

Ondes : exercice 7

Timothée Dao, Victor Despland
timothee.dao@epfl.ch, victor.despland@epfl.ch

30 avril 2019

Table des matières

1	Introduction	1
2	Partie analytique	1
3	Méthodes numériques	1
3.1	Schémas	1
3.2	Conditions aux bords	2
3.3	Énergie	2
4	Simulations numériques	3
4.1	Vitesse de propagation constante	3
4.1.1	Phénomène de réflexion au bord droit	3
4.1.2	Étude de convergence en sortie d'onde	6
4.1.3	Modes propres	8
4.2	Tsunami	11
5	Pour aller plus loin ...	19
5.1	Étude de l'effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma	19
5.2	Extension à 2 dimensions	20
6	Conclusion	22

1 Introduction

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable $u(x)$. Diverses conditions aux bords seront considérées.

2 Partie analytique

Équations différentielles Trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x, t)$ sont données :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 f) \quad (3)$$

Le domaine est tel que $x \in [0, L]$. L'état initial du système est non perturbé : $f(x, t = 0) = 0 \forall x$.

3 Méthodes numériques

Le problème est discrétisé de la manière suivante : on considère $N + 1$ points, notés x_i , équidistants sur l'intervalle $[0, L]$. Ces points sont donnés par $x_i = i \Delta x$, avec $i = 0, 1, \dots, N$ et $\Delta x = L/N$. Le temps est aussi discrétisé et est donné par $t_j = j \Delta t$, avec $j = 0, 1, 2, \dots$ et Δt fixé.

On notera $f(x_i, t_j) = f_i^j$.

3.1 Schémas

La méthode numérique utilisée est le schéma explicite à trois niveaux. Pour les points de maillages et les différents pas temporels, on utilise à chaque fois la méthode des différences finies centrées. Il y a ainsi trois différents niveaux spatiaux dans la formule, c'est-à-dire des éléments en $(i+1)$, $(i-1)$ et (i) . Le schéma simplifié de l'équation A est écrit à l'eq.(4). Pour celui du B, il faut d'abord le développer l'expression en $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2u \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ pour ensuite écrire le schéma. Son expression simplifiée est écrite à l'eq.(5). Le schéma pour la troisième équation est écrit à l'eq.(6).

$$f_i^{n+1} \approx 2(1 - \beta^2)f_i^n - f_i^{n-1} + \beta^2[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n] \quad (4)$$

$$f_i^{n+1} \approx 2(1 - \beta^2)f_i^n - f_i^{n-1} + \beta^2[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n] + \frac{\beta^2}{2u_i}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (5)$$

$$f_i^{n+1} \approx 2(1 - \beta^2)f_i^n - f_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}[u_{i+1}^2 f_{i+1}^n + u_{i-1}^2 f_{i-1}^n] \quad (6)$$

Le coefficient $\beta = u_i \frac{\Delta t}{\Delta x}$ est appelé le paramètre Courant-Friedrichs-Lewy. Ces équations sont valables pour $i = 1, 2, \dots, N-1$ et $n = 0, 1, \dots, M$ t.q. $M\Delta t \leq t_{fin}$ avec $\Delta t = \beta \frac{\Delta x}{u_{max}}$.

3.2 Conditions aux bords

Les différentes conditions de bord sont présentées dans le tableau suivant :

	Bord gauche $f_0^{j+1} =$	Bord droit $f_{N+1}^{j+1} =$
Fixe	f_0^j	f_{N+1}^j
Libre	f_1^{j+1}	f_N^{j+1}
Harmonique	$A \sin \Omega t$	$A \sin \Omega t$
Sortie	$f_0^j + u(\frac{1}{2}\Delta x) \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_1^j - f_0^j)$	$f_{N+1}^j + u((N - \frac{1}{2})\Delta x) \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{N+1}^j - f_N^j)$

Pour la condition de sortie au bord gauche, on prend une onde rétrograde $f(x, t) = G(x + |u|t)$. Nous avons alors :

$$\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} = |u|G' = \frac{\partial f(0, t)}{\partial x}, \quad \forall t \quad (7)$$

En utilisant des formules de différences finies, on obtient :

$$\frac{f_0^{j+1} - f_0^j}{\Delta t} = |u| \frac{f_1^j - f_0^j}{\Delta x}, \quad \forall j \quad (8)$$

Nous obtenons finalement :

$$f_0^{j+1} = |u(\frac{1}{2}\Delta x)| \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_1^j - f_0^j) + f_0^j, \quad \forall j \quad (9)$$

Une démarche similaire est suivie pour la condition de sortie au bord droit. On utilise des différences finies pour déterminer les conditions de bord libre. Les conditions de bord harmonique et fixe sont évidentes.

3.3 Énergie

"L'énergie de l'onde" est définie par

$$E(t) = \int_0^L f^2(x, t) dx. \quad (10)$$

Au niveau numérique, on utilisera la méthode des trapèzes pour estimer cette intégrale :

$$E(t_n) \approx \sum_{i=0}^N \frac{(f_i^n)^2 + (f_{i+1}^n)^2}{2} \Delta x \quad (11)$$

4 Simulations numériques

4.1 Vitesse de propagation constante

Dans un premier temps, on étudie la situation où la vitesse de propagation $u(x)$ est constante. Les trois équations différentielles sont alors équivalentes. On prendra $L = 20\text{m}$, $u = 6\text{m/s}$ et une condition harmonique au bord gauche ($A = 1\text{ m}$ et $\omega = 5\text{ rad/s}$).

4.1.1 Phénomène de réflexion au bord droit

Bord fixe On étudie ici le phénomène de réflexion dans le cas d'un bord fixe.

On envoie dans un premier temps un simple sinus (demi-période) pour illustrer ce phénomène. Comme on peut le voir sur la Fig.1, on a bien une inversion de la vitesse et de l'amplitude après chaque réflexion, comme attendu.

En imposant une condition harmonique sur le bord gauche, on va obtenir une superposition d'ondes du type que l'on peut observer sur la Fig.1. Ces phénomènes peuvent être observés sur la Fig.2 : les interactions peuvent être constructives ("tâches" rouges, pour les maximums, et bleus, pour les minimums) ou destructives ("zones" vertes entre les tâches).

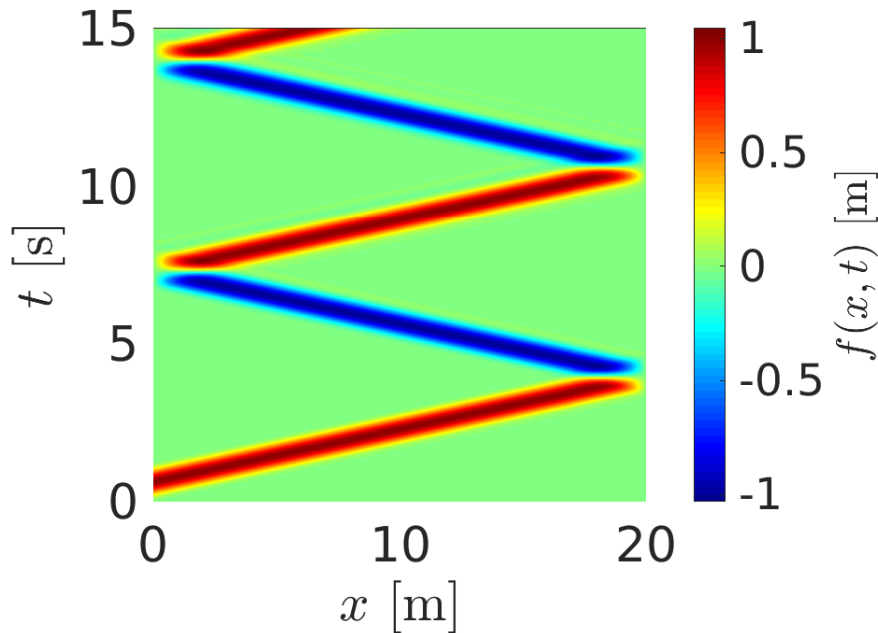


FIGURE 1: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "pulse" à gauche et "fixe" à droite.

