \mapsto p_2(t) = 1 + t^{10} + t^{20} + t^{30}$

$z_1 \mapsto p_3(t) = 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + t^{20} + t^{25} + t^{30} + t^{35}$

$w \mapsto p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{37}$

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$$

$$y_1 \mapsto p_2(t) = 1 + t^{10} + t^{20} + t^{30}$$

$$z_1 \mapsto p_3(t) = 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + t^{20} + t^{25} + t^{30} + t^{35}$$

$$w \mapsto p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{37}$$

Assim, a função geradora para esse problema combinatório é o polinômio

$$w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$$

construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, temos:

$x_1 \mapsto p_1(t) = 1 + t^{25}$

$y_1 \mapsto p_2(t) = 1 + t^{10} + t^{20} + t^{30}$

$z_1 \mapsto p_3(t) = 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + t^{20} + t^{25} + t^{30} + t^{35}$

$w \mapsto p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{37}$

Assim, a função geradora para esse problema combinatório é o polinômio

$$\begin{aligned} p(t) = & \; p_1(t).p_2(t).p_3(t).p_4(t) \\ = & \; \left(1 + t^{25}\right)\left(1 + \cdots + t^{30}\right)\cdots\left(1 + t + \cdots + t^{37}\right) \end{aligned}$$

$$p(t) = t^{127}+t^{126}+t^{125}+t^{124}+t^{123}+2t^{122}+2t^{121}+2t^{120}+2t^{119}+2t^{118}+4t^{117}+4t^{116}+4t^{115}+4t^{114}+4t^{113}+6t^{112}+6t^{111}+6t^{110}+6t^{109}+6t^{108}+9t^{107}+9t^{106}+9t^{105}+9t^{104}+9t^{103}+13t^{102}+13t^{101}+13t^{100}+13t^{99}+13t^{98}+18t^{97}+18t^{96}+18t^{95}+18t^{94}+18t^{93}+24t^{92}+24t^{91}+24t^{90}+23t^{89}+23t^{88}+28t^{87}+28t^{86}+28t^{85}+27t^{84}+27t^{83}+33t^{82}+33t^{81}+33t^{80}+31t^{79}+31t^{78}+36t^{77}+36t^{76}+36t^{75}+34t^{74}+34t^{73}+40t^{72}+40t^{71}+40t^{70}+37t^{69}+37t^{68}+42t^{67}+42t^{66}+42t^{65}+38t^{64}+38t^{63}+42t^{62}+42t^{61}+42t^{60}+37t^{59}+37t^{58}+40t^{57}+40t^{56}+40t^{55}+34t^{54}+34t^{53}+36t^{52}+36t^{51}+36t^{50}+31t^{49}+31t^{48}+33t^{47}+33t^{46}+33t^{45}+27t^{44}+27t^{43}+28t^{42}+28t^{41}+28t^{40}+23t^{39}+23t^{38}+24t^{37}+24t^{36}+24t^{35}+18t^{34}+18t^{33}+18t^{32}+18t^{31}+18t^{30}+13t^{29}+13t^{28}+13t^{27}+13t^{26}+13t^{25}+9t^{24}+9t^{23}+9t^{22}+9t^{21}+9t^{20}+6t^{19}+6t^{18}+6t^{17}+6t^{16}+6t^{15}+4t^{14}+4t^{13}+4t^{12}+4t^{11}+4t^{10}+2t^{9}+2t^{8}+2t^{7}+2t^{6}+2t^{5}+t^{4}+t^{3}+t^{2}+t+1$$

