Damjana Kokol Bukovšek

Algebra 1

Študijsko gradivo za študente prvega letnika
Finančne matematike

Ljubljana, 2011

Naslov: Algebra 1
Avtor: Damjana Kokol Bukovšek
1. izdaja
Samozaložba
Dostopno na spletnem naslovu www.fmf.uni-lj.si/∼kokol

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512(0.034.2)

KOKOL-Bukovšek, Damjana
Algebra 1 [Elektronski vir] : študijsko gradivo za študente prvega letnika Finančne matematike / Damjana Kokol Bukovšek. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2011

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/ kokol

ISBN 978-961-276-197-4 (pdf)

256853504

Predgovor

Naloge v tej zbirki so namenjene študentom prvega letnika Finančne matematike za domače delo pri predmetu Algebra 1. Večina nalog je rutinskih in bi jih moral znati rešiti vsak študent, ki je razumel snov na pedavanjih in vajah. Nekatere naloge pa so malce težje in zahtevajo od študenta nekaj izvirnosti in kako idejo. Te naloge so označene z zvezdico (*). Namenjene so študentom, ki želijo na izpitu doseči višjo oceno (9 ali 10).

1 Vektorji v $\mathbb{R}^3$

1.1. V $\mathbb{R}^3$ naj bodo dane točke $A(5,-2,2)$, $B(3,-4,6)$ in $C(2,1,-1)$.

(a) Izračunaj dolžino daljice AB.

(b) Izračunaj kot $\angle BAC$.

1.2. Dana sta vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Določi takšni števili x in y, da bo vektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$ pravokoten tako na vektor $\vec{a}$ kot na $\vec{b}$.

1.3. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja, ki oklepata kot 60^0 in je $||\vec{a}|| = 1$, $||\vec{b}|| = 2$. Označi vektorja $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

(a) Izračunaj $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(b) Pokaži, da je $\langle \vec{d}, \vec{b} \rangle = 3\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$.

(c) Izračunaj $\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle$.

(d) Izračunaj $||\vec{c}||$ in $||\vec{d}||$.

1.4. V enakokrakem trapezu naj bo dolžina daljše osnovnice enaka 2, dolžina krakov pa 1. Pri tem naj kraka z daljšo osnovnico oklepata kot 60^0. S pomočjo vektorjev izračunaj dolžino diagonal in krajše osnovnice.

1.5. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja (torej vektorja dolžine 1), ki oklepata kot 60^0. Določi takšno konstanto α, da bosta vektorja $2\vec{a}+\vec{b}$ in $\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ pravokotna.

1.6. V trapezu $ABCD$ sta stranici AB in CD vzporedni. V kakšnem razmerju se sekata diagonali, če velja $|AB| = 3|CD|$?

1.7.* V tristrani piramidi $ABCD$ z osnovno ploskvijo ABC je točka E težišče ploskve BCD, točka F pa razpolovišče stranice AC. Točka X leži na daljici FD tako, da se daljici BX in AE sekata. V kakšnem razmerju deli točka X daljico FD?

1.8.* Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C' in D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C in D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

1.9. Vektor $2\vec{a}-\vec{b}$ je pravokoten na vektor $\vec{a}+\vec{b}$, vektor $\vec{a}-2\vec{b}$ pa je pravokoten na vektor $2\vec{a}+\vec{b}$. Določi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

1.10. Določi kot med vektorjema $\vec{m}$ in $\vec{n}$, če veš, da je vektor $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$ pravokoten na vektor $\vec{b}=7\vec{m}-5\vec{n}$ in je vektor $\vec{c}=\vec{m}-4\vec{n}$ pravokoten na vektor $\vec{d}=7\vec{m}-2\vec{n}$.

1.11. Izračunaj ploščino, dolžine stranic in notranje kote trikotnika z oglišči

$$A(1,-1,1),\ B(-1,1,1),\ C(1,0,2)\,.$$

1.12. Vektorji $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ naj bodo paroma pravokotni in naj velja $||\vec{a}||=1$, $||\vec{b}||=2$ in $||\vec{c}||=2$.

(a) Izračunaj $|\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|$.

(b) Določi volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}-2\vec{c}$ in $\vec{a}+3\vec{c}$.

1.13. Vektorji $\vec{a},\vec{b}$ in $\vec{c}$ so enotski vektorji in zanje velja $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{c})=45^0$ ter $\angle(\vec{b},\vec{c})=60^0$. Izračunaj volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}$ in $\vec{c}+2\vec{b}$.

