

# Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

3. november 2023

## 1 Uvod

**Definicija 1.1.** Topološki prostor  $M$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost, če za vsak  $m \in M$  obstaja okolica  $m \in U \subseteq M$  in homeomorfizem  $\varphi : U \rightarrow V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$  (pri tem je  $V \approx B^n$ ).

**Primer 1.2.** Naslednje množice so primeri mnogoterosti.

1.  $M = \mathbb{R}^n$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost,
2.  $S^1$  je 1-dimenzionalna mnogoterost,
3.  $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost,
4. Projekтивni prostori  $\mathbb{R}P^n = B^n / \sim$ , kjer je  $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$  so  $n$ -dimenzionalne mnogoterosti.
5. Grupa

$$\text{SU}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det g = 1 \right\}$$

je 3-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč  $\text{SU}(2) = S^3$ . To je primer Lijeve grupe.

6. Grupa

$$\text{SO}(3) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid g^T = g^{-1}, \det g = 1 \right\}.$$

Izkaže se, da je  $\text{SO}(3) = B^3 / \sim = \mathbb{R}P^3$ . To velja, ker vsaka preslikava iz  $\text{SO}(3)$  predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota  $\pi$  in  $-\pi$  predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli  $B(0, \pi)^3 \approx B^3$  priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projekivni prostor  $\mathbb{R}P^3$ .

### 1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

**Definicija 1.3.** Preslikava  $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je odvedljiva v točki  $w \in W$ , če obstaja linearna preslikava  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in preslikava  $\mathcal{O} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da za vse ustrezne argumente velja

$$F(w + h) = F(w) + Ah + \mathcal{O}(h)$$

in  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{O}(h)\|}{\|h\|} = 0$ . Odvod preslikave  $F$  v točki  $w$  je preslikava  $A = D_w F = (DF)_w$ .

**Definicija 1.4.** Preslikava  $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je odvedljiva na množici  $W$ , če je odvedljiva v vsaki točki  $w \in W$ .

**Definicija 1.5.** Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

**Definicija 1.6.** Naj bo  $M$   $n$ -dimenzionalna mnogoterost. Gladek atlas  $\mathcal{U}$  na  $M$  je družina parov  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ , če za vsak  $\alpha \in A$  velja:

1.  $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$
2.  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  je homeomorfizem za nek  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$
3.  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  je pokritje  $M$
4. za vsaka  $\alpha, \beta \in A$  je preslikava  $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$  difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave  $g_{\alpha\beta}$   $k$ -difeomorfizmi z zveznim  $k$ -tim odvodom, imamo  $\mathcal{C}^k$ -atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo  $\mathcal{C}^\infty$ -atlas, če so vse analitične, pa  $\mathcal{C}^\omega$ -atlas.

*Opomba.* Preslikava  $g_{\alpha\beta}$  iz prejšnje definicije je preslikava iz  $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na  $\mathbb{R}^n$  matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w.$$

**Definicija 1.7.** Topološka mnogoterost  $M$ , ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti  $M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.8.** Naj bo  $M$   $n$ -dimenzionalna mnogoterost. Funkcija  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je gladka, če je gladka vsaka preslikava  $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.9.** Naj bo  $(M, \mathcal{U})$  gladka mnogoterost. Krivulja  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  je gladka krivulja v  $M$ , če za  $\forall \alpha \in A$  velja, da je  $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  gladka krivulja v  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 1.10.** Atlasa  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  in  $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \varphi_\beta) \mid \beta \in B\}$  na mnogoterosti  $M$  sta ekvivalentna, če za vsak par  $(\alpha, \beta) \in A \times B$  iz  $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\psi_\beta)_*(U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

*Opomba.* Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa  $\mathcal{U}$  označimo z  $[\mathcal{U}]$ .

**Definicija 1.11.** Naj bo  $M$  topološka mnogoterost in  $\mathcal{U}$  gladek atlas na  $M$ . Potem je  $[\mathcal{U}]$  gladka struktura na  $M$ .