$$p(t)=t^{127}+t^{126}+t^{125}+t^{124}+t^{123}+2t^{122}+2t^{121}+2t^{120}+2t^{119}+2t^{118}+4t^{117}+4t^{116}+4t^{115}+4t^{114}+4t^{113}+6t^{112}+6t^{111}+6t^{110}+6t^{109}+6t^{108}+9t^{107}+9t^{106}+9t^{105}+9t^{104}+9t^{103}+13t^{102}+13t^{101}+13t^{100}+13t^{99}+13t^{98}+18t^{97}+18t^{96}+18t^{95}+18t^{94}+18t^{93}+24t^{92}+24t^{91}+24t^{90}+23t^{89}+23t^{88}+28t^{87}+28t^{86}+28t^{85}+27t^{84}+27t^{83}+33t^{82}+33t^{81}+33t^{80}+31t^{79}+31t^{78}+36t^{77}+36t^{76}+36t^{75}+34t^{74}+34t^{73}+40t^{72}+40t^{71}+40t^{70}+37t^{69}+37t^{68}+42t^{67}+42t^{66}+42t^{65}+38t^{64}+38t^{63}+42t^{62}+42t^{61}+42t^{60}+37t^{59}+37t^{58}+40t^{57}+40t^{56}+40t^{55}+34t^{54}+34t^{53}+36t^{52}+36t^{51}+36t^{50}+31t^{49}+31t^{48}+33t^{47}+33t^{46}+33t^{45}+27t^{44}+27t^{43}+28t^{42}+28t^{41}+28t^{40}+23t^{39}+23t^{38}+24t^{37}+24t^{36}+24t^{35}+18t^{34}+18t^{33}+18t^{32}+18t^{31}+18t^{30}+13t^{29}+13t^{28}+13t^{27}+13t^{26}+13t^{25}+9t^{24}+9t^{23}+9t^{22}+9t^{21}+9t^{20}+6t^{19}+6t^{18}+6t^{17}+6t^{16}+6t^{15}+4t^{14}+4t^{13}+4t^{12}+4t^{11}+4t^{10}+2t^{9}+2t^{8}+2t^{7}+2t^{6}+2t^{5}+t^{4}+t^{3}+t^{2}+t+1$$

- Se 5 dados comuns e honestos são lançados simultâneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 18?

- Se 5 dados comuns e honestos são lançados simultâneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 18?

  Resolução:

  Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 os resultados obtidos em cada um dos 5 dados. Como queremos que a soma dos cinco resultados obtidos seja 18, devemos ter:

- Se 5 dados comuns e honestos são lançados simultâneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 18?

  Resolução:

  Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 os resultados obtidos em cada um dos 5 dados. Como queremos que a soma dos cinco resultados obtidos seja 18, devemos ter:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, usando o método das funções geradoras segue que

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Assim, usando o método das funções geradoras segue que

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^5$$

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Assim, usando o método das funções geradoras segue que

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^5$$

ou seja,

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, usando o método das funções geradoras segue que

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^5$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) = & \; x^{30} + 5x^{29} + 15x^{28} + 35x^{27} + 70x^{26} + 126x^{25} + 205x^{24} \\ + & \; 305x^{23} + 420x^{22} + 540x^{21} + 651x^{20} + 735x^{19} + 780x^{18} \\ + & \; 780x^{17} + 735x^{16} + 651x^{15} + 540x^{14} + 420x^{13} \\ + & \; 305x^{12} + 205x^{11} + 126x^{10} + 70x^{9} + 35x^{8} + 15x^{7} \\ + & \; 5x^{6} + x^{5} \end{aligned}$$

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, usando o método das funções geradoras segue que

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^5$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) = \; & x^{30} + 5x^{29} + 15x^{28} + 35x^{27} + 70x^{26} + 126x^{25} + 205x^{24} \\ + \; & 305x^{23} + 420x^{22} + 540x^{21} + 651x^{20} + 735x^{19} + 780x^{18} \\ + \; & 780x^{17} + 735x^{16} + 651x^{15} + 540x^{14} + 420x^{13} \\ + \; & 305x^{12} + 205x^{11} + 126x^{10} + 70x^{9} + 35x^{8} + 15x^{7} \\ + \; & 5x^{6} + x^{5} \end{aligned}$$

portanto há 780 maneiras distintas para que a soma dos resultados obtidos nos 5 dados seja igal a 18.

Definição

Uma série de potências é uma série infinita da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

onde a_i *para* $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ *são números reais e* x *é uma variável (real).*

Definição

Uma série de potências é uma série infinita da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

onde a_i *para* $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ *são números reais e* x *é uma variável (real).*

Definição

Se $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$ *são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências*

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + (a_3 + b_3) x^3 + \cdots$$

Definição

Se $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$ *são duas séries de potências, então o produto destas duas séries é a série de potências*

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \text{ , onde } c_r = \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$$

Definição

Se $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$ *são duas séries de potências, então o produto destas duas séries é a série de potências*

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \text{ , } \textit{onde } c_r = \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$$

Definição

Se a_r, para $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ é o número de soluções de um problema combinatório, a **função geradora ordinária** *para esse problema é a série de potências*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ou, de maneira geral, dada a sequência (a_r), a função geradora ordinária para esta sequência é definida como sendo a série de potências acima.

