

QCOMP103-A: Architecture Quantique

Qubits, portes quantique et savoir modéliser
leurs opérations

Présenté par Jean-Adrien DUCASTAING
Sous la supervision de Nicolas BOUTRY, PhD

Plan du cours

- ❖ Bits et qubits
- ❖ De la porte logique classique à la porte quantique
- ❖ Représenter les opérations sur un qubit avec la sphère de Bloch

Un **bit** est une unité d'information décrivant un **système classique bi-dimensionnel** (à deux états).

- Un bit peut être un interrupteur **activé** ou **désactivé**
- Un bit peut représenter l'électricité **passant** ou **non** a travers un circuit
- Un bit peut être une manière d'encoder "**vrai**" ou "**faux**"

On représente les deux états possibles d'un bit par **0** et **1**, on représente ces états d'un bit par **les vecteurs d'états de dimension 2**:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux états sont **orthogonaux** donc **mutuellement exclusifs**.

Un **qubit** (ou bit quantique) est une unité d'information représentant un **système quantique bi-dimensionnel**.

Un **système quantique à deux dimensions** peut être dans les états 0 et 1 simultanément, on décrit donc son état par le **vecteur d'état de dimension 2**:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Notre **qubit s'effondre sur un bit classique** au moment de la **mesure**.

On remarque qu'un **bit classique est un cas particulier du qubit** lorsque $|c_0|^2 = 1$ ou $|c_1|^2 = 1$.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

Considérons le **byte** (soit 8 bits) suivant: **01101011**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notre système à 8 bits est donc représenté par le vecteur d'état:

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

En considérant que **le qubit est une généralisation du bit classique**, on considère donc que ce byte peut être représenté par un **qubyte** appartenant à l'**espace vectoriel complexe**:

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 8} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

De dimension **$2^8 = 256$**

$$\begin{pmatrix} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De manière plus générale **un qubyte est en superposition de ses états de base** et peut être écrit sous la forme de:

$$\begin{pmatrix}
 00000000 \\
 00000001 \\
 \vdots \\
 01101010 \\
 01101011 \\
 01101100 \\
 \vdots \\
 11111110 \\
 11111111
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 c_0 \\
 c_1 \\
 \vdots \\
 c_{106} \\
 c_{107} \\
 c_{108} \\
 \vdots \\
 c_{254} \\
 c_{255}
 \end{pmatrix}$$

On remarque donc que **8 qubits peuvent s'effondrer au moment de la mesure sur l'une des $2^8 = 256$ combinaisons de bits classiques.**

On appelle tout **assemblage de deux qubits ou plus un registre quantique.**

L'assemblage de deux qubit $|0\rangle \otimes |1\rangle$

Peut être écrit de manière équivalente $|0 \otimes 1\rangle$ ou $|01\rangle$

$$|\psi\rangle = c_{0,0} |00\rangle + c_{0,1} |01\rangle + c_{1,0} |10\rangle + c_{1,1} |11\rangle$$

ATTENTION: Le produit de Kronecker de deux états n'est pas commutatif

$$|0 \otimes 1\rangle = |01\rangle \neq |10\rangle = |1 \otimes 0\rangle$$

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

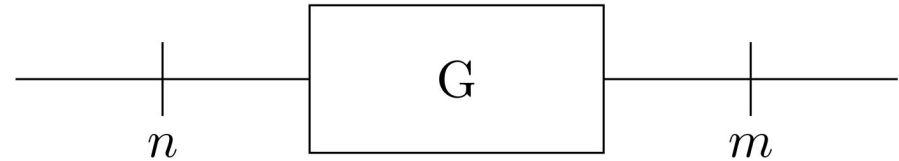
Niveau 1: Bits et qubits

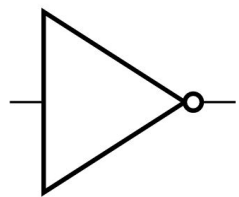
Une **porte logique G** prenant en entrée **n bits** et retournant **m bits** peut être représentée par une matrice **2^m-par-2ⁿ**

$$S_{input} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2^n-1} \end{pmatrix} \in \underbrace{(\underbrace{\mathbb{C}^2}_{\text{Dimension de 1 bit}})^{\otimes n}}_{\text{Dimension de n bit}} = \mathbb{C}^{2^n}$$