*Opomba.* Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima  $\mathbb{R}^4$  neštavno neskončno eksotičnih gladkih struktur. Vsi ostali  $\mathbb{R}^n$  imajo zgolj svojo trivialno in nobene eksotične.

## 2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženi v prostor  $\mathbb{R}^3$ .

**Definicija 2.1.** Množica  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  je gladka vložena ploskev, če za vsak  $m \in X$  obstaja kroglja za  $m$   $W \subseteq \mathbb{R}^n$  in gladka funkcija  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja

1.  $X \cap W = f^{-1}(\{0\})$
2.  $(Df)_w \neq 0$  za vsak  $w \in X \cap W$

Vložena ploskev  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na  $X$ . Vzemimo točko  $m \in X$ . Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica  $f : W \ni m \rightarrow \mathbb{R}$  in vemo, da  $D_m f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (m) \neq 0$ . Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo  $m = (x_0, y_0, z_0)$  in BŠS naj bo  $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$ . Torej obstaja gladka okolica  $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$  in gladka funkcija  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , da velja  $f(x, y, g(x, y)) = 0$  za vsak  $(x, y) \in V$ . Po potrebi lahko množico  $W$  zmanjšamo na  $W_0 \subseteq W$ , da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo  $U = W_0 \cap X$ , postane par  $(U, \varphi)$  karta na  $X$ .

### 2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo – metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ , je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Naj bo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  neki skalarni produkt na  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  in naj bo  $\{v_1, \dots, v_n\}$  baza za  $\mathcal{V}$ , ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  in  $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ . Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ( $\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$ ) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ( $\langle v_i, v_i \rangle > 0$ ) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

*Opomba.* Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo  $P$  poljubna preslikava med bazama,  $L_e$  linearna preslikava glede na bazo  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $L_f$  pa glede na bazo  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = PL_eP^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta  $a_f = Pa_e$  in  $b_f = Pb_e$ . Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned}\langle a_f, b_f \rangle &= \langle a_e, b_e \rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je  $P^T A_f P = A_e$  oziroma zaradi ortogonalnosti  $P$  ekvivalentno

$$A_f = PA_eP^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.

Preden se lotimo definicije tangentne ravnine, se spomnimo naslednje definicije.

**Definicija 2.2.** Naj bo preslikava  $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  odvedljiva. Rang preslikave  $F$  v točki  $w \in W$  je enak rangi matrike  $D_w F$ . Pravimo, da ima  $F$  v točki  $w \in W$  maksimalen rang, če ima matrika  $D_w F$  maksimalen rang.

**Definicija 2.3.** Naj bo  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  vložena ploskev in točka  $m \in X$ . Tangentna ravnina  $T_m X$  je množica tangent vseh krivulj v  $X$ , ki v času  $t = 0$  gredo skozi  $m$ .

$$T_m X = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ krivulja, } \gamma(0) = m\}$$

**Trditev 2.4.**  $T_m X$  je dvodimenzionalen realni vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^3$ .

*Dokaz:* Naj bo  $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  neka regularna parametrizacija ploskve  $X$  (to pomeni, da mora biti rang preslikave  $r$  maksimalen, torej konstantno enak 2) v okolici točke  $m \in X$ . Naj bo  $p = (u, v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ . Pišimo

$$r(p) = r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Naj bo  $m = r(u_0, v_0)$ . Trdimo, da je  $T_m X = \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Najprej dokažimo inkluzijo  $T_m X \subseteq \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Naj bo  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(0) = m = r(u_0, v_0)$  poljubna krivulja. Direktno po definiciji tangentne krivulje sledi  $\dot{\gamma}(0) \in T_m X$ . Dokazati moramo  $\dot{\gamma}(0) \in \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Naj bo  $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$  podana z  $\beta(t) = r^{-1}(\gamma(t))$ . Ker je preslika preslikave  $\beta$  vsebovana v  $\mathbb{R}^2$ , obstajata funkciji  $u(t), v(t)$ , da je  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ . Pri tem velja, da je  $\beta(0) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ . Vidimo, da je  $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ . Po verižnem pravilu za odvajanje imamo

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t) = (D_{(u_0, v_0)} r) \dot{\beta}(0).$$

Torej je  $\dot{\gamma}(0) \in \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ .