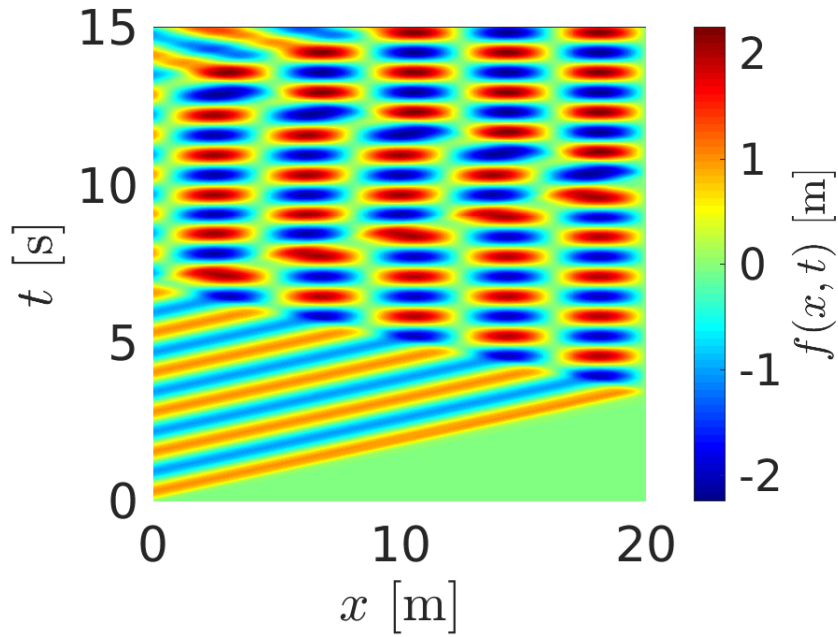


FIGURE 2: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "harmonique" à gauche et "fixe" à droite.

Bord libre On étudie ici le phénomène de réflexion dans le cas d'un bord libre.

On envoie dans un premier temps un simple sinus (demi-période) pour illustrer ce phénomène. Comme on peut le voir sur la Fig.3, on a bien une des réflexions sans inversion de l'amplitude, comme attendu.

En imposant un condition harmonique sur le bord gauche, on va obtenir une superposition d'ondes du type que l'on peut observer sur la Fig.3. Ces phénomènes peuvent être observés sur la Fig.4 : les interactions peuvent être constructives ("tâches" rouges, pour les maximums, et bleus, pour les minimums) ou destructives ("zones" vertes entre les tâches).

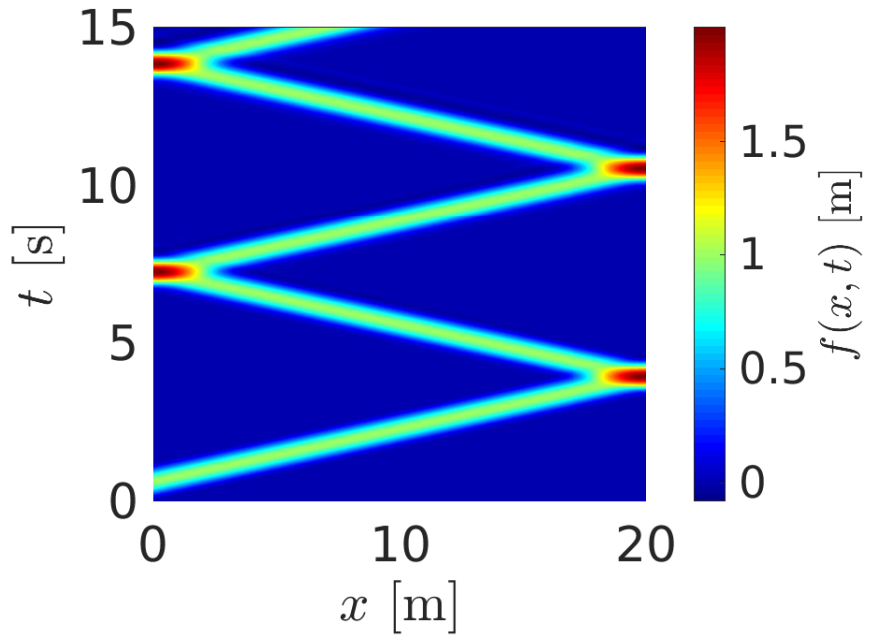


FIGURE 3: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "pulse" à gauche et "libre" à droite.

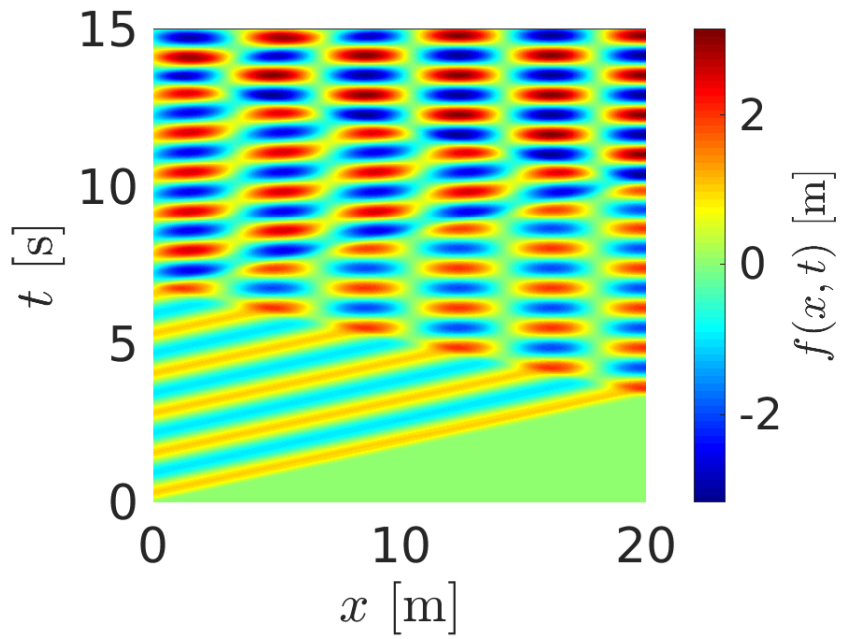


FIGURE 4: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "harmonique" à gauche et "libre" à droite.

4.1.2 Étude de convergence en sortie d'onde

On effectue une série de simulations avec la condition de sortie au bord droit. Des illustrations de ces simulations sont présentés sur les Fig.5 et Fig.6.

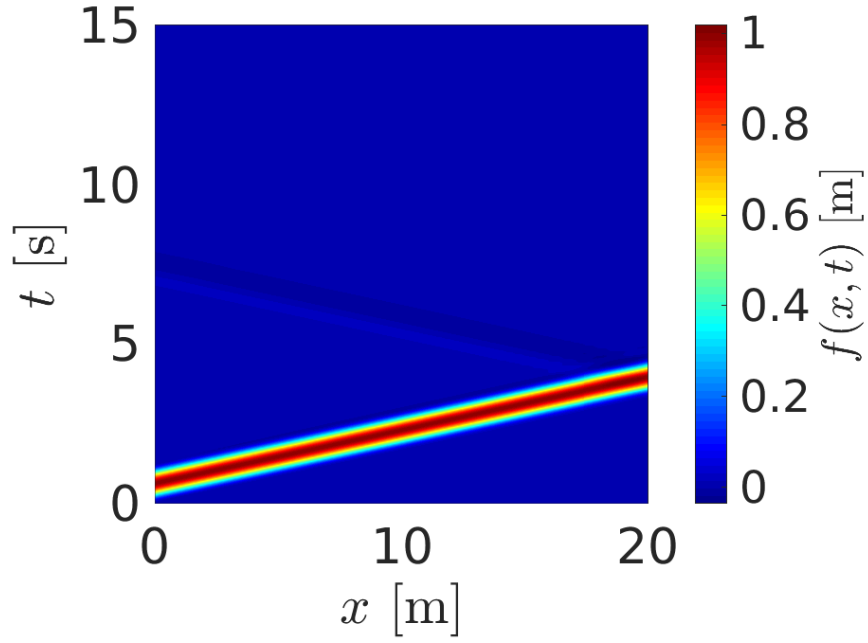


FIGURE 5: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "pulse" à gauche et "sortie" à droite.

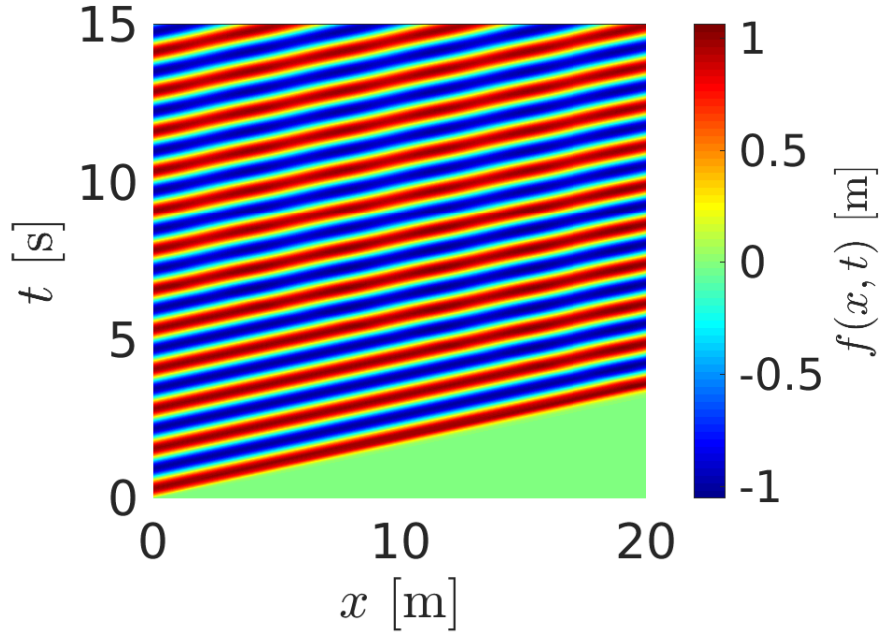


FIGURE 6: Évolution de la vague avec des conditions de bord de type "harmonique" à gauche et "sortie" à droite.

