Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

2. december 2023

1 Uvod

Definicija 1.1. Topološki prostor M je n-dimenzionalna mnogoterost, če za vsak $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subseteq M$ in homeomorfizem $\varphi : U \to V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (pri tem je $V \approx B^n$).

Primer 1.2. *Naslednje množice so primeri mnogoterosti.*

1. $M = \mathbb{R}^n$ *je n-dimenzionalna mnogoterost,*
2. S^1 *je* 1*-dimenzionalna mnogoterost,*
3. $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \middle| \sum_{j=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je n-dimenzionalna mnogoterost,*
4. *Projektivni prostori* $\mathbb{R}P^n = {B^n}/_{\sim}$, *kjer je* $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$ *so n-dimenzionalne mnogoterosti.*
5. *Grupa*
$$\mathrm{SU}\,(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det g = 1 \right\}$$
je 3*-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč* $\mathrm{SU}\,(2) = S^3$. *To je primer Lijeve grupe.*
6. *Grupa*
$$\mathrm{SO}\,(3) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| g^T = g^{-1}, \det g = 1 \right\}.$$
Izkaže se, da je $\mathrm{SO}\,(3) = {B^3}/_{\sim} = \mathbb{R}P^3$. *To velja, ker vsaka preslikava iz* $\mathrm{SO}\,(3)$ *predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota π in $-\pi$ predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli* $B\,(0,\pi)^3 \approx B^3$ *priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projektivni prostor* $\mathbb{R}P^3$.

1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

Definicija 1.3. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je odvedljiva v točki $w \in W$, če obstaja linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in preslikava $\mathcal{O} : W \to \mathbb{R}^n$, da za vse ustrezne argumente velja

$$F\,(w + h) = F\,(w) + Ah + \mathcal{O}\,(h)$$

in $\lim_{h\to 0} \frac{||\mathcal{O}(h)||}{||h||} = 0$. Odvod preslikave F v točki w je preslikava $A = D_w F = (DF)_w$.

Definicija 1.4. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je odvedljiva na množici W, če je odvedljiva v vsaki točki $w \in W$.

Definicija 1.5. Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

Definicija 1.6. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Gladek atlas $\mathcal{U}$ na M je družina parov $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, če za vsak $\alpha \in A$ velja:

1. $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem za nek $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\{U_\alpha | \, \alpha \in A\}$ je pokritje M

4. za vsaka $\alpha, \beta \in A$ je preslikava $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \to (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$ difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave $g_{\alpha\beta}$ k-difeomorfizmi z zveznim k-tim odvodom, imamo $\mathcal{C}^k$-atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo $\mathcal{C}^\infty$-atlas, če so vse analitične, pa $\mathcal{C}^\omega$-atlas.

Opomba. Preslikava $g_{\alpha\beta}$ iz prejšnje definicije je preslikava iz $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na $\mathbb{R}^n$ matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w .$$

Definicija 1.7. Topološka mnogoterost M, ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti $M \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.8. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ je gladka, če je gladka vsaka preslikava $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.9. Naj bo $(M, \mathcal{U})$ gladka mnogoterost. Krivulja $\gamma : (a, b) \to M$ je gladka krivulja v M, če za $\forall \alpha \in A$ velja, da je $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka krivulja v $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.10. Atlasa $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \, \alpha \in A\}$ in $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \varphi_\beta) | \, \beta \in B\}$ na mnogoterosti M sta ekvivalentna, če za vsak par $(\alpha, \beta) \in A \times B$ iz $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to (\psi_\beta)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

Opomba. Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa $\mathcal{U}$ označimo z $[\mathcal{U}]$.

Definicija 1.11. Naj bo M topološka mnogoterost in $\mathcal{U}$ gladek atlas na M. Potem je $[\mathcal{U}]$ gladka struktura na M.

Opomba. Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima $\mathbb{R}^4$ neštevno neskončno eksotičnih gladkih struktur. Vsi ostali $\mathbb{R}^n$ imajo zgolj svojo trivialno in nobene eksotične.

2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženimi v prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.1. Množica $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je gladka vložena ploskev, če za vsak $m \in X$ obstaja krogla za m $W \subseteq \mathbb{R}^n$ in gladka funkcija $f : W \to \mathbb{R}$, za katero velja

1. $X \cap W = f^* (\{0\})$
2. $(Df)_w \neq 0$ za vsak $w \in X \cap W$

Vložena ploskev $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na X. Vzemimo točko $m \in X$. Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica $f : W \ni m \to \mathbb{R}$ in vemo, da $D_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(m) \neq 0$. Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo $m = (x_0, y_0, z_0)$ in BŠS naj bo $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$. Torej obstaja gladka okolica $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ in gladka funkcija $g : V \to \mathbb{R}$, da velja $f(x, y, g(x, y)) = 0$ za vsak $(x, y) \in V$. Po potrebi lahko množico W zmanjšamo na $W_0 \subseteq W$, da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) . \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo $U = W_0 \cap X$, postane par (U, φ) karta na X.

2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo – metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo $\gamma : (a, b) \to M$, je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\, dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neki skalarni produkt na $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ in naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza za $\mathcal{V}$, ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ in $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_i \rangle > 0$) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

Opomba. Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo P poljubna preslikava med bazama, L_e linearna preslikava glede na bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, L_f pa glede na bazo $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = PL_eP^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta $a_f = Pa_e$ in $b_f = Pb_e$. Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned} \langle a_f, b_f \rangle &= \langle a_e, b_e \rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $P^T A_f P = A_e$ oziroma zaradi ortogonalnosti P ekvivalentno

$$A_f = PA_eP^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.

Preden se lotimo definicije tangentne ravnine, se spomnimo naslednje definicije.

Definicija 2.2. Naj bo preslikava $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva. Rang preslikave F v točki $w \in W$ je enak rangu matrike D_wF. Pravimo, da ima F v točki $w \in W$ maksimalen rang, če ima matrika D_wF maksimalen rang.