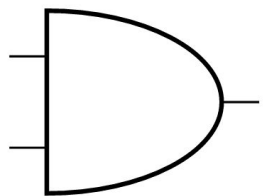
$$G = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \dots & g_{0,2^n} \\ g_{1,0} & \ddots & \dots & g_{1,2^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{2^m,0} & g_{2^m,1} & \dots & g_{2^m,2^n} \end{pmatrix}}_{2^n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} g_{0,0} \\ g_{1,0} \\ \vdots \\ g_{2^m,0} \end{pmatrix}} \right\} 2^m \text{ lignes}$$

$$G * \overbrace{S_{input}}^{\text{Registre de n bits}} = \underbrace{S_{output}}_{\text{Registre de m bits}} \in \mathbb{C}^{2^m}$$



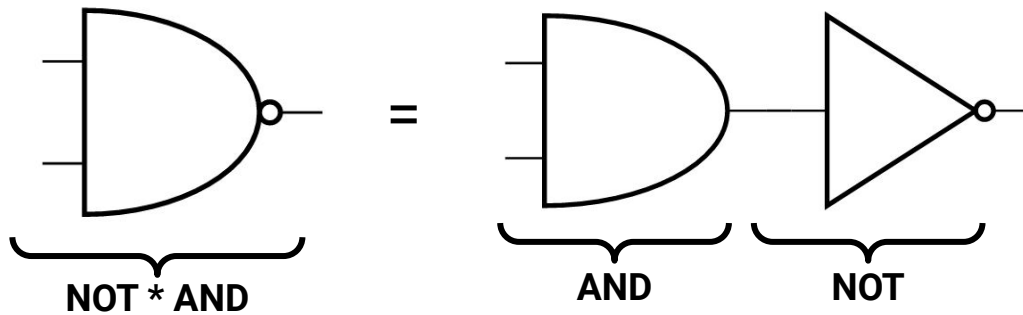


$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

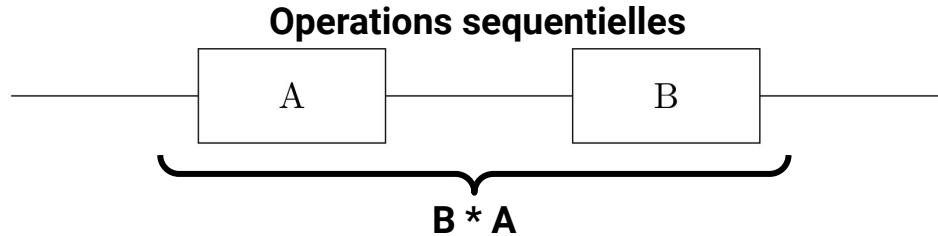


$$AND = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AND |11\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad AND |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

