Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

6. februar 2024

Uvod

Skripta je napisana po predavanjih iz študijskega leta 2023/24, ki jih je izvajal profesor Pavle Saksida.

Zahvala

Zahvaljujem se sošolcema Mariji Jezeršek in Janu Maleju za številne pomembne popravke in pripombe.

1 Mnogoterosti

Definicija 1.1. Topološki prostor M je n-dimenzionalna mnogoterost, če za vsak $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subseteq M$ in homeomorfizem $\varphi : U \to V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$, pri čemer je $V \approx B^n$.

Primer 1.2. *Naslednje množice so primeri mnogoterosti.*
1. $M = \mathbb{R}^n$ *je n-dimenzionalna mnogoterost,*
2. S^1 *je* 1*-dimenzionalna mnogoterost,*
3. $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \middle| \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je n-dimenzionalna mnogoterost,*
4. *Projektivni prostori* $\mathbb{R}P^n = B^n /_{\sim}$*, kjer je* $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$ *so n-dimenzionalne mnogoterosti.*
5. *Grupa*
$$\mathrm{SU}\,(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det A = 1 \right\}$$
je 3*-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč* $\mathrm{SU}\,(2) = S^3$*. To je primer Lijeve grupe.*
6. *Grupa*
$$\mathrm{SO}\,(3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| A^T = A^{-1}, \det A = 1 \right\}.$$
Izkaže se, da je $\mathrm{SO}\,(3) = B^3 /_{\sim} = \mathbb{R}P^3$*. To velja, ker vsaka preslikava iz* $\mathrm{SO}\,(3)$ *predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota π in $-\pi$ predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli* $B\,(0, \pi)^3 \approx B^3$ *priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projektivni prostor* $\mathbb{R}P^3$*.*

1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

Definicija 1.3. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je odvedljiva v točki $w \in W$, če obstaja linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in preslikava $\mathcal{O} : W \to \mathbb{R}^m$, da za vse dovolj majhne h velja
$$F\,(w + h) = F\,(w) + Ah + \mathcal{O}\,(h)$$
in $\lim_{h \to 0} \frac{||\mathcal{O}(h)||}{||h||} = 0$. Odvod preslikave F v točki w je preslikava $A =: D_w F = (DF)_w$.

Definicija 1.4. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je odvedljiva na množici W, če je odvedljiva v vsaki točki $w \in W$.

Definicija 1.5. Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

Definicija 1.6. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Družina parov
$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\},$$
je gladek atlas na M, če za vsak $\alpha \in A$ velja:
1. $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$

2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem na množico $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, $V_\alpha \approx B^n$
3. $\{U_\alpha | \, \alpha \in A\}$ je pokritje M
4. za vsaka $\alpha, \beta \in A$ je preslikava $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \to (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$ difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave $g_{\alpha\beta}$ k-difeomorfizmi z zveznim k-tim odvodom, imamo $\mathcal{C}^k$-atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo $\mathcal{C}^\infty$-atlas, če so vse analitične, pa $\mathcal{C}^\omega$-atlas.

Opomba. Preslikava $g_{\alpha\beta}$ iz prejšnje definicije je preslikava med evklidskima prostoroma $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na $\mathbb{R}^n$ matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w .$$

Definicija 1.7. Topološka mnogoterost M, ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti $M \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.8. Naj bo M gladka n-dimenzionalna mnogoterost. Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ je gladka, če je gladka vsaka preslikava $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.9. Naj bo $(M, \mathcal{U})$ gladka mnogoterost. Krivulja $\gamma : (a, b) \to M$ je gladka krivulja v M, če za $\forall \alpha \in A$ velja, da je $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka krivulja v $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.10. Atlasa $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \, \alpha \in A\}$ in $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \psi_\beta) | \, \beta \in B\}$ na mnogoterosti M sta ekvivalentna, če za vsak par $(\alpha, \beta) \in A \times B$ iz $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to (\psi_\beta)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

Opomba. Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa $\mathcal{U}$ označimo z $[\mathcal{U}]$.

Definicija 1.11. Naj bo M topološka mnogoterost in $\mathcal{U}$ gladek atlas na M. Potem je $[\mathcal{U}]$ gladka struktura na M.

Opomba. Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima $\mathbb{R}^4$ neštevno neskončno eksotičnih gladkih struktur, za vse ostale n pa ima $\mathbb{R}^n$ zgolj svojo trivialno struturo in nobene eksotične.

2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženimi v prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.1. Množica $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je gladka vložena ploskev, če za vsako točko $m \in X$ obstaja krogla $W \ni m \subseteq \mathbb{R}^3$ ter gladka funkcija $f : W \to \mathbb{R}$, za katero velja

1. $X \cap W = f^* (\{0\})$,
2. $D_w f \neq 0$ za vsak $w \in X \cap W$.

Vložena ploskev $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na X. Vzemimo točko $m \in X$. Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica $f : W \ni m \to \mathbb{R}$, za katero po drugi točki definicije vemo, da $D_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(m) \neq 0$. Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo $m = (x_0, y_0, z_0)$ in BŠS naj bo $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$. Torej obstaja gladka okolica $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ in gladka funkcija $g : V \to \mathbb{R}$, da velja $f (x, y, g (x, y)) = 0$ za vsak $(x, y) \in V$. Po potrebi lahko množico W zmanjšamo na $W_0 \subseteq W$, da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g (x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) . \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo $U = W_0 \cap X$, postane par (U, φ) karta na X.

2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo – metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo $\gamma : (a, b) \to M$, je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L} (\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma} (t)|| \, dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neki – ne nujno običajni – skalarni produkt na $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ in naj bo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza za $\mathcal{V}$, ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ in $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_i \rangle > 0$) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

Opomba. Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna, L_e matrika linearne preslikave $\mathcal{L}$ glede na bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, L_f pa glede na bazo $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Naj bo P prehodna preslikava iz baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ v bazo $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = PL_eP^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta $a_f = Pa_e$ in $b_f = Pb_e$. Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned} \langle a_f, b_f \rangle &= \langle a_e, b_e \rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $P^T A_f P = A_e$ oziroma v primeru ortogonalnosti P ekvivalentno

$$A_f = PA_eP^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.

Preden se lotimo definicije tangentne ravnine, se spomnimo naslednje definicije.

Definicija 2.2. Naj bo preslikava $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva. Rang preslikave F v točki $w \in W$ je enak rangu matrike D_wF. Pravimo, da ima F v točki $w \in W$ maksimalen rang, če ima matrika D_wF maksimalen rang.

Definicija 2.3. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ vložena ploskev in točka $m \in X$. Tangentna ravnina T_mX je množica tangent vseh krivulj v X, ki v času $t = 0$ gredo skozi m.

$$T_mX = \left\{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ krivulja, } \gamma(0) = m\right\}$$

Trditev 2.4. *T_mX je dvodimenzionalen realen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.*

Dokaz: Naj bo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ neka regularna parametrizacija ploskve X (to pomeni, da mora biti rang preslikave r maksimalen, torej konstantno enak 2) v okolici točke $m \in X$. Označimo za vsak $(u, v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Naj bo $m = r(u_0, v_0)$. Trdimo, da je $T_mX = \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Najprej dokažimo inkluzijo $T_mX \subseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Naj bo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = m$ poljubna krivulja. Direktno po definiciji tangentne krivulje sledi $\dot{\gamma}(0) \in T_mX$. Dokazati moramo $\dot{\gamma}(0) \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Naj bo $\beta(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ podana z $\beta(t) = r^{-1}(\gamma(t))$. Ker je praslika preslikave β vsebovana v $\mathbb{R}^2$, obstajata funkciji $u(t), v(t)$, da je $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Pri tem velja, da je $\beta(0) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$. Vidimo, da je $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Po verižnem pravilu za odvajanje imamo

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \left(D_{(u_0,v_0)}r\right)\dot{\beta}(0).$$

Torej je $\dot{\gamma}(0) \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$.

Nato dokažimo še obratno inkluzijo $T_mX \supseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Vzemimo poljuben vektor $w \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $v = \left(D_{(u_0,v_0)}r\right)w$. Potrebujemo krivuljo $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X, \gamma(0) = m$, za katero bo veljalo $\dot{\gamma}(0) = v$. Definirajmo funkcijo $\beta(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$, s predpisom $\beta(t) = wt + (u_0, v_0)$. Trdimo, da za $\gamma(t) = r(\beta(t))$ velja $\dot{\gamma}(0) \in T_mX$. Oglejmo si

$$\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)\dot{\beta}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}r(\beta(t)).$$

Ker je $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, hkrati pa tudi $\gamma(0) = r(\beta(0)) = r(u_0, v_0) = m$, je po definiciji tangentnega prostora $\dot{\gamma}(t) \in T_mX$. Torej velja, da je $T_mX = \operatorname{im}(D_{(u_0,v_0)}r)$. Ker smo zahtevali, da je parametrizacija regularna, je matrika $D_{(u_0,v_0)}r$ ranga 2, torej je T_mX dvodimenzionalen vektorski prostor. $\square$

Opomba. Tangentna ravnina je pravi vektorski prostor in ne afin kot recimo pri analizi 2a.

Do nadaljnjega nas bodo zanimale lokalne lastnosti ploskev, zato bomo delali v glavnem s ploskvami, ki jih lahko pokrijemo z eno samo karto oziroma z eno samo parametrizacijo.

Definicija 2.5. Metrika na ploskvi $X \subseteq \mathbb{R}^3$, opremljeni s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, je preslikava

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \\ m &\longmapsto \begin{pmatrix} g_{11}(m) & g_{12}(m) \\ g_{21}(m) & g_{22}(m) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle_g(m) & \langle r_u, r_v \rangle_g(m) \\ \langle r_u, r_v \rangle_g(m) & \langle r_v, r_v \rangle_g(m) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kjer je za vsak $m \in X$ matrika $g(m)$ simetrična in pozitivno definitna. Ta pogoj lahko povemo z enačbami $g_{12}(m) = g_{21}(m)$, $\det g(m) > 0$ in $g_{11}(m) > 0$.

Opomba. Za kakšno drugo parametrizacijo ploskve X bi dobili druge koeficiente matrike.

Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ krivulja. Njeno parametrizacijo r lahko napišemo v obliki $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ za primerne funkcije $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $\gamma(t) = r(\beta(t))$. V koordinatah lahko zapišemo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} r(\beta(t)) = (D_{(u_0,v_0)}r)(\dot{\beta}(t_0)) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} \dot{u}(t_0) \\ \dot{v}(t_0) \end{pmatrix} = r_u(u_0, v_0)\dot{u}(t_0) + r_v(u_0, v_0)\dot{v}(t_0).$$

To je razvoj vektorja $\dot{\gamma}(t_0)$ po bazi $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$ prostora $T_{\gamma(t_0)}X$, ki pa ni nujno ortogonalna. Pravzaprav je ortogonalna le v precej posebnih primerih.

Definicija 2.6. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev ter $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ njena parametrizacija. Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ krivulja, ki ji pripadata funkciji $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, tako da velja

$$\gamma(t) = r(u(t), v(t)).$$

Dolžina krivulje γ glede na metriko g je v parametrizaciji r podana s formulo

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt$$

Ustrezni skalarni produkti na ravnini T_mX so glede na parametrizacijo r podani s predpisi $\langle r_u, r_u \rangle_g = g_{11}$, $\langle r_u, r_v \rangle_g = g_{12}$, $\langle r_v, r_v \rangle_g = g_{22}$. Naj bo sedaj ambientni prostor $\mathbb{R}^3$ opremljen s fiksnim evklidskim skalarnim produktom, in koeficiente g_{ij} poračunamo z njim (na enak način kot prej). Pri tem uporabimo naslednje standardne oznake:

$$E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle.$$

Včasih tudi zlorabimo notacijo

$$E(m) = E(r(u, v)) = E(u, v).$$

Definicija 2.7. Metrika na $X \subseteq \mathbb{R}^2$, ki je glede na parametrizacijo $r : V \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ podana z matrično funkcijo

$$\begin{aligned} g_f : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (u,v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se imenuje prva fundamentalna forma ploskve.

Opomba. Dolžina krivulje glede na prvo fundamentalno formo $\mathcal{L}_{g_f}(\gamma)$ sovpada z običajno dolžino krivulje $\mathcal{L}(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\, dt &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, \dot{u}r_u + \dot{v}r_v \rangle}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_v \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt \\ &= \mathcal{L}_{g_f}(\gamma). \end{aligned}$$

Izomorfizmi v diferencialni geometriji so izometrije, katerih definicija pa je nekoliko drugačna, kot bi morda pričakovali.

Definicija 2.8. Preslikava $f : X \to \tilde{X}$ nad dvema ploskvama $X, \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^3$ je izometrija, če za vsako krivuljo $\gamma : [a,b] \to X$ velja enakost med dolžinama

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(f(\gamma)).$$

Opomba. Izometrije med ploskvama porodijo izometrije v običajnem metričnem smislu.

Primer 2.9. *Prva fundamentalna forma na sferi glede na sferične koordinate. Če odvzamemo iz S^2 en poldnevnik, jo lahko parametriziramo s sferičnimi koordinatami:*

$$r(u,v) : V = (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

s predpisom

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Potem dobimo parcialna odvoda

$$r_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \; r_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = \cos^2 u, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Primer 2.10. *Naj bo X rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če krivuljo $x = f(z)$ zavrtimo okoli osi z:*

$$r : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \\ u \end{pmatrix}.$$

Potem imamo odvoda

$$r_u(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u)\cos v \\ f'(u)\sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \; r_v(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u)\sin v \\ f(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f'(u)^2, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = f(u)^2, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Naslednji izrek nam pove povezavo med prvo fundamentalno formo in izometričnostjo ploskev.

Izrek 2.11.

