Uvod v diferencialno geometrijo

Jaša Knap

1 Uvod

Definicija 1.1. Topološki prostor M je n-dimenzionalna mnogoterost, če za vsak $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subseteq M$ in homeomorfizem $\varphi : U \to V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (pri tem je $V \approx B^n$).

Primer 1.2. *Naslednje množice so primeri mnogoterosti.*

1. $M = \mathbb{R}^n$ *je* n*-dimenzionalna mnogoterost,*
2. S^1 *je* 1*-dimenzionalna mnogoterost,*
3. $S^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \middle| \sum_{j=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je* n*-dimenzionalna mnogoterost,*
4. *Projektivni prostori* $\mathbb{R}P^n = B^n /_{\sim}$, *kjer je* $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{y} = -\vec{x}$ *so* n*-dimenzionalne mnogoterosti.*
5. *Grupa*
$$\mathrm{SU}\left(2\right) = \left\{g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \det g = 1\right\}$$
je 3*-dimenzionalna mnogoterost. Topološko in geometrijsko je namreč* $\mathrm{SU}\left(2\right) = S^3$. *To je primer Lijeve grupe.*
6. *Grupa*
$$\mathrm{SO}\left(3\right) = \left\{g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| g^T = g^{-1}, \det g = 1\right\}.$$
Izkaže se, da je $\mathrm{SO}\left(3\right) = B^3 /_{\sim} = \mathbb{R}P^3$. *To velja, ker vsaka preslikava iz* $\mathrm{SO}\left(3\right)$ *predstavlja rotacijo prostora, vsako rotacijo pa lahko predstavimo z osjo in velikostjo kota vrtenja. Pri tem kota* π *in* $-\pi$ *predstavljata vrtenje za isti kot. Če točki v krogli* $B\left(0, \pi\right)^3 \approx B^3$ *priredimo os in njeno razdaljo od izhodišča proglasimo za velikost kota vrtenja ter enačimo iste rotacije, dobimo natanko projektivni prostor* $\mathbb{R}P^3$.

1.1 Gladke mnogoterosti

Na topoloških mnogoterostih bi radi znali odvajati različne objekte, kot so na primer funkcije, krivulje, tenzorji itd. Zato moramo mnogoterosti opremiti z dodatno strukturo. Za začetek se spomnimo definicije odvedljivosti preslikav v evklidskih prostorih.

Definicija 1.3. Preslikava $F : W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ odvedljiva, če za vsak $w \in W$ obstaja linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da velja
$$F\left(w + h\right) = F\left(w\right) + Ah + \mathcal{O}\left(h\right)$$
in $\lim_{h\to 0} \frac{||\mathcal{O}(h)||}{||h||} = 0$. Odvod preslikave F v točki w je preslikava $A = D_w F$.

Definicija 1.4. Preslikava F je odvedljiva na množici W, če je odvedljiva v vsaki točki $w \in W$.

Definicija 1.5. Difeomorfizem je bijektivna odvedljiva preslikava, ki ima odvedljiv inverz.

Definicija 1.6. Naj bo M n-dimenzionalna mnogoterost. Gladek atlas $\mathcal{U}$ na M je družina parov $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, če za vsak $\alpha \in A$ velja:

1. $U_\alpha^{\text{odp}} \subseteq M$
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem za nek $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $\{U_\alpha | \, \alpha \in A\}$ je pokritje M
4. $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_*(U_\alpha \cap U_\beta) \to (\varphi_\beta)_*(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizem

Dodatek: Če so vse prehodne preslikave $g_{\alpha\beta}$ k-difeomorfizmi z zveznim k-tim odvodom, imamo $\mathcal{C}^k$-atlas. Če so vse preslikave gladke, imamo $\mathcal{C}^\infty$-atlas, če so vse analitične, pa $\mathcal{C}^\omega$-atlas.

Opomba. Preslikava $g_{\alpha\beta}$ iz prejšnje definicije je preslikava iz $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Torej jo znamo odvajati in vemo, da je v izbranih koordinatah na $\mathbb{R}^n$ matrika odvoda enaka Jacobijevi matriki:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \implies D_w F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_w .$$

Definicija 1.7. Topološka mnogoterost M, ki premore kakšen gladek atlas, je gladka mnogoterost.

Za motivacijo naslednje definicije se spomnimo dejstva, da vemo, kakšne so gladke preslikave iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nismo pa še definirali gladkih preslikav iz mnogoterosti $M \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.8. Funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ je gladka, če je gladka vsaka preslikava $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.9. Naj bo $(M, \mathcal{U})$ gladka mnogoterost. Krivulja $\gamma : (a, b) \to M$ je gladka krivulja, v M, če za $\forall \alpha \in A$ velja, da je $\varphi_\alpha \circ \gamma : (a, b) \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka krivulja v $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.10. Atlasa $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \, \alpha \in A\}$ in $\mathcal{V} = \{(W_\beta, \varphi_\beta) | \, \beta \in B\}$ na mnogoterosti M sta ekvivalentna, če za vsak par $(\alpha, \beta) \in A \times B$ iz $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ sledi, da je

$$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (\varphi_\alpha)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to (\psi_\beta)_* (U_\alpha \cap W_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem.