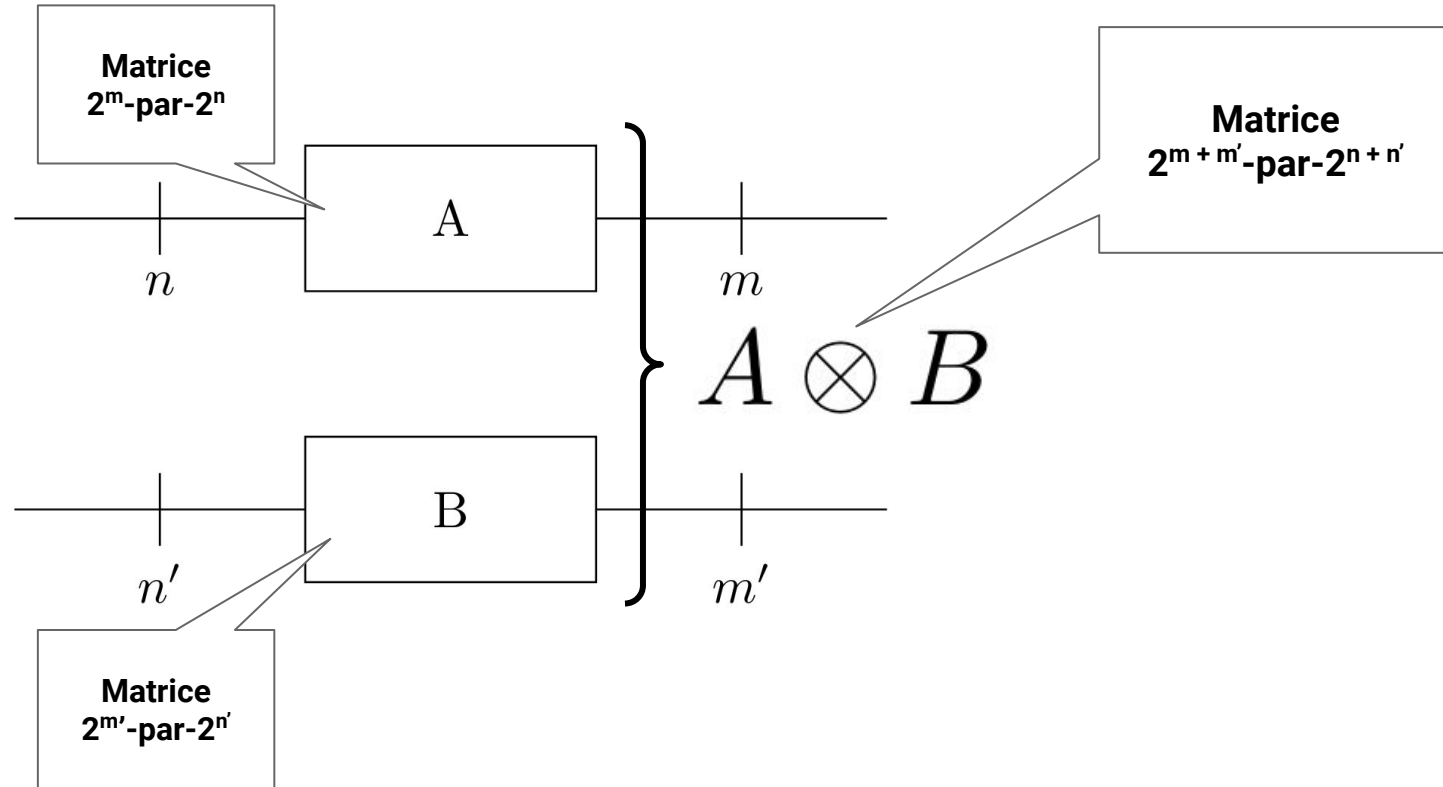


$$NOT * AND = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = NAND$$



B * A et pas **A * B**

Qu'en est-il pour des **opérations parallèles** ?



- Le principe de Landauer:
- **Ecrire** de l'information est **réversible**.
 - **Effacer** de l'information est **irréversible**.

Pour **ne pas perdre d'énergie** on utilise des portes **qui ne détruisent pas d'information**, c'est à dire des **portes réversibles**.

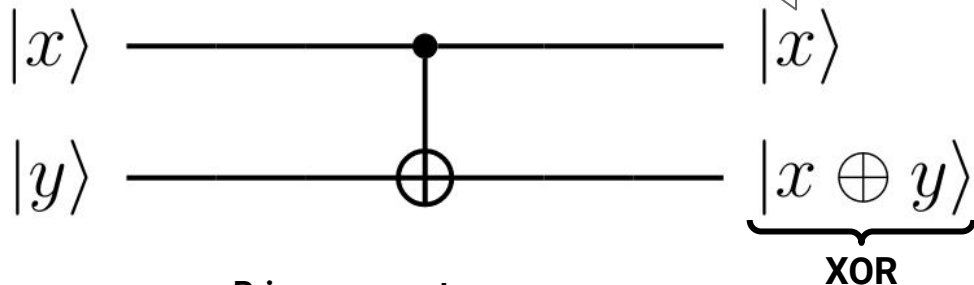
$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **NOT** est une porte **réversible**, car l'on peut déterminer l'état des bits d'entrée à partir de l'état des bits de sortie.

