

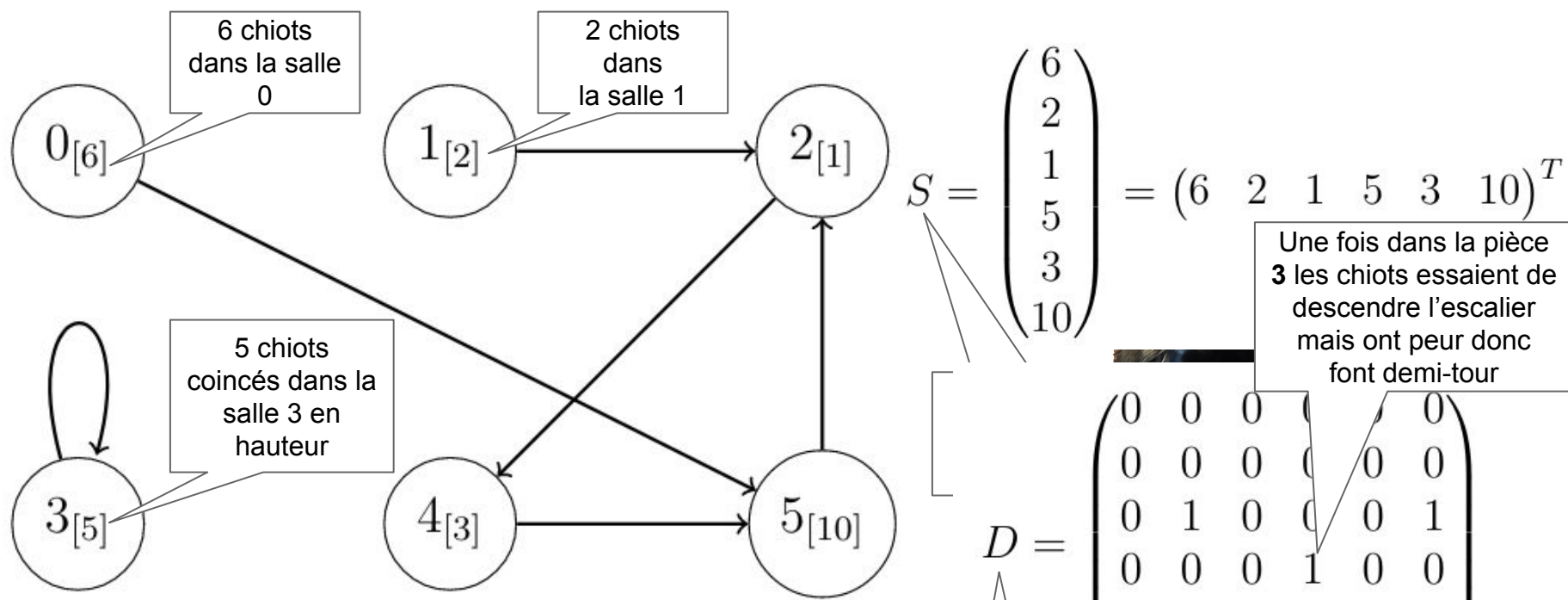
QCOMP102: Systèmes Quantiques

Modéliser et manipuler des systèmes quantiques

Présenté par Jean-Adrien DUCASTAING
Sous la supervision de Nicolas BOUTRY, PhD

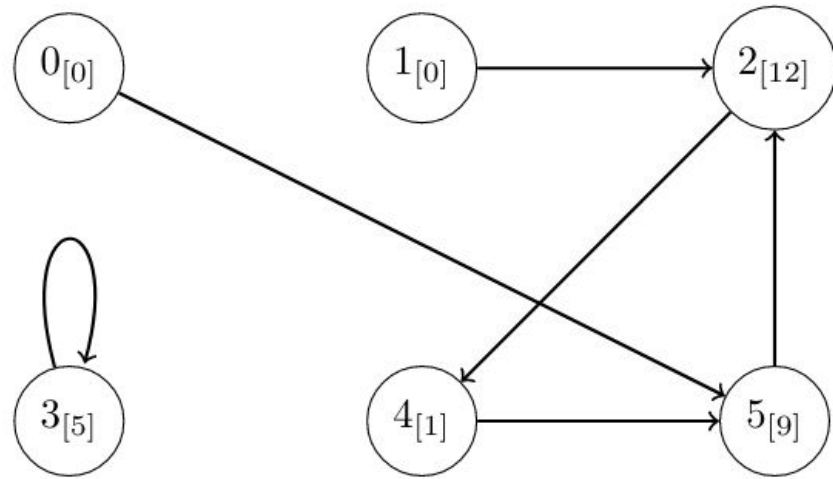
Plan du cours

- ❖ Représenter un système physique et son évolution à l'aide de l'algèbre linéaire
- ❖ Du modèle probabiliste au modèle quantique
- ❖ Etats quantiques et leur mécanique
- ❖ Intrication quantique



