Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

27. oktober 2023

1 Uvod

Definicija 1.1. Topološki prostor M je n-dimenzionalna mnogoterost, če za vsak $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subseteq M$ in homeomorfizem $\varphi : U \to V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (pri tem je $V \approx B^n$).

Primer 1.2. *Naslednje množice so primeri mnogoterosti.*

1. $M = \mathbb{R}^n$ *je* n*-dimenzionalna mnogoterost,*
2. S^1 *je* 1*-dimenzionalna mnogoterost,*
3. $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \middle| \sum_{j=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je* n*-dimenzionalna mnogoterost,*
4. *Projektivni prostori* $\mathbb{R}P^n = {B^n}/_{\sim}$, *kjer je* $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$ *so* n*-dimenzionalne mnogoterosti.*
5. *Grupa*
$$\mathrm{SU}\left(2\right) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det g = 1 \right\}$$
je 3*-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč* $\mathrm{SU}\left(2\right) = S^3$. *To je primer Lijeve grupe.*
6. *Grupa*
$$\mathrm{SO}\left(3\right) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| g^T = g^{-1}, \det g = 1 \right\}.$$
Izkaže se, da je $\mathrm{SO}\left(3\right) = {B^3}/_{\sim} = \mathbb{R}P^3$. *To velja, ker vsaka preslikava iz* $\mathrm{SO}\left(3\right)$ *predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota* π *in* $-\pi$ *predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli* $B\left(0, \pi\right)^3 \approx B^3$ *priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projektivni prostor* $\mathbb{R}P^3$.

1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

Definicija 1.3. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je odvedljiva v točki $w \in W$, če obstaja linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in preslikava $\mathcal{O} : W \to \mathbb{R}^n$, da za vse ustrezne argumente velja

$$F\left(w + h\right) = F\left(w\right) + Ah + \mathcal{O}\left(h\right)$$

in $\lim_{h \to 0} \frac{||\mathcal{O}(h)||}{||h||} = 0$. Odvod preslikave F v točki w je preslikava $A = D_w F = \left(DF\right)_w$.

Definicija 1.4. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je odvedljiva na množici W, če je odvedljiva v vsaki točki $w \in W$.

Definicija 1.5. Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

Definicija 1.6. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Gladek atlas $\mathcal{U}$ na M je družina parov $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, če za vsak $\alpha \in A$ velja:

1. $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem za nek $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\{U_\alpha | \, \alpha \in A\}$ je pokritje M
4. za vsaka $\alpha, \beta \in A$ je preslikava $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \to (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$ difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave $g_{\alpha\beta}$ k-difeomorfizmi z zveznim k-tim odvodom, imamo $\mathcal{C}^k$-atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo $\mathcal{C}^\infty$-atlas, če so vse analitične, pa $\mathcal{C}^\omega$-atlas.

Opomba. Preslikava $g_{\alpha\beta}$ iz prejšnje definicije je preslikava iz $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na $\mathbb{R}^n$ matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w .$$

Definicija 1.7. Topološka mnogoterost M, ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti $M \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.8. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ je gladka, če je gladka vsaka preslikava $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.9. Naj bo $(M, \mathcal{U})$ gladka mnogoterost. Krivulja $\gamma : (a, b) \to M$ je gladka krivulja, v M, če za $\forall \alpha \in A$ velja, da je $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka krivulja v $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.10. Atlasa $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \, \alpha \in A\}$ in $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \varphi_\beta) | \, \beta \in B\}$ na mnogoterosti M sta ekvivalentna, če za vsak par $(\alpha, \beta) \in A \times B$ iz $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to (\psi_\beta)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

Opomba. Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa $\mathcal{U}$ označimo z $[\mathcal{U}]$.

Definicija 1.11. Naj bo M topološka mnogoterost in $\mathcal{U}$ gladek atlas na M. Potem je $[\mathcal{U}]$ gladka struktura na M.

