

# Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

21. oktober 2023

## 1 Uvod

**Definicija 1.1.** Topološki prostor  $M$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost, če za vsak  $m \in M$  obstaja okolica  $m \in U \subseteq M$  in homeomorfizem  $\varphi : U \rightarrow V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$  (pri tem je  $V \approx B^n$ ).

**Primer 1.2.** Naslednje množice so primeri mnogoterosti.

1.  $M = \mathbb{R}^n$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost,
2.  $S^1$  je 1-dimenzionalna mnogoterost,
3.  $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  je  $n$ -dimenzionalna mnogoterost,
4. Projekтивni prostori  $\mathbb{R}P^n = B^n / \sim$ , kjer je  $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$  so  $n$ -dimenzionalne mnogoterosti.
5. Grupa

$$\text{SU}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det g = 1 \right\}$$

je 3-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč  $\text{SU}(2) = S^3$ . To je primer Lijeve grupe.

6. Grupa

$$\text{SO}(3) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid g^T = g^{-1}, \det g = 1 \right\}.$$

Izkaže se, da je  $\text{SO}(3) = B^3 / \sim = \mathbb{R}P^3$ . To velja, ker vsaka preslikava iz  $\text{SO}(3)$  predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota  $\pi$  in  $-\pi$  predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli  $B(0, \pi)^3 \approx B^3$  priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projekivni prostor  $\mathbb{R}P^3$ .

### 1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

**Definicija 1.3.** Preslikava  $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je odvedljiva v točki  $w \in W$ , če obstaja linearna preslikava  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in preslikava  $\mathcal{O} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da za vse ustrezne argumente velja

$$F(w + h) = F(w) + Ah + \mathcal{O}(h)$$

in  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{O}(h)\|}{\|h\|} = 0$ . Odvod preslikave  $F$  v točki  $w$  je preslikava  $A = D_w F = (DF)_w$ .

**Definicija 1.4.** Preslikava  $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je odvedljiva na množici  $W$ , če je odvedljiva v vsaki točki  $w \in W$ .

**Definicija 1.5.** Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

**Definicija 1.6.** Naj bo  $M$   $n$ -dimenzionalna mnogoterost. Gladek atlas  $\mathcal{U}$  na  $M$  je družina parov  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ , če za vsak  $\alpha \in A$  velja:

1.  $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$
2.  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  je homeomorfizem za nek  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$
3.  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  je pokritje  $M$
4. za vsaka  $\alpha, \beta \in A$  je preslikava  $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$  difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave  $g_{\alpha\beta}$   $k$ -difeomorfizmi z zveznim  $k$ -tim odvodom, imamo  $\mathcal{C}^k$ -atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo  $\mathcal{C}^\infty$ -atlas, če so vse analitične, pa  $\mathcal{C}^\omega$ -atlas.

*Opomba.* Preslikava  $g_{\alpha\beta}$  iz prejšnje definicije je preslikava iz  $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na  $\mathbb{R}^n$  matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w.$$

**Definicija 1.7.** Topološka mnogoterost  $M$ , ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti  $M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.8.** Naj bo  $M$   $n$ -dimenzionalna mnogoterost. Funkcija  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je gladka, če je gladka vsaka preslikava  $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.9.** Naj bo  $(M, \mathcal{U})$  gladka mnogoterost. Krivulja  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  je gladka krivulja, v  $M$ , če za  $\forall \alpha \in A$  velja, da je  $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  gladka krivulja v  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 1.10.** Atlasa  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  in  $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \varphi_\beta) \mid \beta \in B\}$  na mnogoterosti  $M$  sta ekvivalentna, če za vsak par  $(\alpha, \beta) \in A \times B$  iz  $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\psi_\beta)_*(U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

*Opomba.* Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa  $\mathcal{U}$  označimo z  $[\mathcal{U}]$ .

**Definicija 1.11.** Naj bo  $M$  topološka mnogoterost in  $\mathcal{U}$  gladek atlas na  $M$ . Potem je  $[\mathcal{U}]$  gladka struktura na  $M$ .

*Opomba.* Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima  $\mathbb{R}^4$  neštavno neskončno eksotičnih gladkih struktur. Vsi ostali  $\mathbb{R}^n$  imajo zgolj svojo trivialno in nobene eksotične.