Ploskvi X in $\tilde{X}$ sta izometrični natanko tedaj, ko obstaja par parametrizacij $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da za pripadajoči fundamentalni formi velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Dokaz: Pokažimo najprej obrat ($\Longleftarrow$). Recimo, da obstajata parametrizaciji $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Naj bo $f : X \to \tilde{X}$ podana s predpisom $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$. S primerjavo dolžini $\mathcal{L}_r(\gamma)$ ter $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma))$ hočemo preveriti, da je f izometrija . Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ poljubna krivulja. Potem obstaja krivulja $\beta : [\alpha, \beta] \to V$ za katero velja $\gamma(t) = r(\beta(t))$. Potem za $\tilde{\gamma}(t) := f(\gamma(t))$ velja

$$\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) = f(r(\beta(t))) = \tilde{r}(\beta(t)).$$

Ker je $\beta(t)$ ravninska krivulja, velja

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r(\beta(t)) = r(u(t), v(t)), \\ \tilde{\gamma}(t) &= \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Torej imamo enačbi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2}\, dt, \\ \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) &= \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u, v)\dot{u}^2 + 2\tilde{F}(u, v)\dot{u}\dot{v} + \tilde{G}(u, v)\dot{v}^2}\, dt. \end{aligned}$$

Ker so posamezni sumandi po predpostavki enaki, sta dolžini enaki, torej je $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$ res izometrija.

Zdaj dokažimo še ($\Longrightarrow$). Denimo, da imamo med ploskvama X in $\tilde{X}$ izometrijo $f : X \to \tilde{X}$. Naj bo $\gamma(t) : (0, \varepsilon) \to X$ krivulja s predpisom $\gamma(t) = r(\beta_1(t)) = r(u_0 + t, v_0)$. Pri tem je točka $(u_0, v_0) \in V$ poljubna in določa točko $p = r(u_0, v_0) \in X$. Zdaj izračunamo

$$\mathcal{L}_r(\gamma(t)) = \int_0^\varepsilon ||\dot{\gamma}(t)||\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle r_u(u_0+t, v_0), r_u(u_0+t, v_0)\rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0+t, v_0)}\, dt.$$

Sedaj si oglejmo $f(\gamma(t)) = \tilde{r}(\beta_1(t)) = \tilde{r}(u_0 + t, v_0)$. Potem imamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma(t))) &= \int_0^\varepsilon ||\dot{\tilde{\gamma}}(t)||\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \tilde{r}_u(u_0+t, v_0), \tilde{r}_u(u_0+t, v_0)\rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0+t, v_0)}\, dt.
\end{aligned}$$

Po predpostavki o izometričnosti velja

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_r(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma)) \\
\Longrightarrow \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0+t, v_0)}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0+t, v_0)}\, dt.
\end{gathered}$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstajata vrednosti $\hat{t}, \hat{\hat{t}} \in (0, \varepsilon)$, da velja

$$E(u_0 + \hat{t}, v_0)\varepsilon = \tilde{E}(u_0 + \hat{\hat{t}}, v_0)\varepsilon$$

in če pošljemo $\varepsilon \to 0$, zaradi zveznosti funkcij dobimo

$$E(u_0, v_0) = \tilde{E}(u_0, v_0).$$

Še lažje ta rezultat dobimo tako, da na obeh straneh odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$.

Če zdaj vzamemo $\beta_2(t) = (u_0, v_0 + t)$, dobimo po enakem postopku kot prej

$$G(u_0, v_0) = \tilde{G}(u_0, v_0).$$

Nato vzamemo $\beta_3(t) = (u_0 + t, v_0 + t)$ in imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0+t, v_0+t) + 2F(u_0+t, v_0+t) + G(u_0+t, v_0+t)}\, dt \\
= \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0+t, v_0+t) + 2\tilde{F}(u_0+t, v_0+t) + \tilde{G}(u_0+t, v_0+t)}\, dt.
\end{aligned}$$

Če zdaj zopet odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$, dobimo enakost integrandov v točki (u_0, v_0), od koder sledi še zadnja zahteva

$$F(u_0, v_0) = \tilde{F}(u_0, v_0).$$

□

Primer 2.12. *Ali je stožec brez ene tvorilke izometričen kosu ravnine? Naj bo podan*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 = z^2\right\}.$$

Parametriziramo ga z

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

in po znanem postopku dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Pričakujemo, da bo S izometričen nekemu krožnemu izseku v ravnini, ki ga parametriziramo z

$$\tilde{r}(u,v) = (\alpha u\cos(\beta v), \alpha u\sin(\beta v), 0).$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\beta^2 u^2 \end{pmatrix}.$$

Pogoj

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

je izpolnjen pri $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (če bi zamenjali predznake α in β, bi dobili drugačne parametrizacije). Torej je stožec S izometričen krožnemu izseku s parametrizaijo

$$\tilde{r}(u,v) = \left(\sqrt{2}u\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), \sqrt{2}u\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), 0\right).$$

Na tej točki se pojavi naravno vprašanje: ali znamo poiskati vse ploskve v $\mathbb{R}^3$, ki so izomertične ravnini? Izkaže se, da znamo, pred izrekom pa navedimo še definicijo tangentno premonosne ploskve.

Definicija 2.13. Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ prostorska krivulja, parametriziarana z naravnim parametrom. Tangentna premonosna ploskev, podana s krivuljo γ, je del prostora $\mathbb{R}^3$, ki ga opiše tangenta na $\gamma(u)$ na intervalu $u \in [a,b]$. Parametriziramo jo lahko s predpisom

$$r(u,v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u).$$

Izrek 2.14.

Naj bo ploskev X izometrična kakšnemu kosu ravnine. Potem je X bodisi stožec, valj, ali kakšna tangentna premonosna ploskev.

Da je plašč stožca izometričen kosu ravnine, smo že videli v primeru (za valj je to še bolj očitno). V nadaljevanju bomo pokazali, da enako velja tudi za tangentno premonosne ploskve. Dejstvo, da so to res edine tri možnosti, bomo privzeli brez dokaza.

Če je $\gamma = \gamma(u)$ naravna parametrizacija, potem je smiselna parametrizacija tangentno premonosne ploskve X podana z

$$r(u,v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u).$$

Ker je γ naravna parametrizacija, velja

$$||\dot{\gamma}(u)|| = \langle\dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u)\rangle = 1,$$

in z odvajanjem zveze dobimo

$$\langle\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u)\rangle + \langle\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u)\rangle = 0.$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta sledi

$$2\langle\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u)\rangle = 0 \implies \langle\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u)\rangle = 0.$$

Torej je pospešek pri naravni parametrizaciji vedno pravokoten na hitrost. To lahko opazimo, če se v avtu peljemo s konstantno hitrostjo. Pospešek bomo čutili samo v ovinkih in to pravokotno glede na smer vožnje.

Definicija 2.15. Fleksijska ukrivljenost naravno parametrizirane krivulje $\gamma(u)$ je podana s

$$\varkappa(u) = \sqrt{\langle \ddot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u) \rangle} = ||\ddot{\gamma}(u)||.$$

Izračunajmo prvo fundamentalno formo tangentno premonosne ploskve. Ker velja zveza

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u),$$

takoj dobimo S

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u), \\ r_v(u, v) &= \dot{\gamma}(u). \end{aligned}$$

Če od tod po znanem postopku poračunamo koeficiente prve fundamentalne forme (pri čemer upoštevamo, da je pospešek pravokoten na hitrost, torej $\langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 0$, ter naravnost parametrizacije, torej $\langle \dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 1$), dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \langle \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u) \rangle & \langle \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle \\ \langle \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle & \langle \dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2\varkappa^2(u) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidimo, da je matrika prve fundamentalne forme tangentno premonosne ploskve odvisna samo od fleksijske ukrivljenosti.

Trditev 2.16. *Naj bo podana poljubna zvezna funkcija* $\tilde{\varkappa} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. *Potem obstaja naravno parametrizirana ravninska krivulja* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, *katere fleksijska ukrivljenost v točki* $\gamma(u)$ *je enaka* $\varkappa(u) = \tilde{\varkappa}(u)$.

Dokaz: Ker je krivulja γ ravninska, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= (x(u), y(u)), \\ \dot{\gamma}(u) &= (\dot{x}(u), \dot{y}(u)), \\ \ddot{\gamma}(u) &= (\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)). \end{aligned}$$

Ker je parametrizacija naravna, imamo še sistem enačb

$$\begin{aligned} ||\dot{\gamma}(u)|| &= 1, \\ ||\ddot{\gamma}(u)|| &= \varkappa(u), \\ \langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Enotski vektor, pravokoten na $\dot{\gamma}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u))$, je vektor $(\dot{y}(u), -\dot{x}(u))$. Ta vektor je vzporeden vektorju pospeška, torej bo za neko funkcijo $k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ veljalo

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = k(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

Če obe strani enačbe normiramo, iz prejšnega sistema enačb vidimo, da mora priti natanko

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = \varkappa(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

Zanima nas, ali obstaja krivulja, za katero je $\varkappa = \tilde{\varkappa}$, torej z drugimi besedami, ali je rešljiv sistem navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x}(u) &= \tilde{\varkappa}(u)\dot{y}(u), \\ \ddot{y}(u) &= -\tilde{\varkappa}(u)\dot{x}(u). \end{aligned}$$

Pri analizi 3 smo dokazali eksistenčni izrek za obstoj rešitev tega sistema. Torej obstaja naravno parametrizirana krivulja $\gamma(u) = (x(u), y(u))$, za katero za vsak $u \in [\alpha, \beta]$ velja $||\ddot{\gamma}(u)|| = \tilde{\varkappa}(u)$. $\square$

Opomba. Pri določenih (u, v) nam krivulja $\gamma(u)$ podaja tangentno premonosno ploskev. Ta ploskev je del ravnine, v kateri leži krivulja krivulja $\gamma(u)$. Po izreku [**??**] je ta ploskev izometrična nekemu kosu ravnine.

S tem razmislekom smo dokazali izrek.

Izrek 2.17.

Vsaka tangentno premonosna ploskev je izometrična kosu ravnine.

Definicija 2.18. Ploščina ploskve X, regularno parametrizirane z $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ je podana z

$$A(X) = \int_V ||r_u \times r_v||\, du\, dv.$$

Opomba. Da je ta definicija dobra, moramo še preveriti.

Opomba. Ker velja zveza

$$||r_u \times r_v||^2 = \langle r_u, r_u\rangle\langle r_v, r_v\rangle - \langle r_u, r_v\rangle^2 = EG - F^2,$$

lahko ploščino izrazimo tudi kot

$$A(X) = \int_V \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_V \sqrt{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}}\, du\, dv.$$

Definicija 2.19. Naj bosta $r : V_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\tilde{r} : V_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ različni regularni parametrizaciji ploskve X. Potem je preslikava

$$\begin{aligned} g = \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ (u, v) &\longmapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \end{aligned}$$

prehodna preslikava med parametrizacijama r in $\tilde{r}$.

Velja $r(u, v) = \tilde{r}(g(u, v))$. Poglejmo si, kaj se zgodi z matriko prve fundamentalne forme transformaciji med parametrizacijama.

2.2 Transformacijska pravila za prvo fundamentalno formo

Naj bosta $r : V_1 \to X$ in $\tilde{r} : V_2 \to X$ dve parametrizaciji iste ploskve. Med njima velja $r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$. To nam da prehodno preslikavo $g : \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 \to V_2$. Vektor, razvit po bazi $\{r_u, r_v\}$ bomo skušali razviti bo bazi $\{\tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}}\}$. Imamo

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \\ r_u &= \tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_u, \\ r_v &= \tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_v. \end{aligned}$$

Zdaj hočemo vektor $ar_u + br_v$ zapisati v obliki $\alpha\tilde{r}_{\tilde{u}} + \beta\tilde{r}_{\tilde{v}}$. Dobimo

$$ar_u + br_v = a(\tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_u) + b(\tilde{r}_{\tilde{u}}\tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}}\tilde{v}_v) = \underbrace{(a\tilde{u}_u + b\tilde{u}_v)}_{\alpha}\tilde{r}_{\tilde{u}} + \underbrace{(a\tilde{v}_u + b\tilde{v}_v)}_{\beta}\tilde{r}_{\tilde{v}}.$$

Torej za vsak par vektorjev $(a, b)^T$, $(\alpha, \beta)^T$ velja zveza

$$\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\tilde{u}_u & \tilde{u}_v \\ \tilde{v}_u & \tilde{v}_v\end{pmatrix}}_{\mathrm{Jac}(g)}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}.$$

Torej za vse pare vektorjev velja

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathrm{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \mathrm{Jac}(g) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Od tod sledi naslednji izrek.

Izrek 2.20.

Naj za parametrizaciji ploskve $r : V_1 \to X$ in $\tilde{r} : V_2 \to X$ velja

$$r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)) = \tilde{r}(g(u, v)).$$

Potem za prvi fundamentalni formi glede na ti parametrizaciji velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \mathrm{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \mathrm{Jac}(g).$$

Posledica 2.21. *Definicija ploščine [**??**] je dobra.*

Dokaz: Dokazujemo

$$A(X) = \int_{V_1} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_{V_2} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Po izreku o transformaciji prve fundamentalne forme [**??**] velja

$$\begin{aligned} A(X) &= \int_{V_1} \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}\, du\, dv \\ &= \int_{V_1} \sqrt{\det \left(\mathrm{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \mathrm{Jac}(g) \right)}\, du\, dv \\ &= \int_{V_1} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}\, \left|\det\left(\mathrm{Jac}(g)\right)\right|\, du\, dv \\ \text{(uvedba novih spremenljivk)} &= \int_{V_2} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}. \end{aligned}$$

□

Recimo, da imamo podano $V \subseteq \mathbb{R}^2$ in matrično funkcijo

$$\begin{aligned} M : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R})_{\text{simetrične, pozitivno definitne}} \\ (u, v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)}. \end{aligned}$$

Zanimivo vprašanje se glasi: Ali lahko to funkcijo realiziramo v vloženi mnogoterosti? Odgovor je da (ampak lokalno, ker bi lahko prišlo do problemov s samopresečišči).