Definicija 2.3. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ vložena ploskev in točka $m \in X$. Tangentna ravnina T_mX je množica tangent vseh krivulj v X, ki v času $t = 0$ gredo skozi m.

$$T_mX = \left\{\dot\gamma(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ krivulja}, \gamma(0) = m\right\}$$

Trditev 2.4. *T_mX je dvodimenzionalen realni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.*

Dokaz: Naj bo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ neka regularna parametrizacija ploskve X (to pomeni, da mora biti rang preslikave r maksimalen, torej konstantno enak 2) v okolici točke $m \in X$. Naj bo $p = (u, v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$. Pišimo

$$r(p) = r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Naj bo $m = r(u_0, v_0)$. Trdimo, da je $T_mX = \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Najprej dokažimo inkluzijo $T_mX \subseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Naj bo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = m = r(u_0, v_0)$ poljubna krivulja. Direktno po definiciji tangentne krivulje sledi $\gamma\dot{(0)} \in T_mX$. Dokazati moramo $\gamma\dot{(0)} \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Naj bo $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ podana z $\beta(t) = r^{-1}(\gamma(t))$. Ker je praslika preslikave β vsebovana v $\mathbb{R}^2$, obstajata funkciji $u(t), v(t)$, da je $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Pri tem velja, da je $\beta(0) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$. Vidimo, da je $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Po verižnem pravilu za odvajanje imamo

$$\dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \left(D_{(u_0,v_0)}r\right)\dot\beta(0).$$

Torej je $\dot\gamma(0) \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$.

Nato dokažimo še obratno inkluzijo $T_mX \supseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Vzemimo poljuben vektor $\omega \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $v = \left(D_{(u_0,v_0)r} \cdot w\right)$. Potrebujemo krivuljo $\gamma(t), \gamma(0) = m$, za katero bo veljalo $\dot\gamma(0) = v$. Oglejmo si

$$\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)\left(\dot\beta(0)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r(\beta(t)).$$

Trdimo, da za $\gamma(t) = r(\beta(t))$ velja $\dot\gamma(0) \in T_mX$. To je res, saj je $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, hkrati pa tudi $\gamma(0) = r(\beta(0)) = r(u_0, v_0) = m$. Torej velja, da je $T_mX = \operatorname{im}(D_{(u_0,v_0)}r)$. Ker smo zahtevali, da je parametrizacija regularna, je matrika $D_{(u_0,v_0)}r$ ranga 2, torej je T_mX dvodimenzionalen vektorski prostor. $\square$

Opomba. Tangentna ravnina je pravi vektorski prostor in ne afin kot recimo pri analizi 2a.

Do nadaljnjega nas bodo zanimale lokalne lastnosti ploskev, zato bomo delali v glavnem s ploskvami, ki jih lahko pokrijemo z eno samo karto oziroma z eno samo parametrizacijo.

Definicija 2.5. Metrika na ploskvi $X \subseteq \mathbb{R}^3$, opremljeni s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, je preslikava

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ m &\longmapsto \begin{pmatrix} g_{11}(m) & g_{12}(m) \\ g_{21}(m) & g_{22}(m) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kjer je za vsak $m \in X$ matrika $g(m)$ simetrična in pozitivno definitna. To lahko povemo s pogojema $\det g(m) > 0$ in $g_{11}(m) > 0$.

Opomba. Za drugo parametrizacijo ploskve X bi dobili druge koeficiente matrike.

Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ krivulja. Njeno parametrizacijo r lahko napišemo v obliki $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ za primerne funkcije $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $\gamma(t) = r(\beta(t))$. V koordinatah lahko zapišemo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

$$\dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} r(\beta(t)) = (D_{(u_0,v_0)}r)(\dot\beta(t_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = r_u(u_0, v_0)\dot u(t_0) + r_v(u_0, v_0)\dot v(t_0).$$

To je razvoj vektorja $\dot\gamma(t_0)$ po bazi $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$ prostora $T_{\gamma(t_0)}X$, ki pa ni nujno ortogonalna. Pravzaprav je ortogonalna le v precej posebnih primerih.

Definicija 2.6. Dolžina krivulje $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ glede na metriko g je v parametrizaciji r podana s formulo

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot u(t) & \dot v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix}}\, dt$$

Ustrezni skalarni produkti na ravnini T_mX so glede na parametrizacijo r podani s predpisi $\langle r_u, r_u \rangle_g = g_{11}$, $\langle r_u, r_v \rangle_g = g_{12}$, $\langle r_v, r_v \rangle_g = g_{22}$. Naj bo sedaj ambientni prostor $\mathbb{R}^3$ opremljen s fiksnim evklidskim skalarnim produktom, in koeficiente g_{ij} poračunamo z njim (na enak način kot prej). Pri tem uporabimo naslednje standardne oznake:

$$E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle.$$

Včasih tudi zlorabimo notacijo

$$E(m) = E(r(u, v)) = E(u, v).$$

Definicija 2.7. Metrika na $X \subseteq \mathbb{R}^2$, ki je glede na $r : V \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ podana z matrično funkcijo

$$\begin{aligned} g_f : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (u,v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se imenuje prva fundamentalna forma ploskve.

Opomba. Dolžina krivulje $\mathcal{L}(\gamma)$ glede na prvo fundamentalno formo ploskve sovpada z običajno dolžino krivulje:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\, dt &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{u} r_u + \dot{v} r_v, \dot{u} r_u + \dot{v} r_v \rangle}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_v \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt. \end{aligned}$$

Izomorfizmi v diferencialni geometriji so izometrije, katerih definicija pa je nekoliko drugačna, kot bi morda pričakovali.

Definicija 2.8. Preslikava $f : X \to \tilde{X}$ nad dvema ploskvama $X, \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^3$ je izometrija, če za vsako krivuljo $\gamma : [a,b] \to X$ velja enakost med dolžinama

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(f(\gamma)).$$

Opomba. Izometrije med ploskvama porodijo izometrije v običajnem metričnem smislu.

Primer 2.9. *1. fundamentalna forma na sferi glede na sferične koordinate. Če odvzamemo iz S^2 en poldnevnik, jo lahko parametriziramo s sferičnimi koordinatami:*

$$r : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \subseteq V = (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

s predpisom

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Potem dobimo parcialna odvoda

$$r_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \ r_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = \cos^2 u, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Primer 2.10. *Naj bo X rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če krivuljo $x = f(z)$ zavrtimo okoli osi z:*

$$r : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \\ u \end{pmatrix}.$$

Potem imamo odvoda

$$r_u(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u)\cos v \\ f'(u)\sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \; r_v(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u)\sin v \\ f(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u\rangle = 1 + f'(u)^2, \\ F &= \langle r_u, r_v\rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v\rangle = f(u)^2, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Naslednji izrek nam pove povezavo med 1. fundamentalno formo in izometričnostjo ploskev.

Izrek 2.11.

Naj bo $X \to \tilde{X}$ izometrija med ploskvama. Tedaj obstaja par parametrizacij $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da za pripadajoči fundamentalni formi velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Velja tudi obratno, torej če za ploskvi $X, \tilde{X}$ obstajata parametrizaciji r in $\tilde{r}$, za kateri velja zgornji sistem enačb, potem sta X in $\tilde{X}$ izometrični.