Pour la condition harmonique à gauche, on effectue une étude de convergence de la solution en $x = 5\text{m}$ et $t = 1.5\text{s}$. La solution analytique est donnée par

$$f(x, t) = -A \sin\left(\frac{\omega}{u}x - \omega t\right)$$

Dans notre cas de figure, on a :

$$f(5\text{m}, 1.5\text{s}) = -\sin\left(\frac{5}{6} \cdot 5 - 5 \cdot 1.5\right) \approx -0.1906\text{m}$$

Les résultats des études de convergence sont présentés sur la Fig.7.

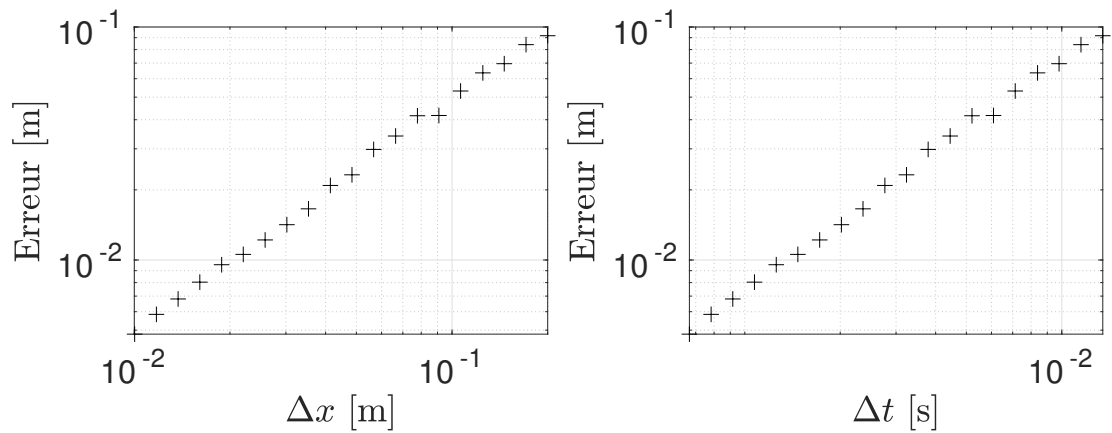


FIGURE 7: Convergence de la différence entre les simulations et la solution analytique en variant Δx et Δt à β_{CFL} constant.

4.1.3 Modes propres

En prenant la condition au bord droite fixe et harmonique à gauche, on peut observer le phénomène de résonance sous certaines conditions. Ce phénomène est caractérisé par une superposition constructive entre l'onde et sa réflexion, créant ainsi une onde stationnaire et une augmentation incessante de l'amplitude. Pour cela il faut l'onde ait une certaine pulsation propre ω_n créé par l'excitation sinusoïdale au bord gauche. L'équation de l'onde f_n s'appelle mode propre.

Calcul analytique Pour obtenir les valeurs des différents mode propres, il faut insérer l'ansatz $f(x, t) = \hat{f}(x)e^{-i\omega t}$ dans l'équation d'Alembert (1).

$$-\omega^2 f = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \hat{f}'' + \frac{\omega^2}{u^2} \hat{f} = 0 \quad (12)$$

On obtient ainsi une équation différentielles du second ordre homogène. La solution générale est donc une combinaison linéaire de cosinus et de sinus $\hat{f} = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$. En prenant en compte les conditions aux bord d'une onde stationnaire $f(0, t) = 0$, et $f(L, t) = 0$ on obtient la solution du problème.

$$\begin{aligned} f(0, t) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ f(L, t) = A \sin \frac{\omega}{u} L = 0 &\Rightarrow \frac{\omega}{u} L = n\pi \\ \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{un\pi}{L}} \text{ et } \boxed{\hat{f}_n(x) = A \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)} &n = 1, 2, 3... \end{aligned} \quad (13)$$

Approche numérique Dans un premier temps, on étudie la dépendance de l'énergie avec la pulsation. Pour cela, on lance une série de simulations en faisant varier la pulsation ω et on reporte le maximum de l'énergie. $\hat{E}(\omega) = \max_{t \in [0; t_{fin}]} E(t)|_{\omega}$.

On prendra comme durée de simulation l'équivalent de quelques dizaine de transit, c-à-d $t_{fin} = 60s$. On prend comme nombre de points $N_{points} = 200$ et le coefficient CFL à 0.5.

Sur la fig. (8), on constate que l'énergie fait des piques pour certaines pulsations. Sur la Table (1), on constate que ces valeurs correspondent bel et bien aux différents modes propres. On remarque également qu'un mode propres avec un n plus grand n n'augmente pas l'énergie max qui théoriquement est la même pour tout les modes.

n	1	2	3	4	5
ω_n^{sim}	0.95	1.88	2.84	3.77	4.72
ω_n^{th}	0.94	1.89	2.83	3.77	4.71
E_{max}	3060	3240	3090	3220	3090

TABLE 1: Comparaison des modes propres trouvés numériquement et analytiquement, avec la valeur de l'énergie max

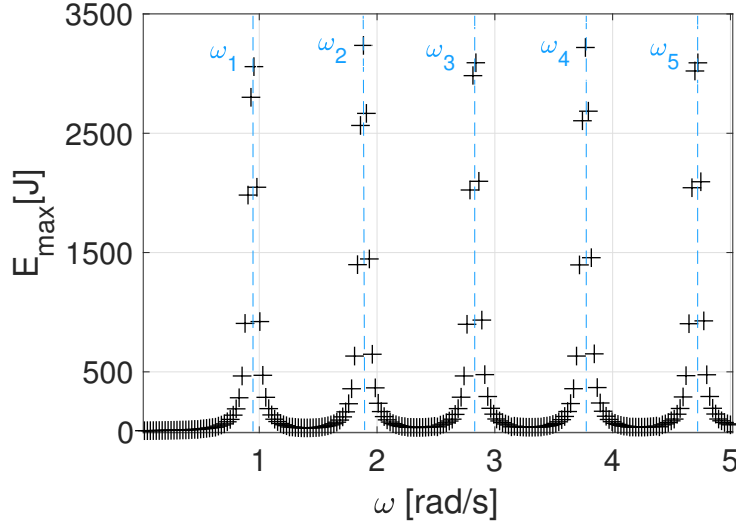


FIGURE 8: Max de l'énergie pour 200 simulations en variant la pulsation ω de l'excitation. En prenant $t_{fin} = 60s$, $N_{points} = 200$, $CFL = 0.5$ et amplitude de l'excitation $A = 1$.

E_{max} en fonction du temps Sur la fig.(9), on a représenté le graphe de l'énergie maximum pour plusieurs durée de simulations, en prenant comme mode propre ω_2 . On constate que l'énergie augmente exponentiellement, plus exactement à l'ordre 2. De manière simplifiée il est possible de montrer que l'amplitude augmente linéairement avec le temps. Le raisonnement peut se faire en se disant qu'à tout les instants T une sinusoïde complète s'est ajouté à l'onde stationnaire. Par exemple, à $t = 2T$ l'onde stationnaire est une combinaison d'une onde progressive directement causée par l'excitation au bord gauche et de l'onde rétrograde réfléchiée générée ultérieurement par le bord gauche. A l'instant $t_n = nT$ il y aura donc une onde d'amplitude $A_{T_n} = nA$. Comme l'équation (10) intègre sur x $f(x, t)$ au carré, il y aura une dépendance à l'ordre 2 avec le temps.

