Partie 1

Pré-requis mathématiques à l'informatique quantique

Plan des pré-requis

Niveau 1

Rappels sur les nombres complexes

Niveau 2

Rappels d'algèbre linéaire : espaces vectoriels complexes

Niveau 3

Espaces de Hilbert et sphère de Bloch

Boss

Grand Kahoot !

Niveau 1 Les nombres complexes : l'origine

R

$x^2 + 1 = 0$

C

$x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{i, -i\}$

Niveau 1 Les nombres complexes : le retour

i est appelé **nombre imaginaire**

2i + 3, hybride entre imaginaire et réel, est appelé **nombre complexe**

Niveau 1 Les nombres complexes : la revanche

On peut décomposer un nombre complexe en une **paire ordonnée de réels** par l'application suivante :

Soient a et b deux nombres réels

Si $c = ai + b$

$c \rightarrow (a,b)$

Ça nous simplifiera la vie

Niveau 1   Les nombres complexes : le retour de la revanche

Quelques opérations entre nombres complexes :

L'addition :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

La multiplication :

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

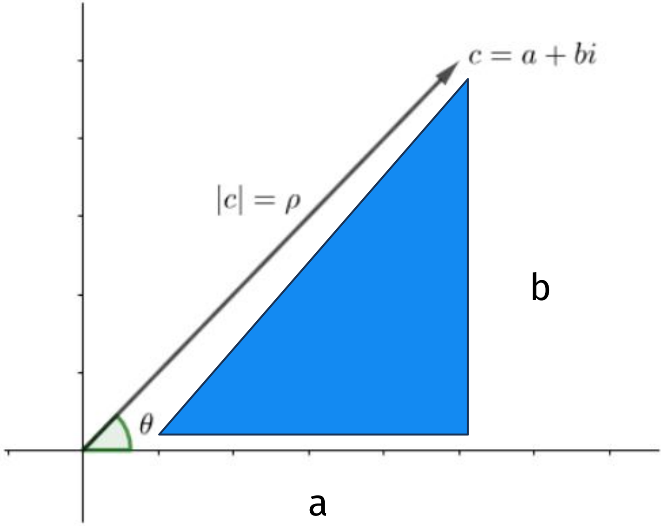
Niveau 1 Les nombres complexes : le retour de la revanche

Le conjugué

Si $c = a+bi$ alors $\overline{c} = a - bi$

Le module

$$|c| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$



Niveau 1   Les nombres complexes : le combat final

1

Prenez votre téléphone ou votre laptop

2

Allez à l'adresse **www.kahoot.it**

3

Entrer le code PIN donné

4

Tenez vous prêts à jouer : rapidité ET précision !

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : rappel

Un ensemble d'objets (appelés **vecteurs**) complexes (dans C) que l'on peut additionner entre eux et multiplier par un scalaire.

Niveau 2   Les espaces vectoriels complexes : pourquoi ?

L'algèbre linéaire est le langage de l'informatique quantique :

- Représente l'état des qubits
- Représente les **opérations** quantiques

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : des exemples

En algèbre linéaire, l'état d'un qubit est décrit par un vecteur et est représenté par un vecteur colonne $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Il est également connu sous le nom de **vecteur d'état quantique** et doit remplir cette condition

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Par exemple : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : des exemples

La matrice de Pauli *X*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qu'est ce que ça fait, appliqué à un vecteur d’état ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{}$$

Ça vous fait penser à une porte NOT ?

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : des exemples

La seule différence est le nombre de vecteurs que l'on peut appliquer à cet opérateur.

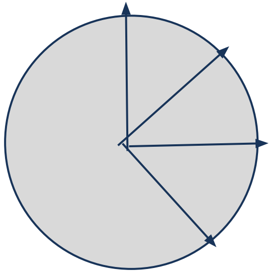
Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : un must-have

La matrice d'Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Qu'est ce que ça fait, appliqué à un vecteur d'état ?

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{}$$

Niveau 2 Les matrices unitaires

Une règle pour les unifier tous

La matrice adjointe : $A^\dagger = (\overline{A}^T)$

On a affaire à une matrice unitaire si :

$$U * U^\dagger = U^\dagger * U = I^n$$

La matrice de tout opérateur quantique est admise unitaire ! (préserve le produit interne et les normes)

Niveau 2 Les espaces vectoriels complexes : FIGHT !

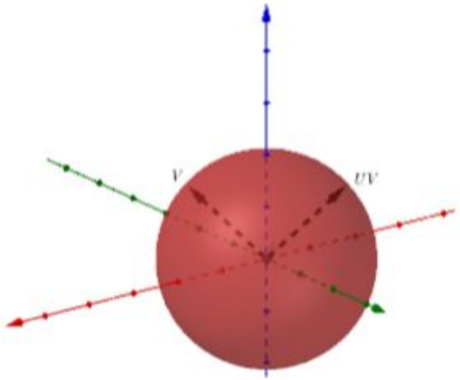
1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **www.kahoot.it**
3. Entrer le code PIN donné
4. Tenez vous prêts à jouer : rapidité ET précision !

Niveau 3 Espace de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est simplement un espace vectoriel complexe **complet** et muni d'un **produit interne** (inner product)

Nous n'allons travailler qu'avec des espaces de Hilbert : ils sont pratiques pour formuler mathématiquement le comportement de la mécanique quantique

Niveau 3 Sphere de Bloch (intuition)



L'application d'une opération peut être vue comme une rotation du vecteur dans la sphère de Bloch

Niveau 3 Espaces de Hilbert & Sphère de Bloch : FIGHT !

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **www.kahoot.it**
3. Entrer le code PIN donné
4. Tenez vous prêts à jouer : rapidité ET précision !

Niveau 4 Boss final

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse **www.kahoot.it**
3. Entrer le code PIN donné
4. Tenez vous prêts à jouer : rapidité ET précision !

Fini Merci à toutes et à tous !

Des questions ?