Dokaz: Pokažimo najprej obrat ($\Longleftarrow$). Recimo, da obstajata parametrizaciji $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da velja

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Naj bo $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$. Preveriti moramo, da je f izometrija. Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ poljubna krivulja in primerjamo dolžini $\mathcal{L}_r(\gamma)$ ter $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma))$. Potem obstaja krivulja $\beta : [\alpha, \beta] \to V$ za katero velja $\gamma(t) = r(\beta(t))$. Potem za $f(\gamma(t))$ velja

$$f(\gamma(t)) = f(r(\beta(t))) = \tilde{r}(\beta(t)).$$

Ker je $\beta(t)$ ravninska krivulja, velja

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r(\beta(t)) = r(u(t), v(t)), \\ \tilde{\gamma}(t) &= \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Torej imamo enačbi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2}\, dt, \\ \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) &= \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u, v)\dot{u}^2 + 2\tilde{F}(u, v)\dot{u}\dot{v} + \tilde{G}(u, v)\dot{v}^2}\, dt. \end{aligned}$$

Ker so posamezni sumandi enaki, sta izraza enaka, torej je $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$ res izometrija.

Zdaj dokažimo še ($\implies$). Denimo, da imamo med ploskvama X in $\tilde{X}$ izomerijo $f : X \to \tilde{X}$. Naj bo $\gamma(t) = r(\beta(t)) = (u_0 + t, v_0)$ in $t \in (0, \varepsilon)$. Pri tem je točka $(u_0, v_0) \in V$ poljubna in določa točko $p = r(u_0, v_0) \in X$. Zdaj izračunamo

$$\mathcal{L}_r(\gamma(t)) = \int_0^\varepsilon ||\dot{\gamma}(t)||\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle r_u, r_u \rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)}\, dt.$$

Sedaj si oglejmo $f(\gamma(t)) = \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u_0 + t, v_0)$. Potem imamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma(t))) &= \int_0^\varepsilon ||\dot{\tilde{\gamma}}(t)||\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0), \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0) \rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \tilde{r}(u_0 + t, v_0)\, dt.
\end{aligned}$$

Po predpostavki o izometričnosti velja

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_r(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma)), \\
\int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0)}\, dt.
\end{gathered}$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstajata neka $\hat{t}, \hat{\hat{t}} \in (0, \varepsilon)$, da velja

$$E(u_0 + \hat{t}, v_0)\varepsilon = \tilde{E}(u_0 + \hat{\hat{t}}, v_0)\varepsilon$$

in če pošljemo $\varepsilon \to 0$, zaradi zveznosti funkcij dobimo

$$E(u_0, v_0) = \tilde{E}(u_0, v_0).$$

Še lažje ta rezultat dobimo tako, da na obeh straneh odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$.

Če zdaj vzamemo $\beta(t) = (u_0, v_0 + t)$, dobimo po enakem postopku kot prej

$$G(u_0, v_0) = \tilde{G}(u_0, v_0).$$

Nato vzamemo $\beta(t) = (u_0 + t, v_0 + t)$ in imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0 + t) + 2F(u_0 + t, v_0 + t) + G(u_0 + t, v_0 + t)}\, dt \\
= \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0 + t) + 2\tilde{F}(u_0 + t, v_0 + t) + \tilde{G}(u_0 + t, v_0 + t)}\, dt.
\end{aligned}$$

Če zdaj zopet odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$, dobimo enakost integrandov v točki (u_0, v_0), od koder sledi še zadnja zahteva

$$F(u_0, v_0) = \tilde{F}(u_0, v_0).$$

$\square$

Primer 2.12. *Ali je stožec brez ene tvorilke izometričen kosu ravnine? Naj bo podan*

$$S = \left\{(x, y, z) \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Parametriziramo ga z

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

in po znanem postopku dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Pričakujemo, da bo S izometričen nekemu krožnemu izseku, ki ga parametriziramo z

$$\tilde{r}(u, v) = (\alpha u \cos(\beta v), \alpha u \sin(\beta v), 0).$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\beta^2 u^2 \end{pmatrix}.$$

Pogoj

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

je izpolnjen pri $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (če bi zamenjali predznake α in β, bi dobili drugačne parametrizacije). Torej je stožec S izometričen krožnemu izseku s parametrizaijo

$$\tilde{r}(u, v) = \left(\sqrt{2} u \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} v\right), \sqrt{2} u \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} v\right), 0\right).$$

Na tej točki se pojavi naravno vprašanje: ali znamo poiskati vse ploskve v $\mathbb{R}^3$, ki so izomertične ravnini? Izkaže se, da znamo, saj velja naslednji izrek.

Izrek 2.13.

Naj bo ploskev X izometrična kakšnemu kosu ravnine. Potem je X bodisi stožec, valj, ali kakšna tangentna premonosna ploskev.

Definicija 2.14. Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ prostorska krivulja, parametriziarana z naravnim parametrom. Tangentna premonosna ploskev, podana s krivuljo γ, je del prostora $\mathbb{R}^3$, ki ga opiše tangenta na $\gamma(t)$ na intervalu $t \in [a, b]$.

Če je $\gamma = \gamma(u)$ naravna parametrizacija, potem je smiselna parametrizacija tangentno premonosne ploskve X podana z

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u).$$

Ker je γ naravna parametrizacija, velja kot prvo

$$||\dot{\gamma}(u)|| = \langle \dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 1.$$

Če to zvezo odvajamo, dobimo

$$\langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle + \langle \dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u) \rangle = 0$$

in iz simetričnosti skalarnega produkta sledi

$$\langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 0.$$

Torej je pospešek pri naravni parametrizaciji vedno pravokoten na hitrost. To lahko opazimo, če se v avtu peljemo s konstantno hitrostjo. Pospešek bomo čutili samo v ovinkih in to pravokotno glede na smer vožnje.

Definicija 2.15. Fleksijska ukrivljenost naravno parametrizirane krivulje $\gamma(u)$ je podana z

$$\kappa(u) = \sqrt{\langle \ddot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u) \rangle} = ||\ddot{\gamma}(u)||.$$

Izračunajmo 1. fundamentalno formo tangentno premonosne ploskve. Ker velja zveza

$$r(u,v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u),$$

takoj dobimo

$$\begin{aligned} r_u(u,v) &= \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u), \\ r_v(u,v) &= \dot{\gamma}(u). \end{aligned}$$

Če od tod po znanem postopku poračunamo koeficiente 1. fundamentalne forme (pri čemer upoštevamo, da je pospešek pravokoten na hitrost), dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 + v^2\kappa^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Torej vidimo, da je matrika 1. fundamentalne forme zares odvisna samo od fleksijske ukrivljenosti.