## 2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženi v prostor  $\mathbb{R}^3$ .

**Definicija 2.1.** Množica  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  je gladka vložena ploskev, če za vsak  $m \in X$  obstaja kroglja za  $m$   $W \subseteq \mathbb{R}^3$  in gladka funkcija  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja

1.  $X \cap W = f^{-1}(\{0\})$
2.  $(Df)_w \neq 0$  za vsak  $w \in X \cap W$

Vložena ploskev  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na  $X$ . Vzemimo točko  $m \in X$ . Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica  $f : W \ni m \rightarrow \mathbb{R}$  in vemo, da  $D_m f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (m) \neq 0$ . Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo  $m = (x_0, y_0, z_0)$  in BŠS naj bo  $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$ . Torej obstaja gladka okolica  $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$  in gladka funkcija  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , da velja  $f(x, y, g(x, y)) = 0$  za vsak  $(x, y) \in V$ . Po potrebi lahko množico  $W$  zmanjšamo na  $W_0 \subseteq W$ , da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo  $U = W_0 \cap X$ , postane par  $(U, \varphi)$  karta na  $X$ .

### 2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo – metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ , je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Naj bo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  neki skalarni produkt na  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  in naj bo  $\{v_1, \dots, v_n\}$  baza za  $\mathcal{V}$ , ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  in  $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ . Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ( $\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$ ) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ( $\langle v_i, v_i \rangle > 0$ ) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

*Opomba.* Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo  $P$  poljubna preslikava med bazama,  $L_e$  linearna preslikava glede na bazo  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $L_f$  pa glede na bazo  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = PL_e P^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta  $a_f = Pa_e$  in  $b_f = Pb_e$ . Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned}\langle a_f, b_f \rangle &= \langle a_e, b_e \rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je  $P^T A_f P = A_e$  oziroma zaradi ortogonalnosti  $P$  ekvivalentno

$$A_f = P A_e P^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.

Preden se lotimo definicije tangentne ravnine, se spomnimo naslednje definicije.

**Definicija 2.2.** Naj bo preslikava  $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  odvedljiva. Rang preslikave  $F$  v točki  $w \in W$  je enak rangi matrike  $D_w F$ . Pravimo, da ima  $F$  v točki  $w \in W$  maksimalen rang, če ima matrika  $D_w F$  maksimalen rang.

**Definicija 2.3.** Naj bo  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  vložena ploskev in točka  $m \in X$ . Tangentna ravnina  $T_m X$  je množica tangent vseh krivulj v  $X$ , ki v času  $t = 0$  gredo skozi  $m$ .

$$T_m X = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ krivulja, } \gamma(0) = m\}$$

**Trditev 2.4.**  $T_m X$  je dvodimenzionalen realni vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^3$ .

*Dokaz:* Naj bo  $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  neka regularna parametrizacija ploskve  $X$  (to pomeni, da mora biti rang preslikave  $r$  maksimalen, torej konstantno enak 2) v okolici točke  $m \in X$ . Naj bo  $p = (u, v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ . Pišimo

$$r(p) = r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Naj bo  $m = r(u_0, v_0)$ . Trdimo, da je  $T_m X = \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Najprej dokažimo inkluzijo  $T_m X \subseteq \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Naj bo  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(0) = m = r(u_0, v_0)$  poljubna krivulja. Direktno po definiciji tangentne krivulje sledi  $\dot{\gamma}(0) \in T_m X$ . Dokazati moramo  $\dot{\gamma}(0) \in \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Naj bo  $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$  podana z  $\beta(t) = r^{-1}(\gamma(t))$ . Ker je preslika preslikave  $\beta$  vsebovana v  $\mathbb{R}^2$ , obstajata funkciji  $u(t), v(t)$ , da je  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ . Pri tem velja, da je  $\beta(0) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ . Vidimo, da je  $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ . Po verižnem pravilu za odvajanje imamo

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t) = (D_{(u_0, v_0)} r) \dot{\beta}(0).$$

Torej je  $\dot{\gamma}(0) \in \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ .