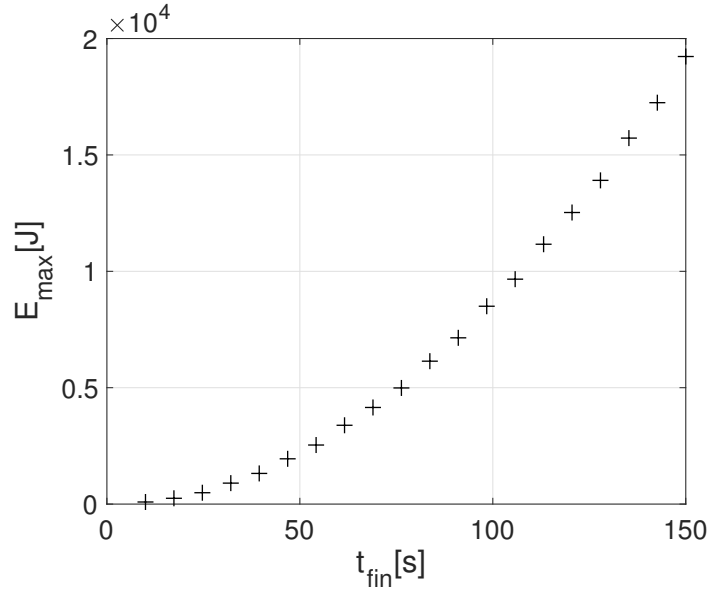


FIGURE 9: Maximum de l'énergie pour différentes durée de simulations t_{fin} , avec $N_{points} = 200$, $CFL = 0.5$, $\omega \simeq \omega_2$ et amplitude de l'excitation $A = 1$.

Comparaison numérique et analytique en $t = t_{fin}$ Sur le graphe de la fig.(4.1.3), on a représenté la solution numérique et analytique du mode propre ω_1 , sur la fig.(4.1.3) le mode propre ω_2 et sur la fig.(12) le mode propre ω_3 . Les solutions analytiques se calculent en faisant le produit de l'onde stationnaire et de l'amplitude $f = \frac{t_{fin}}{T} \sin(\frac{\omega_n}{u})$, avec $T = \frac{L}{u}$ la durée du transit de l'onde. L'équation de l'amplitude peu se simplifier de cette manière là car on a pris $t_{fin} = 40s$ qui est un multiple de T .

On constate que les deux graphes sont dans les trois cas confondus.

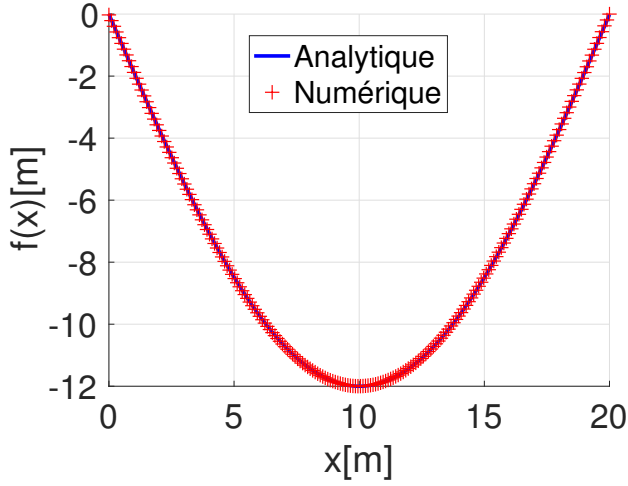


FIGURE 10: Solution numérique et analytique à $t_{fin} = 40s$, avec $N_{points} = 200$, $CFL = 0.5$, $\omega \simeq \omega_1$ et amplitude de l'excitation $A = 1$.

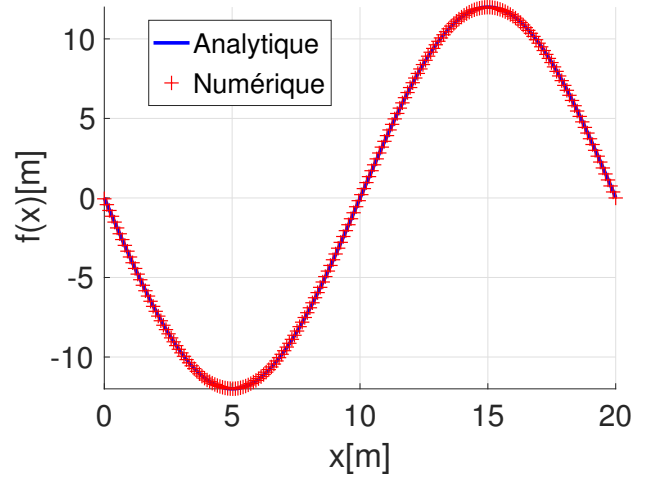


FIGURE 11: Solution numérique et analytique à $t_{fin} = 40s$, avec $N_{points} = 200$, $CFL = 0.5$, $\omega \simeq \omega_2$ et amplitude de l'excitation $A = 1$.

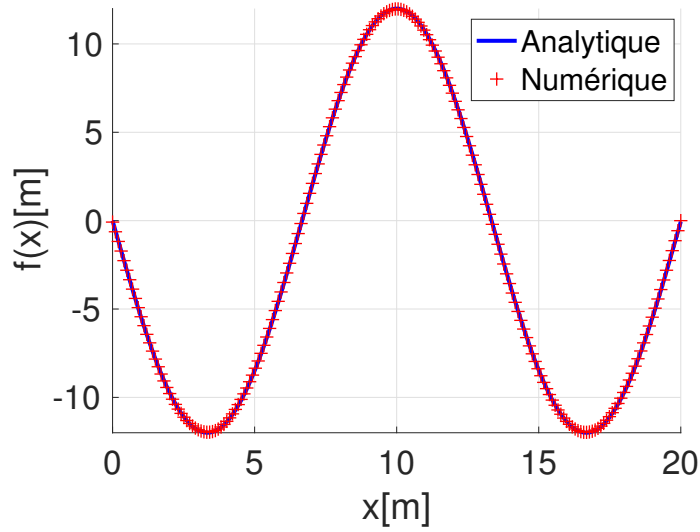


FIGURE 12: Solution numérique et analytique à $t_{fin} = 40s$, avec $N_{points} = 200$, $CFL = 0.5$, $\omega \simeq \omega_3$ et amplitude de l'excitation $A = 1$.

4.2 Tsunami

Dans cette section, on s'intéresse à la propagation de vague dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable $u(x)$.

Dans le cas d'eau peu profonde, on peut approximer la vitesse de propagation d'une vague par

$$u(x) = \sqrt{gh(x)} \quad (14)$$

où $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et $h(x)$ est la profondeur de l'océan.

Dans le cas étudié, la profondeur de l'océan est donnée par :

$$h(x) = \begin{cases} h_{\text{océan}}, & x \in [0, x_a] \\ h_{\text{océan}} + (h_{\text{récif}} - h_{\text{océan}}) \sin^2 \left(\frac{\pi(x-x_a)}{2(x_b-x_a)} \right), & x \in [x_a, x_b] \\ h_{\text{récif}}, & x \in [x_b, x_c] \\ h_{\text{récif}} - (h_{\text{récif}} - h_{\text{océan}}) \sin^2 \left(\frac{\pi(x_c-x)}{2(x_c-x_d)} \right), & x \in [x_c, x_d] \\ h_{\text{océan}}, & x \in [x_d, L] \end{cases} \quad (15)$$

On simule l'évolution d'une vague sinusoïdale de 1 m d'amplitude arrivant au bord gauche, d'une période de 15 minutes, soit $\omega = \frac{2\pi}{15 \cdot 60} \text{ rad/s}$. On utilisera la condition de sortie de l'onde au bord droit. Les simulations sont effectuées avec les trois schémas (Fig.13 pour le 1er, Fig.14 pour le 2ème et Fig.15 pour le 3ème).

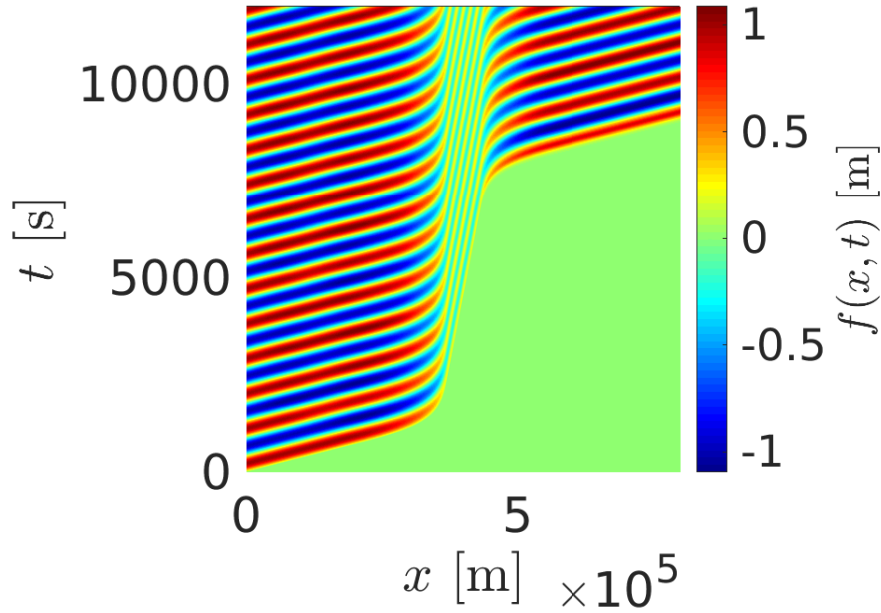


FIGURE 13: Évolution de la vague avec le schéma A.