Trditev 2.16. *Naj bo podana funkcija $\kappa(u)$. Potem obstaja naravno parametrizirana ravninska krivulja $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, katere fleksijska ukrivljenost v točki $\gamma(u)$ je enaka $\kappa(u)$.*

Dokaz: Ker je krivulja γ ravninska, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= (x(u), y(u)), \\ \dot{\gamma}(u) &= (\dot{x}(u), \dot{y}(u)), \\ \ddot{\gamma}(u) &= (\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)). \end{aligned}$$

Ker je parametrizacija naravna, imamo še sistem enačb

$$\begin{aligned} ||\dot{\gamma}(u)|| &= 1, \\ ||\ddot{\gamma}(u)|| &= \kappa(u), \\ \langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Enotski vektor, pravokoten na $\dot{\gamma}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u))$, je vektor $(\dot{y}(u), -\dot{x}(u))$. Ta vektor je vzporeden vektorju pospeška, torej bo za neko funkcijo $k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ veljalo

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = k(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

Če obe strani enačbe normiramo, iz prejšnega sistema enačb vidimo, da mora priti natanko

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = \kappa(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

To je sistem navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x}(u) &= \kappa(u)\dot{y}(u), \\ \ddot{y}(u) &= -\kappa(u)\dot{x}(u). \end{aligned}$$

Pri analizi 3 smo (bomo čez 14 dni?!) dokazali eksistenčni izrek za obstoj rešitev tega sistema. Z drugimi besedami, obstaja naravno parametrizirana krivulja $\gamma(u) = (x(u), y(u))$, za katero za vsak $u \in [\alpha, \beta]$ velja $||\ddot{\gamma}(u)|| = \kappa(u)$. $\square$

Opomba. Pri določenih (u, v) nam krivulja $\gamma(u)$ podaja tangentno premonosno ploskev. Ta ploskev je del ravnine, v kateri leži krivulja krivulja $\gamma(u)$. Po izreku iz prejšnjih predavanj (TODO ali ali) je ta ploskev izometrična nekemu kosu ravnine.

S tem razmislekom smo dokazali izrek.

Izrek 2.17.

Vsaka tangentno premonosna ploskev je izometrična kosu ravnine.

Definicija 2.18. Ploščina ploskve X, parametrizirane z $r : V sun\mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ je podana z

$$A(X) = \int_V ||r_u \times r_v||\, du\, dv.$$

Opomba. Da je ta definicija dobra, moramo še preveriti.

Opomba. Ker velja zveza

$$||r_u \times r_v||^2 = \langle r_u, r_u\rangle\langle r_v, r_v\rangle - \langle r_u, r_v\rangle^2 = EG - F^2,$$

lahko ploščino izrazimo tudi kot

$$A(X) = \int_V \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_V \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}\, du\, dv.$$

Definicija 2.19. Naj bosta $r : V_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\tilde{r} : V_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ različni regularni parametrizaciji ploskve X. Potem je preslikava

$$\begin{aligned} g = \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ (u, v) &\longmapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \end{aligned}$$

prehodna preslikava med parametrizacijama r in $\tilde{r}$.

Velja $r(u, v) = \tilde{r}(g(u, v))$. Poglejmo si, kaj se zgodi z matriko prve fundamentalne forme transformaciji med parametrizacijama.

2.2 Transformacijska pravila za I-forme

Naj bosta $r : V_1 \to X$ in $\tilde{r} : V_2 \to X$ dve parametrizaciji iste ploskve. Med njima velja $r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$. To nam da prehodno preslikavo $g : \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 \to V_2$. Vektor, razvit po bazi $\{r_u, r_v\}$ bomo skušali razviti bo bazi $\{\tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}}\}$. Imamo

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \\ r_u &= \tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_u, \\ r_v &= \tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_v. \end{aligned}$$

Zdaj hočemo vektor $ar_u + br_v$ zapisati v obliki $\alpha\tilde{r}_u + \beta\tilde{r}_v$. Dobimo

$$ar_u + br_v = a(\tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_u) + b(\tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_v) = \underbrace{(a\tilde{u}_u + b\tilde{u}_v)}_{\alpha}\tilde{r}_{\tilde{u}} + \underbrace{(a\tilde{v}_u + b\tilde{v}_v)}_{\beta}\tilde{r}_{\tilde{v}}.$$

Torej za vsak par vektorjev $(a, b)^T$, $(\alpha, \beta)^T$ velja zveza

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{u}_u & \tilde{u}_v \\ \tilde{v}_u & \tilde{v}_v \end{pmatrix}}_{\text{Jac}(g)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Torej za vse pare vektorjev velja

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle \\
\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \operatorname{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \operatorname{Jac}(g) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Od tod sledi naslednji izrek.

Izrek 2.20.

Naj za parametrizaciji $r : V_1 \to X$ in $\tilde{r} : V_2 \to X$ velja

$$r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)) = \tilde{r}(g(u, v)).$$

Potem za I-formi glede na ti parametrizaciji velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \operatorname{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \operatorname{Jac}(g).$$

Posledica 2.21. *Definicija ploščine je dobra.*

Dokaz: Dokazujemo

$$A(X) = \int_{V_1} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_{V_2} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Po izreku o transformaciji I-forme velja

$$
\begin{aligned}
A(X) &= \int_{V_1} \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}\, du\, dv \\
&= \int_{V_1} \sqrt{\det \left(\operatorname{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \operatorname{Jac}(g) \right)}\, du\, dv \\
&= \int_{V_1} \sqrt{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}\, \left|\det\left(\operatorname{Jac}(g)\right)\right|\, du\, dv \\
\text{(uvedba novih spremenljivk)} &= \int_{V_2} \sqrt{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.
\end{aligned}
$$

□

Recimo, da imamo podano $V \subseteq \mathbb{R}^2$ in matrično funkcijo

$$
\begin{aligned}
M : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R})_{\text{simetrične, pozitivno definitne}} \\
(u, v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)}.
\end{aligned}
$$

Zanimivo vprašanje se glasi: Ali lahko to funkcijo realiziramo v vloženi mnogoterosti? Odgovor je da (ampak lokalno, ker bi lahko prišlo do problemov s samopresečišči).