Opomba. Ekvivalentnost atlasov je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčni razred atlasa $\mathcal{U}$ označimo z $[\mathcal{U}]$.

Definicija 1.11. Naj bo M topološka mnogoterost in $\mathcal{U}$ gladek atlas na M. Potem je $[\mathcal{U}]$ gladka struktura na M.

Opomba. Dejstvo, da lahko obstajajo kakšne netrivialne (eksotične strukture) na mnogoterostih, je zelo netrivialno. Iz Donaldsonovega in Freedmanovega izreka sledi, da ima $\mathbb{R}^4$ neštevno neskončno eksotičnih gladkih struktur. Vsi ostali $\mathbb{R}^n$ imajo zgolj svojo trivialno in nobene eksotične.

2 Gladke vložene ploskve

V splošnem bi lahko mnogoterosti obravnavali kot abstraktne matematične strukture, ki ne prebivajo nujno v evklidskih prostorih. Pri uvodu v diferencialno geometrijo pa se bomo v glavnem ukvarjali z eno in dvodimenzionalnimi mnogoterostmi, vloženimi v prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.1. Množica $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je gladka vložena ploskev, če za vsak $m \in X$ obstaja krogla za m $W \subseteq \mathbb{R}^n$ in gladka funkcija $f : W \to \mathbb{R}$, za katero velja

1. $X \cap W = f^* (\{0\})$
2. $(Df)_w \neq 0$ za vsak $w \in X \cap W$

Vložena ploskev $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je tudi abstraktna mnogoterost. Poglejmo si, kako bi konstruirali atlas na X. Vzemimo točko $m \in X$. Po definiciji vložene ploskve obstaja nivojnica $f : W \ni m \to \mathbb{R}$ in vemo, da $D_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(m) \neq 0$. Zdaj se spomnimo izreka o implicitni funkciji. Naj bo $m = (x_0, y_0, z_0)$ in BŠS naj bo $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$. Torej obstaja gladka okolica $V \ni (x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ in gladka funkcija $g : V \to \mathbb{R}$, da velja $f(x, y, g(x, y)) = 0$ za vsak $(x, y) \in V$. Po potrebi lahko množico W zmanjšamo na $W_0 \subseteq W$, da dobimo difeomorfizem

$$\begin{aligned} r : V &\longrightarrow W_0 \cap X \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

z inverzom

$$\begin{aligned} \varphi : W_0 \cap X &\longrightarrow V \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Ta inverz je v bistvu projekcija na prvi dve koordinati. Če definiramo $U = W_0 \cap X$, postane par (U, φ) karta na X.

2.1 Metrika na ploskvi

Če hočemo meriti razdalje med pari točk na gladki mnogoterosti, potrebujemo še dodatno strukturo - metriko. Ta nam omogoča merjenje dolžin krivulj. Če si predstavljamo krivuljo $\gamma : (a, b) \to M$, je najbolj naravna definicija njene dolžine

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}||\, dt.$$

Znati moramo torej izračunati dolžino oziroma normo tangentnega vektorja. Najbolje je, če je ta norma porojena s skalarnim produktom, torej $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neki skalarni produkt na $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ in naj bo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza za $\mathcal{V}$, ki ni nujno ortonormirana. Vzemimo vektorja $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ in $\vec{y} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Potem velja, da je skalarni produkt enak

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Iz simetričnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$) sledi, da je zgornja matrika simetrična. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta ($\langle v_i, v_i \rangle > 0$) pa sledi še pozitivna definitnost te matrike.

Opomba. Kvadratne matrike so lahko koordinatni zapisi linearnih preslikav iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, lahko pa so tudi koordinatni zapisi skalarnih produktov. To je odvisno od tega, kako se matrike transformirajo pri prehodu v različno bazo.

Naj bo P poljubna preslikava med bazama, L_e linearna preslikava glede na bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, L_f pa glede na bazo $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Potem iz algebre 1 vemo, da je

$$L_f = P L_e P^{-1}.$$

Zdaj pa izpeljimo, kako se transformira matrika skalarnega produkta. Naj bosta $a_f = P a_e$ in $b_f = P b_e$. Potem dobimo iz enakosti

$$\begin{aligned} \langle a_f, b_f \rangle &= \langle a_e, b_e \rangle \\ a_f^T A_f b_f &= a_e^T A_e b_e \\ a_e^T P^T A_f P b_e &= a_e^T A_e b_e, \forall a_e, b_e. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $P^T A_f P = A_e$ oziroma zaradi ortogonalnosti P ekvivalentno

$$A_f = P A_e P^T.$$

Torej transformacijska pravila določajo vrsto preslikave, podobno kot pri fiziki.