Definição

Se a_r*, para* $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$ *é o número de soluções de um problema combinatório, a* **função geradora ordinária** *para esse problema é a série de potências*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ou, de maneira geral, dada a sequência (a_r)*, a função geradora ordinária para esta sequência é definida como sendo a série de potências acima.*

- Qual a função geradora para determinarmos o número de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos?

- Qual a função geradora para determinarmos o número de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos?
  Como sabemos a quantidade de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos é dada por $\binom{n}{r}$. Assim, a função geradora para este problema combinatório é dada por:

- Qual a função geradora para determinarmos o número de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos?
  Como sabemos a quantidade de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos é dada por $\binom{n}{r}$. Assim, a função geradora para este problema combinatório é dada por:

$$f(x) = \binom{n}{r} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

- Qual a função geradora para determinarmos o número de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos?
  Como sabemos a quantidade de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos é dada por $\binom{n}{r}$. Assim, a função geradora para este problema combinatório é dada por:

$$f(x) = \binom{n}{r} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

  a qual, como sabemos é igual a $f(x) = (1 + x)^n$,visto que, pelo binômio de Newton,

- Qual a função geradora para determinarmos o número de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos? Como sabemos a quantidade de $r-$subconjuntos de um conjunto com n elementos é dada por $\binom{n}{r}$. Assim, a função geradora para este problema combinatório é dada por:

$$f(x) = \binom{n}{r} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

a qual, como sabemos é igual a $f(x) = (1+x)^n$,visto que, pelo binômio de Newton,

$$(1+x)^n = \binom{n}{r} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

É claro que, pela definição, a função geradora da sequência acima é:

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

É claro que, pela definição, a função geradora da sequência acima é:

$$f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots$$

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

É claro que, pela definição, a função geradora da sequência acima é:

$$f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots$$

Mas sempre que pedirmos a função geradora (ordinária) de uma dada sequência estaremos interessados numa “fórmula fechada"para a resposta. Neste caso,

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

É claro que, pela definição, a função geradora da sequência acima é:

$$f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots$$

Mas sempre que pedirmos a função geradora (ordinária) de uma dada sequência estaremos interessados numa “fórmula fechada"para a resposta. Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \\ = & \quad \frac{x^2}{1-x} \end{aligned}$$

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

  Resolução:

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

  Resolução:

  Sabemos que:

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

  Resolução:

  Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Resolução:

Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Na igualdade acima substituindo x por x^2, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

- Dê exemplo de uma sequência (a_r) cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

  Resolução:

  Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

  Na igualdade acima substituindo x por x^2, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

  Portanto $f(x)$ é a função geradora da sequência

$$(a_r) = (1, 0, 1, 0, \cdots)$$

.

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots\right)$$

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots\right)$$

Resolução:

Dos cursos de Cálculo, sabemos que:

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots\right)$$

Resolução:

Dos cursos de Cálculo, sabemos que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

- Qual a função geradora para a sequência abaixo?

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots\right)$$

Resolução:

Dos cursos de Cálculo, sabemos que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Assim a função geradora da sequência

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots\right)$$

é dada por $f(x) = e^x$.

- Encontre a sequência cuja função geradora ordinária seja

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x$$

- Encontre a sequência cuja função geradora ordinária seja

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x$$

Resolução:

- Encontre a sequência cuja função geradora ordinária seja

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x$$

Resolução:

Como

- Encontre a sequência cuja função geradora ordinária seja

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x$$

Resolução:

Como

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 + e^x = & \quad x^2 + x^3 + \left(1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) \\ = & \quad 1 + x + \left(1 + \tfrac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 + \tfrac{1}{3!}\right)x^3 + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

- Encontre a sequência cuja função geradora ordinária seja

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x$$

Resolução:

Como

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 + e^x = &\; x^2 + x^3 + \left(1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) \\ = &\; 1 + x + \left(1 + \tfrac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 + \tfrac{1}{3!}\right)x^3 + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

A sequência gerada por esta função é:

$$(a_r) = \left(1, 1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \cdots\right)$$

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:

Como

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:

Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:

Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Trocando-se x por $2x$ segue que:

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:
Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Trocando-se x por $2x$ segue que:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{2^1}{1!}\right)x + \left(\frac{2^2}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{2^3}{3!}\right)x^3 + \cdots + \left(\frac{2^r}{r!}\right)x^r + \cdots \end{aligned}$$

- Encontre a a função geradora ordinária para a sequência

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right)$$

Resolução:

Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Trocando-se x por $2x$ segue que:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{2^1}{1!}\right) x + \left(\frac{2^2}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{2^3}{3!}\right) x^3 + \cdots + \left(\frac{2^r}{r!}\right) x^r + \cdots \end{aligned}$$

O que nos mostra que $f(x) = e^{2x}$ é a função geradora.