$AND = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **AND n'est pas une porte réversible**, car on ne peut pas déterminer l'état des bits d'entrée à partir de l'état des bits de sortie.

$$AND * 00 = 0 \quad AND * 01 = 0 \quad AND * 10 = 0$$

La porte **CNOT** ou Controlled-**NOT**:

Bit de
contrôle



Prise en compte
du bit de contrôle

$$CNOT = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Opération à
exécuter (NOT)

$$1 \text{ XOR } 0 = 1 \quad 1 \text{ XOR } 1 = 0 \quad 0 \text{ XOR } 0 = 0 \quad 0 \text{ XOR } 1 = 1$$

- Si $|x\rangle = |0\rangle$
alors le bit de sortie sera **égal** à $|y\rangle$
- Si $|x\rangle = |1\rangle$
alors le bit de sortie sera **l'opposé** de $|y\rangle$

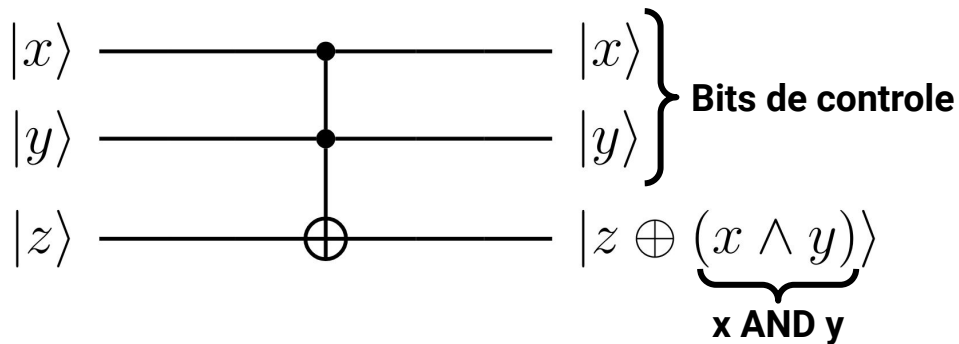
Plus généralement, à quoi correspond **l'opposé** d'un qubit ?

$$|\psi\rangle = \boxed{c_0}|0\rangle + \boxed{c_1}|1\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

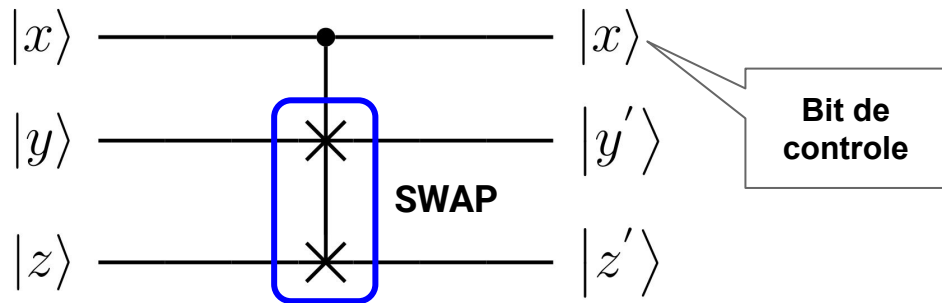
$$NOT * |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \boxed{c_1}|0\rangle + \boxed{c_0}|1\rangle$$

D'autres portes réversibles:

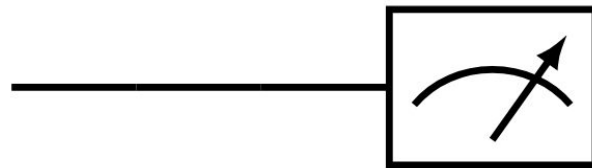
La porte de **Toffoli** ou CCNOT (Controlled-CNOT):



La porte de **Fredkin** ou CSWAP (Controlled-SWAP):



Finalement on a l'opération de **mesure**



La **mesure** n'est pas réversible

$$|0, y, z\rangle \longrightarrow |0, y, z\rangle$$

$$|1, y, z\rangle \longrightarrow |1, z, y\rangle$$

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 2: De la porte logique classique à la porte quantique