Opomba. Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima $\mathbb{R}^4$ neštevno neskončno eksotičnih gladkih struktur. Vsi ostali $\mathbb{R}^n$ imajo zgolj svojo trivialno in nobene eksotične.

2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženimi v prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.1. Množica $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je gladka vložena ploskev, če za vsak $m \in X$ obstaja krogla za m $W \subseteq \mathbb{R}^n$ in gladka funkcija $f : W \to \mathbb{R}$, za katero velja
1. $X \cap W = f^* (\{0\})$
2. $(Df)_w \neq 0$ za vsak $w \in X \cap W$

Vložena ploskev $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na X. Vzemimo točko $m \in X$. Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica $f : W \ni m \to \mathbb{R}$ in vemo, da $D_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(m) \neq 0$. Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo $m = (x_0, y_0, z_0)$ in BŠS naj bo $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$. Torej obstaja gladka okolica $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ in gladka funkcija $g : V \to \mathbb{R}$, da velja $f(x, y, g(x, y)) = 0$ za vsak $(x, y) \in V$. Po potrebi lahko množico W zmanjšamo na $W_0 \subseteq W$, da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo $U = W_0 \cap X$, postane par (U, φ) karta na X.

2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo – metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo $\gamma : (a, b) \to M$, je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\, dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neki skalarni produkt na $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ in naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza za $\mathcal{V}$, ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ in $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_i \rangle > 0$) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

Opomba. Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo P poljubna preslikava med bazama, L_e linearna preslikava glede na bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, L_f pa glede na bazo $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = PL_eP^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta $a_f = Pa_e$ in $b_f = Pb_e$. Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned}\langle a_f, b_f\rangle &= \langle a_e, b_e\rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $P^T A_f P = A_e$ oziroma zaradi ortogonalnosti P ekvivalentno

$$A_f = PA_eP^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.

Preden se lotimo definicije tangentne ravnine, se spomnimo naslednje definicije.

Definicija 2.2. Naj bo preslikava $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva. Rang preslikave F v točki $w \in W$ je enak rangu matrike D_wF. Pravimo, da ima F v točki $w \in W$ maksimalen rang, če ima matrika D_wF maksimalen rang.

Definicija 2.3. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ vložena ploskev in točka $m \in X$. Tangentna ravnina T_mX je množica tangent vseh krivulj v X, ki v času $t = 0$ gredo skozi m.

$$T_mX = \left\{\dot\gamma(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ krivulja}, \gamma(0) = m\right\}$$

Trditev 2.4. *T_mX je dvodimenzionalen realni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.*

Dokaz: Naj bo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ neka regularna parametrizacija ploskve X (to pomeni, da mora biti rang preslikave r maksimalen, torej konstantno enak 2) v okolici točke $m \in X$. Naj bo $p = (u, v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$. Pišimo

$$r(p) = r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Naj bo $m = r(u_0, v_0)$. Trdimo, da je $T_mX = \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Najprej dokažimo inkluzijo $T_mX \subseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Naj bo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = m = r(u_0, v_0)$ poljubna krivulja. Direktno po definiciji tangentne krivulje sledi $\gamma\dot{(0)} \in T_mX$. Dokazati moramo $\gamma\dot{(0)} \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)r}\right)$. Naj bo $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ podana z $\beta(t) = r^{-1}(\gamma(t))$. Ker je praslika preslikave β vsebovana v $\mathbb{R}^2$, obstajata funkciji $u(t), v(t)$, da je $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Pri tem velja, da je $\beta(0) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$. Vidimo, da je $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Po verižnem pravilu za odvajanje imamo

$$\dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \left(D_{(u_0,v_0)}r\right)\dot\beta(0).$$

Torej je $\dot\gamma(0) \in \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$.

