De la Terre à la Lune

Timothée Dao
timothee.dao@epfl.ch

3 octobre 2018

1 Introduction

Le but de cet exercice est d'examiner la pertinence du scénario de Jules Vernes où il imagine lancer un projectile avec un canaon de la Terre à la Lune, en utilisant le schéma numérique d'Euler. On considère la gravitation de la Terre et de la Lune (en ignorant tout mouvement orbital) ainsi que la force de trainée aérodynamique du projectile.

On a les paramètres suivants : constante gravitationnelle $G = 6.674 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, masse de la Terre $m_Z = 5.972 \times 10^{24}\text{kg}$, de la Lune $m_L = 7.342 \times 10^{22}\text{kg}$ et du projectile $m_P = 1000\text{kg}$. On note la position du centre de la Terre $z_T = 0$, du centre de la Lune $z_L = 384'400 \times 10^3\text{m}$, de la surface terrestre $z_0 = 6'378 \times 10^3\text{m}$.
La force de traînée aérodynamique est $F_t = \rho S C_x v^2/2$, où $\rho_0 = 1.3\text{kg/m}^3$ est la densité d'air à la surface terrestre, la densité est $\rho(z) = \rho_0 exp(-(z - z_0)/\lambda)$, avec $\lambda = 10^4\text{m}$, $C_x = 0.3$ le coefficientde traînée aérodynamique et $S = \pi R^2$ la surface de la section du projectile, approximée par un disque de rayon $R = 0.5\text{m}$.

Les expressions des trois forces à prendre en compte sont les suivantes :

$$F_{g_T} = -G\frac{m_P m_T}{z^2}e_z \tag{1}$$

$$F_{g_L} = -G\frac{m_P m_L}{(z - z_L)^2}e_{z-z_L} \tag{2}$$

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho_0 exp(-\frac{z - z_0}{\lambda})\pi R^2 C_x v^2 e_v \tag{3}$$

où $e_x = \frac{x}{|x|}$ donne à chaque fois le sens de la force.

2 Calculs analytiques

2.1 Équations différentielles

En utilisant la 2ème loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, et en projetant sur l'axe z on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G(\frac{m_T}{z^2}e_z + \frac{m_L}{(z-z_L)^2}e_{z-z_L}) - \frac{1}{2}\rho_0 exp(-\frac{z-z_0}{\lambda})\pi R^2 C_x v^2 e_v \\ v \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2 Position d'équilibre z_E

On cherche à trouver la position d'équilibre $z = z_E$ où la résultante des forces gravitationnelles s'annulle. Cela se résume à résoudre l'équation

$$\begin{aligned} F_{g_T}(z_E) + F_{g_L}(z_E) = 0 \\ \Leftrightarrow G\frac{m_P m_T}{{z_E}^2} = G\frac{m_P m_L}{(z_E - z_L)^2} \Leftrightarrow (\frac{z_L - z_E}{z_E})^2 = \frac{m_L}{m_T} \\ \Leftrightarrow z_E = \frac{z_L}{1 + \sqrt{\frac{m_L}{m_T}}} \end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant les données numériques, on obtient $z_E = 346'037 \times 10^3$m. [1]

2.3 Vitesse initiale v_0 pour atteindre z_E

En ignorant l'atmosphère ($\rho_0 = 0$), on cherche à trouver la vitesse v_0 que doit avoir le projectile en $z = z_0$ pour qu'il puisse juste atteindre le point d'équilibre $z = z_E$ (i.e. avec une vitesse nulle à cet endroit).