2.3 Ukrivljenost

2.3.1 Druga fundamentalna forma

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$. Intuitivno je ukrivljenost ploskve X v točki $r(u, v) = m \in X$ 'hitrost' oddaljevanja X od tangentne ravnine $T_m X$. Naj bo n normala na ravnino

T_mX v točki m. Naj bo točka $r(u', v') = r(u + \Delta u, v + \Delta v)$ blizu točke $m = r(u, v)$. Izmeriti hočemo razdaljo od točke $r(u', v')$ do T_mX. Dobimo

$$d = \langle n, r(u', v') - r(u, v)\rangle.$$

Ker sta spremembi Δu in Δv majhni, naredimo Taylorjev razvoj, ter izrazimo

$$r(u', v') - r(u, v) = r_u \Delta u + r_v \Delta v + \frac{1}{2}\left(r_{uu}(\Delta u)^2 + 2r_{uv}\Delta u\Delta v + r_{vv}(\Delta v)^2\right) + \dots$$

Ker vemo tudi, da je normala pravokotna na vektorja r_u in r_v, lahko zapišemo

$$d = \langle n, r(u', v') - r(u, v)\rangle \approx \underbrace{\langle r_u, n\rangle}_{0}\Delta u + \underbrace{\langle r_v, n\rangle}_{0}\Delta v + \frac{1}{2}\left(\langle r_{uu}, n\rangle(\Delta u)^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle\Delta u\Delta v + \langle r_{vv}, n\rangle(\Delta v)^2\right).$$

oziroma

$$d \approx \frac{1}{2}\left(\langle r_{uu}, n\rangle(\Delta u)^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle\Delta u\Delta v + \langle r_{vv}, n\rangle(\Delta v)^2\right).$$

Zdaj lahko smiselno definiramo drugo fundamentalno formo ploskve.

Definicija 2.22. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$. Druga fundamentalna forma X v točki $m = r(u, v)$ je podana z matriko

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix},$$

kjer so $L, M, N : V \to \mathbb{R}$ funkcije s predpisi

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \langle r_{uu}(u, v), n(u, v)\rangle, \\ M(u, v) &= \langle r_{uv}(u, v), n(u, v)\rangle, \\ N(u, v) &= \langle r_{vv}(u, v), n(u, v)\rangle. \end{aligned}$$

Opomba. Za drugo fundamentalno formo je res nujen skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$ (za razliko od prve fundamentalne forme, ki v vsaki točki določa drug skalarni produkt).

Razmislili smo, da velja ocena razdalje

$$d(u, v, \Delta u, \Delta v) \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta u & \Delta v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u,v)}\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Od te točke naprej predpostavljamo, da so vse krivulje naravno parametrizirane. Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ gladka krivulja. Spomnimo se definicije fleksijske ukrivljenosti krivulje [**??**], velja $\varkappa(t) = ||\ddot{\gamma}(t)||$. V nadaljevanju bomo razdelili vektor pospeška na geodetsko in normalno komponento, torej

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_g(t) + \ddot{\gamma}_n(t).$$

Zato najprej definirajmo geodetsko in normalno ukrivljenost krivulje.

Definicija 2.23. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ in naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ gladka krivulja. Definirajmo normalo na krivuljo γ kot preslikavo $n_\gamma : [a, b] \to TX$ s predpisom

$$n_\gamma(t) = \frac{r_u(u(t), v(t)) \times r_v(u(t), v(t))}{||r_u(u(t), v(t)) \times r_v(u(t), v(t))||}.$$

Potem definiramo normalno in geodetsko ukrivljenost krivulje γ kot

$$\varkappa_n(t) = \langle \ddot{\gamma}(t), n_\gamma(t) \rangle,$$
$$\varkappa_g(t) = \langle \ddot{\gamma}(t), n_\gamma(t) \times \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Zdaj si poglejmo, kako se izraža normalna ukrivljenost krivulje s pomočjo druge fundamentalne forme.

Izrek 2.24.

Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ gladka krivulja, podana s parametrizacijo $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Tedaj lahko njeno normalno ukrivljenost izračunamo po formuli

$$\varkappa_n(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}.$$

Dokaz: Najprej zapišemo prva dva odvoda

$$\dot{\gamma}(t) = r_u \dot{u} + r_v \dot{v},$$
$$\ddot{\gamma}(t) = r_u \ddot{u} + r_v \ddot{v} + r_{uu} \dot{u}^2 + 2 r_{uv} \dot{u} \dot{v} + r_{vv} \dot{v}^2.$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \varkappa_n = \langle \ddot{\gamma}, n \rangle &= \langle r_{uu}, n \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle r_{uv}, n \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle r_{vv}, n \rangle \dot{v}^2 \\ &= L \dot{u}^2 + 2 M \dot{u} \dot{v} + F \dot{v}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Vsako funkcijo normalne ukrivljenosti lahko razširimo na tangentno ravnino na naslednji način.

Definicija 2.25. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X$ in naj bo $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ druga fundamentalna forma ploskve X glede na r. Naj bo $r(u_0, v_0) = m \in X$. Vemo, da je $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$ baza za tangetno ravnino $T_m X$, zato lahko vsak vektor v njej enolično zapišemo v obliki $\xi r_u(u_0, v_0) + \eta r_v(u_0, v_0)$. Potem obstaja funkcija

$$\varkappa_n : T_m X \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\varkappa_n(\xi r_u(u_0, v_0) + \eta r_v(u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(r(u_0, v_0))} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Včasih zlorabimo notacijo in pišemo

$$\varkappa_n(\xi, \eta) := \varkappa_n(\xi r_u(u_0, v_0) + \eta r_v(u_0, v_0)).$$

Opomba. Če je $(\xi, \eta) = (\dot{u}, \dot{v})$ in je γ naravno parametrizirana krivulja, potem par (ξ, η) leži na enotski krožnici v ravnini $T_m X$. V $\mathbb{R}^3$ je to res običajna krožnica glede na evklidkski skalarni produkt, v koordinatah (ξ, η) pa jo določa enačba

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1.$$

Definicija 2.26. Ekstrema funkcije $\varkappa_n : T_m X \to \mathbb{R}$, skrčene na enotsko sfero $E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$, imenujemo glavni ukrivljenosti ploskve X v točki m. Označimo ju s κ_1 in κ_2.

Opomba. Ali minimum označimo s κ_1 ali κ_2, je stvar dogovora. Ekstrema obstajata, ker je krožnica kompakt, torej ima zvezna funkcija $\varkappa_n$ na njej minimum in maksimum.

Definicija 2.27. Tangetna vektorja $\xi_1 r_u + \eta_1 r_v$, $\xi_2 r_u + \eta_2 r_v \in T_m X$, ki sta (različna) ekstrema funkcije $\varkappa_n$, se imenujeta glavni smeri.

Opomba. Kmalu bomo dokazali, da sta glavni smeri res kvečjem dve, zato je takšna definicija upravičena (če bi bila $\varkappa_n$ poljubna zvezna funkcija, bi lahko imela več ekstremov).

Definicija 2.28. Gaussova ukrivljenost ploskve X v točki m je podana s produktom

$$\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m).$$

Opomba. Izkazalo se bo, da je Gaussova ukrivljenost izometrična invarianta in da je tesno povezana z Eulerjevo karakteristiko.

Definicija 2.29. Povprečna ukrivljenost ploskve X v točki m je podana s formulo

$$H(m) = \frac{1}{2}(\kappa_1(m) + \kappa_2(m)).$$

Z naslednjim izrekom bomo utemeljili, da sta glavni ukrivljenosti res kvečjem dve.

Izrek 2.30.

Glavni ukrivljenosti ploskve X v točki $m \in X$ sta ničli kvadratne enačbe

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}\right) = 0.$$

Dokaz: Ekstrema λ_1, λ_2 sta vezana ekstrema za funkcijo $\varkappa_n : T_m X \to \mathbb{R}$. Zaradi homeomorfizma $T_m X \approx \mathbb{R}^2$ lahko identificiramo elemente $T_m X$ s pari (ξ, η). Naša krožnica je določena z vezjo $||(\xi,\eta)|| = 1$ oziroma ekvivalentno $||(\xi,\eta)||^2 = 1$. Torej iščemo ekstreme funkcije

$$\varkappa_n(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$$

pri vezi

$$g(\xi,\eta) = ||(\xi,\eta)|| = ||(\xi,\eta)||^2 = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1.$$

Zdaj se s pomočjo analize 2 spomnimo, da se vezane ekstreme išče s pomočjo Lagrangeeve funkcije

$$\varkappa_n(\xi,\eta) - \lambda g(\xi,\eta).$$

Da bo skalar λ določal ekstrem, mora veljati zveza

$$\operatorname{grad}(\varkappa_n(\xi,\eta) - \lambda g(\xi,\eta)) = 0.$$

Zaradi linearnosti gradienta je to ekvivalentno zvezi

$$\operatorname{grad}(\varkappa_n(\xi,\eta)) - \lambda \operatorname{grad}(g(\xi,\eta)) = 0.$$

Zdaj poračunamo gradienta, da dobimo

$$\operatorname{grad}(\varkappa_n(\xi,\eta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varkappa_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varkappa_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{grad}(g(\xi,\eta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Torej rešujemo enačbo

$$\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta enačba ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Denimo, da imamo neki rešitvi λ_1, λ_2. Potem obstajata vektorja $(\xi_1,\eta_1)^T$, $(\xi_2,\eta_2)^T$, da je za $i = 1,2$

$$\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Če vzamemo enotska vektorja $(\xi_1,\eta_1)^T$, $(\xi_2,\eta_2)^T$ (ki sta enotska glede na 1. fundamentalno formo v točki m), in množimo i-to zgornjo enačbo z leve z (ξ_i,η_i), dobimo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \xi_i & \eta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}}_{\varkappa_n(\xi_i,\eta_i)} - \lambda_i \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_i & \eta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}}_{1} = 0.$$

Desni člen je enak 1, ker smo izbrali enotska vektorja glede na skalarni produkt, porojen s to matriko. Preostaneta nam torej enačbi

$$\varkappa_n(\xi_i,\eta_i) = \lambda_i, \quad i = 1,2.$$

Točki (ξ_i,η_i) sta vezana ekstrema funkcije $\varkappa_n$ pri vezi $g = 1$. Torej sta to ničli kvadratnega polinoma

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Definicija 2.31. Posplošeni lastni problem ali relativni lastni problem je lastni problem oblike

$$A(\vec{v}) = \lambda B(\vec{v}).$$

Če je $B = \mathrm{Id}$, potem dobimo običajni lastni problem

$$A(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Iz dokaza prejšnjega izreka je razvidno, da sta κ_1 in κ_2 lastni vrednosti martrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

glavni smeri $(\xi_1,\eta_1)^T$, $(\xi_2,\eta_2)^T$ pa sta njena lastna vektorja. Tej matriki včasih rečemo Weingartnova matrika.

Izrek 2.32.

Za Gaussovo ukrivljenost $\kappa : X \to \mathbb{R}$ velja zveza

$$\kappa(m) = \frac{(LN - M^2)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

Dokaz: Po definiciji je $\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m)$. Razmislili smo že, da sta glavni ukrivljenosti lastni vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)},$$

torej bo njun produkt (ki je natanko Gaussova ukrivljenost) enak njeni determinanti. Torej

$$\kappa(m) = \kappa_1(m)\kappa_2(m) = \det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) = \frac{(LN - M^2)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

□

Izrek 2.33.

Za povprečno ukrivljenost velja zveza

$$H(m) = \frac{1}{2}\frac{(LG - 2MF + NE)(m)}{(EG - F^2)(m)}.$$

Dokaz: Podobno kot v prejšnjem dokazu uporabimo dejstvo, da sta glavni ukrivljenosti lastni vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)},$$

kar pomeni, da bo njuna vsota enaka sledi te matrike. Imamo torej

$$\begin{aligned}
H(m) = \frac{1}{2}(\kappa_1(m) + \kappa_2(m)) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(m)}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\
&= \frac{1}{2(EG - F^2)(m)}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}_{(m)} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\
&= \frac{1}{2(EG - F^2)(m)}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} LG - MF & * \\ * & -MF + NE \end{pmatrix}_{(m)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(LG - 2MF + NE)(m)}{(EG - F^2)(m)}.
\end{aligned}$$

□

Opomba. Zgornja izreka bi lahko dokazali drugače z uporabo dejstva, da imata polinoma $ax^2 + bx + c$ in $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ isti ničli. Glavni ukrivljenosti sta ničli kvadratne enačbe

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = \det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Po Vietovih pravilih pa vemo, da je produkt ničel enak izrazu

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{c}{a}.$$

Očitno velja, da je

$$p(0) = c = \det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Po drugi stani pa lahko dobimo

$$a = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^2} p(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \det \left(\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right) = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Torej bo res

$$\kappa = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{c}{a} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Po Vietovem pravilu za vsoto ničel imamo zvezo $\kappa_1 + \kappa_2 = -\frac{b}{a}$. Če poračunamo b po predpisu za polinom p, dobimo natanko izraz povprečne ukrivljenosti iz prejšnjega izreka.

Izrek 2.34.

Glavni smeri $(\xi_1, \eta_1)^T_{(m)}$, $(\xi_2, \eta_2)^T_{(m)}$ sta si pravokotni v $T_m X$.

Dokaz: Dokaz poteka prek sklepa o sebi adjungiranosti preslikave

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Najprej za večjo preglednost vpeljimo nove oznake

$$A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = A^{-1}B.$$

Ker vemo, da za sebi adjungirane preslikave (ki imajo različne lastne vektorje) velja, da morajo biti ti med seboj pravokotni, je dovolj dokazati sebi adjungiranost preslikave C. Torej za vsaka vektroja $\vec{v}, \vec{w} \in T_m X$ dokazujemo

$$\langle C\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, C\vec{w} \rangle.$$

Pri tem se zavedajmo, da je za poljubna vektorja skalarni produkt določen s pomočjo prve fundamentalne forme. V bazi $\{r_u, r_v\}$ je podan z

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^T A \vec{w}.$$

Torej imamo za vsaka $\vec{v}, \vec{w} \in T_m X$ enačbi

$$\begin{aligned} \langle C\vec{v}, \vec{w} \rangle &= (C\vec{v})^T A \vec{w} = \vec{v}^T C^T A \vec{w}, \\ \langle \vec{v}, C^* \vec{w} \rangle &= \vec{v}^T A C^* \vec{w}. \end{aligned}$$

To pomeni, je zahtevi $C = C^*$ ekvivalentno $C^T A = AC^*$, oziroma $C^T A = AC$, kar pokažemo z računom

$$C^T A = (A^{-1}B)^T A = B^T A^{-T} A = BA^{-1}A = B = AA^{-1}B = AC.$$

□

2.3.2 Interpretacija Gaussove ukrivljenosti

Intuitivno je ukrivljenost krivulje hitrost spreminjanja tangente. Hkrati pa velja, da čimbolj je krivulja ukrivljena, tem hitreje normala spreminja smer. Podoben pojav lahko opazujemo tudi na ploskvah, bolj kot je ploskev ukrivljena, hitreje se spreminja normala. Naj bo torej točka $m \in X$, ter $U \subseteq X$ njena okolica, difeomorfna disku. Poglejmo si, kaj se dogaja z normalo po točkah U.