2.3 Ukrivljenost

2.3.1 Druga fundamentalna forma

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$. Intuitivno je ukrivljenost ploskve X v točki $r(u, v) = m \in X$ 'hitrost' oddaljevanja X od tangentne ravnine $T_m X$. Naj bo n normala na ravnino

$T_m X$ v točki m. Naj bo točka $r(u', v') = r(u + \Delta u, v + \Delta v)$ blizu točke $m = r(u, v)$. Izmeriti hočemo razdaljo od točke $r(u', v')$ do $T_m X$. Dobimo

$$d = \langle n, r(u', v') - r(u, v)\rangle.$$

Ker sta spremembi Δu in Δv majhni, naredimo Taylorjev razvoj, ter izrazimo

$$r(u', v') - r(u, v) = r_u \Delta u + r_v \Delta v + \frac{1}{2}\left(r_{uu}(\Delta u)^2 + 2r_{uv}\Delta u \Delta v + r_{vv}(\Delta v)^2\right) + \dots$$

Ker vemo tudi, da je normala pravokotna na vektorja r_u in r_v, lahko zapišemo

$$d = \langle n, r(u', v') - r(u, v)\rangle \approx \underbrace{\langle r_u, n\rangle}_{0} \Delta u + \underbrace{\langle r_v, n\rangle}_{0} \Delta v + \frac{1}{2}\left(\langle r_{uu}, n\rangle(\Delta u)^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle \Delta u \Delta v + \langle r_{vv}, n\rangle(\Delta v)^2\right).$$

oziroma

$$d \approx \frac{1}{2}\left(\langle r_{uu}, n\rangle(\Delta u)^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle \Delta u \Delta v + \langle r_{vv}, n\rangle(\Delta v)^2\right).$$

Zdaj lahko smiselno definiramo drugo fundamentalno formo ploskve.

Definicija 2.22. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$. Druga fundamentalna forma X v točki $m = r(u, v)$ je podana z matriko

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix},$$

kjer so $L, M, N : V \to \mathbb{R}$ funkcije s predpisi

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \langle r_{uu}(u, v), n(u, v)\rangle \\ M(u, v) &= \langle r_{uv}(u, v), n(u, v)\rangle \\ N(u, v) &= \langle r_{vv}(u, v), n(u, v)\rangle \end{aligned}$$

Opomba. Za drugo fundamentalno formo je res nujen skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$ (za razliko od prve fundamentalne forme, ki v vsaki točki določa drug skalarni produkt).

Razmislili smo že, da velja ocena razdalje

$$d \approx \begin{pmatrix} \Delta u & \Delta v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u,v)} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Od te točke naprej predpostavljamo, da so vse krivulje naravno parametrizirane. Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ gladka krivulja. Spomnimo se definicije fleksijske ukrivljenosti krivulje , velja $\kappa(t) = ||\ddot{\gamma}(t)||$. V nadaljevanju bomo razdelili vektor pospeška na geodetsko in normalno komponentno, torej

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_g(t) + \ddot{\gamma}_n(t).$$

Zato najprej definirajmo geodetsko in normalno ukrivljenost krivulje.

Definicija 2.23. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ in naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ gladka krivulja. Definirajmo normalo na krivuljo γ

$$n_\gamma(t) = \frac{r_u(u(t), v(t)) \times r_v(u(t), v(t))}{||r_u(u(t), v(t)) \times r_v(u(t), v(t))||}.$$

Potem definiramo normalno in geodetsko ukrivljenost krivulje γ kot

$$\begin{aligned}\kappa_n(t) &= \langle \ddot{\gamma}(t), n_\gamma(t)\rangle,\\ \kappa_g(t) &= \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \times n_\gamma(t)\rangle.\end{aligned}$$

Zdaj si poglejmo, kako se izraža normalna ukrivljenost krivulje s pomočjo druge fundamentalne forme.

Izrek 2.24.

Naj bo $\gamma : [a,b] \to X$ gladka krivulja, podana s parametrizacijo $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Tedaj lahko njeno normalno ukrivljenost izračunamo po formuli

$$\kappa_n(t) = \begin{pmatrix}\dot{u}(t) & \dot{v}(t)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix}\dot{u}(t) \\ \dot{v}(t)\end{pmatrix}.$$

Dokaz: Najprej zapišemo prva dva odvoda

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= r_u \dot{u} + r_v \dot{v},\\ \ddot{\gamma}(t) &= \ddot{u} r_u + \ddot{v} r_v + r_{uu}\dot{u}^2 + 2r_{uv}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2.\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned}\kappa_n = \langle \ddot{\gamma}, n\rangle &= \langle r_{uu}, n\rangle \dot{u}^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle \dot{u}\dot{v} + \langle r_{vv}, n\rangle \dot{v}^2\\ &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + F\dot{v}^2\\ &= \begin{pmatrix}\dot{u} & \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\dot{u} \\ \dot{v}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Vsako funkcijo normalne ukrivljenosti lahko razširimo na tangentno ravnino na naslednji način.

Definicija 2.25. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ in naj bo $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ II-forma ploskve X glede na r. Naj bo $r(u_0, v_0) = m \in X$. Vemo, da je $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$ baza za tangetno ravnino $T_m X$, zato lahko vsak vektor v njej enolično zapišemo v obliki $\xi r_u(u_0, v_0) + \eta r_v(u_0, v_0)$. Potem obstaja funkcija

$$\begin{gathered}\kappa_n : T_m X \longrightarrow \mathbb{R}\\ \kappa_n(\xi r_u(u_0, v_0) + \eta r_v(u_0, v_0)) =: \kappa_n(\xi, \eta) = \begin{pmatrix}\xi & \eta\end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(r(u_0,v_0))} \begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}\end{gathered}$$

Opomba. Če je $(\xi, \eta) = (\dot{u}, \dot{v})$ in je γ naravno parametriziana krivulja, potem par (ξ, η) leži na enotski krožnici v ravnini $T_m X$. V $\mathbb{R}^3$ je to res običajna krožnica glede na evklidski skalarni produkt, v koordinatah (ξ, η) pa jo določa enačba

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1.$$

Definicija 2.26. Ekstrema funkcije $\kappa_n : T_m X \to \mathbb{R}$, skrčene na enotsko sfero $E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$, imenujemo glavni ukrivljenosti ploskve X v točki m. Označimo ju s κ_1 in κ_2.

Opomba. Ali minimum označimo s κ_1 ali κ_2, je stvar dogovora. Ekstrema obstajata, ker je krožnica kompakt, torej ima zvezna funkcija κ_n na njej minimum in maksimum.