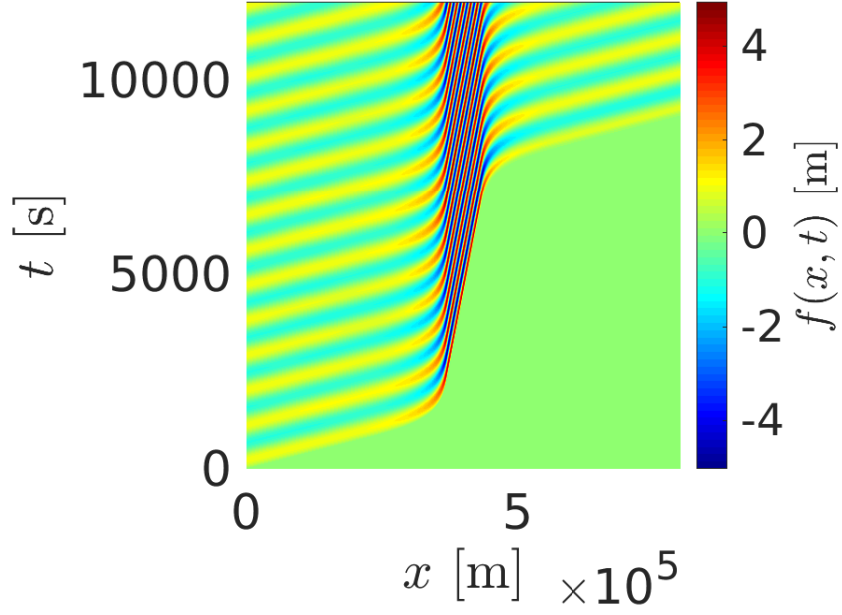


FIGURE 14: Évolution de la vague avec le schéma B.

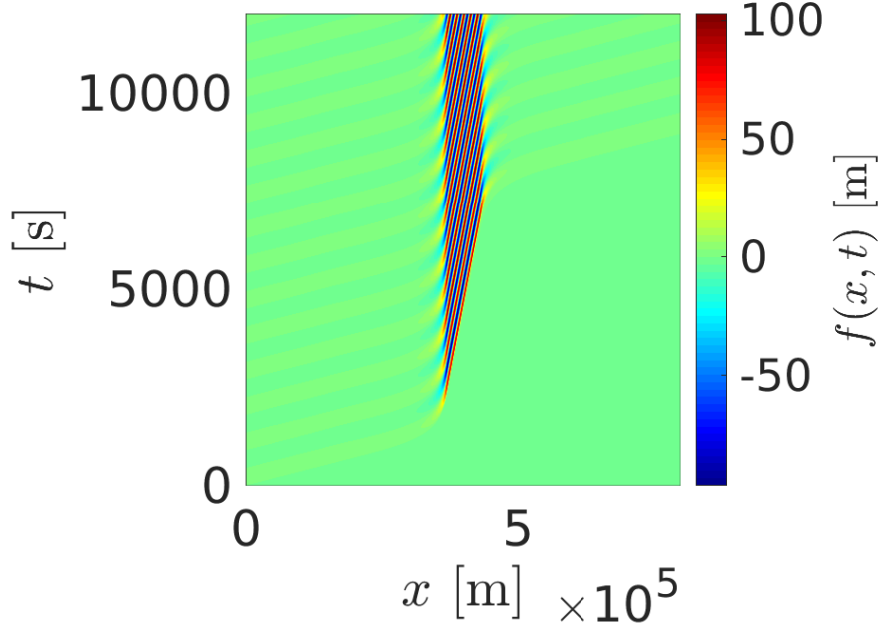


FIGURE 15: Évolution de la vague avec le schéma C.

Vitesse de propagation Pour vérifier que la vitesse de propagation est donnée par l'eq.(14), on procède de la manière suivante. Pour une position x_0 donnée, on repère l'instant t_a , respectivement t_b , du premier maximum de la vague à la position $x_{0-} = x_0 - k \Delta x$, respectivement $x_{0+} = x_0 + k \Delta x$, avec $k \in \mathbb{N}$ fixé. Ainsi la

vitesse de propagation de la vague simulée numériquement est approximativement donnée par

$$u_{num}(x_0) \approx \frac{2k\Delta x}{t_b - t_a} \quad (16)$$

On calcule de cette manière la vitesse de propagation de la vague en plusieurs position x_0 dans l'intervalle $[0, L]$.

On peut améliorer la précision de ce calcul en effectuant une interpolation quadratique autour de chaque maximum (discret), pour obtenir t_a et t_b avec une meilleure précision. Les résultats sont présentés sur la Fig.16.

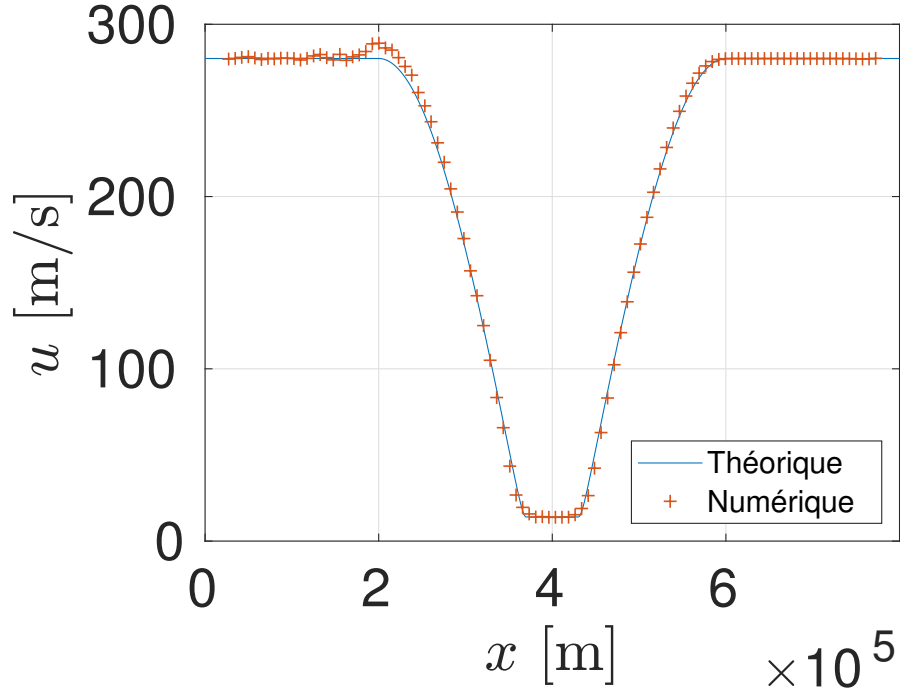


FIGURE 16: Vitesse de propagation de la vague en fonction de la position pour le schéma A.

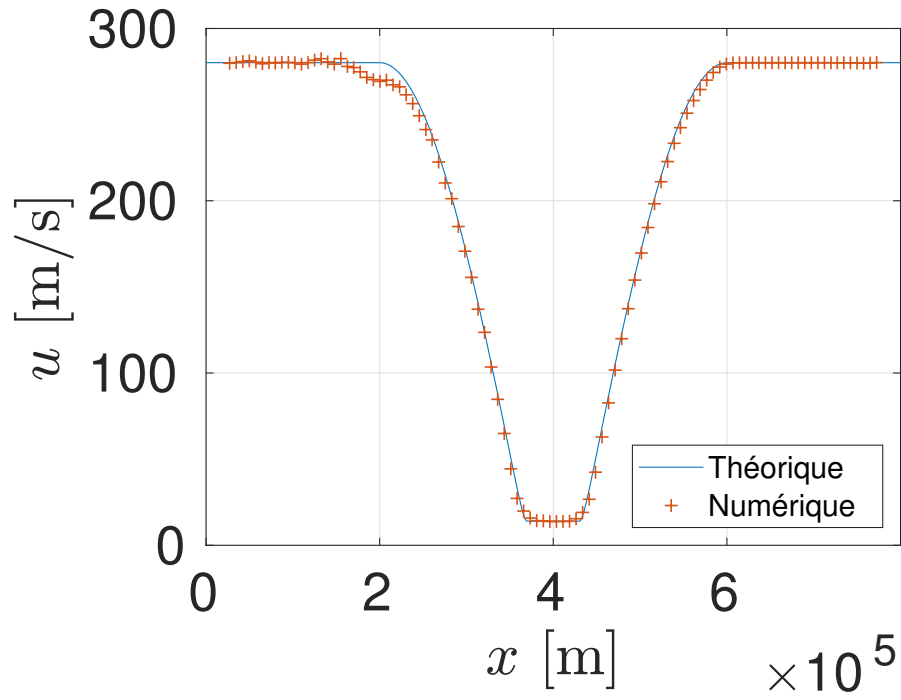


FIGURE 17: Vitesse de propagation de la vague en fonction de la position pour le schéma B.