Nato dokažimo še obratno inkluzijo $T_mX \supseteq \operatorname{im}\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)$. Vzemimo poljuben vektor $\mathbb{R}^2$ in naj bo $v = \left(D_{(u_0,v_0)r} \cdot w\right)$. Potrebujemo krivuljo $\gamma(t), \gamma(0) = m$, za katero bo veljalo $\dot\gamma(0) = v$. Oglejmo si

$$\left(D_{(u_0,v_0)}r\right)(\dot\beta(0)) = \frac{d}{dt}\Big| r(\beta(t)).$$

Trdimo, da za $\gamma(t) = r(\beta(t))$ velja, da je $\dot\gamma(0) \in T_m X$. To je res, saj velja, da je $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, hkrati pa velja tudi $\gamma(0) = r(\beta(0)) = r(u_0, v_0) = m$. Torej velja, da je $T_m X = \operatorname{im}(D_{(u_0,v_0)} r)$. Ker smo zahtevali, da je parametrizacija regularna, je matrika $D_{(u_0,v_0)} r$ reda 2, torej je $T_m X$ dvodimenzionalen vektorski prostor. □

Opomba. Tangentna ravnina je pravi vektorski prostor in ne afin kot recimo pri analizi 2a.

Do nadaljnjega nas bodo zanimale lokalne lastnosti ploskev, zato bomo delali v glavnem s ploskvami, ki jih lahko pokrijemo z eno samo karto oziroma z eno samo parametrizacijo.

Definicija 2.5. Metrika na ploskvi $X \subseteq \mathbb{R}^3$, opremljeni s parametrizacijo $r : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, je preslikava

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ m &\longmapsto \begin{pmatrix} g_{11}(m) & g_{12}(m) \\ g_{21}(m) & g_{22}(m) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kjer za vsak $m \in X$ velja $g_{12}(m) = g_{21}(m)$ in $g(m)$ je pozitivno definitna matrika. To lahko povemo s pogojema $\det g(m) > 0$ in $g_{11}(m) > 0$.

Opomba. Za drugo parametrizacijo ploskve X bi dobili druge koeficiente matrike.

Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ krivulja. Njeno parametrizacijo r lahko napišemo v obliki $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ za primerne funkcije $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $\gamma(t) = r(\beta(t))$. V koordinatah lahko zapišemo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

$$\dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} r(\beta(t)) = (D_{(u_0,v_0)} r)(\dot\beta(t_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = r_u(u_0, v_0)\dot u(t_0) + r_v(u_0, v_0)\dot v(t_0).$$

To je razvoj vektorja $\dot\gamma(t_0)$ po bazi $\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}$ prostora $T_{\gamma(t_0)} X$, ki pa ni nujno ortogonalna. Pravzaprav je ortogonalna le v precej posebnih primerih.

Definicija 2.6. Dolžina krivulje $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ glede na metriko g je v parametrizaciji r podana s formulo

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot u(t) & \dot v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix}}\, dt$$

Ustrezni skalarni produkti na ravnini $T_m X$ so glede na parametrizacijo r podani s predpisi $\langle r_u, r_u \rangle_g = g_{11}$, $\langle r_u, r_v \rangle_g = g_{12}$, $\langle r_v, r_v \rangle_g = g_{22}$. Naj bo sedaj ambientni prostor $\mathbb{R}^3$ opremljen s fiksnim evklidskim skalarnim produktom, in koeficiente g_{ij} poračunamo z njim (na enak način kot prej). Pri tem uporabimo naslednje standardne oznake:

$$E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle.$$

Včasih tudi zlorabimo notacijo

$$E(m) = E(r(u, v)) = E(u, v).$$

Definicija 2.7. Metrika na $X \subseteq \mathbb{R}^2$, ki je glede na $r : V \to X \subseteq \mathbb{R}^3$ podana z matrično funkcijo

$$\begin{aligned} g_f : V &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (u,v) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se imenuje prva fundamentalna forma ploskve.