Nato dokažimo še obratno inkluzijo  $T_m X \supseteq \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Vzemimo poljuben vektor  $\omega \in \mathbb{R}^3$  in naj bo  $v = (D_{(u_0, v_0)} r) \cdot w$ . Potrebujemo krivuljo  $\gamma(t)$ ,  $\gamma(0) = m$ , za katero bo veljalo  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Oglejmo si

$$(D_{(u_0, v_0)} r) (\dot{\beta}(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r(\beta(t)).$$

Trdimo, da za  $\gamma(t) = r(\beta(t))$  velja  $\dot{\gamma}(0) \in T_m X$ . To je res, saj je  $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ , hkrati pa tudi  $\gamma(0) = r(\beta(0)) = r(u_0, v_0) = m$ . Torej velja, da je  $T_m X = \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Ker smo zahtevali, da je parametrizacija regularna, je matrika  $D_{(u_0, v_0)} r$  ranga 2, torej je  $T_m X$  dvodimenzionalen vektorski prostor.  $\square$

*Opomba.* Tangentna ravnina je pravi vektorski prostor in ne afin kot recimo pri analizi 2a.

Do nadaljnjega nas bodo zanimale lokalne lastnosti ploskev, zato bomo delali v glavnem s ploskvami, ki jih lahko pokrijemo z eno samo karto oziroma z eno samo parametrizacijo.

**Definicija 2.5.** Metrika na ploskvi  $X \subseteq \mathbb{R}^3$ , opremljeni s parametrizacijo  $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ , je preslikava

$$g : X \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$m \longmapsto \begin{pmatrix} g_{11}(m) & g_{12}(m) \\ g_{21}(m) & g_{22}(m) \end{pmatrix},$$

kjer je za vsak  $m \in X$  matrika  $g(m)$  simetrična in pozitivno definitna. To lahko povemo s pogojeoma  $\det g(m) > 0$  in  $g_{11}(m) > 0$ .

*Opomba.* Za drugo parametrizacijo ploskve  $X$  bi dobili druge koeficiente matrike.

Naj bo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  krivulja. Njeno parametrizacijo  $r$  lahko napišemo v obliki  $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$  za primerne funkcije  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ ,  $\gamma(t) = r(\beta(t))$ . V koordinatah lahko zapišemo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} r(\beta(t)) = (D_{(u_0, v_0)} r)(\dot{\beta}(t_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = r_u(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + r_v(u_0, v_0) \dot{v}(t_0).$$

To je razvoj vektorja  $\dot{\gamma}(t_0)$  po bazi  $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$  prostora  $T_{\gamma(t_0)} X$ , ki pa ni nujno ortogonalna. Pravzaprav je ortogonalna le v precej posebnih primerih.

**Definicija 2.6.** Dolžina krivulje  $\gamma : [a, b] \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  glede na metriko  $g$  je v parametrizaciji  $r$  podana s formulo

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt$$

Ustrezni skalarni produkti na ravnini  $T_m X$  so glede na parametrizacijo  $r$  podani s predpisi  $\langle r_u, r_u \rangle_g = g_{11}$ ,  $\langle r_u, r_v \rangle_g = g_{12}$ ,  $\langle r_v, r_v \rangle_g = g_{22}$ . Naj bo sedaj ambientni prostor  $\mathbb{R}^3$  opremljen s fiksnim evklidskim skalarnim produktom, in koeficiente  $g_{ij}$  poračunamo z njim (na enak način kot prej). Pri tem uporabimo naslednje standardne oznake:

$$E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle.$$

Včasih tudi zlorabimo notacijo

$$E(m) = E(r(u, v)) = E(u, v).$$

**Definicija 2.7.** Metrika na  $X \subseteq \mathbb{R}^2$ , ki je glede na  $r : V \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  podana z matrično funkcijo

$$g_f : V \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

se imenuje prva fundamentalna forma ploskve.

