

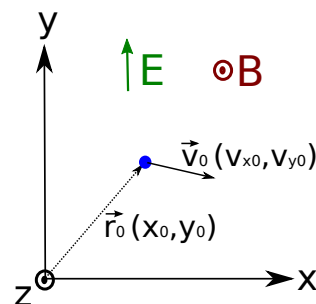
Physique Numérique I – Exercice 2

à rendre jusqu'au **24 octobre 2018 à 23h55** sur le site
<http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835968>

2 Particule dans un champ électromagnétique

Un proton de masse $m = 1.6726 \times 10^{-27} \text{kg}$, de charge $q = 1.6022 \times 10^{-19} \text{C}$, avec une position initiale (x_0, y_0) et une vitesse initiale $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$, est plongé dans un champ électrique uniforme $\mathbf{E} = E\hat{y}$ et un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Il est alors soumis à la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1)$$



2.1 Calculs analytiques [10 pts]

- Écrire le système d'équations différentielles du mouvement pour x , y , v_x et v_y .
- Trouver la solution analytique dans le cas $E = 0$, $B = B_0$.
- En prenant $v_{x0} = 0$ et $v_{y0} = v_0$, trouver (x_0, y_0) pour que la trajectoire soit centrée en $(0, 0)$.

2.2 Schéma d'Euler, Euler-Cromer et Runge-Kutta d'ordre 2 [18 pts]

Dans cette partie, on considère $E = 0$.

- Implémenter les schémas d'Euler, de Runge-Kutta d'ordre 2 (éq. (2.90) des notes de cours), et le schéma d'Euler-Cromer suivant :

$$v_x(t_{i+1}) = v_x(t_i) + \frac{dv_x}{dt}(t_i)\Delta t \quad (2)$$

$$v_y(t_{i+1}) = v_y(t_i) + \frac{dv_y}{dt}(t_{i+1})\Delta t \quad (3)$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + v_x(t_{i+1})\Delta t \quad (4)$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + v_y(t_{i+1})\Delta t \quad (5)$$

dans le code (télécharger le fichier `Exercice2.cpp` et compléter).

- Pour chacun de ces trois schémas, calculer numériquement la trajectoire de la question 2.1(iii) avec $v_0 = 4 \cdot 10^5 \text{m/s}$ et $B_0 = 3 \text{T}$. On prendra t_{fin} tel que le proton effectue théoriquement 5 périodes de rotation. Faire une étude de convergence en Δt du maximum de l'erreur entre la position théorique et la position numérique. *Indication : vous pouvez utiliser le script Matlab `ParameterScan.m`, en l'adaptant, pour automatiser le lancement d'une série de simulations.*
- Tracer les orbites dans les plans (x, y) et (v_x, v_y) , vérifier la conservation de l'énergie et analyser la stabilité numérique de ces trois schémas. Observer les différents comportements de l'évolution temporelle de l'erreur sur la conservation de l'énergie pour ces trois schémas.

2.3 Application 1 : dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ [10 pts]

Le proton est maintenant soumis à la fois aux champs électrique et magnétique, $E = 6 \cdot 10^4 \text{V/m}$, $B_0 = 3\text{T}$, $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 4 \cdot 10^5 \text{m/s}$, et le même t_{fin} qu'en 2.2(ii). Effectuer des simulations avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

- (i) Faire une étude de convergence en Δt .
- (ii) Vérifier la conservation de l'énergie, illustrer et discuter les résultats concernant la vitesse et la trajectoire.
- (iii) Représenter la trajectoire du proton dans un référentiel en translation uniforme $v_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$.

2.4 Application 2 : dérive ∇B [7 pts]

On considère maintenant un champ d'intensité variable $\mathbf{B} = B(x)\hat{z}$, avec $B(x) = B_0(1 + \kappa x)$, $\kappa = 100\text{m}^{-1}$, $B_0 = 3\text{T}$, $E = 0$, $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 4 \cdot 10^5 \text{m/s}$, et le même t_{fin} qu'en 2.2(ii). Effectuer des simulations avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

- (i) Observer ce qui se passe avec un proton ($q = e$) et un antiproton ($q = -e$). Pour l'antiproton, changer également le signe de x_0 .
- (ii) Calculer et étudier la quantité $\mu = mv^2/2B$.

2.5 Pour aller plus loin... (facultatif, max 5 pts)

- (i) En combinant Euler-Cromer « A » et « B », pour deux demi pas de temps successifs, obtenir un schéma de Verlet (équ. (2.72) des notes de cours), puis l'implémenter dans le code. Étudier la convergence en Δt et vérifier la conservation de l'énergie.
- (ii) Choisir d'autres champs magnétiques $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ et étudier les trajectoires obtenues. Attention, on doit avoir $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

2.6 Rédaction du rapport en L^AT_EX [5 pts de qualité globale]

Avec ces résultats en main, on passe à la rédaction du rapport.

- (a) Télécharger le fichier source en tex ([SqueletteRapport.tex](#)) sur "Moodle", ou partir du rapport précédent.
- (b) Rédiger un rapport de 10 à 20 pages dans lequel les calculs analytiques, les schémas numériques, les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentées en détail.

N.B. On trouve plusieurs documents L^AT_EX (introduction, exemples, références, problème des accents avec Kile) dans un dossier spécifique sur notre site "Moodle" ([Dossier L^AT_EX](#)).

2.7 Soumission du rapport et du code C++

- (a) Préparer le fichier du rapport en format pdf portant le nom `RapportExercice2_Nom1_Nom2.pdf`, ainsi que le fichier source L^AT_EX `RapportExercice2_Nom1_Nom2.tex`.
- (b) Préparer le fichier source C++ `Exercice2_Nom1_Nom2.cpp`.
- (c) Préparer le fichier script Matlab `Analyse_Nom1_Nom2.m`.
- (d) Le lien de soumission se trouve dans la section du premier exercice sur notre site "Moodle" et peut directement être atteint en cliquant [ici](#).