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle = \underbrace{(a_0 + ib_0)}_{c_0} |0\rangle + \underbrace{(a_1 + ib_1)}_{c_1} |1\rangle \longrightarrow (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4$$

$$1 = |c_0|^2 + |c_1|^2$$

$$= |r_0 e^{i\phi_0}|^2 + |r_1 e^{i\phi_1}|^2$$

$$= |r_0|^2 \cdot |e^{i\phi_0}|^2 + |r_1|^2 \cdot |e^{i\phi_1}|^2$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

QUBIT WITH ONLY TWO REAL NUMBERS

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

$$r_0 = \cos(\theta)$$

$$r_1 = \sin(\theta)$$

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0} \cdot |0\rangle + r_1 e^{i\phi_1} |1\rangle \quad \text{or} \quad c \cdot |\psi\rangle \sim |\psi\rangle$$

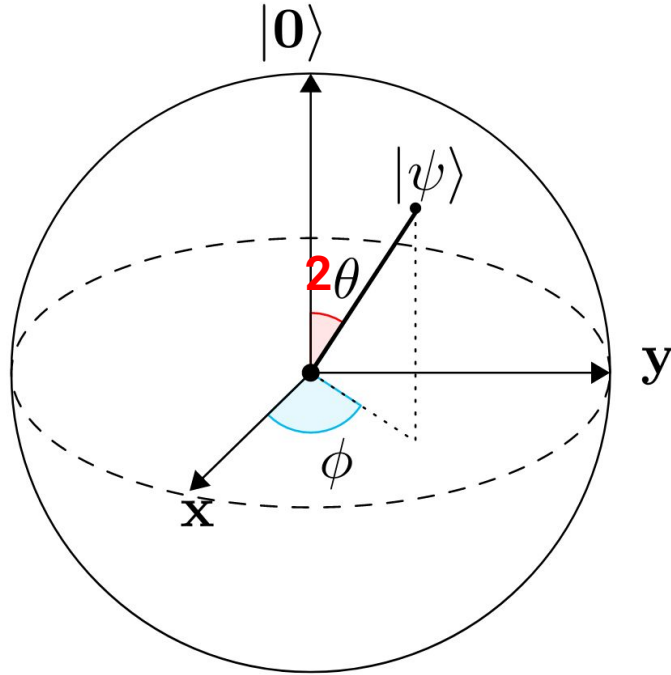
$$e^{-i\phi_0} |\psi\rangle = e^{-i\phi_0} (r_0 e^{i\phi_0} \cdot |0\rangle + r_1 e^{i\phi_1} \cdot |1\rangle)$$

$$= r_0 e^{i(\phi_0 - \phi_0)} \cdot |0\rangle + r_1 e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \cdot |1\rangle$$

$$= r_0 \cdot |0\rangle + r_1 e^{i(\phi_1 - \phi_0)} \cdot |1\rangle$$

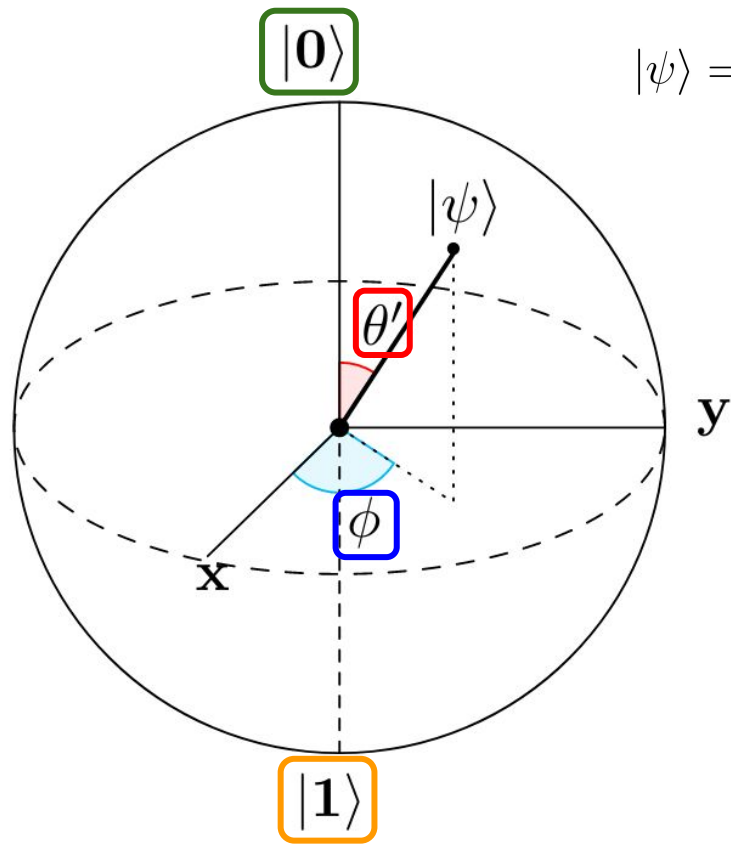
$$= \cos(\theta) \cdot |0\rangle + \sin(\theta) e^{i\phi} \cdot |1\rangle \longrightarrow (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + \sin(\theta) e^{i\phi} \cdot |1\rangle \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$