*Opomba.* Dolžina krivulje  $\mathcal{L}(\gamma)$  glede na prvo fundamentalno formo ploskve sovpada z običajno dolžino krivulje:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, \dot{u}r_u + \dot{v}r_v \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_v \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix}_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt. \end{aligned}$$

Izomorfizmi v diferencialni geometriji so izometrije, katerih definicija pa je nekoliko drugačna, kot bi morda pričakovali.

**Definicija 2.8.** Preslikava  $f : X \rightarrow \tilde{X}$  nad dvema ploskvama  $X, \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^3$  je izometrija, če za vsako krivuljo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  velja enakost med dolžinama

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(f(\gamma)).$$

*Opomba.* Izometrije med ploskvama porodijo izometrije v običajnem metričnem smislu.

**Primer 2.9.** 1. fundamentalna forma na sferi glede na sferične koordinate. Če odvezamemo iz  $S^2$  en poldnevnik, jo lahko parametriziramo s sferičnimi koordinatami:

$$r : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \subseteq V = (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

s predpisom

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Potem dobimo parcialna odvoda

$$r_u(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad r_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = \cos^2 u, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

**Primer 2.10.** Naj bo  $X$  rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če krivuljo  $x = f(z)$  zavrtimo okoli osi  $z$ :

$$r : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ u \end{pmatrix}.$$

Potem imamo odvoda

$$r_u(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u) \cos v \\ f'(u) \sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_v(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u) \sin v \\ f(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f'(u)^2,$$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = f(u)^2,$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Naslednji izrek nam pove povezavo med 1. fundamentalno formo in izometričnostjo ploskev.

#### Izrek 2.11.

Naj bo  $X \rightarrow \tilde{X}$  izometrija med ploskvama. Tedaj obstaja par parametrizacij  $r : V \rightarrow X$  in  $\tilde{r} : V \rightarrow \tilde{X}$ , da za pripadajoči fundamentalni formi velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Velja tudi obratno, torej če za ploskvi  $X, \tilde{X}$  obstajata parametrizaciji  $r$  in  $\tilde{r}$ , za kateri velja zgornji sistem enačb, potem sta  $X$  in  $\tilde{X}$  izometrični.

*Dokaz:* Pokažimo najprej obrat ( $\Leftarrow$ ). Recimo, da obstajata parametrizaciji  $r : V \rightarrow X$  in  $\tilde{r} : V \rightarrow \tilde{X}$ , da velja

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Naj bo  $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$ . Preveriti moramo, da je  $f$  izometrija. Naj bo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  poljubna krivulja in primerjamo dolžini  $\mathcal{L}_r(\gamma)$  ter  $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma))$ . Potem obstaja krivulja  $\beta : [\alpha, \beta] \rightarrow V$  za katero velja  $\gamma(t) = r(\beta(t))$ . Potem za  $f(\gamma(t))$  velja

$$f(\gamma(t)) = f(r(\beta(t))) = \tilde{r}(\beta(t)).$$

Ker je  $\beta(t)$  ravninska krivulja, velja

$$\gamma(t) = r(\beta(t)) = r(u(t), v(t)),$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u(t), v(t)).$$

Torej imamo enačbi

$$\mathcal{L}_r(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2} dt,$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u, v)\dot{u}^2 + 2\tilde{F}(u, v)\dot{u}\dot{v} + \tilde{G}(u, v)\dot{v}^2} dt.$$

Ker so posamezni sumandi enaki, sta izraza enaka, torej je  $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$  res izometrija.