Teorema

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:

Teorema

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:
(i). $\alpha f(x) + \beta g(x)$ é a função geradora da sequência $(\alpha a_r + \beta b_r)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:

(i). $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *é a função geradora da sequência* $(\alpha a_r + \beta b_r)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). $$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n.$$

Teorema

Sendo $f(x)$ *e* $g(x)$ *as funções geradoras das sequências* (a_r) *e* (b_r) *respectivamente, temos:*

(i). $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *é a função geradora da sequência* $(\alpha a_r + \beta b_r)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n$.

(iii). A função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ *é*

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots \right) f(x)$$

Teorema

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:

(i). $\alpha f(x) + \beta g(x)$ é a função geradora da sequência $(\alpha a_r + \beta b_r)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n$.

(iii). A função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ é

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) f(x)$$

(iv). A função geradora para (ra_r) é $xf'(x)$.

Teorema

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:

(i). $\alpha f(x) + \beta g(x)$ é a função geradora da sequência $(\alpha a_r + \beta b_r)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n$.

(iii). A função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ é

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots \right) f(x)$$

(iv). A função geradora para (ra_r) é $xf'(x)$.

(v).$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Demonstração:

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

Resolução:

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora para a sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora para a sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora para a sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

segue que a função geradora da sequência (ra_r) é $xf'(x)$, ou seja,

- Encontre a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora para a sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

segue que a função geradora da sequência (ra_r) é $xf'(x)$, ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + rx^{r-1} + \cdots$$

logo,

logo,

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

logo,

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

possui r como coeficiente de x^r, sendo portanto, a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

.

logo,

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

possui r como coeficiente de x^r, sendo portanto, a função geradora para a sequência

$$(a_r) = (1, 2, 3, 4, \cdots, r, \cdots)$$

. .

- Encontrar a função geradora para a sequência

$$(b_r) = \left(1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, r^2, \cdots\right)$$

- Encontrar a função geradora para a sequência

$$(b_r) = \left(1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, r^2, \cdots\right)$$

Resolução:

Como vimos no exemplo anterior,

- Encontrar a função geradora para a sequência

$$(b_r) = \left(1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, r^2, \cdots\right)$$

Resolução:

Como vimos no exemplo anterior,

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

- Encontrar a função geradora para a sequência

$$(b_r) = \left(1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, r^2, \cdots\right)$$

Resolução:

Como vimos no exemplo anterior,

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

Assim, para que o coeficiente de x^r fique igual a r^2, basta tomarmos a derivada desta função e multiplicá-la por x, isto é,

$$
\begin{aligned}
x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x\left(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+r^2x^{r-1}+\cdots\right. \\
&= 1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots+r^2x^r+\cdots
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x\left(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+r^2x^{r-1}+\cdots\right. \\ &= 1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots+r^2x^r+\cdots \end{aligned}$$

Como

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x\,(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x\left(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+r^2x^{r-1}+\cdots\right. \\ &= 1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots+r^2x^r+\cdots \end{aligned}$$

Como

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

temos que a função geradora para a sequência $a_r = r^2$ é dada por:

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

  Resolução:

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

  Resolução:

  Já vimos que as funções geradoras para as sequências $a_r = r$ e $a_r = r^2$ são, respectivamente

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

  Resolução:

  Já vimos que as funções geradoras para as sequências $a_r = r$ e $a_r = r^2$ são, respectivamente

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

  Resolução:

  Já vimos que as funções geradoras para as sequências $a_r = r$ e $a_r = r^2$ são, respectivamente

  $$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ e } g(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

  segue que a função geradora da sequência $a_r = 2r + 3r^2$ é dada por:

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = 2r + 3r^2$.

  Resolução:

  Já vimos que as funções geradoras para as sequências $a_r = r$ e $a_r = r^2$ são, respectivamente

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

  segue que a função geradora da sequência $a_r = 2r + 3r^2$ é dada por:

$$h(x) = 2f(x) + 3g(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

  Resolução:

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

  Resolução:

  Precisamos encontrar uma série de potências em que o coeficiente de x^r seja $\frac{1}{r}$.