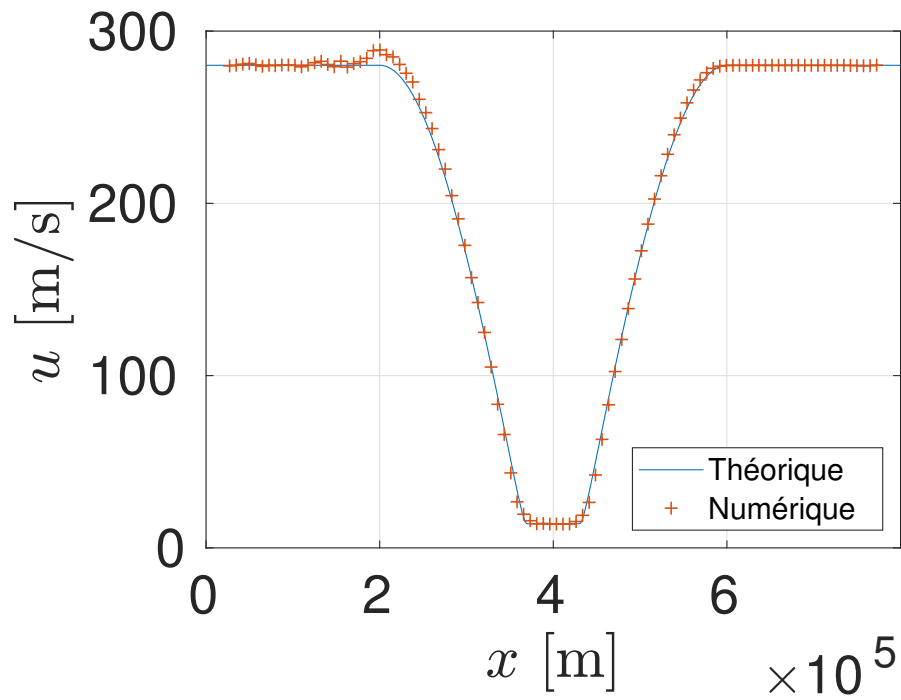


FIGURE 18: Vitesse de propagation de la vague en fonction de la position pour le schéma C.

Les résultats sont plutôt concluant. La plus grande différence entre les vitesses théorique et numérique se trouvent autour de $x = 200\text{km}$, exactement là où l'océan

commence à devenir moins profond. Cette différence peut être expliquée par les nombreuses approximations faites (l'équation de base étant elle-même une approximation, puis le schéma à trois niveaux, de plus la vitesse théorique est aussi une approximation, tout comme la méthode pour trouver la vitesse "numérique").

Amplitude Une analyse WKB¹ montre que l'amplitude de la vague est proportionnelle à $h(x)^{1/4}$ dans le cas A, $h(x)^{-1/4}$ dans le cas B, et $h(x)^{-3/4}$ dans le cas C. On peut le vérifier numériquement : pour x_0 donné, l'amplitude est donnée par la valeur \hat{f} du premier maximum (par rapport au temps) de f . Les résultats sont présentés sur les Fig.19 et Fig.20. Une analyse plus poussée du problème montre que le schéma B est celui qui représente le mieux la réalité.

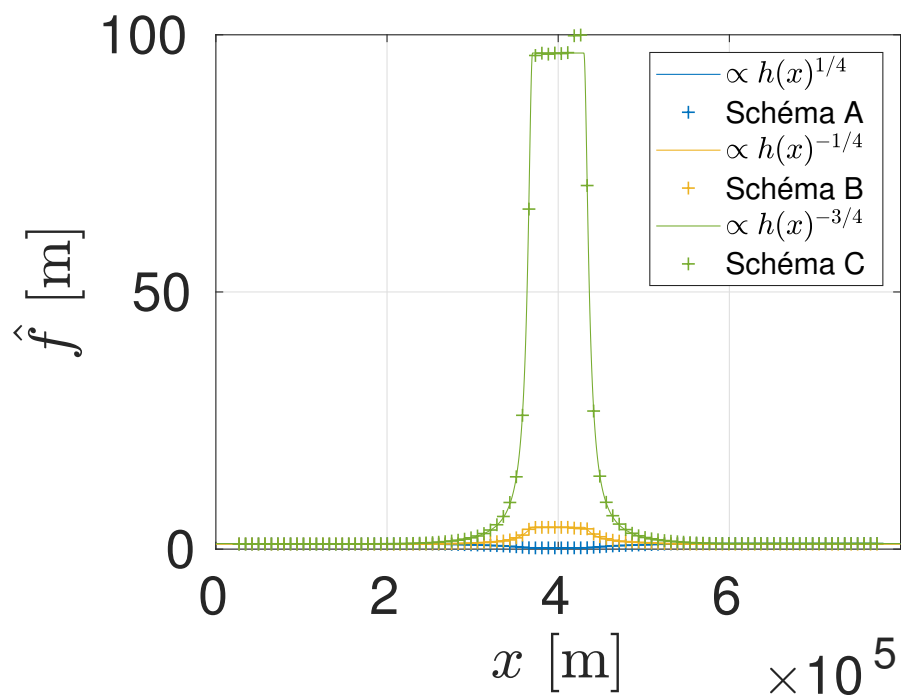


FIGURE 19: Amplitude de la vague en fonction de la position pour les trois schémas.

1. voire notes de cours "Physique numérique I/II", Laurent Villard, EPFL, 2018.

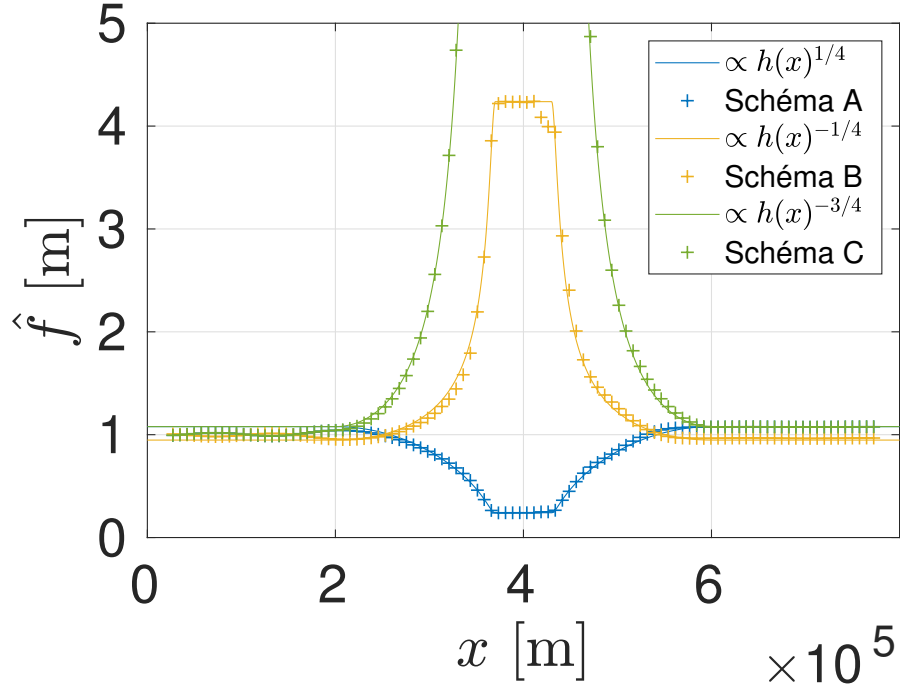


FIGURE 20: Agrandissement de la Fig.19.

Barrière plus raide On étudie ici ce qui se passe lorsque les bords de la barrière deviennent de plus en plus raides, i.e. x_a s'approche de x_b . On peut observer sur la Fig.21 que si la barrière devient suffisamment raide, un phénomène de réflexion apparaît à la barrière (comme un bord de type libre, c.f. Fig.22). Une partie de "l'énergie de l'onde" est ainsi renvoyée dans l'autre sens et une conséquence est que la vague a alors une amplitude plus faible sur le récif que pour des pentes plus faibles où toute l'énergie "passe" par le récif. En effet, sur la Fig.21, on voit sur les trois premières figures que le maximum \hat{f} de la vague sur le récif est d'environ 5 m, alors que dans le dernier cas (avec une barrière plus raide et phénomène de réflexion) il est d'environ 2.5 m.