Zdaj dokažimo še ( $\implies$ ). Denimo, da imamo med ploskvama  $X$  in  $\tilde{X}$  izomerijo  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ . Naj bo  $\gamma(t) = r(\beta(t)) = (u_0 + t, v_0)$  in  $t \in (0, \varepsilon)$ . Pri tem je točka  $(u_0, v_0) \in V$  poljubna in določa točko  $p = r(u_0, v_0) \in X$ . Zdaj izračunamo

$$\mathcal{L}_r(\gamma(t)) = \int_0^\varepsilon \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle r_u, r_u \rangle} dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)} dt.$$

Sedaj si oglejmo  $f(\gamma(t)) = \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u_0 + t, v_0)$ . Potem imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma(t))) &= \int_0^\varepsilon \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0), \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0) \rangle} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{r}(u_0 + t, v_0) dt. \end{aligned}$$

Po predpostavki o izometričnosti velja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\gamma) &= \mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma)), \\ \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)} dt &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0)} dt. \end{aligned}$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstajata neka  $\hat{t}, \hat{\hat{t}} \in (0, \varepsilon)$ , da velja

$$E(u_0 + \hat{t}, v_0)\varepsilon = \tilde{E}(u_0 + \hat{\hat{t}}, v_0)\varepsilon$$

in če pošljemo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , zaradi zveznosti funkcij dobimo

$$E(u_0, v_0) = \tilde{E}(u_0, v_0).$$

Še lažje ta rezultat dobimo tako, da na obeh straneh odvajamo po  $\varepsilon$  in vstavimo  $\varepsilon = 0$ .

Če zdaj vzamemo  $\beta(t) = (u_0, v_0 + t)$ , dobimo po enakem postopku kot prej

$$G(u_0, v_0) = \tilde{G}(u_0, v_0).$$

Nato vzamemo  $\beta(t) = (u_0 + t, v_0 + t)$  in imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0 + t) + 2F(u_0 + t, v_0 + t) + G(u_0 + t, v_0 + t)} dt \\ &= \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) = \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0 + t) + 2\tilde{F}(u_0 + t, v_0 + t) + \tilde{G}(u_0 + t, v_0 + t)} dt. \end{aligned}$$

Če zdaj zopet odvajamo po  $\varepsilon$  in vstavimo  $\varepsilon = 0$ , dobimo enakost integrandov v točki  $(u_0, v_0)$ , od koder sledi še zadnja zahteva

$$F(u_0, v_0) = \tilde{F}(u_0, v_0).$$

□

**Primer 2.12.** Ali je stožec brez ene tvorilke izometričen kosu ravnine? Naj bo podan

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$



Parametriziramo ga z

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

in po znanem postopku dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Pričakujemo, da bo  $S$  izometričen nekemu krožnemu izseku, ki ga parametriziramo z

$$\tilde{r}(u, v) = (\alpha u \cos(\beta v), \alpha u \sin(\beta v), 0).$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \beta^2 u^2 \end{pmatrix}.$$

Pogoj

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

je izpolnjen pri  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (če bi zamenjali predznake  $\alpha$  in  $\beta$ , bi dobili drugačne parametrizacije). Torej je stožec  $S$  izometričen krožnemu izseku s parametrizacijo

$$\tilde{r}(u, v) = \left( \sqrt{2}u \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), \sqrt{2}u \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), 0 \right).$$

Na tej točki se pojavi naravno vprašanje: ali znamo poiskati vse ploskve v  $\mathbb{R}^3$ , ki so izomertične ravnini? Izkaže se, da znamo, saj velja naslednji izrek.

### Izrek 2.13.

Naj bo ploskev  $X$  izometrična kakšnemu kosu ravnine. Potem je  $X$  bodisi stožec, valj, ali kakšna tangentna premonosna ploskev.

**Definicija 2.14.** Naj bo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  prostorska krivulja, parametrizirana z naravnim parametrom. Tangentna premonosna ploskev, podana s krivuljo  $\gamma$ , je del prostora  $\mathbb{R}^3$ , ki ga opiše tangenta na  $\gamma(t)$  na intervalu  $t \in [a, b]$ .

Če je  $\gamma = \gamma(u)$  naravna parametrizacija, potem je smiselna parametrizacija tangentno premonosne ploskve  $X$  podana z

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u).$$

Ker je  $\gamma$  naravna parametrizacija, velja kot prvo

$$\|\dot{\gamma}(u)\| = \langle \dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 1.$$

Če to zvezo odvajamo, dobimo

$$\langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle + \langle \dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u) \rangle = 0$$

in iz simetričnosti skalarne produkta sledi

$$\langle \ddot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \rangle = 0.$$

Torej je pospešek pri naravni parametrizaciji vedno pravokoten na hitrost. To lahko opazimo, če se v avtu peljemo s konstantno hitrostjo. Pospešek bomo čutili samo v ovinkih in to pravokotno glede na smer vožnje.