27 chiots sont répartis dans un escape game

I - Représenter un système déterministe (cf. polycopié page 2)



$$S_{t+1} = D * S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$S_t = (x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{n-1})^T$$

Chaque minute, dans chaque pièce,
les chiots essaient de sortir.

$$S_{t+k} = D^k * S_t = (x'_0 \quad x'_1 \quad \dots \quad x'_{n-1})^T$$

Nous sommes à la minute **t**, où seront les
chiots à la minute **t+1** ?

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

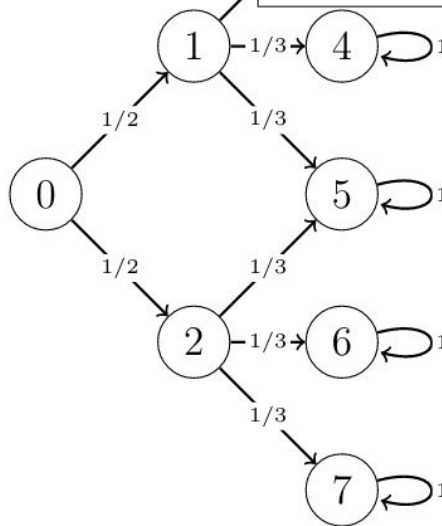
Niveau 1: Représenter des systèmes physiques à l'aide de l'algèbre linéaire

Décrit le mouvement de la balle **après 2 unité de temps**

$$B^2 = B * B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Décrit le mouve
de la balle **après** $S_0 =$
unité de temps



$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$S_1 = B * S_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$S_2 = B^2 * S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les fentes de Young à l'américaine

Dans le monde "classique":

$$p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p \in [0, 1]$$

Soient p_1 et p_2 , $(p_1 + p_2) \geq p_1$ et $(p_1 + p_2) \geq p_2$

Et dans le monde quantique:

$$c \in \mathbb{C} \text{ tel que } |c|^2 \in [0, 1]$$

Oui mais ca change quoi?

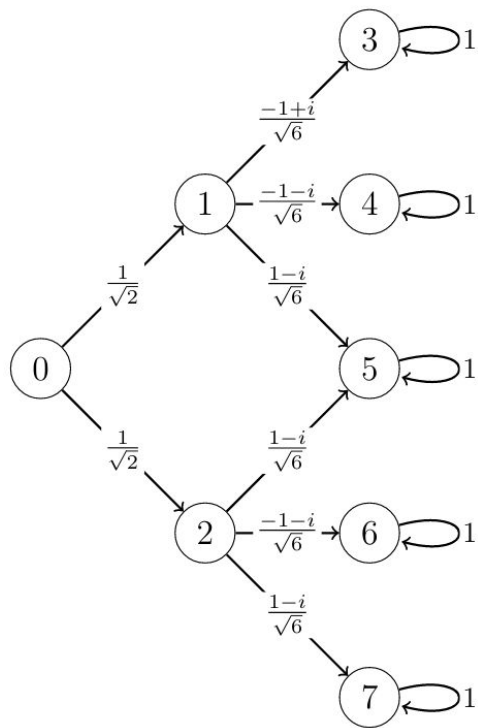
Soient $|c_1|^2$ et $|c_2|^2$, $|c_1 + c_2|^2$ n'est pas nécessairement supérieur à $|c_1|^2$ ou $|c_2|^2$

$$c_1 = 5 + 3i \quad |c_1|^2 = 34$$

$$c_2 = -3 - 2i \quad |c_2|^2 = 13$$

$$|c_1 + c_2|^2 = 5$$

Interference



$$B^2 = B * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2[5,0] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1+i}{\sqrt{6}} \right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1-i}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-1+i}{\sqrt{12}} + \frac{1-i}{\sqrt{12}} = \frac{0}{\sqrt{12}} = 0$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{12}} & \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1-i}{\sqrt{12}} & \frac{-1-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1-i}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{-1-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |P^2[i,j]|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Interference

Les vraies fentes de Young

L'état d'un système **quantique** est représenté par un vecteur complexe:

$$X = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Le système X est en **superposition** de tous ses états.