Definicija 2.27. Tangetna vektorja $\xi_1 r_u + \eta_1 r_v$, $\xi_2 r_u + \eta_2 r_v \in T_m X$, ki sta (različna) ekstrema funkcije κ_n, se imenujeta glavni smeri.

Opomba. Kmalu bomo dokazali, da sta glavni smeri res kvečjem dve, zato je takšna definicija upravičena (če bi bila κ_n poljubna zvezna funkcija, bi lahko imela več ekstremov).

Definicija 2.28. Gaussova ukrivljenost ploskve X v točki m je podana s produktom

$$\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m).$$

Opomba. Izkazalo se bo, da je Gaussova ukrivljenost izometrična varianta in da je tesno povezana z Eulerjevo karakteristiko.

Definicija 2.29. Povprečna ukrivljenost ploskve X v točki m je podana s formulo

$$H(m) = \frac{1}{2}(\kappa_1(m) + \kappa_2(m)).$$

Z naslednjim izrekom bomo utemeljili, da sta glavni ukrivljenosti res kvečjem dve.

Izrek 2.30.

Glavni ukrivljenosti sta ničli kvadratne enačbe

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}\right) = 0.$$

Dokaz: Ekstrema λ_1, λ_2 sta vezana ekstrema za funkcijo $\kappa_n : T_m X \to \mathbb{R}$. Zaradi homeomorfizma $T_m X \approx \mathbb{R}^2$ lahko identificiramo elemente $T_m X$ s pari (ξ, η). Naša krožnica je določena z vezjo $||(\xi, \eta)|| = 1$. Torej iščemo ekstreme funkcije

$$\kappa_n(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$$

pri vezi

$$g(\xi, \eta) = ||(\xi, \eta)|| = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1.$$

Zdaj se s pomočjo analize 2 spomnimo, da se vezane ekstreme išče s pomočjo Lagrangeeve funkcije

$$\kappa_n(\xi, \eta) - \lambda g(\xi, \eta).$$

Da bo skalar λ določal ekstrem, mora veljati zveza

$$\operatorname{grad}(\kappa_n(\xi, \eta) - \lambda g(\xi, \eta)) = 0.$$

Zaradi linearnosti gradienta je to ekvivalentno zvezi

$$\operatorname{grad}(\kappa_n(\xi, \eta)) - \lambda \operatorname{grad}(g(\xi, \eta)) = 0.$$

Zdaj poračunamo gradienta, da dobimo

$$\operatorname{grad}(\kappa_n(\xi, \eta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \kappa_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad}(g(\xi, \eta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Torej rešujemo enačbo

$$\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta enačba ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Denimo, da imamo neki rešitvi λ_1, λ_2. Potem obstajata vektorja $(\xi_1, \eta_1)^T$, $(\xi_2, \eta_2)^T$, da je za $i = 1, 2$

$$\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Če vzamemo enotska vektorja $(\xi_1, \eta_1)^T$, $(\xi_2, \eta_2)^T$, in množimo i-to zgornjo enačbo z leve z (ξ_i, η_i), dobimo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \xi_i & \eta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}}_{\kappa_n(\xi,\eta)} - \lambda_i \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_i & \eta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}}_{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desni člen je enak 1, ker smo izbrali enotska vektorja glede na skalarni produkt, porojen s to matriko. Preostaneta nam torej enačbi

$$\kappa_n(\xi_i, \eta_i) = \lambda_i, \quad i = 1, 2.$$

Točki (ξ_i, η_i) sta vezana ekstrema funkcije κ_n pri vezi $g = 1$. Torej sta to ničli kvadratnega polinoma

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Definicija 2.31. Posplošeni lastni problem ali relativni lastni problem je lastni problem oblike

$$A(\vec{v}) = \lambda B(\vec{v}).$$

Če je $B = I$, potem dobimo običajni lasntni problem

$$A(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Iz dokaza prejšnjega izreka je razvidno, da sta κ_1 in κ_2 lastni vrednosti martrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

glavni smeri $(\xi_1, \eta_1)^T$, $(\xi_2, \eta_2)^T$ pa sta njena lastna vektorja.

Izrek 2.32.

Za Gaussovo ukrivljenost $\kappa : X \to \mathbb{R}$ velja zveza

$$\kappa(m) = \frac{(LN - M^2)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

Dokaz: Po definiciji je $\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m)$. Razmislili smo že, da sta glavni ukrivljenosti lastni vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)},$$

torej bo njun produkt (ki je natanko Gaussova ukrivljenost) enak njeni determinanti. Torej

$$\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m) = \det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) = \frac{(LN - M^2)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

□

Izrek 2.33.

Za povprečno ukrivljenost velja zveza

$$H(m) = \frac{1}{2}\frac{(LF - 2MF + NE)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

Dokaz: Podobno kot v prejšnjem dokazu uporabimo dejstvo, da sta glavni ukrivljenosti lastni vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)},$$

kar pomeni, da bo njuna vsota enaka sledi te matrike. Imamo torej

$$\begin{aligned} H(m) = \frac{1}{2}(\kappa_1(m) + \kappa_2(m)) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)(m)}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}_{(m)} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)(m)}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} LG - MF & * \\ * & -MF + NE \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(LF - 2MF + NE)(m)}{(EG - F^2)(m)}. \end{aligned}$$

□

Opomba. Zgornja izreka bi lahko dokazali drugače z uporabo dejstva, da imata polinoma $ax^2 + bx + c$ in $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ isti ničli. Glavni ukrivljenosti sta ničli kvadratne enačbe

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = \det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Po Vietovih pravilih pa vemo, da je produkt ničel enak konstantnemu koeficientu polinoma. Torej imamo

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{c}{a}.$$

Očitno velja, da je

$$p(0) = c = \det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Po drugi stani pa lahko dobimo

$$a = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda^2}p(\lambda) = \ldots = \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Torej bo res

$$\kappa = \kappa_1\kappa_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}\frac{LF - 2MF + NE}{EG - F^2}.$$

Izrek 2.34.

Glavni smeri $(\xi_1, \eta_1)^T_{(m)}$, $(\xi_2, \eta_2)^T_{(m)}$ sta si pravokotni v $T_m X$.