Definicija 2.35. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ploskev. Preslikava, ki točki priredi enotsko normalo,

$$\begin{aligned} \tilde{n} : X &\longrightarrow S^2 \\ m &\longmapsto n(m) \in (T_m X)^{\perp}; ||n(m)|| = 1, \end{aligned}$$

se imenuje Gaussova preslikava.

Povprečno intenzivnost spreminjanja normale na U lahko merimo s kvocientom površin

$$\frac{A(\tilde{n}_*(U))}{A(U)},$$

kjer je $A(U)$ ploščina okolice $U \subseteq X$, $A(\tilde{n}_*(U))$ pa je ploščina slike

$$\tilde{n} : U \subseteq X \to \tilde{n}_*(U) \subseteq S^2.$$

Predpostavimo, da je preslikava $n = \tilde{n} \circ r : V \to S^2$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "n"'] & U \subseteq X \arrow[r, "\tilde{n}"] & \tilde{n}_*(U) \subseteq S^2 \end{tikzcd}$$

parametrizacija ploskve $\tilde{n}_*(U) \subseteq S^2$. Po definiciji površine ploskve veljata izraza

$$\begin{aligned} A(U) &= \int_V ||r_u \times r_v||\, du\, dv, \\ A(\tilde{n}_*(U)) &= \int_V ||n_u \times n_v||\, du\, dv. \end{aligned}$$

Vemo tudi, da velja

$$||n_u \times n_v|| = \sqrt{\langle n_u \times n_v, n_u \times n_v \rangle}$$

in hkrati zaradi enotske dolžine normale

$$||n_u \times n_v|| = \langle n, n_u \times n_v \rangle = \left\langle \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}, n_u \times n_v \right\rangle. \tag{1}$$

Iz enačbe (1) sledi po Lagrangevem pravilu za dvojni vektorski produkt še

$$||n_u \times n_v|| = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\langle r_u, n_u \rangle \langle r_v, n_v \rangle - \langle r_u, n_v \rangle \langle r_v, n_u \rangle). \tag{2}$$

Če zdaj enačbo $\langle r_u, n \rangle = 0$ paricalno odvajamo po u, dobimo

$$\langle r_{uu}, n \rangle + \langle r_u, n_u \rangle = 0 \implies \langle r_u, n_u \rangle = -L,$$

če pa jo odvajamo po v, dobimo

$$\langle r_{uv}, n \rangle + \langle r_u, n_v \rangle = 0 \implies \langle r_u, n_v \rangle = -M$$

Podobno z odvajanjem enačbe $\langle r_v, n \rangle = 0$ dobimo preostali dve enačbi

$$\begin{aligned} \langle r_v, n_u \rangle &= -M, \\ \langle r_v, n_v \rangle &= -N. \end{aligned}$$

Od tod pa iz enačbe (2) sledi

$$||n_u \times n_v|| = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

S pomočjo te izražave lahko zapišemo

$$\frac{A(\tilde{n}(U))}{A(U)} = \frac{\int_V ||n_u \times n_v||\,du\,dv}{\int_V ||r_u \times r_v||\,du\,dv} = \frac{\int_V \frac{LN-M^2}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv}{\int_V \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv}.$$

Od tod pa s pomočjo izreka o povprečni vrednosti in zveznosti funkcij dobimo, da je

$$\lim_{V\to m} \frac{A(\tilde{n}(U))}{A(U)} = \frac{(LN-M^2)(m)}{(EG-F^2)(m)} = \kappa(m).$$

2.4 Ploščate ploskve

Definicija 2.36. Ploskev X je ploščata, če je njena Gaussova ukrivljenost $\kappa = 0$.

Izrek 2.37.

Ploskev X je ploščata, če je del stožca, valja ali tangentno premonosne ploskve.

Posledica 2.38. *Ploskev X je ploščata natanko tedaj, ko je izometrična kosu ravnine.*

Za dokaz tega izreka bomo potrebovali naslednji dve lemi.

Lema 2.39. *Naj bo X poljubna ploskev. Tedaj obstaja za X parametrizacija $s : V \to X$ ter funkciji $\lambda, \mu : V \to \mathbb{R}$, za kateri velja*

$$s_u(u,v) = \lambda(u,v)e_1(u,v),$$
$$s_v(u,v) = \mu(u,v)e_2(u,v).$$

Preslikavi $e_1, e_2 : V \to TX$ označujeta glavni smeri ploskve X glede na parametrizacijo s.

Dokaz: Naj bo $s : V_1 \to X$ parametrizacija ploskve X. Iskano parametrizacijo bomo dobili kot reparametrizacijo s. Lokalno lahko parametrizacijo $s = s(u,v), (u,v) \in V_1$ podamo kot parametrizacijo $s(u,v) = s(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in V$. To nam poda funkciji $s(u,v) = s(\xi(u,v),\eta(u,v))$ ter $s(\xi,\eta) = s(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$. Iz prve enačbe po verižnem pravilu dobimo

$$s_u = \frac{\partial \xi}{\partial u}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u}s_\eta,$$
$$s_v = \frac{\partial \xi}{\partial v}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v}s_\eta.$$

Zdaj zapišemo glavni smeri kot linearni kombinaciji vektorjev s_u in s_v.

$$e_1 = \alpha s_u + \beta s_v,$$
$$e_2 = \gamma s_u + \delta s_v.$$

V ti kombinaciji vstavimo izražavi s_u in s_v, da dobimo

$$e_1 = \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u}s_\eta\right) + \beta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v}s_\eta\right),$$
$$e_2 = \gamma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial u}s_\eta\right) + \delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}s_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial v}s_\eta\right).$$

Od tod izrazimo glavni smeri kot lineani kombianciji vektorjev s_ξ, s_η.

$$e_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta\right)s_\xi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial v}\beta\right)s_\eta,$$
$$e_2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\gamma + \frac{\partial \xi}{\partial v}\delta\right)s_\xi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma + \frac{\partial \eta}{\partial v}\delta\right)s_\eta.$$

To lahko bolj kompaktno zapišemo kot

$$e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Zdaj se vprašamo, ali res potrebujemo funkciji λ, η? Če bi obstajala parametrizacija s, za katero bi veljalo $s_\xi = e_1$, $s_\eta = e_2$, potem bi veljalo

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \cdot s_\xi + 0 \cdot s_\eta, \\ e_2 &= 0 \cdot s_\xi + 1 \cdot s_\eta. \end{aligned}$$

Torej bi morala biti v bazi $\{s_\xi, s_\eta\}$ e_1 in e_2 standardna enotska vektorja, torej

$$e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To lahko zapišemo z eno samo enačbo kot

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označimo sedaj

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1},$$

da dobimo pogoj

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Vrstici leve matrike sta gradienta funkcij ξ in η.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \xi(u, v) &= (A(u, v), C(u, v)), \\ \operatorname{grad} \eta(u, v) &= (B(u, v), D(u, v)). \end{aligned}$$

Od tod pa očitno sledi, da morata biti polji $(A(u, v), C(u, v))$ in $(B(u, v), D(u, v))$ potencialni, kar v splošnem ni res. Zato moramo zahtevo $s_\xi = e_1$, $s_\eta = e_2$ omejiti na $s_\xi = \lambda e_1$, $s_\eta = \mu e_2$. Tako dobimo pogoj

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Tako imamo

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} A & \frac{1}{\lambda} C \\ \frac{1}{\mu} B & \frac{1}{\mu} D \end{pmatrix}.$$

Iz analize 3 vemo, da lahko v takšni situaciji najdemo integrirajoča množitelja $\lambda, \mu : V \to \mathbb{R}$, da bo veljalo

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \xi(u,v) &= \frac{1}{\lambda(u,v)} (A(u,v), C(u,v)), \\ \operatorname{grad} \eta(u,v) &= \frac{1}{\mu(u,v)} (B(u,v), D(u,v)). \end{aligned}$$

□

Definicija 2.40. Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ krivulja in $\tilde{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Vektorskemu polju $\tilde{a}$ priredimo vektorsko polje vzdož krivulje γ s predpisom $a(u) := \tilde{a}(\gamma(u))$. Ploskev X je premonosna ploskev, podana s krivuljo γ in vektorskim poljem a vzdolž krivulje γ, za katero obstaja parametrizacija

$$r(u,v) = \gamma(u) + va(u).$$

Če za polje a velja $a(u) = \gamma'(u)$, potem je ploskev tangetno premonosna.

Lema 2.41. *Naj bo X premonosna ploskev, podana s krivuljo $\gamma(u)$ in vektorskim poljem $a(u)$ vzdolž krivulje $\gamma(u)$. Ploskev X je tangetno premonosna natanko tedaj, ko velja pogoj na mešani produkt*

$$[\gamma'(u), a(u), a'(u)] = 0.$$

Dokaz: Implikacija ($\Rightarrow$) je očitna, saj za tangentno premonosne ploskve velja $a(u) = \gamma'(u)$. Dokažimo obrat. Naj bo X premonosna ploskev s parametrizacijo

$$r(u,v) = \gamma(u) + va(u)$$

in naj velja zgornji pogoj na mešani produkt. Ploskev X bo tangetno premonosna, če nam uspe poiskati takšno krivuljo $\rho(u)$ ter funkciji f in g, da velja

$$\rho(u) = \gamma(u) + f(u)a(u),$$

hkrati pa je izpoljnjen še pogoj na vzporednost odvoda krivulje $\rho(u)$ s poljem $a(u)$

$$\rho'(u) = g(u)a(u).$$

Z odvajanjem ρ dobimo enačbo, ki ji morata zadoščati f in g

$$\rho' = \gamma' + f'a + fa' \implies \gamma' = (g - f')a - fa'.$$

Iz pogoja na mešani produkt vemo, da so vektorji γ', a, a' koplanarni. Zato lahko γ' izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh, torej obstajata funkciji α, β, da velja

$$\gamma' = \alpha a + \beta a'.$$

Rešitev zgornjega sistema enačb sta funkciji

$$\begin{aligned} f &= -\beta, \\ g &= \alpha - \beta', \end{aligned}$$

kar pomeni, da funkcija ρ obstaja, torej je X res tangentno premonosna ploskev. □

Opomba. V dokazu bi lahko namesto

$$r(u,v) = \gamma(u) + va(u)$$

pisali

$$r(u,v) = \gamma(u) + \lambda(v)a(u)$$

za neko monotono funkcijo λ. Monotonost bi privzeli zato, da bi dobili smiselno parametrizacijo.

Zdaj se lotimo še dokaza izreka.

*Dokaz izreka [**??**]:* Predpostavimo, da za vsak $m \in X$ velja $\kappa(m) = 0$, kar brez škode za splošnost implicira $\kappa_2(m) = 0$. Če bi bila za vsak $m \in X$ povprečna vrednost $H(m) = \frac{1}{2}(\kappa_1(m) + \kappa_2(m)) = 0$, je X ravnina. Predpostavimo torej, da obstaja $k \in X$, da je $H(k) \neq 0$. Po lemi [**??**] vemo, da obstaja parametrizacija $r(u,v) : V \to X$, za katero velja $r_u = \lambda e_1$, $r_v = \mu e_2$. Za takšno parametrizacijo velja $F = \langle r_u, r_v \rangle = \lambda\mu\langle e_1, e_2\rangle = 0$, torej bo prva fundamentalna forma te parametrizacije enaka

$$I = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Vemo pa tudi, da sta glavni ukrivljenosti rešitvi enačb

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) = 0.$$

V našem primeru je za $i = 2$

$$\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = 0 \implies LN - M^2 = 0.$$

Spomnimo se, da je normalna ukrivljenost podana s predpisom

$$\varkappa_n(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

v naši parametrizaciji pa je smer, ki pripada glavni ukrivljenosti κ_2 v bazi $\{r_u, r_v\}$, podana z $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix}^T$. Velja torej

$$\kappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = N\alpha^2 = 0.$$

Ker lahko izberemo neničelen α, to pomeni, da je $N = 0$. Iz pogoja $LN - M^2 = 0$ dobimo še $M = 0$, torej za drugo fundamentalno formo naše parametrizacije X velja

$$II = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zdaj trdimo, da je $(e_2)_v = 0$. Zato bomo vektorsko polje $(e_2)_v$ razvili po bazi $\{e_1, e_2, n\}$. Najprej bomo po tej bazi razvili vekotorja n_u in n_v. Pri tem se zavedajmo, da je $e_1 = \frac{r_u}{||r_u||}$ in $e_2 = \frac{r_v}{||r_v||}$. Dobimo

$$n_u = \langle n_u, e_1\rangle e_1 + \langle n_u, e_2\rangle e_2 + \langle n_u, n\rangle n.$$

Iz zveze $\langle n, r_u\rangle = 0$ s parcialnim odvajanjem po u dobimo

$$\langle n_u, r_u\rangle = -\langle n, r_{uu}\rangle = -L.$$

Torej velja

$$\langle n_u, e_1\rangle = -\frac{1}{||r_u||}\langle n, r_{uu}\rangle = -\frac{L}{\sqrt{E}}.$$

Na enak način dobimo

$$\langle n_u, e_2\rangle = -\frac{1}{||r_v||}\langle n, r_{uv}\rangle = -\frac{M}{\sqrt{G}} = 0.$$