La **mesure** du système X le fixe **irréversiblement** dans un seul état défini.

$|c_i|^2$ ne représente pas la probabilité de X d'être dans l'état i. X est dans tous ses états **simultanément**.

$|c_i|^2$ représente la probabilité de trouver X dans l'état i **après la mesure**.

Un **état quantique** est une superposition d'**états classiques**.

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 2: Du modèle probabiliste au modèle quantique

$$|\psi\rangle = c_0 |x_0\rangle + c_1 |x_1\rangle + \cdots + c_{n-1} |x_{n-1}\rangle$$

Amplitude
Etat de base

$$|x_0\rangle \longrightarrow (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$$

$$|x_1\rangle \longrightarrow (0 \quad 1 \quad \dots \quad 0)^T$$

$$\vdots$$

$$|x_{n-1}\rangle \longrightarrow (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1)^T$$

$$|\psi\rangle \longrightarrow (c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1})^T$$

$$p(x_i) = \frac{|c_i|^2}{||\psi\rangle|^2} = \frac{|c_i|^2}{\sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2}$$

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow |x_i\rangle$$

Ket

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bra-Ket

$$\langle\psi'|\psi\rangle = (\overline{c'_0} \quad \overline{c'_1} \quad \dots \quad \overline{c'_{n-1}}) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \overline{c'_0}c_0 + \overline{c'_1}c_1 + \dots + \overline{c'_{n-1}}c_{n-1} \in \mathbb{C}$$

Bra

$$\langle\psi'| = |\psi'\rangle^\dagger = (\overline{|\psi'\rangle})^T = (\overline{c'_0} \quad \overline{c'_1} \quad \dots \quad \overline{c'_{n-1}})$$

Etat
initial

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

On représente les **états classiques** par une base **orthogonale** de \mathbb{C}^n :

$$\{ |b_0\rangle, |b_1\rangle, \dots, |b_{n-1}\rangle \}$$

Pourquoi **orthogonale** ? $|\psi\rangle \xrightarrow{\langle\psi'|\psi\rangle} |\psi'\rangle$

2 vecteurs orthogonaux = 2 états mutuellement exclusifs

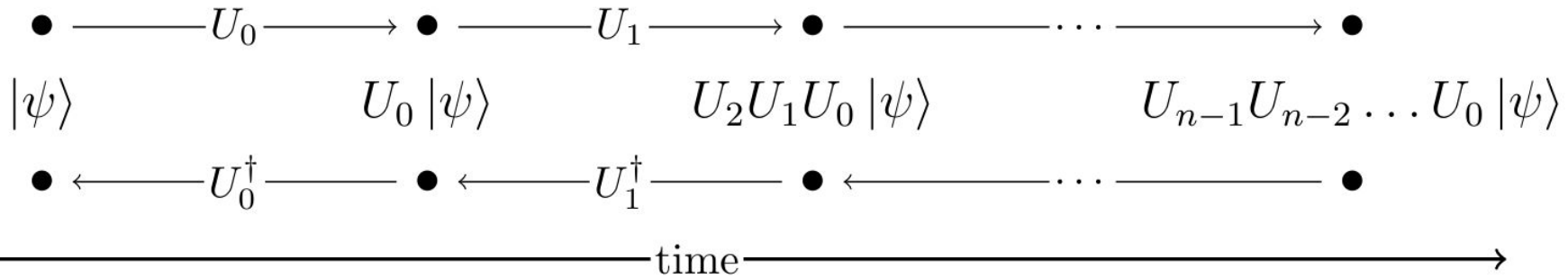
$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \langle b_0|\psi\rangle |b_0\rangle + \langle b_1|\psi\rangle |b_1\rangle + \dots \langle b_{n-1}|\psi\rangle |b_{n-1}\rangle \\ &= c_0 |b_0\rangle + c_1 |b_1\rangle + \dots + c_{n-1} |b_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Ainsi on a $|c_i|^2 = |\langle b_i|\psi\rangle|^2$ décrivant la probabilité de $|\psi\rangle \xrightarrow{\langle b_i|\psi\rangle} |b_i\rangle$

Toute **évolution** d'un système quantique **qui n'est pas un acte de mesure** est représentée par une **matrice unitaire**.

$$|\psi(t + 1)\rangle = U |\psi(t)\rangle$$

- Le **produit** de deux matrices unitaire est unitaire.
- L'**inverse** d'une matrice unitaire est unitaire.