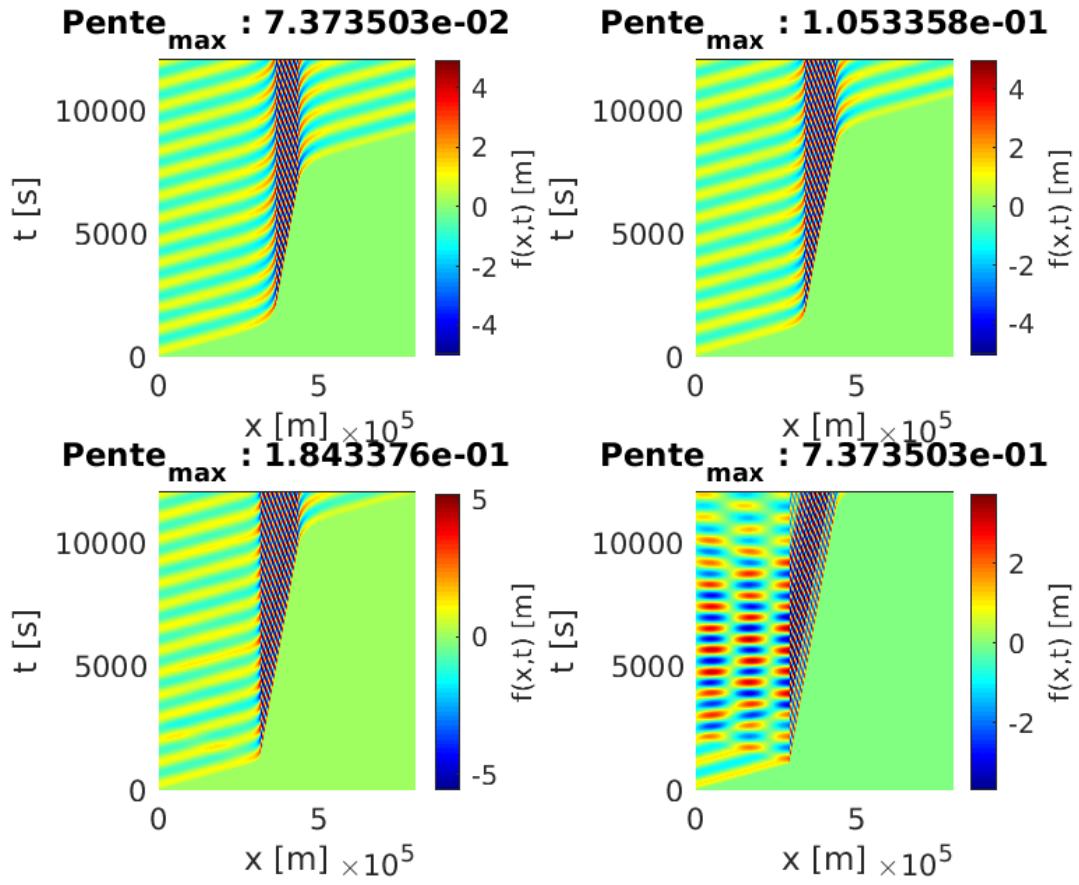


FIGURE 21: Simulation pour des barrières de plus en plus raide.

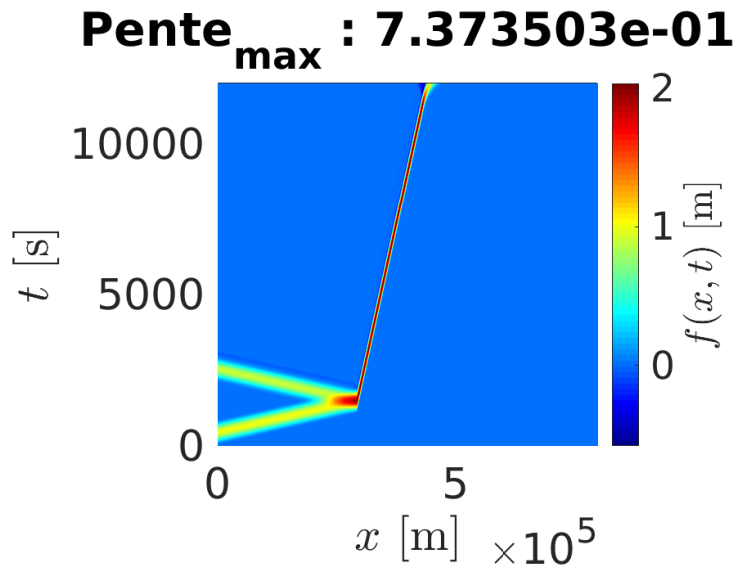


FIGURE 22: Simulation pour une barrière raide avec un phénomène de réflexion qui apparaît.

5 Pour aller plus loin ...

5.1 Étude de l'effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma

Dans le cas de vitesse de propagation constante, on étudie l'effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma. On peut montrer analytiquement que le schéma est stable si $\beta_{\text{CFL}} < 1$. On le vérifie numériquement sur les Fig.23 (stable), Fig.24 (à la limite de la stabilité, mais stable) et Fig.25 (instable, on observe une explosion exponentielle de l'énergie maximale).

En effectuant une série de simulation en faisant varier β_{CFL} autour de 1, on observe bien cette limite de stabilité (Fig.27).

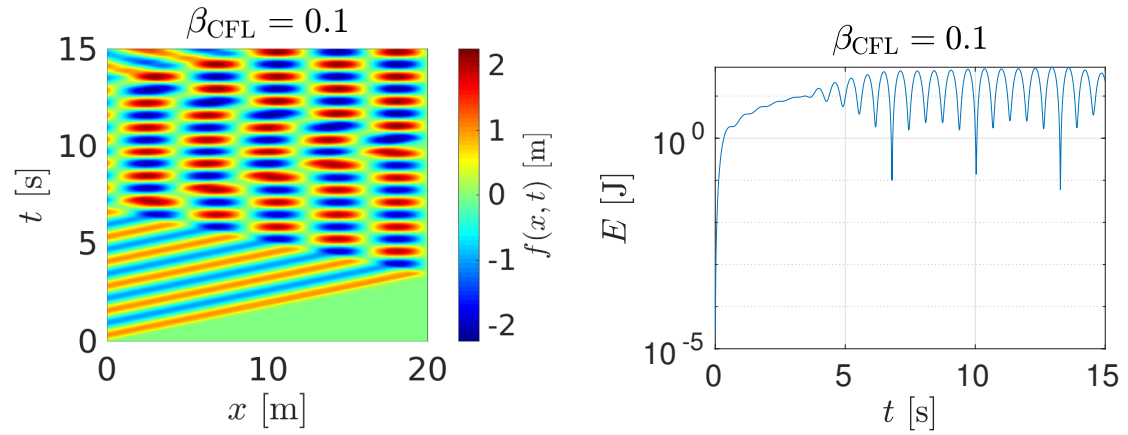


FIGURE 23: Stabilité du schéma pour $\beta_{\text{CFL}} = 0.1$.

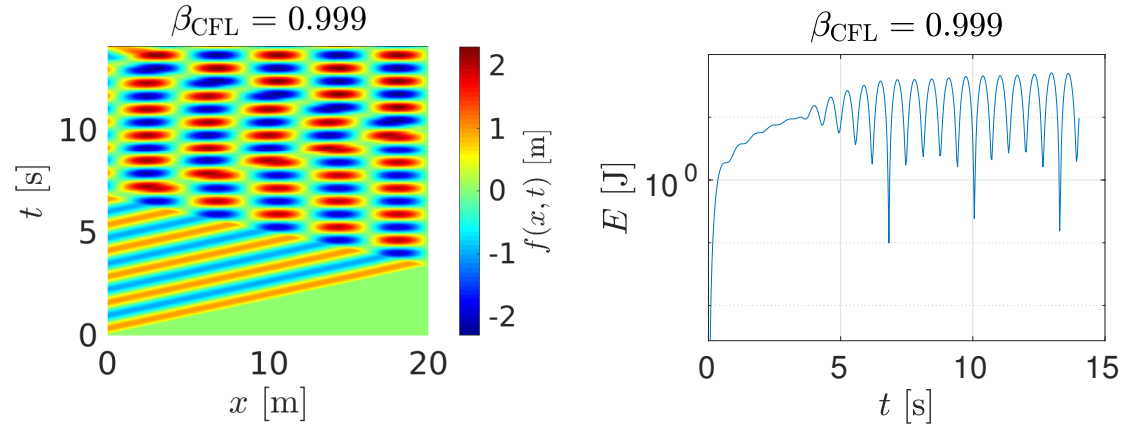


FIGURE 24: Stabilité du schéma pour $\beta_{\text{CFL}} = 0.999$.