Iz parcialnega odvajanja zveze $\langle n, n\rangle = 1$ po u pa dobimo še $\langle n_u, n\rangle = 0$. Torej velja, da je

$$n_u = -\frac{L}{\sqrt{E}} e_1 \implies e_1 = -\frac{\sqrt{E}}{L} n_u.$$

Z enakim postopkom dobimo, da je v tej bazi $n_v = 0$. Tam je namreč $\langle n_v, r_v\rangle = -N = 0$. Zdaj izrazimo še vektor $(e_2)_v$ po tej bazi. Po enakih idejah kot prej dobimo

$$\begin{aligned}
\langle (e_2)_v, e_1\rangle &= -\frac{\sqrt{E}}{L}\langle (e_2)_v, n_u\rangle = \frac{\sqrt{E}}{L}\langle e_2, (\underbrace{n_v}_{0})_u\rangle = 0.\\
\langle (e_2)_v, e_2\rangle &= 0\\
\langle (e_2)_v, n\rangle &= -\langle e_2, n_v\rangle = 0
\end{aligned}$$

Torej smo pokazali, da je $(e_2)_v = 0$. Zdaj dokažimo, da je X tangentno premonosna ploskev s premičjem, napetim na vektorsko polje e_2. Zato si oglejmo krivulje $v \mapsto r(u_0, v)$, kjer je točka u_0 fiksna. V naši parametrizaciji velja, da je $r_v = \mu e_2$. Zato je

$$r_{vv} = \mu_v e_2 + \mu \underbrace{(e_2)_v}_{0} = \mu_v e_2.$$

To pomeni, da bosta v vsaki točki krivulje $v \mapsto r(u_0, v)$ vektorja hitrosti in pospeška vzporedna. Torej bo ta krivulja premica. Naj bo sedaj $\gamma(u) = r(u, v_0)$. Naša ploskev je premonosna, lahko jo parametriziramo s parametrizacijo

$$r(u, v) = \gamma(u) + f(v)\underbrace{r_v(u, v_0)}_{a(u)}.$$

Zdaj izračunajmo mešani produkt

$$[\gamma', a, a'] = [r_u, r_v, r_{uv}] = \langle r_u \times r_v, r_{uv}\rangle = ||r_u \times r_v||\langle n, r_{uv}\rangle = ||r_u \times r_v||\underbrace{M}_{0} = 0.$$

Po lemi [**??**] sledi, da je X tangentno premonosna ploskev. $\square$

Opomba. Gaussova ukrivljenost krogle z radijem R je $\frac{1}{R^2}$. To ustreza naši intuiciji, da je ping pong žogica bolj ukrivljena od Zemlje.

3 Geodetske krivulje

Definicija 3.1. Naj bo X ploskev in $m_1, m_2 \in X$. Naj bo Γ družina krivulj $\gamma_i : [a,b] \to X$, za katere velja $\gamma_i(a) = m_1$ in $\gamma_i(b) = m_2$. Krivulja $\gamma \in \Gamma$ je geodetska krivulja, če je najkrajša krivulja iz družine Γ.

Definicija 3.2. Naj bo X ploskev in $m_1, m_2 \in X$. Naj bo $\gamma : [a,b] \to X$ krivulja, za katero velja $\gamma(a) = m_1$ in $\gamma(b) = m_2$. Potem preslikavo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u(t),v(t))\dot{u}^2 + 2F(u(t),v(t))\dot{u}\dot{v} + G(u(t),v(t))\dot{v}^2}\, dt$$

imenujemo dolžinski funkcional.

Naj bo sedaj

$$\mathcal{V} = \{\gamma : [a,b] \to X, \gamma \text{ gladka krivulja}, \gamma(a) = m_1, \gamma(b) = m_2\}.$$

Opomba. Takšni družini krivulj rečemo tudi variacija. Od tod pride ime "variacijski račun".

Ekstreme funkcionala $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ bomo iskali tako, kot iščemo ekstreme funkcij ene ali dveh spremenljivk. Kandidati za ekstreme splošne funkcije $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so stacionarne točke F, torej točke $x_0 \in \mathbb{R}^n$, da je $D_{x_0}F = 0$. Vemo pa, da bo $D_{x_0}F = 0$ natanko tedaj, ko za vsak dovolj majhen $\varepsilon > 0$ in za vsako krivuljo $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$, za katero je $\beta(0) = x_0$, velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\beta(t)) = (D_{x_0}F)\dot{\beta}(0) = 0.$$

Vrnimo se k funkcionalu $\mathcal{L}$. Ne bomo opazovali odvoda $\mathcal{L}$, temveč le smerne odvode $\mathcal{L}$ po vseh poteh, ki nas zanimajo. Krivulje γ_i v evklidskem prostoru so točke v prostoru krivulj $\mathcal{V}$. Zanima nas, kaj so krivulje v prostoru $\mathcal{V}$.

Definicija 3.3. Krivulja v prostoru krivulj $\mathcal{V}$ je preslikava

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathcal{V} \\ s &\longmapsto \gamma_s, \end{aligned}$$

za katero za vsak $t \in [a,b]$ velja $\Gamma(t,s) := \Gamma(s)(t) = \gamma_s(t)$. Hkrati morata biti za vsak $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ izpoljnena pogoja

$$\begin{aligned} \Gamma(a,s) &= m_1 = \gamma_s(a), \\ \Gamma(b,s) &= m_2 = \gamma_s(b). \end{aligned}$$

Posodobimo sedaj našo definicijo geodetke.

Definicija 3.4. Krivulja $\gamma : [a,b] \to X$ je geodetska krivulja, če je stacionarna točka dolžinskega funkcionala, torej če je

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma(t,s)) = (D_\gamma \mathcal{L})\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \Gamma(t,s)\right) = 0.$$

Opomba. Zgornja enakost je nekoliko sumljiva, ker imamo na levi strani šibek odvod, na desni pa krepek.

Sedaj izpeljimo diferencialne enačbe, ki jim morajo ustrezati geodetske krivulje. Naj bo $\gamma(t) = r(u(t), v(t)) : [a, b] \to X$ krivulja. Potem je dolžinski funkcional podan s predpisom

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt.$$

Naj bo $\Gamma : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ pot v $\mathcal{V}$, torej variacija γ. To pomeni, da velja za vse $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sistem enačb

$$\begin{aligned} \Gamma(t, s) &= r(u(t, s), v(t, s)) \\ u(t, 0) &= u(t), \\ v(t, 0) &= v(t), \\ u(a, s) &= u(a), \\ v(a, s) &= v(a), \\ u(b, s) &= u(b), \\ v(b, s) &= v(b). \end{aligned}$$

Potem imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(\Gamma(t, s)) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \int_a^b \sqrt{\underbrace{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}_{R(t,s)}}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b R^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} R(t, s)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int \Big[R^{-\frac{1}{2}} (E_u \dot{u}^2 u_s + 2F_u \dot{u}\dot{v} u_s + G_u \dot{v}^2 u_s + E_v \dot{u}^2 v_s + 2F_v \dot{u}\dot{v} v_s + G_v \dot{v}^2 v_s) \\ &\quad + 2(E\dot{u}\dot{u}_s + F\dot{v}\dot{u}_s + F\dot{u}\dot{v}_s + G\dot{v}\dot{v}_s) \Big]_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b R^{-\frac{1}{2}} \Big[(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2) u_s + (E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2) v_s \Big]_{s=0} dt \\ &\quad + \int_a^b R^{-\frac{1}{2}} \Big[(E\dot{u} + F\dot{v}) \dot{u}_s + (F\dot{u} + G\dot{v}) \dot{v}_s \Big]_{s=0} dt = (*) \end{aligned}$$

Na tej točki velja omeniti, da če imamo podano variacijo $\Gamma(t, s) = r(u(t, s), v(t, s))$, potem tangento podaja predpis

$$\frac{\partial}{\partial s}(u(t, s), v(t, s)) = (u_s(t, s), v_s(t, s)).$$

To pomeni, da bomo morali v zgornjem izrazu dobiti $(u_s(t, s), v_s(t, s))$. Nadaljujemo s per partesom drugega člena, pri čemer integriramo faktorja $\dot{u}_s$ in $\dot{v}_s$:

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \int_a^b R^{-\frac{1}{2}} \Big[(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2) u_s + (E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2) v_s \Big]_{s=0} dt \\ &\quad - \int_a^b \frac{d}{dt} \Big(R^{-\frac{1}{2}} (E\dot{u} + F\dot{v}) \Big) u_s + \frac{d}{dt} \Big(R^{-\frac{1}{2}} (F\dot{u} + G\dot{v}) \Big) v_s\, dt. \end{aligned}$$

Glede na začetne pogoje vemo, da mora biti $u_s(a, s) = u_s(b, s) = 0$, zato bo prvi celoten prvi del izraza enak 0:

$$\Big|_{s=0} R^{-\frac{1}{2}} (E\dot{u} + F\dot{v}) u_s(t, s) \Big|_a^b = 0$$

in enako za člen $R^{-\frac{1}{2}}(E\dot{u} + F\dot{v}) v_s(t, s)$. Zdaj le še povzemimo vse skupaj. Prišli smo do tega, da je krivulja $\gamma(t)$ stacionarna točka funkcionala $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, če je za vsak par (t, s)

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(\Gamma(t, s)) = \int_a^b P(t) \frac{\partial u}{\partial s} + Q(t) \frac{\partial v}{\partial s}\, dt = 0$$

za funkciji

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(R^{-\frac{1}{2}}(E\dot{u} + F\dot{v})),\\
Q(t) &= \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(R^{-\frac{1}{2}}(F\dot{u} + G\dot{v})).
\end{aligned}
$$

To formuliramo z naslednjim izrekom, ki je ena izmed osnovnih variant osnovnega izreka o variacijskem računu.

Izrek 3.5.

Naj bosta $P, Q : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji in naj bo $\Gamma(t, s) = r(u(t, s), v(t, s)) : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ variacija, torej $u(t, 0) = u(t), v(t, 0) = v(t), u(a, s) = u(a), v(a, s) = v(a), u(b, s) = u(b)$ in $v(b, s) = v(b)$. Potem velja enakost

$$
\int_a^b \left(P(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t, s) + Q(t)\frac{\partial v}{\partial s}(t, s) \right) dt = 0
$$

natanko tedaj, ko je $P(t) = 0$ in $Q(t) = 0$.

Dokaz: Dokazujemo s protislovjem. Recimo, da obstaja $t_0 \in (a, b)$, da je $P(t_0) \neq 0$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $P(t_0) = c > 0$. Ker je P zvezna, obstaja $\delta > 0$, da je $P(t) > \frac{c}{2}$ za vsak $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Naj bo

$$
(u(t, s), v(t, s)) = (u(t) + s\varphi(t), v(t)),
$$

kjer je φ testna funckija, torej velja $\varphi(t) > 0$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ter $\varphi(t) = 0$ na $[a, b] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Potem veljata zvezi $\frac{\partial u}{\partial s}(t) = \varphi(t)$ ter $\frac{\partial v}{\partial s}(t) = 0$. Za to variacijo imamo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \left(P(t)\frac{\partial u}{\partial s}(t) + Q(t)\frac{\partial v}{\partial s}(t) \right) dt &= \int_a^b P(t)\varphi(t)\, dt\\
&= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} P(t)\varphi(t)\, dt > \frac{c}{2}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t)\, dt > 0.
\end{aligned}
$$

S tem smo pokazali dokaz za P, za Q sledi simetrično. □

Posledica 3.6. *Za geodetsko krivuljo $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ morata veljati diferencialni enačbi drugega reda*

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(R^{-\frac{1}{2}}(E\dot{u} + F\dot{v})),\\
0 &= \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(R^{-\frac{1}{2}}(F\dot{u} + G\dot{v})).
\end{aligned}
$$

Imenujemo ju Euler-Lagrangevi enačbi za geodetke.

Opomba. Če je $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ naravna parametrizacija, potem je $R = 1$ in se enačbi nekoliko poenostavita:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}),\\
0 &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}).
\end{aligned}
$$

Izrek 3.7.

Naj bo $\gamma(t)$ naravno parametrizirana krivulja. Potem je $\gamma(t)$ geodetka natanko tedaj, ko je

$$\ddot{\gamma}(t) \in (T_{\gamma(t)}X)^{\perp}.$$

Z drugimi besedami, drugi odvod mora biti vedno pravokoten na tangentno ravnino.

Dokaz: Naj bo $\gamma = r(u, v)$. Potem imamo

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \dot{u}r_u + \dot{v}r_v,\\ \ddot{\gamma} &= \ddot{u}r_u + \dot{u}^2 r_{uu} + \ddot{v}r_v + \dot{v}^2 r_{vv} + 2\dot{u}\dot{v}r_{uv}.\end{aligned}$$

Veljati morata enačbi $\langle \ddot{\gamma}, r_u\rangle = 0$, $\langle \ddot{\gamma}, r_v\rangle = 0$. Prva od teh enačb je ekvivalentna

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}(\dot{u}r_u + \dot{v}r_v), r_u \right\rangle &= \frac{d}{dt}\langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, r_u\rangle - \langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, \dot{r}_u\rangle\\ &= \frac{d}{dt}\langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, r_u\rangle - \langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, \dot{u}r_{uu} + \dot{v}r_{uv}\rangle\\ &= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - (\dot{u}^2\langle r_u, r_u u\rangle + \dot{u}\dot{v}\langle r_v, r_{uv}\rangle + \dot{u}\dot{v}\langle r_u, r_{uv}\rangle + \dot{v}^2\langle r_v, r_{vv}\rangle)\\ &= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2).\end{aligned}$$

To je natanko prva Euler-Lagrangeva enačba za geodetke. Simetrično iz $\langle \ddot{\gamma}, r_v\rangle = 0$ dobimo drugo enačbo. □

Posledica 3.8. *Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ naravno parametrizirana geodetka. Potem je njena geodetska ukrivljenost $\varkappa_g$ identično enaka 0.*

Trditev 3.9. *Geodetske krivulje lokalno obstajajo.*

Dokaz: Geodetske krivulje $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ so rešitve sistema Euler-Lagrangevih enačb. To je sistem dveh enačb drugega reda za par $(u(t), v(t))$. Po eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe rešitev mora nujno obstajati na dovolj majhni okolici začetne točke (u_0, v_0). □

Opomba. Ta eksistenčni izrek je po naravi zelo podoben eksistenčnemu izreku za Cauchyjevo nalogo, ki smo ga obdelali pri analizi.