Dokaz: Dokaz poteka prek sklepa o sebi adjungiranosti preslikave

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Najprej za večjo preglednost vpeljimo nove oznake

$$A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = A^{-1}B.$$

Ker vemo, da za sebi adjungirane preslikave (ki imajo različne lastne vektorje) velja, da morajo biti ti med seboj pravokotni, je dovolj dokazati sebi adjungiranost preslikave C. Torej za vsaka vektroja $\vec{v}, \vec{w} \in T_m X$ dokazujemo

$$\langle C\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, C^* \vec{w} \rangle.$$

Pri tem se zavedajmo, da je za poljubna vektorja skalarni produkt določen s pomočjo 1. fundamentalne forme. V bazi $\{r_u, r_v\}$ je podan z

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^T A \vec{w}.$$

Torej imamo za vsaka $\vec{v}, \vec{w} \in T_m X$ enačbi

$$\begin{aligned} \langle C\vec{v}, \vec{w} \rangle &= (C\vec{v})^T A \vec{w} = \vec{v}^T C^T A \vec{w}, \\ \langle \vec{v}, C^* \vec{w} \rangle &= \vec{v}^T A C^* \vec{w}. \end{aligned}$$

To pomeni, je zahtevi $C = C^*$ ekvivalentno $C^T A = AC^*$, oziroma $C^T A = AC$, kar pokažemo z računom

$$C^T A = (A^{-1}B)^T A = B^T A^{-T} A = BA^{-1}A = B = AA^{-1}B = AC.$$

□

2.3.2 Interpretacija glavne ukrivljenosti

Intuitivno je ukrivljenost krivulje hitrost spreminjanja tangente. Hkrati pa velja, da čimbolj je krivulja ukrivljena, tem hitreje normala spreminja smer. Podoben pojav lahko opazujemo tudi na ploskvah, bolj kot je ploskev ukrivljena, hitreje se spreminja normala. Naj to torej točka $m \in X$, ter $U \subseteq X$ njena okolica, difeomorfna disku. Poglejmo si, kaj se dogaja z normalo po točkah U.

Definicija 2.35. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev. Preslikava

$$\begin{aligned} \tilde{n} : X &\longrightarrow S^2 \\ m &\longmapsto n(m) \in (T_m X)^\perp; ||n(m)|| = 1, \end{aligned}$$

se imenuje Gaussova preslikava.

Povprečno intenzivnost spreminjanja normale na U lahko merimo s kvocientnom površin

$$\frac{A(\tilde{n}(U))}{A(U)},$$

kjer je $A(U)$ ploščina okolice $U \subseteq X$, $A(\tilde{n}(U))$ pa je ploščina slike

$$\tilde{n} : U \subseteq X \to \tilde{n}_*(U) \subseteq S^2.$$

Množica $\tilde{n}_*(U)$ je podmnožica enotske sfere S^2.

Predpostavimo, da je preslikava r

$$\begin{tikzcd} r : V \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "n"'] & U \subseteq X \arrow[r, "\tilde{n}"] & \tilde{n}_*(U) \subseteq S^2 \end{tikzcd}$$

parametrizacija ploskve $\tilde{n}_*(U) \subseteq S^2$. Po definiciji površine ploskve veljata izraza

$$A(U) = \int_V ||r_u \times r_v||\, du\, dv,$$
$$A(\tilde{n}_*(U)) = \int_V ||n_u \times n_v||\, du\, dv.$$

Vemo tudi, da velja

$$||n_u \times n_v|| = \sqrt{\langle n_u \times n_v, n_u \times n_v \rangle},$$

hkrati pa velja tudi

$$||n_u \times n_v|| = \langle n, n_u \times n_v \rangle = \langle \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}, n_u \times n_v \rangle. \tag{1}$$

Iz enačbe (1) sledi po Lagrangevem pravilu za dvojni vektorski produkt še

$$||n_u \times n_v|| = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\langle r_u, n_u \rangle \langle r_v, n_v \rangle - \langle r_u, n_v \rangle \langle r_v, n_u \rangle). \tag{2}$$

Če zdaj enačbo $\langle r_u, n \rangle = 0$ paricalno odvajamo po u, dobimo

$$\langle r_{uu}, n \rangle + \langle r_u, n_u \rangle = 0 \implies \langle r_u, n_u \rangle = -L,$$

če pa jo odvajamo po v, dobimo

$$\langle r_{uv}, n \rangle + \langle r_u, n_v \rangle = 0 \implies \langle r_u, n_v \rangle = -M$$

Podobno z odvajanjem enačbe $\langle r_v, n \rangle = 0$ dobimo preostali dve enačbi

$$\langle r_v, n_u \rangle = -M,$$
$$\langle r_v, n_v \rangle = -N.$$

Od tod pa iz enačbe (2) sledi

$$||n_u \times n_v|| = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

S pomočjo te izražave lahko zapišemo

$$\frac{A(\tilde{n}(U))}{A(U)} = \frac{\int_V ||n_u \times n_v||\, du\, dv}{\int_V ||r_u \times r_v||\, du\, dv} = \frac{\int_V \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}\, du\, dv}{\int_V \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}.$$

Od tod pa s pomočjo izreka o povprečni vrednosti in zveznosti funkcij dobimo, da je

$$\lim_{V \to (u_0, v_0)} \frac{A(\tilde{n}(U))}{A(U)} = \frac{(LN - M^2)(m)}{(EG - F^2)(m)} = \kappa(m).$$

2.4 Ploščate ploskve

Definicija 2.36. Ploskev X je ploščata, če je njena Gaussova ukrivljenost $\kappa = 0$.

Izrek 2.37.

Ploskev X je ploščata, če je del valja ali tangentno premonosne krivulje ploskve.

Posledica 2.38. *Ploskev X je ploščata natanko tedaj, ko je izometrična kosu ravnine.*

Za dokaz tega izreka bomo potrebovali naslednji dve lemi.

Lema 2.39. *Naj bo X poljubna poskev. Tedaj obstaja za X parametrizacija $s : V \to X$, za katero velja, da obstajata funkciji $\lambda(u,v), \mu(u,v) : V \to \mathbb{R}$, za kateri velja*

- $s_u(u,v) = \lambda(u,v)e_1(u,v)$,
- $s_v(u,v) = \mu(u,v)e_2(u,v)$.

Preslikavi $e_1, e_2 : V \to TX$ označujeta glavni smeri ploskve X glede na parametrizacijo s.

Dokaz: Naj bo $s : V_1 \to X$ parametrizacija ploskve X. Iskano parametrizacijo bomo dobili kot reparametrizacijo s. Lokalno lahko parametrizacijo $s = s(u,v); (u,v) \in V_1$ podamo kot parametrizacijo $s(u,v) = s(\xi,\eta); (\xi,\eta) \in V$. To nam poda funkciji $s(u,v) = s(\xi(u,v), \eta(u,v))$ ter $s(\xi,\eta) = s(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$. Iz prve enačbe po verižnem pravilu dobimo

$$\begin{aligned} s_u &= \frac{\partial \xi}{\partial u} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u} s_\eta, \\ s_v &= \frac{\partial \xi}{\partial v} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v} s_\eta. \end{aligned}$$

Zdaj zapišemo glavni smeri kot linearni kombinaciji vektorjev s_u in s_v.