Opomba. Dolžina krivulje $\mathcal{L}(\gamma)$ glede na prvo fundamentalno formo ploskve sovpada z običajno dolžino krivulje:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||\, dt &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{u} r_u + \dot{v} r_v, \dot{u} r_u + \dot{v} r_v \rangle}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_u, r_v \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u(t),v(t))} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}}\, dt. \end{aligned}$$

Izomorfizmi v diferencialni geometriji so izometrije, katerih definicija pa je nekoliko drugačna, kot bi morda pričakovali.

Definicija 2.8. Preslikava $f : X \to \tilde{X}$ nad dvema ploskvama $X, \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^3$ je izometrija, če za vsako krivuljo $\gamma : [a,b] \to X$ velja enakost med dolžinama

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\gamma).$$

Opomba. Izometrije med ploskvama porodijo izometrije v običajnem metričnem smislu.

Primer 2.9. *1. fundamentalna forma na sferi glede na sferične koordinate. Če odvzamemo iz S^2 en poldnevnik, jo lahko parametriziramo s sferičnimi koordinatami:*

$$r : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \subseteq V = (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

s predpisom

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Potem dobimo parcialna odvoda

$$r_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \; r_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = \cos^2 u, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Primer 2.10. *Naj bo X rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če krivuljo $x = f(z)$ zavrtimo okoli osi z:*

$$r : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f(u)\cos(v) \\ f(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

Potem imamo odvoda

$$r_u(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u)u\cos v \\ f'(u)\sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_v(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u)\sin v \\ f(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f'(u)^2, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = f(u)^2, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Naslednji izrek nam pove povezavo med 1. fundamentalno formo in izometričnostjo ploskev.

Izrek 2.11.

Naj bo $X \to \tilde{X}$ izometrija. Tedaj obstaja par parametrizacij $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da za pripadajoči fundamentalni formi velja

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Velja tudi obratno, torej če za ploskvi $X, \tilde{X}$ obstajata parametrizaciji r in $\tilde{r}$, za kateri velja zgornji sistem enačb, potem sta X in $\tilde{X}$ izometrični.

Dokaz: Pokažimo najprej obrat ($\Longleftarrow$). Recimo, da obstajata parametrizaciji $r : V \to X$ in $\tilde{r} : V \to \tilde{X}$, da velja

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Naj bo $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$. Preveriti moramo, da je f izometrija. Naj bo $\gamma : [a, b] \to X$ poljubna krivulja in primerjamo dolžini $\mathcal{L}_r(\gamma)$ ter $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma))$. Potem obstaja krivulja $\beta : [\alpha, \beta] \to V$ za katero velja $\gamma(t) = r(\beta(t))$. Potem za $f(\gamma(t))$ velja

$$f(\gamma(t)) = f(r(\beta(t))) = \tilde{r}(\beta(t)).$$

Ker je $\beta(t)$ ravninska krivulja, velja

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r(\beta(t)) = r(u(t), v(t)), \\ \tilde{\gamma}(t) &= \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u(t), v(t).) \end{aligned}$$

Torej imamo enačbi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{E(u, v)\dot{u}^2 + 2F(u, v)\dot{u}\dot{v} + G(u, v)\dot{v}^2}\, dt, \\ \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) &= \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u, v)\dot{u}^2 + 2\tilde{F}(u, v)\dot{u}\dot{v} + \tilde{G}(u, v)\dot{v}^2}\, dt. \end{aligned}$$

Ker so posamezni sumandi enaki, sta izraza enaka, torej je $f = \tilde{r} \circ r^{-1}$ res izometrija.

