Kratki zakoni v grupah

Jaša Knap

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

28. februar 2024

Definicija

Zakon v grupi G je produkt abstraktnih elementov x, y in njunih inverzov, ki ima lastnost, da za vsako zamenjavo x, y s konkretnima elementoma g, h iz G dobimo rezultat 1 v G.

Primer

Grupa G je Abelova natanko tedaj, ko za vsaka $x, y \in G$ velja

$$xy = yx \ \left(\iff xyx^{-1}y^{-1} = 1\right).$$

Primer

Naj bo G končna grupa in $|G| = n$. Potem je

$$x^n \text{ zakon.}$$

Primer

Naj bo G končna grupa in $|G| = n$. Potem je

$$x^n \text{ zakon.}$$

Primer

Naj bo G simetrična grupa S_n. Potem je

$$x^{n!} \text{ zakon.}$$

Precej krajši je zakon

$$x^{lcm(1,\dots,n)}.$$

- $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
- $$\operatorname{lcm}(1,\ldots,n) \sim e^n.$$

- $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
- $$\mathrm{lcm}(1,\ldots,n) \sim e^n.$$
- Naj bo $\alpha(n)$ dolžina najkrajše besede, ki je zakon za vse grupe moči n ali manj. Trenutno je znano, da je
$$\alpha(n) \le e^{155(\log n)^4 \log(\log n)}.$$

Definicija

Naj bo G grupa in naj bo ω dvočrkovna beseda. Množico

$$Z(G, \omega) = \{(g, h) \in G \times G | \, \omega(g, h) = 1\}$$

imenujemo izginjajoča množica besede ω.

Lema (Komutatorska lema)

Naj bodo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ *dvočrkovne besede. Potem obstaja beseda* ω *dolžine*

$$l(\omega) \leq 8m\left(\sum_{i=1}^{m} l\left(\omega_i\right) + m\right),$$

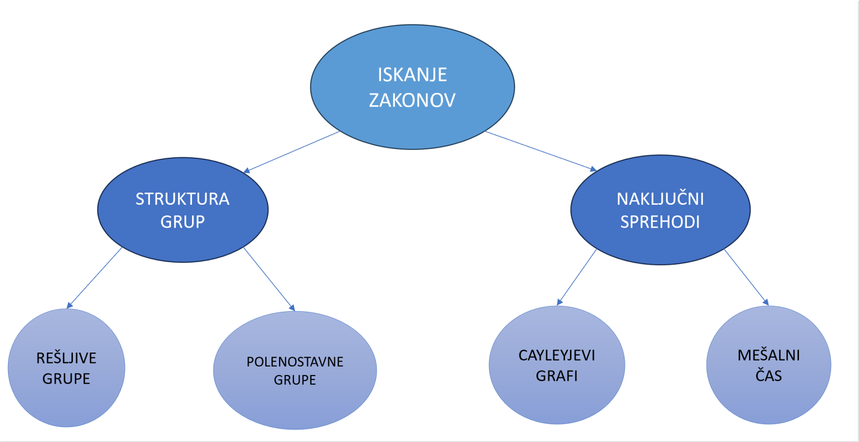
za katero velja

$$Z(G,\omega) \supseteq Z(G,\omega_1) \cup Z(G,\omega_2) \cup \ldots \cup Z(G,\omega_m).$$

Lema (Razširitvena lema)

Naj bo G grupa in $N \triangleleft G$ njena edinka. Naj bo ω_N zakon za N in $\omega_{G/N}$ zakon za kvocientno grupo G/N. Potem obstaja zakon ω za grupo G, katerega dolžina je

$$l(\omega) \leq l(\omega_N) l(\omega_{G/N}).$$


ISKANJE ZAKONOV
STRUKTURA GRUP
NAKLJUČNI SPREHODI
REŠLJIVE GRUPE
POLENOSTAVNE GRUPE
CAYLEYJEVI GRAFI
MEŠALNI ČAS

Cayleyjev graf za diedrsko grupo D_{10} z generatorji $\{r, r^{-1}, Z\}$.