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha s_u + \beta s_v, \\ e_2 &= \gamma s_u + \delta s_v. \end{aligned}$$

V ti kombinaciji vstavimo izražavi s_u in s_v, da dobimo

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u} s_\eta \right) + \beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v} s_\eta \right), \\ e_2 &= \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u} s_\eta \right) + \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v} s_\eta \right). \end{aligned}$$

Od tod izrazimo glavni smeri kot lineani kombianciji vektorjev s_ξ, s_η.

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta \right) s_\xi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial v}\beta \right) s_\eta, \\ e_2 &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\gamma + \frac{\partial \xi}{\partial v}\delta \right) s_\xi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma + \frac{\partial \eta}{\partial v}\delta \right) s_\eta. \end{aligned}$$

To lahko bolj kompaktno zapišemo kot

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zdaj se vprašamo, ali res potrebujemo funkciji λ, η? Če bi obstajala parametrizacija s, za katero bi veljalo $s_\xi = e_1$, $s_\eta = e_2$, potem bi veljalo

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \cdot s_\xi + 0 \cdot s_\eta, \\ e_2 &= 0 \cdot s_\xi + 1 \cdot s_\eta. \end{aligned}$$

Torej bi morala biti v bazi $\{s_\xi, s_\eta\}$ e_1 in e_2 standardna enotska vektorja, torej

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To lahko zapišemo z eno samo enačbo kot

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označimo sedaj

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1},$$

da dobimo pogoj

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Vrstici leve matrike sta gradienta funkcij ξ in η.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \xi(u,v) &= (A(u,v), C(u,v)), \\ \operatorname{grad} \eta(u,v) &= (B(u,v), D(u,v)). \end{aligned}$$

Od tod pa očitno sledi, da morata biti polji $(A(u,v), C(u,v))$ in $(B(u,v), D(u,v))$ potencialni, kar v splošnem ni res. Zato moramo zahtevo $s_\xi = e_1$, $s_\eta = e_2$ omejiti na $s_\xi = \lambda e_1$, $s_\eta = \mu e_2$. Tako dobimo pogoj

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Tako imamo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} A & \frac{1}{\lambda} C \\ \frac{1}{\mu} B & \frac{1}{\mu} D \end{pmatrix}.$$

Zato lahko (po izreku iz analize 3??) najdemo taki funkciji λ, μ, da bo veljalo

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \xi(u,v) &= \frac{1}{\lambda(u,v)} (A(u,v), C(u,v)), \\ \operatorname{grad} \eta(u,v) &= \frac{1}{\mu(u,v)} (B(u,v), D(u,v)). \end{aligned}$$

□

Lema 2.40. *Naj bo X premonosna ploskev, podana s krivuljo $\gamma(u)$ in vektorskim poljem $a(u)$ vzdolž krivulje $\gamma(u)$. Ploskev X je tangetno premonosna natanko tedaj, ko velja pogoj na mešani produkt*

$$[\gamma'(u), a(u), a'(u)] = 0.$$

Dokaz: Dokazati je treba samo implikacijo v desno smer. Naj bo X tangentno premonosna ploskev z naravno parametrizacijo

$$r(u,v) = \gamma(u) + v a(u).$$

Dokazati moramo, da obstaja funkcija ρ v X, za katero velja

$$\rho'(u) = g(u) a(u).$$

Ker bi morala krivulja $\rho(u)$ ležati v premonosni ploskvi X, bi morala obstajati neka funkcija f, za katero bi veljalo

$$\rho(u) = \gamma(u) + f(u) a(u).$$

Torej bo funkcija ρ obstajala, če obstajata funkciji f in g, da velja naslednji pogoj

$$\rho' = \gamma' + f'a + fa' = (g - f')a - fa'.$$

Iz pogoja na mešani produkt vemo, da so vektorji γ', a, a' koplanarni. Zato lahko γ' izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh, torej obstajata funkciji α, β, da velja

$$\gamma' = \alpha a + \beta a'.$$

Rešitev zgornjih dveh sistemov enačb sta funkciji

$$f = -\beta,$$
$$g = \alpha + \beta',$$

kar pomeni, da funkcija ρ obstaja, torej je X res tangentno premonosna ploskev. □

Opomba. V zgornjem dokazu bi lahko namesto

$$r(u,v) = \gamma(u) + v\alpha(u)$$

pisali

$$r(u,v) = \gamma(u) + \lambda(v)\alpha(u)$$

za neko monotono funkcijo λ. Monotonost bi privzeli zato, da bi dobili smiselno parametrizacijo.

Zdaj se lotimo še dokaza izreka.

Dokaz izreka : Predpostavimo, da za vsak $m \in X$ velja $\kappa(m) = 0$, kar brez škode za splošnost implicira $\kappa_2(m) = 0$. Če bi bila za vsak $m \in X$ povprečna vrednost $H(m) = 0$ je X ravnina. Predpostavimo torej, da obstaja $k \in X$, da je $H(k) \neq 0$. Po lemi vemo, da obstaja parametrizacija $r(u,v) : V \to X$, za katero velja $r_u = \lambda e_1$, $r_v = \mu e_2$. Za takšno parametrizacijo velja $\langle r_u, r_v \rangle = \lambda\mu\langle e_1, e_2\rangle$, torej bo prva fundamentalna forma te parametrizacije enaka

$$I = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Vemo pa tudi, da sta glavni ukrivljenosti rešitvi enačb

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

V našem primeru je za $i = 2$

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = 0 \implies LN - M^2 = 0.$$

Spomnimo se, da je normalna ukrivljenost podana s predpisom

$$\kappa_n(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta, \end{pmatrix}$$

v naši parametrizaciji pa je smer, ki pripada glavni ukrivljenosti κ_2 v bazi $\{r_u, r_v\}$ podana z $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix}^T$. Velja torej

$$\kappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha, \end{pmatrix} = N\alpha^2.$$

Ker lahko izberemo neničelen α, to pomeni, da je $N = 0$. Iz pogoja $LN - M^2 = 0$ dobimo še $M = 0$, torej za našo parametrizacijo X velja

$$II = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zdaj

□