Zdaj dokažimo še ($\Longrightarrow$). Denimo, da imamo med X in $\tilde{X}$ izomerijo $f : X \to \tilde{X}$. Naj bo $\gamma(t) = r(\beta(t)) = (u_0 + t, v_0)$ in $t \in (0, \varepsilon)$. Pri tem je točka $(u_0, v_0) \in V$ poljubna in določa točko $p = r(u_0, v_0) \in X$. Zdaj izračunamo

$$\mathcal{L}_r(\gamma(t)) = \int_0^\varepsilon ||\dot{\gamma}(t)||\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle r_u, r_u \rangle}\, dt = \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)}\, dt.$$

Sedaj si oglejmo $f(\gamma(t)) = \tilde{r}(\beta(t)) = \tilde{r}(u_0 + t, v_0)$. Potem imamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma(t))) &= \int_0^\varepsilon ||\dot{\tilde{\gamma}}(t)||\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{\langle \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0), \tilde{r}_u(u_0 + t, v_0) \rangle}\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \tilde{r}(u_0 + t, v_0)\, dt.
\end{aligned}$$

Po predpostavki o izometričnosti velja

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_r(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{r}}(f(\gamma)) \\
\int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)}\, d = \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0)}.
\end{gathered}$$

Če uporabimo izrek o povprečni vrednosti, dobimo

$$E(u_0 + \hat{t}, v_0)\varepsilon = \tilde{E}(u_0 + \hat{\hat{t}}, v_0)\varepsilon$$

in če pošljemo $\varepsilon \to 0$, dobimo zaradi zveznosti funkcij

$$E(u_0, v_0) = \tilde{E}(u_0, v_0).$$

Še lažje ta rezultat dobimo tako, da na obeh straneh odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$.

Če zdaj vzamemo $\beta(t) = (u_0, v_0 + t)$, dobimo po enakem postopku kot prej

$$G(u_0, v_0) = \tilde{G}(u_0, v_0).$$

Nato vzamemo $\beta(t) = (u_0 + t, v_0 + t)$ in imamo

$$\mathcal{L}_r(\gamma) = \int_0^\varepsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0 + t) + 2F(u_0 + t, v_0 + t) + G(u_0 + t, v_0 + t)}\, dt,$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\tilde{\gamma}) = \int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{E}(u_0 + t, v_0 + t) + 2\tilde{F}(u_0 + t, v_0 + t) + \tilde{G}(u_0 + t, v_0 + t)}\, dt.$$

Če zdaj zopet odvajamo po ε in vstavimo $\varepsilon = 0$, dobimo enakost integrandov v točki (u_0, v_0), od koder sledi še zadnja zahteva

$$F(u_0, v_0) = \tilde{F}(u_0, v_0).$$

□

Primer 2.12. *Ali je stožec brez ene tvorilke izometričen kosu ravnine? Naj bo podan*

$$S = \left\{(x, y, z) \middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Parametriziramo ga z

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

in po znanem postopku dobimo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Pričakujemo, da bo S izometričen nekemu krožnemu izseku. Če definiramo

$$\tilde{r}(u,v) = (\alpha u\cos(\beta v), \alpha u\sin(\beta v), 0)$$

dobimo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\beta^2u^2 \end{pmatrix}.$$

Pogoj

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

je izpolnjen pri $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (če bi zamenjali predznake α in β, bi dobili drugačne parametrizacije). Torej je stožec S izometričen krožnemu izseku s parametrizaijo

$$\tilde{r}(u,v) = \left(\sqrt{2}u\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), \sqrt{2}u\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v\right), 0\right).$$

Na tej točki se pojavi naravno vprašanje: ali znamo poiskati vse ploskve v $\mathbb{R}^3$, ki so izomertične ravnini? Izkaže se, da znamo, saj velja naslednji izrek.

Izrek 2.13.

Naj bo ploskev X izometrična kakšnemu kosu ravnine. Potem je X bodisi stožec, valj, ali kakšna tangentna premonosna ploskev.

Definicija 2.14. Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ prostorska krivulja, parametriziarana z naravnim parametrom. Tangentna premonosna ploskev, podana s krivuljo γ, je del prostora $\mathbb{R}^3$, ki ga opiše tangenta na $\gamma(t)$ na intervalu $t \in [a,b]$.