3.1 Geodetska parametrizacija

Definicija 3.10. Naj bo X ploskev in $r : V \to X$ parametrizacija, za katero je $r(0, v)$ geodetska krivulja, hkrati pa je za vsak v_0 tudi $\gamma_{v_0}(u) = r(u, v_0)$ geodetska krivulja in velja, da je $\dot{\gamma}_{v_0} \perp r_v(0, v_0)$. Potem parametrizaciji r rečemo geodetska parametrizacija.

Trditev 3.11. *Naravna parametrizacija $r(u, v) = \gamma_v(u)$ je geodetska natanko tedaj, ko je njena prva fundamentalna forma oblike*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u, v) \end{pmatrix}.$$

Dokaz: Naj bo r naravno parametrizirana in naj bo $E = 1$. Potem velja

$$E = \langle r_u, r_u\rangle = \langle \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v\rangle = 1.$$

Dokazujemo

$$F(0, v) = 0.$$

Ker sta vektorja $\dot{\gamma}_v(0), r_v(0,v)$ pravokotna, lahko zapišemo

$$F(0,v) = \langle r_u(0,v), r_v(0,v)\rangle = \langle \dot{\gamma}_v(0), r_v(0,v)\rangle = 0.$$

Ker je geodetka $u \mapsto r(u,v_0) = \gamma_{v_0}(u)$ naravno parametrizirana geodetka, velja

$$r_{uu}(u,v_0) = \ddot{\gamma}_{v_0}(u) \in (T_{r(u,v_0)}X)^{\perp}.$$

V splošnem velja $r_v \in T_{r(u,v_0)}X$, torej sledi

$$\langle r_{uu}, r_v\rangle = 0 = F_u - \langle r_u, r_{uv}\rangle.$$

Po drugi strani pa vemo, da je $E = 1$, zato lahko poračunamo

$$\langle r_u, r_{uv}\rangle = \frac{1}{2}\langle r_u, r_u\rangle_v = \frac{1}{2}E_v = 0.$$

Zdaj iz pogojev $F(0,v_0) = 0$ ter $F_u(u,v_0) = 0$ sledi $F(u,v) = 0$ za vse (u,v). $\square$

Primer 3.12. *Najenostavnejši primer je ploskev $X = S^2$. S pomočjo prejšnjega izreka je to očitno, saj za parametrizacijo*

$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

dobimo prvo fundamentalno formo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Primer 3.13. *Naj bo X rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če okoli x-osi zavrtimo krivuljo $(f(u), \cosh(\alpha u))$, kjer je f podan z*

$$f(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \alpha^2 \sinh^2(\alpha t)}\, dt.$$

Z drugimi besedami, ploskev X je parametrizirana z

$$r(u,v) = (f(u), \cosh(\alpha u)\cos v, \cosh(\alpha u)\sin v)\,.$$

Po znanem postopku poračunamo prvo fundamentalno formo in dobimo rezultat

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2(\alpha u) \end{pmatrix}.$$

Ni težko opaziti, da je ta fundamentalna forma zelo podobna formi sfere. V resnici nam zgornji predpis podaja vložitev hiperbolične ravnine v prostor $\mathbb{R}^3$.

3.2 Gaussov izrek (Theorema egregium)

Izrek 3.14.

Gaussova ukrivljenost ploskve je izrazljiva s koeficienti prve fundamentalne forme in njihovimi odvodi.

Opomba. Ta izrek z drugimi besedami pravi, da je Gaussova ukrivljenost intrinzična lastnost ploskve.

Definicija 3.15. Intrinzična količina je količina, ki ni odvisna od vložitve ploskve v prostor. Intuitivno to pomeni, da lahko takšno količino izmeri vsak prebivalec ploskve (če je količina seveda izmerljiva).

Opomba. Druga fundamentalna forma ploskve ni intrinzična, ampak ekstrinzična količina ploskve.

Dokaz Theorema egregium: Poiskali bomo način, kako izraziti κ z E, F, G in njihovimi odvodi. Naj bo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizacija ploskve X. Izberimo par ortonormiranih vektorskih polj e_1, e_2 na X:

$$e_i(u,v) : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \bigsqcup_{(u,v)\in V} T_{r(u,v)}X.$$

Skalarne produkte (glede na prvo fundamentalno formo) teh dveh vektorjev lahko izrazimo s Kroneckerjevo delto:

$$\langle e_i, e_j \rangle_I = \delta_{ij}.$$

Naj bo $n(u,v) \in (T_{r(u,v)}X)^\perp$ enotska normala v točki $r(u,v)$ podana s predpisom $n(u,v) = e_1(u,v) \times e_2(u,v)$. V vsaki točki je $r(u,v) = m \in X$ je trojica vektorjev $\{e_1(u,v), e_2(u,v), n(u,v)\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Trdimo, da velja sistem enačb

$$\begin{aligned}
(e_1)_u &= \alpha_1 e_2 + \lambda_1 n, \\
(e_1)_v &= \alpha_2 e_2 + \lambda_2 n, \\
(e_2)_u &= -\alpha_1 e_1 + \mu_1 n, \\
(e_2)_v &= -\alpha_2 e_1 + \mu_2 n.
\end{aligned}$$

Pri tem so $\alpha_i, \lambda_i, \mu_i : V \to \mathbb{R}$ funkcije, odvisne od (u,v). Vektor $(e_1)_u$ (in na enak način ostale) razvijemo po bazi:

$$(e_1)_u = \langle (e_1)_u, e_1 \rangle e_1 + \langle (e_1)_u, e_2 \rangle e_2 + \langle (e_1)_u, n \rangle n.$$

Ker velja $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, sledi

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_i \rangle_u &= 2\langle (e_i)_u, e_i \rangle = 0, \\
\langle e_i, e_i \rangle_v &= 2\langle (e_i)_v, e_i \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Velja pa tudi $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, iz česar po parcialnem odvajanju po u sledi

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle + \langle e_1, (e_2)_u \rangle = 0,$$

oziroma

$$\alpha_1 := \langle (e_1)_u, e_2 \rangle = -\langle e_1, (e_2)_u \rangle.$$

Simetrično pokažemo s parcialnim odvajanjem po v

$$\alpha_2 = \langle (e_1)_v, e_2 \rangle = -\langle e_1, (e_2)_v \rangle.$$

Bistveni korak pri dokazovanju Gaussovega Theorema egregium bo naslednja lema.

Lema 3.16.

$$(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u = \langle (e_1)_u, (e_2)_v \rangle - \langle (e_1)_v, (e_2)_u \rangle = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Dokaz leme: Sredinska enačba sledi direktno iz izražave parcialnih odvodov, ki smo jo izpeljali na začetku dokaza. Po drugi strani pa iz istih enačb dobimo sklep

$$\begin{aligned}
(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle e_1, (e_2)_v \rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle e_1, (e_2)_u \rangle \\
&= \langle (e_1)_u, (e_2)_v \rangle + \langle e_1, (e_2)_{uv} \rangle - \langle (e_1)_v, (e_2)_u \rangle - \langle e_1, (e_2)_{uv} \rangle \\
&= \langle (e_1)_u, (e_2)_v \rangle - \langle (e_1)_v, (e_2)_u \rangle.
\end{aligned}$$

Spomnimo se, da smo pri definiciji Gaussove ukrivljenosti

$$\kappa(m) = \lim_{U\to m} \frac{A(n_*(U))}{A(U)}$$

srečali formulo

$$\langle n_u \times n_v, n\rangle = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ker je $n = \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$, imamo po Lagrangeevi enakosti za skalarni produkt vektorskih produktov

$$\langle n_u \times n_v, n\rangle = \frac{1}{||r_u \times r_v||}\langle n_u \times n_v, r_u \times r_v\rangle = \frac{1}{||r_u \times r_v||}(\langle n_u, r_u\rangle\langle n_v, r_v\rangle - \langle n_u, r_v\rangle\langle n_v, r_u\rangle) = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Po drugi strani pa je v našem primeru kar $n = e_1 \times e_2$, torej bo

$$\langle n_u \times n_v, n\rangle = \langle n_u \times n_v, e_1 \times e_2\rangle = \langle n_u, e_1\rangle\langle n_v, e_2\rangle - \langle n_u, e_2\rangle\langle n_v, e_1\rangle = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

Člene iz zadnje enakosti dobimo s pomočjo sklepa

$$\begin{aligned}
\langle n, e_1\rangle &= 0, \quad \left(\Big/ \frac{\partial}{\partial u}\right)\\
\langle n_u, e_1\rangle + \langle n, (e_1)_u\rangle &= 0,\\
\langle n_u, e_1\rangle &= -\langle n, (e_1)_u\rangle = -\lambda_1,\\
\text{(podobno dobimo recimo) } \langle n_v, e_2\rangle &= -\langle n, (e_2)_v\rangle = -\mu_2,
\end{aligned}$$

in upoštevanja definicij koeficientov pri razvoju vektorjev $(e_1)_u, (e_1)_v, (e_2)_u$ in $(e_2)_v$ po bazi. □

Privzemimo sedaj, da smo dokazali

$$(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Po drugi strani pa smo izpeljali zvezo za Gaussovo ukrivljenost

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Če nam uspe pokazati, da je izraz $(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u$ izrazljiv s koeficienti prve fundamentalne forme in njihovimi odvodi, bo Theorema egregium dokazan, saj lahko zapišemo

$$\kappa = \frac{(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Oglejmo si Gramm-Schmidtov postopek, ki nadomesti bazo $\{r_u, r_v\}$ z bazo $\{e_1, e_2\}$.

$$\begin{aligned}
e_1 &= ar_u\\
e_2 &= br_u + cr_v.
\end{aligned}$$

Pri tem takoj vidimo, da je $a = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Iz enačbe $\langle e_1, e_2\rangle$ dobimo

$$\begin{aligned}
\langle ar_u, br_u + cr_v\rangle &= abE + acF\\
&= a(bE + cF)\\
&= a\langle (b, c)^T, (E, F)^T\rangle = 0.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je vektor $(E, F)^T$ vzporeden $(c, -b)^T$, oziroma

$$\begin{aligned}
b &= -\lambda F,\\
c &= \lambda E.
\end{aligned}$$

Upoštevajmo še, da mora biti e_2 enotski vektor.

$$\begin{aligned}
\langle e_2, e_2\rangle &= \langle -\lambda F r_u + \lambda E r_v, -\lambda F r_u + \lambda E r_v\rangle \\
&= \lambda^2 E F^2 - \lambda^2 E F^2 - \lambda^2 E F^2 + \lambda^2 E^2 G \\
&= -\lambda^2 E F^2 + \lambda^2 E^2 G \\
&= \lambda^2 (E^2 G - E F^2) = \lambda^2 E (EG - F^2) = 1.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E(EG-F^2)}}.$$

To povzemimo:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\sqrt{E}}, \\
b &= -\frac{F}{\sqrt{E(EG-F^2)}}, \\
c &= \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG-F^2}}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \langle (e_1)_u, e_2\rangle \\
&= \langle (a r_u)_u, e_2\rangle \\
&= a\langle r_{uu}, e_2\rangle + a_u \underbrace{\langle r_u, e_2\rangle}_{0} \\
&= ab\langle r_{uu}, r_u\rangle + ac\langle r_{uu}, r_v\rangle \\
&= \frac{1}{2} ab E_u + ac\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right).
\end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \langle (e_1)_v, e_2\rangle \\
&= \langle (a r_u)_v, e_2\rangle \\
&= a\langle r_{uv}, e_2\rangle + a_v \underbrace{\langle r_u, e_2\rangle}_{0} \\
&= ab\langle r_{uv}, r_u\rangle + ac\langle r_{uv}, r_v\rangle \\
&= \frac{1}{2} ab E_v + \frac{1}{2} ac G_u.
\end{aligned}$$

Ker smo koeficiente a, b in c že uspeli izraziti z E, F, G in njihovimi odvodi, nam je isto uspelo tudi za izraz $(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u$. S tem je Gaussov Theorema egregium dokaz. □

Opomba. Splošen izraz za κ je kar zakompliciran. Čim pa predpostavimo, da imamo parametrizacijo $F = 0$, velja

$$a = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

oziroma

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Od tod dobimo

$$\kappa = \frac{(\alpha_1)_v - (\alpha_2)_u}{\sqrt{EG}}.$$

To povzamemo v izreku.

Izrek 3.17.

Če je $F = 0$, je Gaussova ukrivljenost podana s formulo

$$\kappa = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right).$$

Formula za Gaussovo ukrivljenost se še bolj poenostavi, če je parametrizacija ploskve geodetska (torej da je $E = 1$, $F = 0$).

Izrek 3.18.

Če je ploskev X parametrizirana z geodetsko parametrizacijo, se njena Gaussova ukrivljenost izraža s formulo

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right).$$

Dokaz: Pri geodetski parametrizaciji imamo $E = 1$, $F = 0$. Če zapišemo

$$G_u = (\sqrt{G}^2)_u = 2\sqrt{G}\sqrt{G}_u,$$

dobimo natanko iskano formulo. □

3.3 Ploskve s konstantno ukrivljenostjo

Izrek 3.19.