~~$$\begin{aligned}
 x &= \cos(\phi) \sin(\theta) & x &= \cos(\phi) \sin(\underline{2\theta}) \\
 y &= \sin(\phi) \sin(\theta) & y &= \sin(\phi) \sin(\underline{2\theta}) \\
 z &= \cos(\theta) & z &= \cos(\underline{2\theta})
 \end{aligned}$$~~

$$\underbrace{(\theta, \phi)}_{\text{Qubit}} \xrightarrow{\text{Bloch}} \underbrace{(2\theta, \phi)}_{\text{Représentation sur la sphère}}$$



$$|\psi\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + \sin(\theta)e^{i\phi} \cdot |1\rangle \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

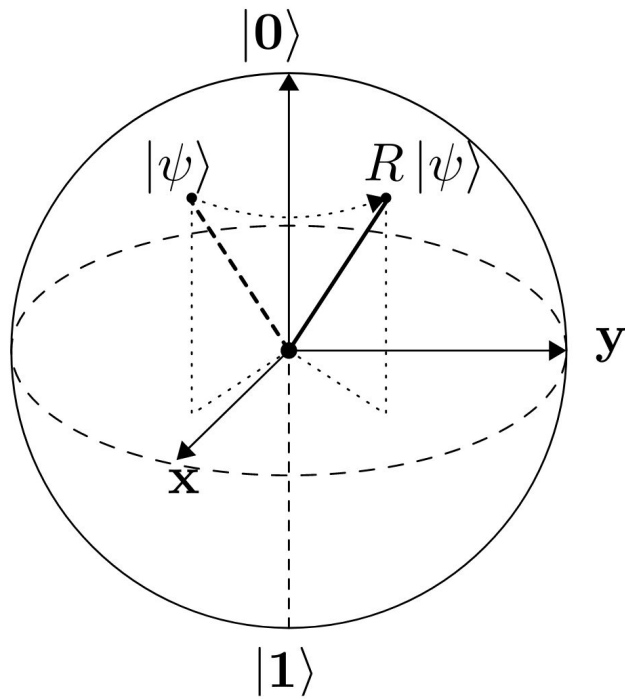
$$(\theta, \phi) \xrightarrow{\text{Bloch}} (2\theta, \phi) = (\theta', \phi)$$

$|0\rangle$ est le **pôle nord**.

$|1\rangle$ est le **pôle sud**.

$\theta' = 2\theta$ est la **latitude** du point.

ϕ est la **longitude** du point.