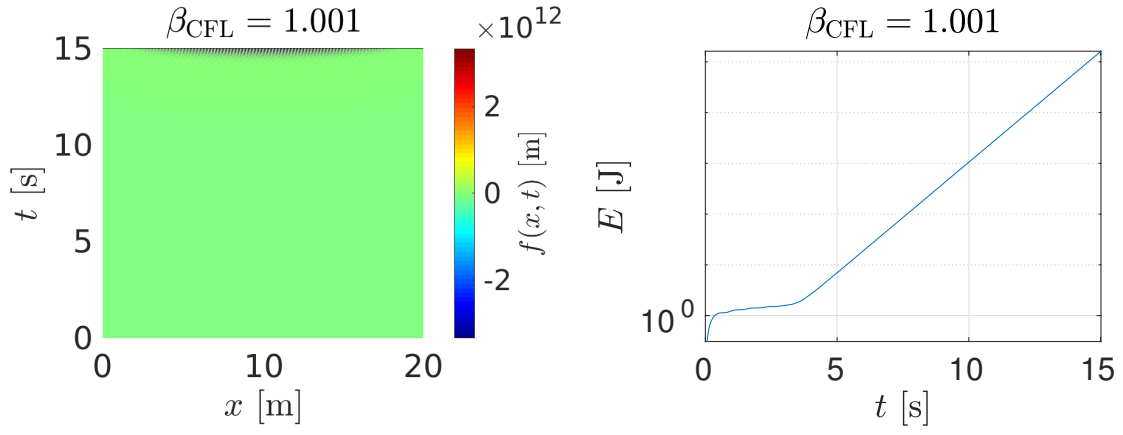


FIGURE 25: Stabilité du schéma pour $\beta_{\text{CFL}} = 1.001$.

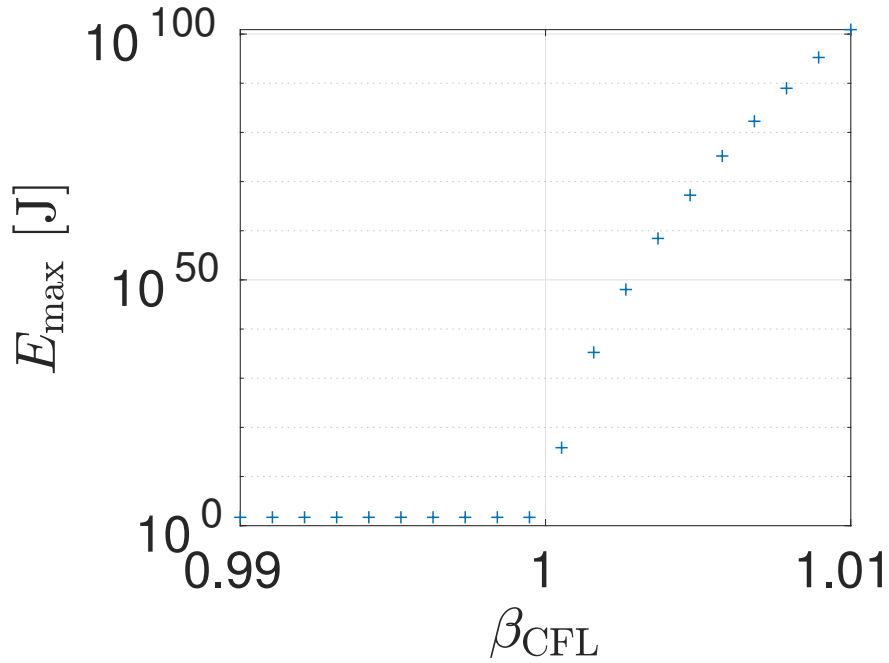


FIGURE 26: Stabilité du schéma autour de $\beta_{\text{CFL}} = 1$.

5.2 Extension à 2 dimensions

En prenant l'opérateur Laplacien, il est possible d'étendre le schéma numérique à deux dimensions.

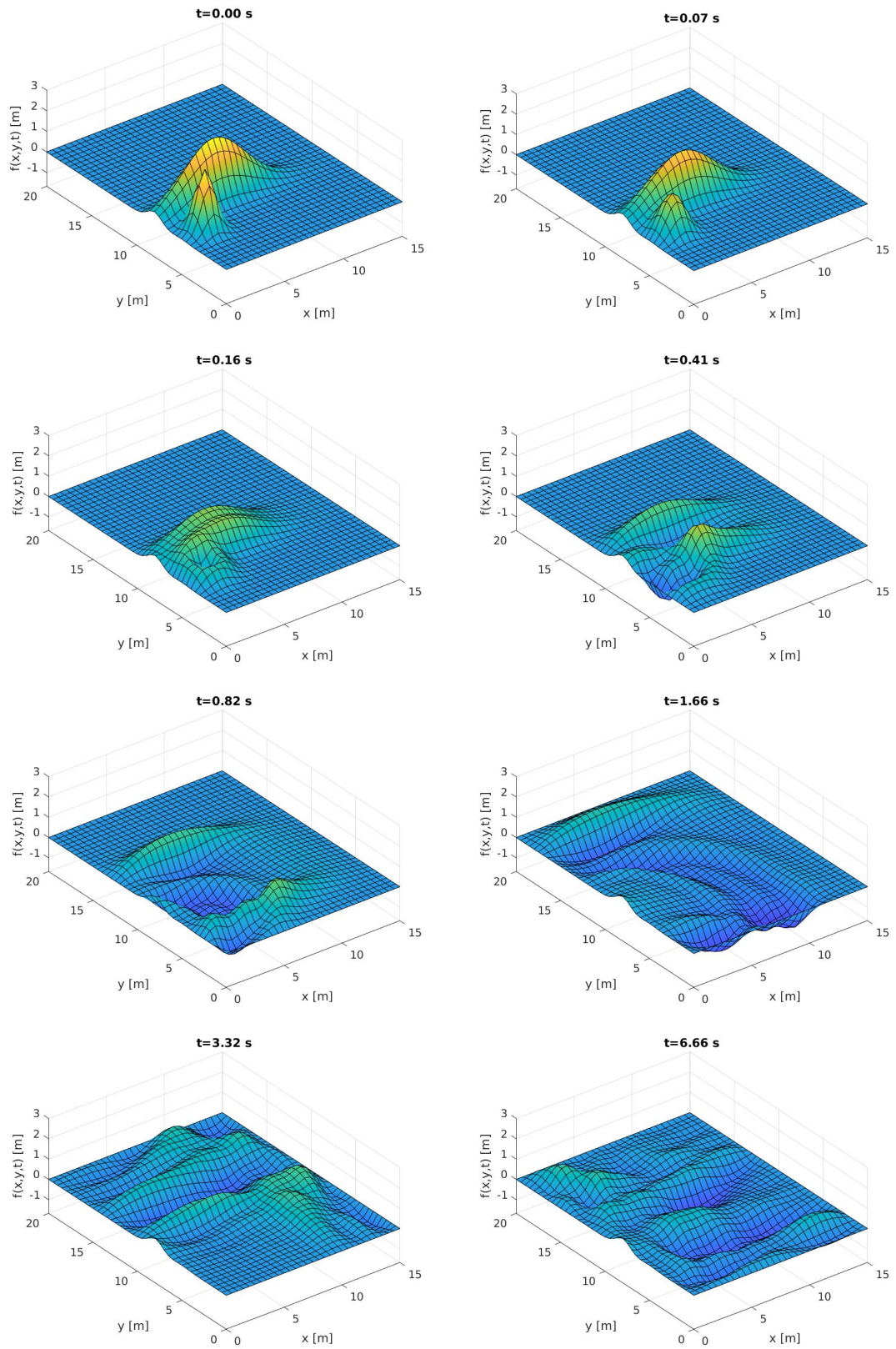


FIGURE 27: Simulation en deux dimensions avec condition de bord fixe.

6 Conclusion

Dans cet exercice, nous avons pu étudier la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable. Nous avons vérifié dans premier temps que nos schémas étaient corrects pour une vitesse de propagation constante, où des solutions analytiques ont pu être calculées et comparées avec nos résultats numériques. Une fois cette vérification passée avec succès, nous avons étudié le comportement des trois équations proposées dans le cas d'une vitesse de propagation variable. Nous avons pu obtenir numériquement l'évolution d'une vague passant par un récif, ce qui n'est pas possible analytiquement, démontrant une nouvelle fois l'utilité des méthodes numériques.

Références

- [1] Donnée de l'exercice 7. Laurent Villard, EPFL, 2019.
- [2] Physique numérique I/II, notes de cours. Laurent Villard, EPFL, 2018.