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

  Resolução:

  Precisamos encontrar uma série de potências em que o coeficiente de x^r seja $\frac{1}{r}$.
  Sabemos que

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

  Resolução:

  Precisamos encontrar uma série de potências em que o coeficiente de x^r seja $\frac{1}{r}$.
  Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

  Resolução:

  Precisamos encontrar uma série de potências em que o coeficiente de x^r seja $\frac{1}{r}$.
  Sabemos que

  $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

  Se integrarmos em relação e x ambos os lados a igualdade acima, obtemos:

- Encontre a função geradora para a sequência $a_r = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Precisamos encontrar uma série de potências em que o coeficiente de x^r seja $\frac{1}{r}$.
Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$$

Se integrarmos em relação e x ambos os lados a igualdade acima, obtemos:

$$\int \frac{1}{1-x}dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{r}x^r + \cdots$$

Como $\int \frac{1}{1-x}dx = -\ell n\,(1-x)$, segue que

$$f(x) = -\ell n\,(1-x)$$

é a função procurada.

Teorema (Teorema binomial)

$$(1+x)^u = 1 + ux + \cdots + \frac{u\,(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

E, se denotarmos por (coeficiente binomial generalizado)

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!} & ,\ se\ r > 0 \\ 1 & ,\ se\ r = 0 \end{cases}$$

teremos

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r$$

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Resolução:

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Resolução:

Note que

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Resolução:

Note que

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Resolução:

Note que

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

Aplicando o teorema binomial,

- Mostre que coeficiente de x^p na expansão

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^n$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Resolução:

Note que

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=(1-x)^{-n}$$

Aplicando o teorema binomial,

$$(1-x)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}1^{-n-r}(-x)^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-1)^r x^r$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\binom{-n}{p}(-1)^p = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!}\\ &= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!}\end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!}\end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}
\end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}
\end{aligned}$$

Este número $\binom{n+p-1}{p}$ corresponde ao número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

- De quantas maneiras distintas podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 5 marcas diferentes?

- De quantas maneiras distintas podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 5 marcas diferentes?

  Resolução:

  Como o número de refrigerantes que serão escolhidos de cada marca é um inteiro de 0 a 12, segue que a função geradora para esse problema é:

- De quantas maneiras distintas podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 5 marcas diferentes?

  Resolução:

  Como o número de refrigerantes que serão escolhidos de cada marca é um inteiro de 0 a 12, segue que a função geradora para esse problema é:

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}\right)^5$$

- De quantas maneiras distintas podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 5 marcas diferentes?

  Resolução:

  Como o número de refrigerantes que serão escolhidos de cada marca é um inteiro de 0 a 12, segue que a função geradora para esse problema é:

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}\right)^5$$

  Então, segue pelo resultado anterior que o coeficiente de x^{12} é:

- De quantas maneiras distintas podemos escolher 12 latas de refrigerante se existem 5 marcas diferentes?

  Resolução:

  Como o número de refrigerantes que serão escolhidos de cada marca é um inteiro de 0 a 12, segue que a função geradora para esse problema é:

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}\right)^5$$

  Então, segue pelo resultado anterior que o coeficiente de x^{12} é:

$$\binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \frac{16!}{4!12!} = 1820$$

Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ *é a função geradora da sequência* (a_r), *então*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, , \; \forall n \geq 0$$

Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ *é a função geradora da sequência* (a_r)*, então*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; , \; \forall n \geq 0$$

Demonstração:

Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ *é a função geradora da sequência* (a_r)*, então*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ \forall n \geq 0$$

Demonstração:

De fato,

Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ *é a função geradora da sequência* (a_r)*, então*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ ,\ \forall n \geq 0$$

Demonstração:

De fato,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \Rightarrow a_0 = f(0)$$

Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ é a função geradora da sequência (a_r), então

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ \forall n \geq 0$$

Demonstração:

De fato,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \Rightarrow a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \Rightarrow a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3.2a_3x + \cdots \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3.2a_3x + \cdots \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3.2a_3x + \cdots \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ , \ \forall n \geq 0$$

- Dispondo de três tipos difretentes de livros *a*, *b* e *c*, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro *a* pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro *b* no máximo três vezes e o *c* no máximo duas vezes?

- Dispondo de três tipos difretentes de livros a, b e c, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o c no máximo duas vezes?

  Resolução:

- Dispondo de três tipos difretentes de livros *a*, *b* e *c*, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro *a* pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro *b* no máximo três vezes e o *c* no máximo duas vezes?

Resolução:

Vamos mudar um pouco a abordadem anterior...

- Dispondo de três tipos difretentes de livros a, b e c, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o c no máximo duas vezes?

