QCOMP102: Systèmes Quantiques

Modéliser et manipuler des systèmes quantiques

Présenté par Jean-Adrien DUCASTAING
Sous la supervision de Nicolas BOUTRY, PhD

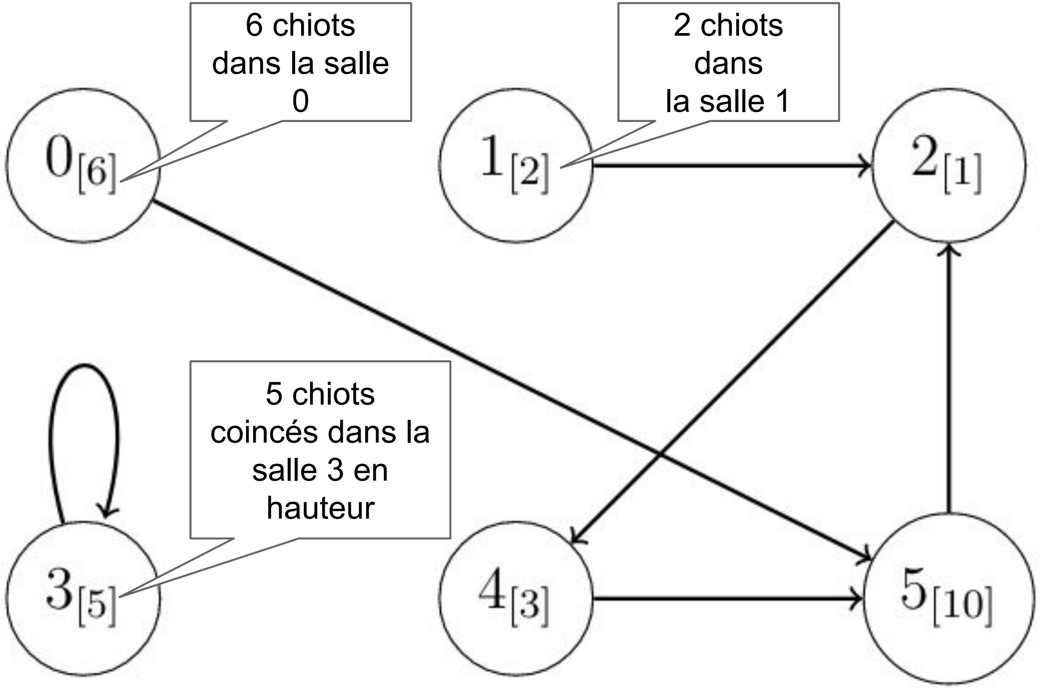
Plan du cours

I. Représenter un système physique et son évolution à l’aide de l'algèbre linéaire

II. Du modèle probabiliste au modèle quantique

III. Etats quantiques et leur mécanique

IV. Intrication quantique



27 chiots sont répartis dans un escape game

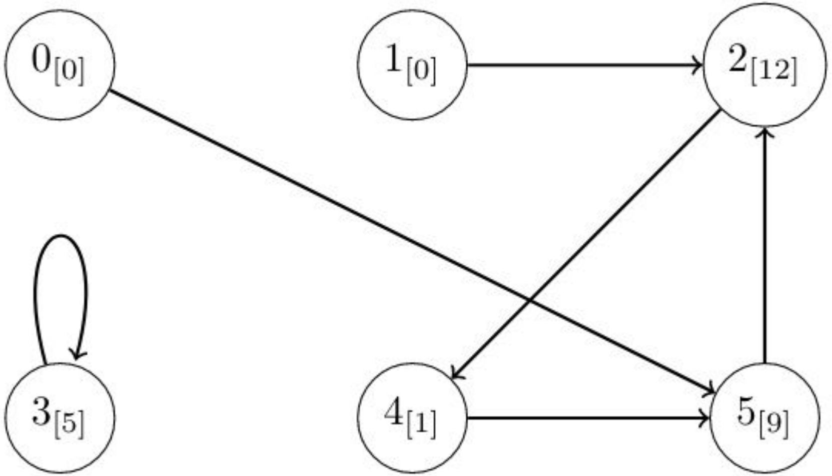
$$S = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}^T$$

Une fois dans la pièce **3** les chiots essaient de descendre l'escalier mais ont peur donc font demi-tour

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation de la **dynamique** du système

Il est possible d'aller de la pièce **0** a la piece **5**



$$S_{t+1} = D * S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$S_t = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}^T$$

Chaque minute, dans chaque pièce, les chiots essaient de sortir.

$$S_{t+k} = D^k * S_t = \begin{pmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_{n-1} \end{pmatrix}^T$$

Nous sommes à la minute **t**, où seront les chiots à la minute **t+1** ?