**Definicija 2.15.** Fleksijska ukrivljenost naravno parametrizirane krivulje  $\gamma(u)$  je podana z

$$\kappa(u) = \sqrt{\langle \ddot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u) \rangle} = \|\ddot{\gamma}(u)\|.$$

Izračunajmo 1. fundamentalno formo tangentno premonosne ploskve. Ker velja zveza

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u),$$

takoj dobimo

$$r_u(u, v) = \dot{\gamma}(u) + v\ddot{\gamma}(u),$$

$$r_v(u, v) = \dot{\gamma}(u).$$

Če od tod po znanem postopku poračunamo koeficiente 1. fundamentalne forme (pri čemer upoštevamo, da je pospešek pravokoten na hitrost), dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 + v^2\kappa^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Torej vidimo, da je matrika 1. fundamentalne forme zares odvisna samo od fleksijske ukrivljenosti.

**Trditev 2.16.** Naj bo podana funkcija  $\kappa(u)$ . Potem obstaja naravno parametrizirana ravninska krivulja  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , katere fleksijska ukrivljenost v točki  $\gamma(u)$  je enaka  $\kappa(u)$ .

*Dokaz:* Ker je krivulja  $\gamma$  ravninska, lahko zapišemo

$$\gamma(u) = (x(u), y(u)),$$

$$\dot{\gamma}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u)),$$

$$\ddot{\gamma}(u) = (\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)).$$

Ker je parametrizacija naravna, imamo še sistem enačb

$$\|\dot{\gamma}(u)\| = 1,$$

$$\|\ddot{\gamma}(u)\| = \kappa(u),$$

$$\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

Enotski vektor, pravokoten na  $\dot{\gamma}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u))$ , je vektor  $(\dot{y}(u), -\dot{x}(u))$ . Ta vektor je vzporeden vektorju pospeška, torej bo za neko funkcijo  $k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  veljalo

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = k(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

Če obe strani enačbe normiramo, iz prejšnjega sistema enačb vidimo, da mora priti natanko

$$(\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = \kappa(u)(\dot{y}(u), -\dot{x}(u)).$$

To je sistem navadnih diferencialnih enačb

$$\ddot{x}(u) = \kappa(u)\dot{y}(u),$$

$$\ddot{y}(u) = -\kappa(u)\dot{x}(u).$$

Pri analizi 3 smo (bomo čez 14 dni?!) dokazali eksistenčni izrek za obstoj rešitev tega sistema. Z drugimi besedami, obstaja naravno parametrizirana krivulja  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ , za katero za vsak  $u \in [\alpha, \beta]$  velja  $\|\dot{\gamma}(u)\| = \kappa(u)$ .  $\square$

*Opomba.* Pri določenih  $(u, v)$  nam krivulja  $\gamma(u)$  podaja tangentno premonosno ploskev. Ta ploskev je del ravnine, v kateri leži krivulja  $\gamma(u)$ . Po izreku iz prejšnjih predavanj (TODO ali ?? ali ??) je ta ploskev izometrična nekemu kosu ravnine.

S tem razmislekom smo dokazali izrek.

**Izrek 2.17.**

*Vsaka tangentno premonosna ploskev je izometrična kosu ravnine.*

**Definicija 2.18.** Ploščina ploskve  $X$ , parametrizirane z  $r : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  je podana z

$$A(X) = \int_V \|r_u \times r_v\| du dv.$$

*Opomba.* Da je ta definicija dobra, moramo še preveriti.