Resolução:

Vamos mudar um pouco a abordadem anterior...
Vamos associar à retidada das bolas do tipo a o polinômio

$$p_1(x) = 1 + ax$$

- Dispondo de três tipos difretentes de livros *a*, *b* e *c*, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro *a* pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro *b* no máximo três vezes e o *c* no máximo duas vezes?

  Resolução:

  Vamos mudar um pouco a abordadem anterior...
  Vamos associar à retidada das bolas do tipo *a* o polinômio

$$p_1(x) = 1 + ax$$

  à retirada do tipo *b*,

$$p_2(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$$

- Dispondo de três tipos difretentes de livros a, b e c, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o c no máximo duas vezes?

  Resolução:

  Vamos mudar um pouco a abordadem anterior...
  Vamos associar à retidada das bolas do tipo a o polinômio

$$p_1(x) = 1 + ax$$

  à retirada do tipo b,

$$p_2(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$$

  e à retirada dos livros do tipo c ao polinômio

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$p(x) = \quad p_1(x)p_2(x)p_3(x)$$

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ &= (1+ax)\left(1+bx+b^2x^2+b^3x^3\right)\left(1+cx+c^2x^2\right) \end{aligned}$$

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$\begin{aligned} p(x) = &\ p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ = &\ (1+ax)\left(1+bx+b^2x^2+b^3x^3\right)\left(1+cx+c^2x^2\right) \\ = &\ 1+(a+b+c)\,x+\left(b^2+ab+bc+ac+c^2\right)x^2 \end{aligned}$$

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$
\begin{aligned}
p(x) = {} & p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\
= {} & (1+ax)\left(1+bx+b^2x^2+b^3x^3\right)\left(1+cx+c^2x^2\right) \\
= {} & 1+(a+b+c)\,x+\left(b^2+ab+bc+ac+c^2\right)x^2 \\
+ {} & \left(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2\right)x^3
\end{aligned}
$$

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$\begin{aligned}
p(x) = & \ p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\
= & \ (1+ax)\left(1+bx+b^2x^2+b^3x^3\right)\left(1+cx+c^2x^2\right) \\
= & \ 1+(a+b+c)\,x+\left(b^2+ab+bc+ac+c^2\right)x^2 \\
+ & \ \left(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2\right)x^3 \\
+ & \ \left(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2\right)x^4
\end{aligned}$$

Agora defina o polinômio $p(x)$ por:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\
&= (1+ax)\left(1+bx+b^2x^2+b^3x^3\right)\left(1+cx+c^2x^2\right) \\
&= 1+(a+b+c)\,x+\left(b^2+ab+bc+ac+c^2\right)x^2 \\
&+ \left(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2\right)x^3 \\
&+ \left(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2\right)x^4 \\
&+ \left(ab^3c+b^3c^2+ab^2c^2\right)x^5+ab^3c^2x^6
\end{aligned}
$$

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x

$$(a+b+c)$$

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x

$$(a+b+c)$$

corresponde a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro.

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x

$$(a+b+c)$$

corresponde a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro.

Já o coeficiente de x^2, $(b^2+ab+bc+ac+c^2)$ corresponde a lista de todas as possibilidades de escolher dois livros e assim por diante ...

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x

$$(a + b + c)$$

corresponde a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro.
Já o coeficiente de x^2, $(b^2 + ab + bc + ac + c^2)$ corresponde a lista de todas as possibilidades de escolher dois livros e assim por diante ...
portanto o coeficiente de x^4, ou seja,

$$\left(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2\right)$$

corresponde a lista de todas as 5 possibilidades de escolhermos 4 livros.

Mas queremos um pouco mais...

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:
$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:
$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:
$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$
$ab^2c \longrightarrow \frac{4!}{1!2!1!}$

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:
$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$
$ab^2c \longrightarrow \frac{4!}{1!2!1!}$

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:
$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$

$ab^2c \longrightarrow \frac{4!}{1!2!1!}$

$b^2c^2 \longrightarrow \frac{4!}{2!2!}$

Mas queremos um pouco mais...

Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira!