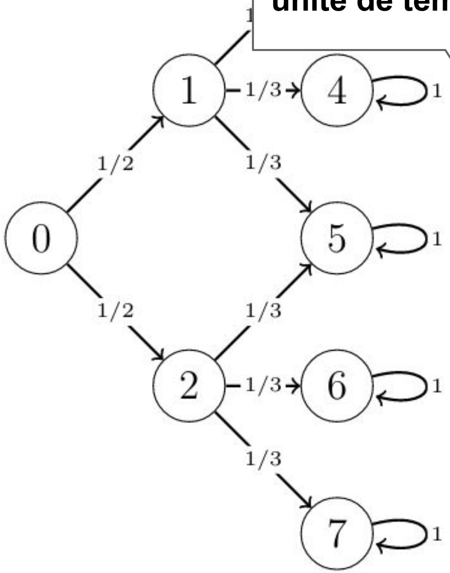
Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **kahoot.it**
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 1: Représenter des systèmes physiques à l’aide de l'algèbre linéaire

Décrit le mouvement de la balle **après 2 unité de temps**

$$B^2 = B * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Décrit le mouve de la balle **aprè unité de temps**

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$S_1 = B * S_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$S_2 = B^2 * S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$$

Les fentes de Young à l'américaine

Dans le monde “classique”:

$$p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p \in [0,\ 1]$$

Soient p_1 et p_2, $(p_1 + p_2) \geq p_1$ et $(p_1 + p_2) \geq p_2$

Et dans le monde quantique:

$$c \in \mathbb{C} \text{ tel que } |c|^2 \in [0,\ 1]$$

Oui mais ca change quoi?

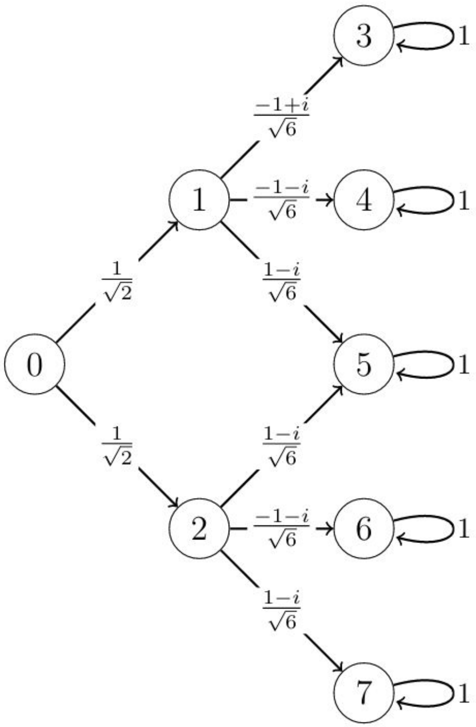
Soient $|c_1|^2$ et $|c_2|^2$, $|c_1 + c_2|^2$ n'est pas nécessairement supérieur a $|c_1|^2$ ou $|c_2|^2$

$$c_1 = 5 + 3i \qquad |c_1|^2 = 34$$

$$c_2 = -3 - 2i \qquad |c_2|^2 = 13$$

$$|c_1 + c_2|^2 = 5$$

Interference



$$B^2 = B * B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&1&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0\\ \frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&1&0\\ \frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\ \text{[illegible]}\\ 0&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&1&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$P^2[5,0] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{12}} + \frac{1-i}{\sqrt{12}} = \frac{0}{\sqrt{12}} = 0$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{-1+i}{\sqrt{12}}&\frac{-1+i}{\sqrt{6}}&0&1&0&0&0&0\\ \frac{-1-i}{\sqrt{12}}&\frac{-1-i}{\sqrt{6}}&0&0&1&0&0&0\\ 0&\frac{1-i}{\sqrt{6}}&\frac{-1+i}{\sqrt{6}}&0&0&1&0&0\\ \frac{-1-i}{\sqrt{12}}&0&\frac{-1-i}{\sqrt{6}}&0&0&0&1&0\\ \frac{-1+i}{\sqrt{12}}&0&\frac{1-i}{\sqrt{6}}&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|P^2[i,j]\right|^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&1&0&0&0&0\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&1&0&0\\ \frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&1&0\\ \frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Interference

Les vraies fentes de Young

L'état d'un système **quantique** est représenté par un vecteur complexe:

$$X = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$|c_i|^2$ **ne représente pas** la probabilité de X d'être dans l'état i. X est dans tous ses états **simultanément**.