1. *Ploskev X, katere ukrivljenost je identično enaka 0, je izometrična kosu ravnine.*
2. *Ploskev X, katere ukrivljenost je identično enaka $1/a^2$ ali $-1/a^2$ je izometrična kosu sfere z radijem a oziroma kosu traktroida (psevdosfere) s polmerom a.*

Dokaz:

1. Vpeljimo novo oznako za koeficient $g := \sqrt{G}$. Ta funkcija je dobro definirana, saj mora zaradi regularnosti parametrizacije biti $G > 0$. Dokazali smo že, da lahko vsako ploskev lokalno parametriziramo z geodetsko parametrizacijo. V tej parametrizaciji velja

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.$$

Za ploščato ploskev torej velja

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0.$$

To pomeni, da je funkcija $g = g(u, v)$ oblike

$$g(u, v) = A(v)u + B(v).$$

Poiskati moramo ustrezni funkciji $A(v)$ in $B(v)$, ki ju bomo dobili iz geometrijskih lastnosti geodetske parametrizacije. Spomnimo se, da za geodetsko krivuljo $v \mapsto r(0, v)$ velja

$$G(0, v) = \langle r_v(0, v), r_v(0, v) \rangle = 1.$$

Enakost $\langle r_v(0,v), r_v(0,v)\rangle = 1$ dobimo iz naravnosti parametrizacije r. Poiščimo še $G_u(0,v)$. Ker je krivulja $v \mapsto r(0,v)$ naravno parametrizirana, je rešitev prve Euler-Lagrangeeve enačbe za geodetke, ki jo v našem posebnem primeru lahko zapišemo v obliki

$$\ddot{u} = \frac{1}{2} G_u \dot{v}^2.$$

Naša geodetka je podana z $\gamma(t) = r(0, v(t))$ in velja $u = 0, v = t$, od koder sledi

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 0, \\ \dot{v} &= 1. \end{aligned}$$

Torej dobimo

$$0 = \frac{1}{2} G_u \implies G_u(0,v) = 0.$$

Začetna pogoja $G(0,v) = 1$ in $G_u(0,v) = 0$ implicirata

$$\begin{aligned} G(0,v) = 1 &\implies g(0,v) = 1 \\ G_u(0,v) = 0 &\implies G_u = (g^2)_u = 2gg_u = 0 \implies g_u(0,v) = 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} g(0,v) &= B(v) = 1, \\ g_u(0,v) &= A(v) = 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da je

$$g(u,v) = 1 \implies G(u,v) = 1,$$

torej bo prva fundamentalna forma ploskve X enaka

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in bo po izreku za prve fundamentalne forme izometrična kosu ravnine.

2. Najprej obravnavajmo primer $\kappa = \frac{1}{a^2}$. Iz enačbe

$$\kappa = -\frac{g_{uu}}{g} = \frac{1}{a^2}$$

dobimo

$$g_{uu} = -\frac{1}{a^2} g.$$

Splošna rešitev te enačbe je oblike

$$g(u,v) = A(v) \cos\left(\frac{1}{a} u\right) + B(v) \sin\left(\frac{1}{a} u\right)$$

in zadošča začetnima pogojema

$$g(0,v) = 1, \;\; g_u(0,v) = 0.$$

Tako dobimo $g(0,v) = A(v) = 1$, $g_u(0,v) = \frac{1}{a} B(v) = 0 \implies B(v) = 0$.
Torej imamo

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \cos\left(\frac{1}{a} u\right), \\ G(u,v) &= \cos^2\left(\frac{1}{a} u\right), \end{aligned}$$

prva fundamentalna forma se glasi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(\frac{1}{a}u) \end{pmatrix},$$

kar je natanko fundamentalna forma sfere. Torej je X izometrična kosu sfere.

V primeru $\kappa = -\frac{1}{a^2}$ dobimo enačbo

$$\frac{g_{uu}}{g} = \frac{1}{a^2} \implies g_{uu} = \frac{1}{a^2} g.$$

Nato na isti način kot za $\kappa = \frac{1}{a^2}$ dobimo splošno rešitev

$$g(u,v) = A(v) \cosh\left(\frac{1}{a}u\right) + B(v) \sinh\left(\frac{1}{a}u\right),$$

od tod pa

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2(\frac{1}{a}u) \end{pmatrix},$$

kar je natanko fundamentalna forma traktroida.

$\square$

4 Gauss-Bonnetov izrek

Gauss-Bonnetov izrek ima dve verziji: lokalno in globalno. Prvi izrek obravnava (odsekoma) gladke sklenjene krivulje, drugi pa poveže Gaussovo ukrivljenost z Eulerjevo karakteristiko ploskve.

Izrek 4.1.

Naj bo X gladka ploskev in naj bo γ enostavno sklenjena krivulja na X, ki omejuje območje $R \subseteq X$, difeomorfno disku, z robom $\partial R = \gamma$. Tedaj velja

$$\int_\gamma \varkappa_g \, ds = 2\pi - \int_R \kappa \, dA.$$

Pri tem je $\varkappa_g(\gamma(s))$ geodetska ukrivljenost krivlje γ, ds pa ločni element na γ glede na naravno parametrizacijo.

Pred dokazom si poglejmo dva primera:

Primer 4.2. *Recimo, da je X ravnina. Zanjo velja $\kappa = 0$, torej se Gauss-Bonnetova formula glasi*

$$\int_\gamma \varkappa_g \, ds = 2\pi = \int_\gamma \varkappa \, ds.$$

To je smiselno zaradi naslednjega razmisleka. Naj bo $\psi(s)$ kot med $\dot\gamma(s)$ in abscisno osjo. Ker krivulja brez samopresečišč obkroži disk natanko enkrat, velja

$$\int_\gamma \frac{d\psi}{ds} \, ds = \int_\gamma \dot\psi(s) \, ds = \psi(l(s)) - \psi(0) = 2\pi.$$

Pokazati moramo, da je $\dot\psi = ||\ddot\gamma|| = \varkappa$. Najprej imamo po definiciji kota ψ zvezo

$$\dot\gamma(s) = (\cos(\psi(s)), \sin(\psi(s))).$$

Sledi

$$\ddot\gamma(s) = (-\dot\psi \sin(\psi(s)), \dot\psi \cos(\psi(s))) \implies ||\ddot\gamma|| = \dot\psi.$$

Torej res dobimo

$$\int_\gamma \varkappa \, ds = 2\pi.$$

Opomba. Da lahko krivulja brez samopresečišč obroži točko največ enkrat, je dokazal Hopf v svojem umlaufsatzu.

Primer 4.3. *Naj bo X sfera s polmerom r in $R \subseteq X$ zgornja polsfera. Potem je $\gamma = \partial R$ ekvator in zato geodetska krivulja. Velja torej $\varkappa_g = 0$ ter $\kappa = \frac{1}{r^2}$. Dobimo*

$$0 = \int_\gamma \varkappa_g \, ds = 2\pi - \int_R \kappa \, dA \implies \int_R dA = 2\pi r^2.$$

Torej ima zgornja polsfera površino $2\pi r^2$, kar se seveda ujema z našim znanjem o površini sfere.

Dokaz lokalnega Gauss-Bonnetovega izreka: Ključ do izreka bo Greenova formula. Naj bo β sklenjena krivulja, ki omejuje območje S. Tedaj za poljubni gladki funkciji P, Q na S velja

$$\int_\beta P \, du + Q \, dv = \int_S Q_u - P_v \, dudv.$$

Naj bo $r : V \to X$ parametrizacija naše ploskve in naj bo krivulja $\gamma(s) = r(\beta(s))$ naravno parametrizirana. Oglejmo si količino

$$I = \int_\beta \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \, ds.$$

Pri tem sta e_1 in e_2 gladki, ortonormirani vektorski polji na R. Zapišimo najprej $e_2(s) = e_2(u(s), v(s))$. Potem imamo

$$\dot{e}_2 = (e_2)_u \dot{u} + (e_2)_v \dot{v}.$$

Tako dobimo

$$\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \, ds = \underbrace{\langle e_1, (e_2)_u \rangle}_{P} \, du + \underbrace{\langle e_1, (e_2)_v \rangle}_{Q} \, dv.$$

Zdaj uporabimo Greenovo formulo, da dobimo

$$\begin{aligned}
I &= \int_S \langle e_1, (e_2)_v \rangle_u - \langle e_1, (e_2)_u \rangle_v \, dS \\
&= \int_S \langle (e_1)_u, (e_2)_v \rangle + \langle e_1, (e_2)_{uv} \rangle - \langle (e_1)_v, (e_2)_u \rangle - \langle e_1, (e_2)_{uv} \rangle \, dS \\
&= \int_S \langle (e_1)_u, (e_2)_v \rangle - \langle (e_1)_v, (e_2)_u \rangle \, dS \\
&= \int_S \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}} \, dS. \text{ (lema iz dokaza Theorema egregium)}
\end{aligned}$$

Imamo

$$I = \int_S \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}} \, dudv = \int_S \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \int_R \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \, dA = \int_R \kappa \, dA.$$

Izrazimo I še na drug način. Naj bo $\theta(s)$ kot med $\dot{\gamma}(s)$ in $e_1(s)$. Ker je $\{e_1(\gamma(s)), e_2(\gamma(s))\}$ ortonormirana baza v tangentnem prostoru $T_{\gamma(s)}X$, lahko pišemo

$$\dot{\gamma}(s) = \cos(\theta(s)) e_1(\gamma(s)) + \sin(\theta(s)) e_2(\gamma(s)).$$

Označimo $\eta = n \times \dot{\gamma} = -\sin(\theta(s)) e_1(\gamma(s)) + \cos(\theta(s)) e_2(\gamma(s))$, ki je enotski vektor v $T_{\gamma(s)}X$. Imamo še

$$\ddot{\gamma} = -\dot{\theta} \sin(\theta) e_1 + \dot{\theta} \cos(\theta) e_2 + \cos(\theta) \dot{e}_1 + \sin(\theta) \dot{e}_2 = \dot{\theta} \eta + \cos(\theta) \dot{e}_1 + \sin(\theta) \dot{e}_2.$$

Zdaj lahko izračunamo geodetsko ukrivljenost krivulje γ:

$$\begin{aligned}
\varkappa_g &= \langle \ddot{\gamma}, \eta \rangle \\
&= \langle \dot{\theta} \eta + \cos(\theta) \dot{e}_1 + \sin(\theta) \dot{e}_2, \eta \rangle \\
&= \dot{\theta} + \langle \cos(\theta) \dot{e}_1 + \sin(\theta) \dot{e}_2, -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2 \rangle \\
&= \dot{\theta} - (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \\
&= \dot{\theta} - \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Pri prehodu na predzadnjo enakost smo uporabili dejstvi, da $\langle e_i, \dot{e}_i \rangle = 0$ ter $\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle = -\langle e_2, \dot{e}_1 \rangle$. Ugotovili smo, da je

$$\int_\gamma \varkappa_g \, ds = \int_\beta \dot{\theta} \, ds - \int_\beta \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \, ds.$$

Od tod dobimo

$$\int_\gamma \varkappa_g \, ds = 2\pi - \int_R \kappa \, dA.$$

□

Zdaj dokažimo še nekoliko splošnejšo verzijo izreka, ki velja za odsekoma gladke kriuvlje.

Izrek 4.4.

Naj bo γ naravno parametrizirana odsekoma gladka krivulja, ki omejuje n-kotnik R z notranjimi koti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Potem velja

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + \int_\gamma \varkappa_g \, ds + \int_R \kappa \, dA.$$

Dokaz: Naj bodo δ_i zunanji koti mnogokotnika, ki pripadajo kotom α_i, torej $\delta_i = \pi - \alpha_i$. Opazimo, da bo vrednost izraza

$$\int_\gamma \dot{\theta} \, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Torej bo

$$\begin{aligned}
I = \int_R \kappa \, dA &= 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \delta_i - \int_\gamma \varkappa_g \, ds \\
&= 2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) - \int_\gamma \varkappa_g \, ds \\
&= (2-n)\pi + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \int_\gamma \varkappa_g \, ds \\
\implies \sum_{i=1}^{n} \alpha_i &= (n-2)\pi + \int_\gamma \varkappa_g \, ds + \int_R \kappa \, dA.
\end{aligned}$$

□

Posledica 4.5. *Če je R mnogokotnik, omejen z geodetkami, velja*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + \int_R \kappa \, dA.$$

S pomočjo izreka za odsekoma gladke krivulje lahko dokažemo globalno verzijo Gauss-Bonnetovega izreka, ki poveže Gaussovo ukrivljenost z Eulerjevo karakteristiko ploskve. Najprej uvedimo nekaj definicij.

Definicija 4.6. Mnogoterost X je sklenjena mnogoterost, če je kompaktna in brez roba.

Opomba. V resnici smo na začetku leta definirali samo mnogoterosti brez roba, torej takšne, za katere lahko za vsako točko najdemo neko okolico, homeomorfno odprti krogli.

Primer 4.7. *Sfera, torus, povezane vsote torusov so sklenjene mnogoterosti. Plašč valja ni sklenjena mnogoterost, ker ima dva roba.*

Definicija 4.8. Poligonalizacija ploskve X je družina krivočrtnih mnogokotnikov $\{F_i\}_1^n$ na X, za katero velja

1. $F_i^{\text{zap}} \subseteq X$,
2. $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = X$,
3. za vsaka $i \neq j$ je presek $F_i \cap F_j$ bodisi prazen, bodisi unija (ene ali več) stranic.

Družina $\{F_i\}_1^n$ se imenuje množica lic na X. Poleg tega definiramo še množico vseh robov $\{E_i\}$ ter množico vseh vozlišč $\{V_i\}$ na X.

Definicija 4.9. Eulerjeva karakteristika poligonalizacije $\mathcal{P} = \{F, E, V\}$ je podana s formulo

$$\chi(\mathcal{P}) = \#V - \#E + \#F.$$

Brez dokaza bomo privzeli naslednji izrek, ki poskrbi za dobro definiranost Eulerjeve karakterisitike ploskve.

Izrek 4.10.

Naj bosta $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dve poligonalizaciji ploskve X. Potem velja

$$\chi(\mathcal{P}_1) = \chi(\mathcal{P}_2).$$

Definicija 4.11. Naj bo $\mathcal{P}$ poljubna poligonalizacija ploskve X. Eulerjeva karkteristika ploskve X je podana s predpisom

$$\chi(X) = \chi(\mathcal{P}).$$

Nazadnje povejmo globalno verzijo Gauss-Bonnetovega izreka.

Izrek 4.12.

Naj bo X orientabilna sklenjena ploskev. Potem velja

$$2\pi\chi(X) = \int_X \kappa \, dA.$$

Izrek 4.13.

Eulerjeva karakteristika ploskve je topološka invarianta. Natančneje, če sta ploskvi X_1, X_2 homeomorfni, potem je $\chi(X_1) = \chi(X_2)$.

Če sta X_1, X_2 sklenjeni in orientabilni, velja tudi obrat, torej iz $\chi(X_1) = \chi(X_2)$ sledi $X_1 \approx X_2$. Še več, velja

$$\chi(X) = 2 - 2g(X),$$

kjer je g genus oziroma rod ploskve, torej na primer število lukenj v povezani vsoti torusov.