Assim ,por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordenálos numa prateleira.
diante do exposto os números e possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:

$b^3c \longrightarrow \frac{4!}{1!3!}$

$ab^2c \longrightarrow \frac{4!}{1!2!1!}$

$b^2c^2 \longrightarrow \frac{4!}{2!2!}$

$abc^2 \longrightarrow \frac{4!}{1!1!2!}$

Portanto o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

Portanto o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

$$\left(\underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{ab^3}+\underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{b^3c}+\underbrace{\frac{4!}{1!2!1!}}_{ab^2c}+\underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{b^2c^2}+\underbrace{\frac{4!}{1!1!2!}}_{abc^2}\right)$$

Portanto o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

$$\left(\underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{ab^3} + \underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{b^3c} + \underbrace{\frac{4!}{1!2!1!}}_{ab^2c} + \underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{b^2c^2} + \underbrace{\frac{4!}{1!1!2!}}_{abc^2} \right)$$

Mas como poderíamos obter uma função geradora cujo coeficiente do x^4 fosse justamente esse?

Portanto o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

$$\left(\underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{ab^3} + \underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{b^3c} + \underbrace{\frac{4!}{1!2!1!}}_{ab^2c} + \underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{b^2c^2} + \underbrace{\frac{4!}{1!1!2!}}_{abc^2} \right)$$

Mas como poderíamos obter uma função geradora cujo coeficiente do x^4 fosse justamente esse?

Isso motiva a seguinte definição:

Definição

A série de potências

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

é chamada de **função geradora exponencial** *da sequência* (a_r).

Definição

A série de potências

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

é chamada de **função geradora exponencial** *da sequência* (a_r).

Utilizamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem dos objetos é irrelevante, utilizamos, como vimos nos vários exemplos anteriores, a função geradora ordinária.

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora exponencial de uma sequência (a_r) é aquela cujo coeficiente de x^r é $\frac{a_r}{r!}$, segue que a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ é:

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora exponencial de uma sequência (a_r) é aquela cujo coeficiente de x^r é $\frac{a_r}{r!}$, segue que a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ é:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{r!}x^r + \cdots = e^x$$

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

Resolução:

Lembrando que a função geradora exponencial de uma sequência (a_r) é aquela cujo coeficiente de x^r é $\frac{a_r}{r!}$, segue que a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ é:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{r!}x^r + \cdots = e^x$$

ou seja, neste caso a função geradora é dada por $f(x) = e^x$.

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

Resolução:

Sabemos que:

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

Resolução:

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

Resolução:

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Multiplicando membro a membro por 3, obtemos:

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

Resolução:

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Multiplicando membro a membro por 3, obtemos:

$$3e^x = 3 + 3x + 3\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!} + 3\frac{x^4}{4!} + \cdots + 3\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

- Encontre a função geradora exponencial para a sequência:

$$(3, 3, 3, 3, \cdots)$$

Resolução:

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Multiplicando membro a membro por 3, obtemos:

$$3e^x = 3 + 3x + 3\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!} + 3\frac{x^4}{4!} + \cdots + 3\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Ora, como na expressão acima o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ para $r = 0, 1, 2, \cdots$ é sempre 3, segu que a função geradora procurada é dada por $f(x) = e^{3x}$.

- Quantas sequências de k letras $(k \leq 6)$ podemos formar com as letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo três vezes?

- Quantas sequências de k letras $(k \leq 6)$ podemos formar com as letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo três vezes?

  Resolução:

- Quantas sequências de k letras $(k \leq 6)$ podemos formar com as letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo três vezes?

  Resolução:

  A função geradora (exponencial) do problema é;

- Quantas sequências de k letras $(k \leq 6)$ podemos formar com as letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo três vezes?

  Resolução:

  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & (1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) \\
= \quad & 1+3\frac{x}{1!}+8\frac{x^2}{2!}+19\frac{x^3}{3!}+80\frac{x^4}{4!}+60\frac{x^5}{5!}+120\frac{x^6}{6!}
\end{aligned}
$$

- Quantas sequências de k letras $(k \leq 6)$ podemos formar com as letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo três vezes?

  Resolução:

  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$\begin{aligned} f(x) = & \ (1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) \\ = & \ 1+3\frac{x}{1!}+8\frac{x^2}{2!}+19\frac{x^3}{3!}+80\frac{x^4}{4!}+60\frac{x^5}{5!}+120\frac{x^6}{6!} \end{aligned}$$

  Assim, por exemplo, como o coeficiente do termo $\frac{x^3}{3!}$ é igual a 19, isto significa que existem 19 sequências de três letras que podem ser formadas respeitando as exigências do enunciado.