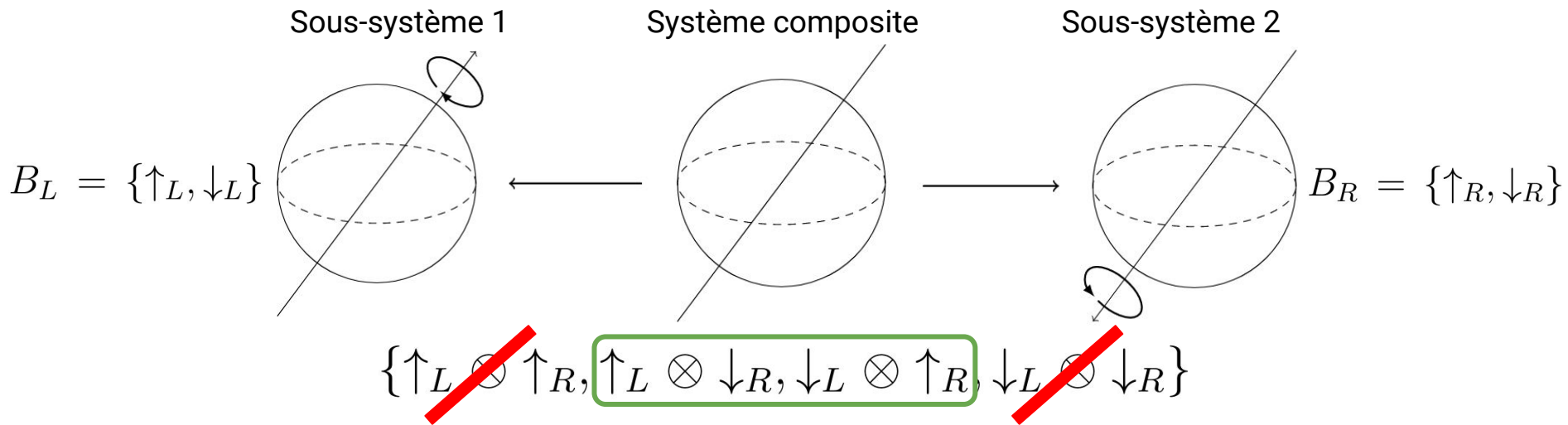


Tout **opérateur unitaire** est **réversible**.

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 3: États quantiques et leur mécanique



$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_L \otimes \downarrow_R\rangle + |\downarrow_L \otimes \uparrow_R\rangle) = \boxed{0} \cdot |\uparrow_L \otimes \uparrow_R\rangle + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\uparrow_L \otimes \downarrow_R\rangle + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\downarrow_L \otimes \uparrow_R\rangle + \boxed{0} \cdot |\downarrow_L \otimes \downarrow_R\rangle$$

Pour que ces sous-systèmes soient **séparables**, il faudrait que le système composite satisfasse **également** cette équation:

$$|\beta\rangle = (c_0 \cdot |\uparrow_L\rangle + c_1 \cdot |\downarrow_L\rangle) \otimes (c'_0 \cdot |\uparrow_R\rangle + c'_1 \cdot |\downarrow_R\rangle) \quad \text{Ces deux équations n'ont pas de solution.}$$

$$= \boxed{c_0 c'_0} \cdot |\uparrow_L\rangle \otimes |\uparrow_R\rangle + \boxed{c_0 c'_1} \cdot |\uparrow_L\rangle \otimes |\downarrow_R\rangle + \boxed{c_1 c'_0} \cdot |\downarrow_L\rangle \otimes |\uparrow_R\rangle + \boxed{c_1 c'_1} \cdot |\downarrow_L\rangle \otimes |\downarrow_R\rangle$$

$= 0$

$\neq 0$

$\neq 0$

$= 0$

Kahoot

1. Prenez votre téléphone ou votre laptop
2. Allez à l'adresse kahoot.it
3. Rentrez le code PIN donné au tableau
4. Tenez vous prêt à jouer

Niveau 4: Intrication quantique