En absence de la force de traineée, il ne reste que des forces conservatives ($\vec{F}_{g_{T,L}}$) et donc l'énergie mécanique du projectile est conservée : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = const$. On en tire

$$\begin{aligned} E_{pot,i} + E_{cin,i} = E_{pot,f} + E_{cin,f} \\ \Leftrightarrow Gm(\frac{m_T}{z_0} + \frac{m_L}{z_L - z_0}) + \frac{1}{2}m{v_0}^2 = Gm(\frac{m_T}{z_E} + \frac{m_L}{z_L - z_E}) \end{aligned}$$

1. *Remarque : on a exclu l'autre solution* $z_E = \frac{z_L}{1-\sqrt{\frac{m_L}{m_T}}}$ *car les deux forces sont de même intensité mais aussi dans le même sens à cette position, elles ne s'annulent donc pas.*

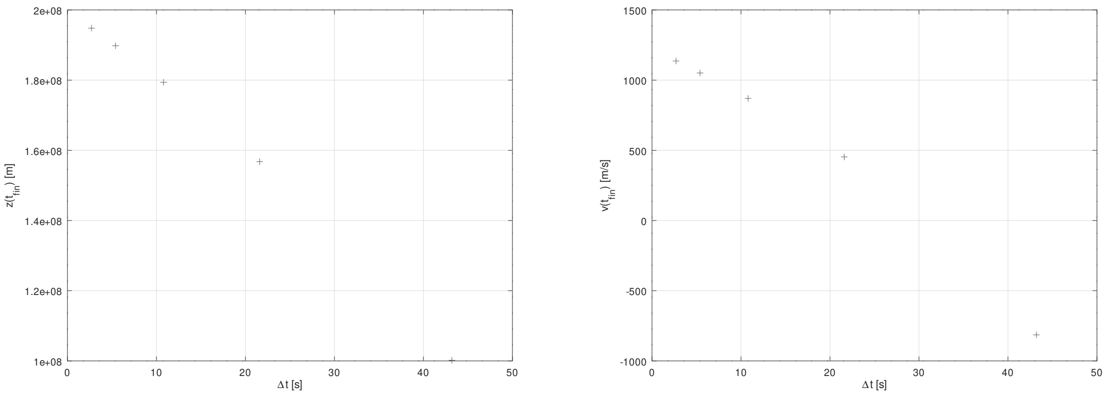

FIGURE 1 – *Position et vitesse finales en fonction de Δt, il est clair que les deux suivent une loi linéaire.*

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2G}(\frac{m_T}{z_0} + \frac{m_L}{z_L - z_0} - \frac{m_T}{z_E} - \frac{m_L}{z_L - z_E}) \tag{7}$$

En utilisant les données numériques, on obtient $v_0 = 11065.71228\text{m/s}$.

3 Simulations numériques

3.1 Cas sans atmosphère ($\rho_0 = 0$)

On simule ici un voyage de 24 heures, $t_{fin} = 86'400\text{s}$. On effectue un série de simulations à partir de la condition initiale $z(0) = z_0$, $v(0) = v_0$ et pour $n_{steps} = 1000$, 2000, 4000, 8000, 16000, 32000. On obtient ainsi les résultats montrer sur la FIG.1. Nous avons utilisé le schéma d'Euler qui est d'ordre 1 et nous obtenons comme attendu une droite lorsqu'on plot la position (ou la vitesse) finale en fonction de $\Delta t = \frac{t_{fin}}{n_{steps}}$

3.2 Cas avec atmosphère ($\rho_0 = 1.3\text{kg/m}^3$)

On veut maintenant simuler la traversée de l'atmosphère, on doit donc prendre en compte la force de traînée aérodynamique (avec $\rho_0 = 1.3\text{kg/m}^3$). Nous prenons pour temps final $t_{fin} = 10\text{s}$ et les mêmes conditions initiales que précédemment (z_0, v_0). On effectue les simulations avec $n_{steps} = 200$, 400, 800, 1600, 3200, 6400. Comme précédemment, on s'attend à ce que la position finale et la vitesse finale soient linéairement dépendants de Δt, et c'est effectivement ce qu'on observe sur la FIG.2.