$|c_i|^2$ représente la probabilité de trouver X dans l'état i **après la mesure.**

Le système X est en **superposition** de tous ses états.

La **mesure** du système X le fixe **irréversiblement** dans un seul état défini.

Un **état quantique** est une superposition d'**états classiques**.

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **kahoot.it**
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 2: Du modèle probabiliste au modèle quantique

Amplitude

Etat de base

$$|\psi\rangle = c_0 |x_0\rangle + c_1 |x_1\rangle + \cdots + c_{n-1} |x_{n-1}\rangle$$

$$|x_0\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$|x_1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\vdots$$

$$|x_{n-1}\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$|\psi\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \end{pmatrix}^T$$

$$p(x_i) = \frac{|c_i|^2}{\left||\psi\rangle\right|^2} = \frac{|c_i|^2}{\sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2}$$

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow |x_i\rangle$$

Ket

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bra-Ket

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \overline{c'_0} & \overline{c'_1} & \dots & \overline{c'_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \overline{c'_0}c_0 + \overline{c'_1}c_1 + \cdots + \overline{c'_{n-1}}c_{n-1} \in \mathbb{C}$$

Bra

$$\langle\psi'| = |\psi'\rangle^\dagger = \left(\overline{|\psi'\rangle}\right)^T = \begin{pmatrix} \overline{c'_0} & \overline{c'_1} & \dots & \overline{c'_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Etat initial

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

On représente les **états classiques** par une base **orthogonale** de C^n :

$$\{|b_0\rangle, |b_1\rangle, \ldots, |b_{n-1}\rangle\}$$

Pourquoi **orthogonale** ? $|\psi\rangle \overset{\langle\psi'|\psi\rangle}{\rightsquigarrow} |\psi'\rangle$

<u>2 vecteurs orthogonaux = 2 états mutuellement exclusifs</u>

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \langle b_0|\psi\rangle |b_0\rangle + \langle b_1|\psi\rangle |b_1\rangle + \ldots \langle b_{n-1}|\psi\rangle |b_{n-1}\rangle \\ &= c_0 |b_0\rangle + c_1 |b_1\rangle + \cdots + c_{n-1} |b_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Ainsi on a $|c_i|^2 = |\langle b_i|\psi\rangle|^2$ décrivant la probabilité de $|\psi\rangle \overset{\langle b_i|\psi\rangle}{\rightsquigarrow} |b_i\rangle$

Toute **évolution** d’un système quantique **qui n’est pas un acte de mesure** est représentée par une **matrice unitaire**.

$$|\psi(t+1)\rangle = U\,|\psi(t)\rangle$$

- Le **produit** de deux matrices unitaire est unitaire.
- L’**inverse** d’une matrice unitaire est unitaire.

$$\bullet \xrightarrow{\quad U_0 \quad} \bullet \xrightarrow{\quad U_1 \quad} \bullet \xrightarrow{\quad \cdots \quad} \bullet$$

$$|\psi\rangle \qquad\qquad U_0\,|\psi\rangle \qquad\qquad U_2U_1U_0\,|\psi\rangle \qquad\qquad U_{n-1}U_{n-2}\ldots U_0\,|\psi\rangle$$

$$\bullet \xleftarrow{\quad U_0^\dagger \quad} \bullet \xleftarrow{\quad U_1^\dagger \quad} \bullet \xleftarrow{\quad \cdots \quad} \bullet$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad \text{time} \qquad\qquad}$$

Tout **opérateur unitaire** est **réversible**.

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **kahoot.it**
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 3: États quantiques et leur mécanique

$$\in \mathbb{C}^{2\times 2} \qquad \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \boxed{a_{0,0}} & \boxed{a_{0,1}} \\ \boxed{a_{1,0}} & \boxed{a_{1,1}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