*Opomba.* Ker velja zveza

$$\|r_u \times r_v\|^2 = \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2 = EG - F^2,$$

lahko ploščino izrazimo tudi kot

$$A(X) = \int_V \sqrt{EG - F^2} du dv = \int_V \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} du dv.$$

**Definicija 2.19.** Naj bosta  $r : V_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  in  $\tilde{r} : V_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  različni regularni parametrizaciji ploskve  $X$ . Potem je preslikava

$$\begin{aligned} g &= \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 \longrightarrow V_2 \\ (u, v) &\longmapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \end{aligned}$$

prehodna preslikava med parametrizacijama  $r$  in  $\tilde{r}$ .

Velja  $r(u, v) = \tilde{r}(g(u, v))$ . Poglejmo si, kaj se zgodi z matriko prve fundamentalne forme transformaciji med parametrizacijama.

## 2.2 Transformacijska pravila za I-forme

Naj bosta  $r : V_1 \rightarrow X$  in  $\tilde{r} : V_2 \rightarrow X$  dve parametrizaciji iste ploskve. Med njima velja  $r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$ . To nam da prehodno preslikavo  $g : \tilde{r}^{-1} \circ r : V_1 \rightarrow V_2$ . Vektor, razvit po bazi  $\{r_u, r_v\}$  bomo skušali razviti po bazi  $\{\tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}}\}$ . Imamo

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)), \\ r_u &= \tilde{r}_{\tilde{u}} \tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}} \tilde{v}_u, \quad \text{alii} \\ r_v &= \tilde{r}_{\tilde{u}} \tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}} \tilde{v}_v. \end{aligned}$$

Zdaj hočemo vektor  $ar_u + br_v$  zapisati v obliki  $\alpha \tilde{r}_{\tilde{u}} + \beta \tilde{r}_{\tilde{v}}$ . Dobimo

$$ar_u + br_v = a(\tilde{r}_{\tilde{u}} \tilde{u}_u + \tilde{r}_{\tilde{v}} \tilde{v}_u) + b(\tilde{r}_{\tilde{u}} \tilde{u}_v + \tilde{r}_{\tilde{v}} \tilde{v}_v) = \underbrace{(a\tilde{u}_u + b\tilde{u}_v)}_{\alpha} \tilde{r}_{\tilde{u}} + \underbrace{(a\tilde{v}_u + b\tilde{v}_v)}_{\beta} \tilde{r}_{\tilde{v}}.$$

Torej za vsak par vektorjev  $(a, b)^T$ ,  $(\alpha, \beta)^T$  velja zveza

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{u}_u & \tilde{u}_v \\ \tilde{v}_u & \tilde{v}_v \end{pmatrix}}_{\text{Jac}(g)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Torej za vse pare vektorjev velja

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \text{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \text{Jac}(g) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Od tod sledi naslednji izrek.

**Izrek 2.20.**

Naj za parametrizaciji  $r : V_1 \rightarrow X$  in  $V_2 \rightarrow X$  velja

$$r(u, v) = \tilde{r}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)) = \tilde{r}(g(u, v)).$$

Potem za I-formi glede na ti parametrizaciji velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \text{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \text{Jac}(g).$$

**Posledica 2.21.** Definicija ploščine ?? je dobra.

*Dokaz:* Dokazujemo

$$A(X) = \int_{V_1} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \int_{V_2} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}.$$

Po izreku o transformaciji I-forme ?? velja

$$\begin{aligned} A(X) &= \int_{V_1} \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} \, du \, dv \\ &= \int_{V_1} \sqrt{\det \left( \text{Jac}(g)^T \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \text{Jac}(g) \right)} \, du \, dv \\ &= \int_{V_1} \sqrt{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} |\det(\text{Jac}(g))|} \, du \, dv \\ (\text{uvredba novih spremenljivk}) &= \int_{V_2} \sqrt{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}. \end{aligned}$$

□

Recimo, da imamo podano  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  in matrično funkcijo

$$\begin{aligned} M : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R})_{\text{simetrične, pozitivno definitne}} \\ (u, v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)}. \end{aligned}$$

Zanimivo vprašanje se glasi: Ali lahko to funkcijo realiziramo v vloženi mnogoterosti? Odgovor je da (ampak lokalno, ker bi lahko prišlo do problemov s samopresečišči).

## 2.3 Ukrivljenost