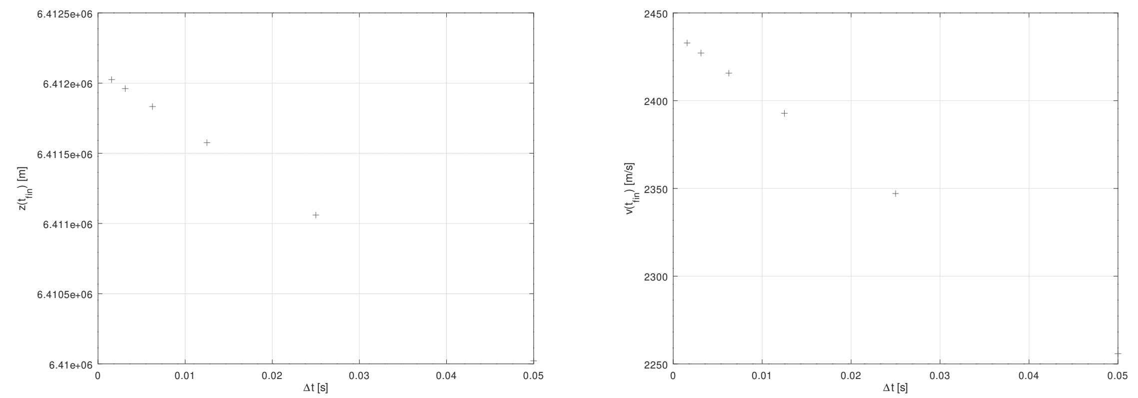

FIGURE 2 – *Position et vitesse finales en fonction de* Δt*, il est clair que les deux suivent une loi linéaire.*

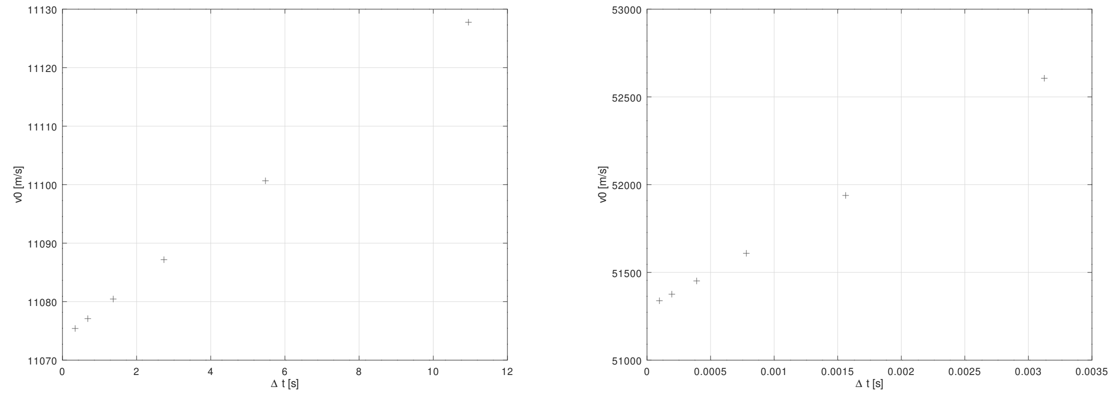

FIGURE 3 – *Position et vitesse finales en fonction de* Δt*, il est clair que les deux suivent une loi linéaire.*

3.3 Recherche de vitesses initiales v_0

Dans le cas sans atmosphère, on cherche la vitesse initiale pour atteindre le centre de la Lune en 97h20min. On utilise la méthode de la dichotomie avec n_{steps} = 32000, 64000, 128000, 256000, 512000, 1024000. De plus, dans le cas avec atmosphère, on cherche également la vitesse initiale que doit avoir le projectile pour qu'il ait une vitesse de 11km/s après la traversée de l'atmosphère (après 10s). On utilise également la méthode de la dichotomie avec n_{steps} = 3200, 6400, 12800, 25600, 51200, 102400. Les résultats sont montrés sur la FIG.3 et nous pouvons extrapoler ces résultats dans la limite $\Delta t \to 0$ (dans la mesure où les résultats suivent une loi linéaire) et nous trouvons $v_{0_{Lune}}$ = 11074m/s et $v_{0_{atmo}}$ = 51300m/s.