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.
  Resolução:

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) para o dígito 0 é;

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) para o dígito 0 é;

$$f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{(2r)\,!} + \cdots = \frac{1}{2}e^x + e^{-x}$$

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) para o dígito 0 é;

$$f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{(2r)\,!} + \cdots = \frac{1}{2}e^x + e^{-x}$$

  Para cada um dos outros dígitos $1, 2$ ou 3 a função geradora é:

- Encontre o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros.
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) para o dígito 0 é;

$$f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{(2r)\,!} + \cdots = \frac{1}{2}e^x + e^{-x}$$

  Para cada um dos outros dígitos $1, 2$ ou 3 a função geradora é:

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Assim a função geradora (exponencial) para este problema é:

Assim a função geradora (exponencial) para este problema é:

$$f(x) = f_0(x) f_1(x) f_2(x) f_3(x)$$

Assim a função geradora (exponencial) para este problema é:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_0(x)f_1(x)f_2(x)f_3(x) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{x} + e^{-x}e^{3x}
\end{aligned}
$$

Assim a função geradora (exponencial) para este problema é:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x)f_1(x)f_2(x)f_3(x) \\ &= \tfrac{1}{2}e^x + e^{-x}e^{3x} \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2}(4^r + 2^r)\frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

Assim a função geradora (exponencial) para este problema é:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x)f_1(x)f_2(x)f_3(x) \\ &= \tfrac{1}{2}e^x + e^{-x}e^{3x} \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(4^r + 2^r\right)\frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

Portanto o número de $r-$sequências formadas apenas pelos digitos $0, 1, 2, 3$ e 3 que contém um número par de zeros é igual a:

$$\frac{1}{2}\left(4^r + 2^r\right)$$

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?
  Resolução:

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) do problema é;

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)^4$$

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)^4$$

  Assim a resposta do nosso problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima.

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?

  Resolução:

  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)^4$$

  Assim a resposta do nosso problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima.

  Como $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^4 = (e^x - 1)^4$.

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?

  Resolução:

  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \right)^4$$

  Assim a resposta do nosso problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima.

  Como $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots \right)^4 = (e^x - 1)^4$.

  e

- De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?
  Resolução:
  A função geradora (exponencial) do problema é;

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)^4$$

  Assim a resposta do nosso problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima.
  Como $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^4 = (e^x - 1)^4$.
  e

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

O coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima é:

$$4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186.480$$

O coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima é:

$$4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186.480$$

Note que o problema acima corresponde ao número de funções sobrejetivas de um conjunto A com 9 elementos distintos num conjunto B que possui 4 elementos distintos.

O coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima é:

$$4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186.480$$

Note que o problema acima corresponde ao número de funções sobrejetivas de um conjunto A com 9 elementos distintos num conjunto B que possui 4 elementos distintos. Na verdade, pode-se demonstrar que se $\#A = n$ e $\#b = k$, com $k \leq n$, o número de funções sobrejetivas de A em B é dada por:

O coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima é:

$$4^9 - 4.3^9 + 6.2^9 - 4 = 186.480$$

Note que o problema acima corresponde ao número de funções sobrejetivas de um conjunto A com 9 elementos distintos num conjunto B que possui 4 elementos distintos. Na verdade, pode-se demonstrar que se $\#A = n$ e $\#b = k$, com $k \leq n$, o número de funções sobrejetivas de A em B é dada por:

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

- Análise combinatória e probabilidade - A.C.Morgado - SBM
- Introdução à Análise Combinatória - José Plínio O. Santos Margarida P. Mello Idani T. C. Murari - Editora Ciência Moderna.
- Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory - V. K. Balakrishnan.
- Introductory Discrete Mathematics (Dover Books on Computer Science) - V. K. Balakrishnan.
- Applied Combinatorics - Alan Tucker - Wiley.

- Relações de Recorrência.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.
- Teoria da contagem de Pólya.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.
- Teoria da contagem de Pólya.
- Teoria de Ramsey.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.
- Teoria da contagem de Pólya.
- Teoria de Ramsey.
- Noções sobre a teoria dos grafos.

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.
- Teoria da contagem de Pólya.
- Teoria de Ramsey.
- Noções sobre a teoria dos grafos.

...Vem aí a disciplina “Matemática discreta"!!!

- Relações de Recorrência.
- Princípio da inclusão e exclusão.
- Princípio da reflexão.
- Permutações caóticas.
- Números de Catalan e de Stirling.
- Probabilidade discreta.
- Princípio de Dirichelet.
- Teoria da contagem de Pólya.
- Teoria de Ramsey.
- Noções sobre a teoria dos grafos.

...Vem aí a disciplina “Matemática discreta"!!!
OBRIGADO!