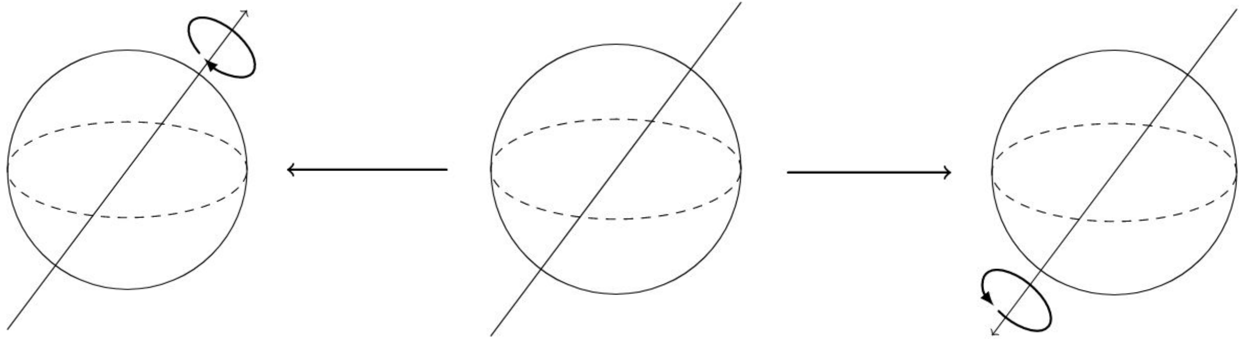
$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{0,1}} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} & \boxed{a_{0,1}} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \\ \boxed{a_{1,0}} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} & \boxed{a_{1,1}} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{0,0}b_{0,0} & a_{0,0}b_{0,1} & a_{0,0}b_{0,2} & a_{0,1}b_{0,0} & a_{0,1}b_{0,1} & a_{0,1}b_{0,2} \\ a_{0,0}b_{1,0} & a_{0,0}b_{1,1} & a_{0,0}b_{1,2} & a_{0,1}b_{1,0} & a_{0,1}b_{1,1} & a_{0,1}b_{1,2} \\ a_{0,0}b_{2,0} & a_{0,0}b_{2,1} & a_{0,0}b_{2,2} & a_{0,1}b_{2,0} & a_{1,0}b_{2,1} & a_{1,0}b_{2,2} \\ a_{1,0}b_{0,0} & a_{1,0}b_{0,1} & a_{1,0}b_{0,2} & a_{1,1}b_{0,0} & a_{1,1}b_{0,1} & a_{1,1}b_{0,2} \\ a_{1,0}b_{1,0} & a_{1,0}b_{1,1} & a_{1,0}b_{1,2} & a_{1,1}b_{1,0} & a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} \\ a_{1,0}b_{2,0} & a_{1,0}b_{2,1} & a_{1,0}b_{2,2} & a_{1,1}b_{2,0} & a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2\times 3)\times(2\times 3)} = \mathbb{C}^{6\times 6}$$

IV - Rappels sur le produit de Kronecker (cf. polycopié précédent page 16)

Sous-système 1 | Système composite | Sous-système 2

$B_L = \{\uparrow_L, \downarrow_L\}$



$B_R = \{\uparrow_R, \downarrow_R\}$

$$\{\cancel{\uparrow_L \otimes \uparrow_R}, \boxed{\uparrow_L \otimes \downarrow_R, \downarrow_L \otimes \uparrow_R}, \cancel{\downarrow_L \otimes \downarrow_R}\}$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_L \otimes \downarrow_R\rangle + |\downarrow_L \otimes \uparrow_R\rangle) = \boxed{0} \cdot |\uparrow_L \otimes \uparrow_R\rangle + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\uparrow_L \otimes \downarrow_R\rangle + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\downarrow_L \otimes \uparrow_R\rangle + \boxed{0} \cdot |\downarrow_L \otimes \downarrow_R\rangle$$

Pour que ces sous-systèmes soient **séparables**, il faudrait que le système composite satisfasse **également** cette équation:

$$|\beta\rangle = (c_0 \cdot |\uparrow_L\rangle + c_1 \cdot |\downarrow_L\rangle) \otimes (c_0' \cdot |\uparrow_R\rangle + c_1' \cdot |\downarrow_R\rangle)$$

Ces deux équations n'ont pas de solution.

$$= \underbrace{\boxed{c_0 c_0'}}_{= 0} \cdot |\uparrow_L\rangle \otimes |\uparrow_R\rangle + \underbrace{\boxed{c_0 c_1'}}_{\neq 0} \cdot |\uparrow_L\rangle \otimes |\downarrow_R\rangle + \underbrace{\boxed{c_1 c_0'}}_{\neq 0} \cdot |\downarrow_L\rangle \otimes |\uparrow_R\rangle + \underbrace{\boxed{c_1 c_1'}}_{= 0} \cdot |\uparrow_L\rangle \otimes |\uparrow_R\rangle$$

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **kahoot.it**
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 4: Intrication quantique