Nato dokažimo še obratno inkluzijo  $T_m X \supseteq \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Vzemimo poljuben vektor  $\mathbb{R}^2$  in naj bo  $v = (D_{(u_0, v_0)} r \cdot w)$ . Potrebujemo krivuljo  $\gamma(t)$ ,  $\gamma(0) = m$ , za katero bo veljalo  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Oglejmo si

$$(D_{(u_0, v_0)} r) (\dot{\beta}(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r(\beta(t)).$$

Trdimo, da za  $\gamma(t) = r(\beta(t))$  velja, da je  $\dot{\gamma}(0) \in T_m X$ . To je res, saj velja, da je  $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ , hkrati pa velja tudi  $\gamma(0) = r(\beta(0)) = r(u_0, v_0) = m$ . Torej velja, da je  $T_m X = \text{im}(D_{(u_0, v_0)} r)$ . Ker smo zahtevali, da je parametrizacija regularna, je matrika  $D_{(u_0, v_0)} r$  reda 2, torej je  $T_m X$  dvodimenzionalen vektorski prostor.  $\square$

*Opomba.* Tangentna ravnina je pravi vektorski prostor in ne afin kot recimo pri analizi 2a.

Do nadaljnjega nas bodo zanimale lokalne lastnosti ploskev, zato bomo delali v glavnem s ploskvami, ki jih lahko pokrijemo z eno samo karto oziroma z eno samo parametrizacijo.

**Definicija 2.5.** Metrika na ploskvi  $X \subseteq \mathbb{R}^3$ , opremljeni s parametrizacijo  $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ , je preslikava

$$g : X \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$m \longmapsto \begin{pmatrix} g_{11}(m) & g_{12}(m) \\ g_{21}(m) & g_{22}(m) \end{pmatrix},$$

kjer za vsak  $m \in X$  velja  $g_{12}(m) = g_{21}(m)$  in  $g(m)$  je pozitivno definitna matrika. To lahko povemo s pogojema  $\det g(m) > 0$  in  $g_{11}(m) > 0$ .

*Opomba.* Za drugo parametrizacijo ploskve  $X$  bi dobili druge koeficiente matrike.

Naj bo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  krivulja. Njeno parametrizacijo  $r$  lahko napišemo v obliki  $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$  za primerne funkcije  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ ,  $\gamma(t) = r(\beta(t))$ . V koordinatah lahko zapišemo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} r(\beta(t)) = (D_{(u_0, v_0)} r)(\dot{\beta}(t_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = r_u(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + r_v(u_0, v_0) \dot{v}(t_0).$$

To je razvoj vektorja  $\dot{\gamma}(t_0)$  po bazi  $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$  prostora  $T_{\gamma(t_0)} X$ , ki pa ni nujno ortogonalna. Pravzaprav je ortogonalna le v precej posebnih primerih.

**Definicija 2.6.** Dolžina krivulje  $\gamma : [a, b] \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  glede na metriko  $g$  je v parametrizaciji  $r$  podana s formulo

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt$$

Ustrezni skalarni produkti na ravnini  $T_m X$  so glede na parametrizacijo  $r$  podani s predpisi  $\langle r_u, r_u \rangle_g = g_{11}$ ,  $\langle r_u, r_v \rangle_g = g_{12}$ ,  $\langle r_v, r_v \rangle_g = g_{22}$ . Naj bo sedaj ambientni prostor  $\mathbb{R}^3$  opremljen s fiksnim evklidskim skalarnim produktom, in koeficiente  $g_{ij}$  poračunamo z njim (na enak način kot prej). Pri tem uporabimo naslednje standardne oznake:

$$E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle.$$

Včasih tudi zlorabimo notacijo

$$E(m) = E(r(u, v)) = E(u, v).$$

**Definicija 2.7.** Metrika na  $X \subseteq \mathbb{R}^2$ , ki je glede na  $r : V \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$  podana z matrično funkcijo

$$g_f : V \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

se imenuje prva fundamentalna forma ploskve.

*Opomba.* Dolžina krivulje  $\mathcal{L}(\gamma)$  glede na prvo fundamentalno formo ploskve sovpada z običajno dolžino krivulje:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{u}r_u + \dot{v}r_v, \dot{u}r_u + \dot{v}r_v \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_v \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix}_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt. \end{aligned}$$

Izomorfizmi v diferencialni geometriji so izometrije, katerih definicija pa je nekoliko drugačna, kot bi morda pričakovali.

**Definicija 2.8.** Preslikava  $f : X \rightarrow X'$  nad dvema ploskvama  $X, X' \subseteq \mathbb{R}^3$  je izometrija, če za vsako krivuljo  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  velja enakost med dolžinama

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{X'}(\gamma).$$

*Opomba.* Izometrije med ploskvama porodijo izometrije v običajnem metričnem smislu.