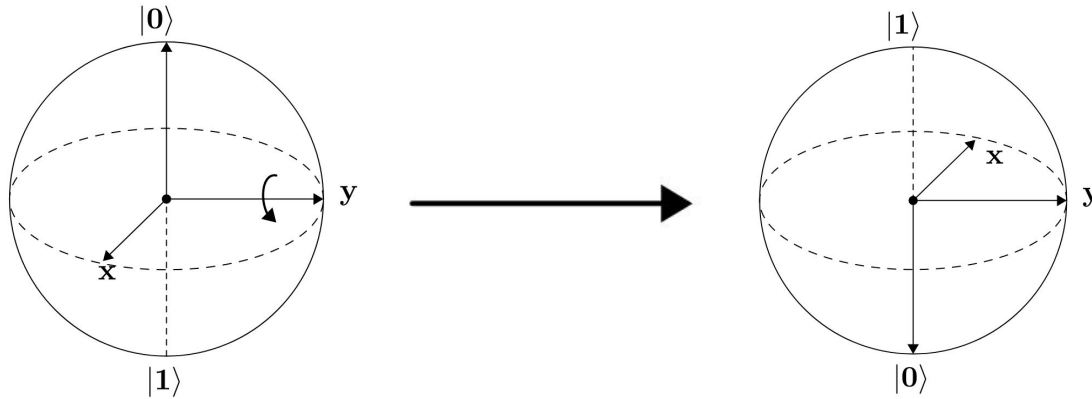
Changement de phase

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta) |1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ e^{i\phi} \sin(\theta) \end{pmatrix} \xrightarrow{R(\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ e^{\alpha} e^{i\phi} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



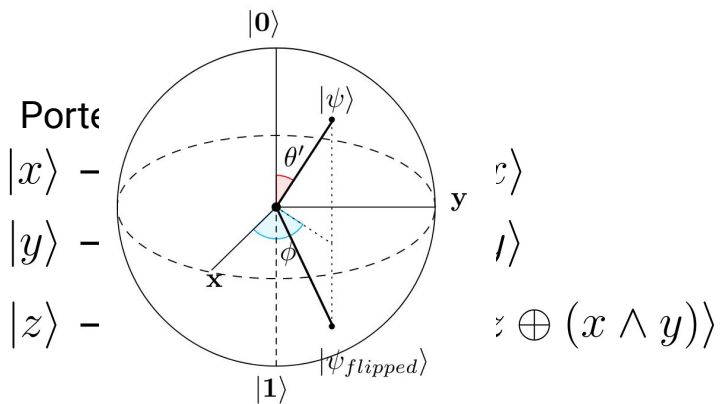
$$R_x(\alpha) = \cos(\alpha)I - i \sin(\alpha)X = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -i \sin(\alpha) \\ -i \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \cos(\alpha)I - i \sin(\alpha)Y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

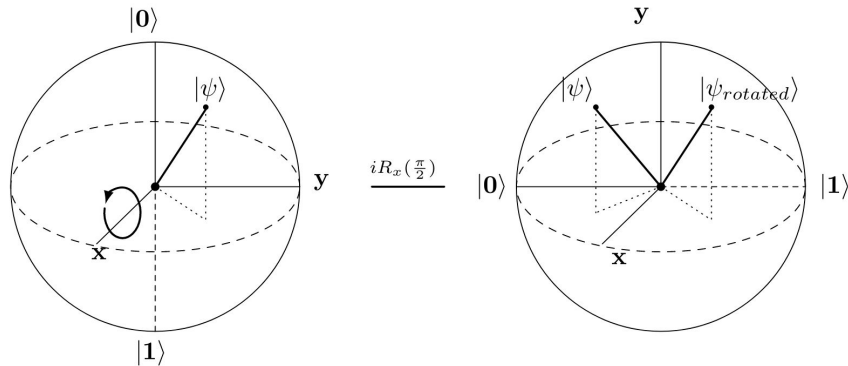
$$R_z(\alpha) = \cos(\alpha)I - i \sin(\alpha)Z = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_{rotated}\rangle &= iR_x\left(\frac{\pi}{2}\right) * |\psi\rangle = \begin{pmatrix} i \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & i \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
 &= |\psi_{flipped}\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_{flipped}\rangle &= NOT * |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = e^{i\phi} \sin\theta |0\rangle + \cos\theta |1\rangle \\
 |\psi_{flipped}\rangle &= e^{i\phi} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot |0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot |1\rangle
 \end{aligned}$$



$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \phi\right) \xrightarrow{Bloch} (\pi - 2\theta, \phi) = (\pi - \theta', \phi)$$



Montrer que Toffoli est l'équivalent de $D\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 3: Représenter les opérations sur un qubit avec la sphère de Bloch