Dokaz globalne verzije Gauss-Bonnetovega izreka: Naj bo $\mathcal{P}$ poligonalizacija ploskve X. Za vsako lice F_i iz $\mathcal{P}$ napišimo lokalno Gauss-Bonnetovo formulo:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{k_i} = \pi(n_k - 2) + \int_{F_k} \kappa \, dA + \int_{\partial F_k} \varkappa_g \, ds.$$

Vse te formule seštejemo:

$$\sum_{k=1}^{\#F} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{k_i} = \pi \sum_{k=1}^{\#F} (n_k - 2) + \sum_{k=1}^{\#F} \int_{F_k} \kappa \, dA + \sum_{k=1}^{\#F} \int_{\partial F_k} \varkappa_g \, ds = 2\pi\#E - 2\pi\#F + \int_X \kappa \, dA.$$

Po lemi o rokovanju je vsota vseh n_k je enaka dvakratniku števila robov, oziroma

$$\sum_{k=1}^{\#F} n_k = 2\#E \implies \sum_{k=1}^{\#F} (n_k - 2) = 2\#E - 2\#F.$$

Ker ima unija robov $\bigcup_{k=1}^{n} \partial F_k$ na ploskvi mero 0, imamo zvezo

$$\sum_{k=1}^{\#F} \int_{F_k} \kappa \, dA = \int_X \kappa \, dA.$$

Poleg tega je

$$\sum_{k=1}^{\#F} \int_{\partial F_k} \varkappa_g \, ds = 0,$$

ker ima zaradi skladne orientacije večkotnikov vsak prispevek stranice pri integiranju tudi svoj nasprotno enak prispevek. Ker je X sklenjena ploskev, si lahko predstvljamo, da imamo okoli vsakega vozlišča vsoto kotov 2π, torej skupaj

$$\sum_{k=1}^{\#F} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{k_i} = 2\pi \# V.$$

Ko povežemo vse te enačbe, dobimo

$$\int_X \kappa \, dA = 2\pi(\#V - \#E + \#F) = 2\pi\chi(X).$$

□

4.1 Vektorska polja na ploskvah

Definicija 4.14. Naj bo X sklenjena, orientabilna ploskev. Vektorsko polje ζ na X je gladka preslikava $\zeta : X \to \mathbb{R}^3$, da za vsak $m \in X$ velja $\zeta(m) \in T_m X$.

Definicija 4.15. Stacionarna točka oziroma ničla vektorskega polja ζ je točka $m \in X$, za katero velja $\zeta(m) = 0$. Ničla je izolirana, če obstaja okolica $m \in U \subseteq X$, da je $\zeta(p) \neq 0$ za vsak $p \in U \backslash \{m\}$.

Definicija 4.16. Večkratnost izolirane ničle $p \in X$ polja ζ je podana s predpisom

$$m_p = m(p) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \dot{\psi}(s) \, ds.$$

Pri tem je γ dovolj majhna krivulja v X, ki obkroži točko p in je rob nekega diska v X. Kot $\psi(s)$ je kot med $\dot{\gamma}(s)$ in vektorjem $\eta(\gamma(s))$, kjer je η neko neničelno vektorsko polje na disku U, ki ga obkroža γ, torej $\gamma = \partial U$.

Opomba. V splošnem imajo različne vrste ničel različne lastnosti. Ničla ima lahko negativno večkratnost.

Pokažimo, da je definicija večkratnosti dobra.

1. Neodvisnost od izbire η: Naj bo ζ neničelno vektorsko polje na U. Potem bi imeli po definiciji

   $$m_\eta(p) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \dot{\psi}(s) \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (\psi \dot{+} \varphi) \, ds,$$

   kjer je $\varphi(s)$ kot med $\eta(s)$ in $\zeta(s)$. Dokazati moramo torej

   $$\int_\gamma \dot{\varphi} \, ds = 0.$$

   Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da sta η in ζ enotski vektorski polji (tu uporabimo predpostavko o neničelnost teh dveh polj). Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \arccos(\langle \eta(s), \zeta(s)\rangle) \\
\dot{\varphi}(s) &= -\frac{\langle \eta_u \dot{u} + \eta_v \dot{v}, \zeta\rangle + \langle \eta, \zeta_u \dot{u} + \zeta_v \dot{v}\rangle}{\sqrt{1-\langle \eta, \zeta\rangle^2}} \\
&= -\frac{(\langle \eta_u, \zeta\rangle + \langle \eta, \zeta_u\rangle)\dot{u} + (\langle \eta_v, \zeta\rangle + \langle \eta, \zeta\rangle)\dot{v}}{\sqrt{1-\langle \eta, \zeta\rangle^2}} \\
&= -\frac{\langle \eta, \zeta\rangle_u \dot{u} + \langle \eta, \zeta\rangle_v \dot{v}}{\sqrt{1-\langle \eta, \zeta\rangle^2}}.
\end{aligned}$$

Na tej točki uporabimo Greenovo formulo za polji $P = -\frac{\langle \eta,\zeta\rangle_u}{\sqrt{1-\langle \eta,\zeta\rangle^2}}$ in $Q = -\frac{\langle \eta,\zeta\rangle_v}{\sqrt{1-\langle \eta,\zeta\rangle^2}}$. Pred tem označimo $D = \sqrt{1-\langle \eta, \zeta\rangle^2}$. Najprej poračunamo

$$\begin{aligned}
D_u &= -\frac{\langle \eta, \zeta\rangle \langle \eta, \zeta\rangle_u}{D} \\
D_v &= -\frac{\langle \eta, \zeta\rangle \langle \eta, \zeta\rangle_v}{D}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_u - P_v &= -\frac{1}{D^2}\left(\langle \eta, \zeta\rangle_{uv} D - \langle \eta, \zeta\rangle_v D_u - \langle \eta, \zeta\rangle_{uv} D + \langle \eta, \zeta\rangle_u D_v\right) \\
&= \underbrace{-\langle \eta, \zeta\rangle_{uv} D + \langle \eta, \zeta\rangle_{vu} D}_{0} + \frac{1}{D}\underbrace{\left(\langle \eta, \zeta\rangle_u \langle \eta, \zeta\rangle_v \langle \eta, \zeta\rangle - \langle \eta, \zeta\rangle_v \langle \eta, \zeta\rangle_u \langle \eta, \zeta\rangle\right)}_{0} = 0
\end{aligned}$$

2. Neodvisnost od poti, ki obkroži točko: Na območjih, ki jih omejujejo zanke iz obhodov γ in β sta vektorski polji po predpostavki neničelni. Po točki 1. je torej

$$\int_\gamma \dot{\psi}(s)\, ds - \int_\beta \dot{\psi}(s)\, ds = 0.$$

Dokazali bomo naslednji izrek.

Izrek 4.17.

Naj bo ζ zvezno vektorsko polje na gladki sklenjeni orientabilni ploskvi X, ki ima samo izolirane ničle $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Potem velja

$$\sum_{i=1}^n m_\zeta(X_i) = \chi(X).$$

Dokaz: Okoli vsake ničle X_i našega polja vzemimo disk R_i. Definirajmo $Y = X \setminus \bigcup_{i=1}^n R_i$. Opremimo Y z ortonormiranimi vektorskimi polji e_1, e_2. Za vsak $m \in Y$ naj bo $e_1(m) = \frac{\zeta(m)}{||\zeta(m)||} \neq 0$. Hkrati naj bo $e_2 = e_1(m) + \eta e_2(m)$. Po lokalni verziji Gauss-Bonnetovega izreka za gladek rob velja

$$\int_Y \kappa\, dA = -\sum_{i=1}^n \int_{\partial R_i} \langle e_1, \dot{e}_2\rangle\, ds.$$

Predznak je v tej enačbi negativen, ker se po krivuljah $\gamma_i = \partial R_i$ sprehajamo v pozitivni smeri glede na R_i, torej v negativni smeri glede na zunanjost $\bigcup_{i=1}^n R_i$. Poligonalizirajmo Y. Na vseh krivuljah, ki niso zunanje, se prispevki pri integraciji odštejejo. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ izberemo med seboj ortonormirani polji f_1^i, f_2^i. Potem velja

$$\int_{R_i} \kappa\, dA = \int_{\gamma_i} \langle f_1^i, \dot{f}_2^i\rangle\, ds.$$

Iz dokaza Gauss-Bonnetove formule vemo

$$\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle = \dot{\theta} - \varkappa_g,$$
$$\langle f_1^i, \dot{f}_2^i \rangle = \dot{\phi}_i - \varkappa_g.$$

Pri tem je $\theta(m)$ kot med $e_1(m)$ in $\dot{\gamma}(m)$, $\phi_i(m)$ pa kot med $f_1^i(m)$ in $\dot{\gamma}_i(m)$ za vsak $m \in \gamma_i$. Če te formule povežemo, dobimo

$$\int_Y \kappa \, dA + \sum_{i=1}^n \int_{R_i} \kappa \, dA = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \langle f_1^i, \dot{f}_2^i \rangle - \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \, ds.$$
$$\int_X \kappa \, dA = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \dot{\phi}_i - \dot{\theta} \, ds.$$

Zdaj upoštevamo, da je $\theta = \measuredangle(e_1, \dot{\gamma})$, $\phi_i = \measuredangle(f_1^i, \dot{\gamma})$, torej $\phi_i - \theta = \measuredangle(f_1^i, e_1) = \measuredangle(f_1^i, \zeta) = \measuredangle(\zeta, -f_1^i) =: \psi_i$. Dobimo

$$\chi(X) = \frac{1}{2\pi} \int_X \kappa \, dA = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \dot{\psi}_i \, ds = \sum_{i=1}^n m_\zeta(X_i).$$
$$\implies \sum_{i=1}^n m(X_i) = \chi(X).$$

□

Primer 4.18. *Ker ima sfera S^2 Eulerjevo karakteristiko $\chi(S^2) = 2$, na njej ne obstaja (neničelno) vektorsko polje brez ničel. Prav tako ne obstaja vektorsko polje, ki bi imelo eno samo ničlo.*

Kaj bi se zgodilo, če bi bilo naše polje gradientno polje neke funkcije?

Definicija 4.19. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Naj bo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ gladka krivulja, $\gamma(0) = m$. Gradientno polje $\mathrm{grad}_X f = \nabla_X f$ je po Rieszovem reprezentacijskem izreku enolično določeno na naslednji način:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = (D_m f)(\dot{\gamma}(0)) = \langle \nabla_X f, \dot{\gamma}(0) \rangle.$$

Takšna definicija je legitimna, ker je $D_m f : T_m X \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, vsak linearen funkcional pa lahko predstavimo kot delovanje skalarnega produkta. Skalarni produkt $\langle \nabla_X f, \dot{\gamma}(0) \rangle$ je določen s prvo fundamentalno formo na $T_m X$.

Skupaj z izrekom **??**[] smo dobili naslednji izrek.

Izrek 4.20.

Naj bo X sklenjena in orientabilna gladka mnogoterost ter $f : X \to \mathbb{R}$ taka funckija, da so vse ničle polja $\nabla_X f$ izolirane. Potem je

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^n m_{\nabla_X f}(X_i).$$

Izrek 4.21.

Naj bo X sklenjena in orientabilna gladka mnogoterost ter $f : X \to \mathbb{R}$ vsaj dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funckija s končno mnogo izoliranimi stacionarnimi točkami in neizrojeno Hessejevo matriko. Naj bo Max število lokalnih maksimumov f, Min število lokalnih minimumov f ter Sed število *sedel f. Potem velja*

$$\chi(X) = Max - Sed + Min.$$

Skica dokaza: Okoli minumimov in maksimumov funkcije f je večkratnost $m_{\nabla_X f} = 1$. Razmisliti moramo, kako izgleda $\nabla_X f$ v okolici sedla. Naj bo $R \subseteq X$ tako majhen disk okoli sedla, da se geometrijsko ne razlikuje od situacije na ravnini. Razvijemo f v Taylorjevo vrsto okoli stacionarne točke $\nabla_X f$.

$$\begin{aligned} f(u_0+h, v_0+k) &\approx f(u_0,v_0) + f_u(u_0,v_0)h + f_v(u_0,v_0)k + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= f(u_0,v_0) + \underbrace{\langle \nabla_X f(u_0,v_0), (h,k)\rangle}_{0} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \mathrm{Hess}(f)_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Označimo $\tilde{f} = f - f(u_0,v_0)$. V bižini (u_0,v_0) imamo približno

$$\tilde{f}(u_0+h, v_0+k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = C.$$

Ker je Hessejeva matrika simetrična, obstaja ortogonalna preslikava (rotacija) Q, da je $Q\mathrm{Hess}(f)_{(u_0,v_0)}Q^T$ diagonalna. Tam imamo

$$\tilde{f}(u_0+h, v_0+k) = \begin{pmatrix} \tilde{h} & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix} = \lambda_1 \tilde{h}^2 + \lambda_2 \tilde{k}^2 = C.$$

V primeru pozitivno ali negativno definitne Hessejeve matrike ($\lambda_1\lambda_2 > 0$) ta enačba predstavlja elipso. Pokažimo, da je gradient vedno pravokoten na nivojnice. Naj bo $\beta(t)$ nivojnica f, torej $f(\beta(t)) = \text{konst.}$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\beta(t)) = \langle \nabla_X f, \dot{\beta}(0)\rangle = 0 \implies \nabla_X f \perp \dot{\beta}(0).$$

Okoli negativno definitne točke ima torej gradientno polje izvor, okoli pozitino definitne točke pa ponor (prava izbira besede?). Če je Hessejeva matrika neizrojena in nedefinitna, je njena diagonalizacija oblike

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

kjer je $\lambda_1\lambda_2 > 0$. V tem primeru za nivojnice velja enačba

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix} = \lambda_1 \tilde{h}^2 - \lambda_2 \tilde{k}^2 = C,$$

torej so nivojnice hiperbole. Takšnim stacionarnim točkam pravimo starcionarne točke sedla, zanje velja $m_{\nabla_X f} = -1$. Če uporabimo prejšnji izrek za $\zeta = \nabla_X f$ dobimo

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^{n} m_{\nabla_X f}(X_i) = \text{Max} - \text{Sed} + \text{Min}.$$

$\square$