1.14. Pokaži:

$$\langle(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c}),\vec{c}+\vec{a}\rangle=2\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle.$$

1.15. Pokaži:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\langle\vec{a}\times\vec{c},\vec{d}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\times\vec{c},\vec{d}\rangle\vec{a}=\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{d}\rangle\vec{c}-\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle\vec{d}.$$

1.16. Pokaži, da za enotska vektorja $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ velja enakost

$$\Big\langle(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b},(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\Big\rangle=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^3\,.$$

1.17. Naj bosta $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ dana nekolinearna vektorja. Reši vektorsko enačbo

$$\vec{x}\times(\vec{a}+\vec{b})+\langle\vec{x},\vec{b}\rangle\vec{a}=\langle\vec{x},\vec{a}\rangle\vec{b}$$

1.18. Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna. Reši vektorsko enačbo

$$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{x}+\langle\vec{b},\vec{x}\rangle\vec{a}\,.$$

1.19. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enako dolga vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot 60^o. Reši vektorsko enačbo

$$\langle\vec{a},\vec{x}\rangle\vec{a}+\langle\vec{b},\vec{x}\rangle\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{x}\,.$$

1.20. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ neničelna vektorja v prostoru, ki oklepata kot 30^o, za njuni dolžini pa velja $||\vec{b}||=\sqrt{3}||\vec{a}||$. Reši vektorsko enačbo

$$\langle\vec{x},\vec{a}+\vec{b}\rangle\vec{a}+\vec{x}\times\vec{b}=2\vec{a}\times\vec{b}+3||\vec{a}||^2\vec{b}\,.$$

2 Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$

2.1. Dana je premica
$$p: \quad x+2 = y-2 = \frac{z}{-2} \quad .$$
Določi enačbo premice q, ki seka p pod pravim kotom in gre skozi točko $A(0,2,1)$.

2.2. Dan je trikornik z oglišči $A(1,-1,0), B(-1,1,0)$ in $C(1,2,3)$. Poišči točko, kjer višina iz B seka stranico AC.

2.3. Določi pravokotno projekcijo premice $x=y=z/2$ na ravnino
$$2x+2y+z=6.$$

2.4. Poišči enačbo ravnine, ki je pravokotna na premico
$$\frac{x}{2} = \frac{y+4}{2} = z-3,$$
in je oddaljena od izhodišča za 3.

2.5. Premico, podano z enačbo
$$x=2, \quad 1-y = \frac{z-1}{2} \ ,$$
prezrcali čez ravnino, ki vsebuje točke $A(1,1,2)$, $B(0,1,3)$ in $C(1,0,1)$.

2.6. Na premici p, ki je presek ravnin Π in Σ
$$\Pi: \ 3x-2y+z=2, \qquad \Sigma: \ x+y+2z=4$$
poišči točko, ki je enako oddaljena od točk $A(1,-1,-1)$ in $B(1,-1,3)$.

2.7. Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ naj ima za spodnjo osnovno ploskev kvadrat $ABCD$, točke A_1, B_1, C_1 in D_1 pa naj zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C in D. Skozi središče ploskve $A_1B_1C_1D_1$, središče ploskve ABA_1B_1 in razpolovišče daljice BC potegnemo ravnino Σ. V kakšnem razmerju seka ravnina Σ stranico AB?

2.8. Dan je tetraeder z oglišči
$$A(1,-1,1), \ B(6,-3,1), \ C(2,-1,5), \ D(5,1,1).$$
Poišči enačbo premice p, ki seka robova AD in BC pod pravim kotom.

2.9. Določi vse točke v prvem oktantu, ki so enako oddaljene od treh koordinatnih ravnin in od ravnine $2x + y + 2z = 16$.

2.10. Ravnina Σ vsebuje premico

$$p\colon\ x - 1 = 2y - 2 = z + 1$$

in se dotika nekega valja $\mathcal{V}$ z osjo $x = y = z$. Določi enačbo ravnine Σ in polmer valja $\mathcal{V}$.

3 Matrike in sistemi linearnih enačb

3.1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Poišči vse take matrike B, da bo veljalo $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}.$$
Za vsako naravno število n izračunaj matriko A^n.

3.3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & y \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$
Za vsako naravno število n izračunaj matriko A^n.

3.4. Poišči vse matrike $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja $A^2 = 0$.

3.5. Določi rang matrike
$$A = \begin{bmatrix} -2-t & 4 & 5+t & 4+t \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -t & 3 & 1+t & 4+t \end{bmatrix}$$
v odvisnosti od parametra t.

3.6. Reši sistem enačb
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

3.7. Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra a
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= a+1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2a \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= a-1 \end{aligned}$$

3.8. Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra b

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 &= 2b \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + bx_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2bx_4 &= 4b \\ x_1 + bx_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

3.9. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x - y + 2z - 2u &= 0 \\ 2x - y - bz + u &= 0 \\ 3x - 2y - bz + u &= 2b \\ x - y - 2z - 2au &= 2c \end{aligned}$$

Za katere vrednosti parametrov a, b, c je sistem rešljiv? Kdaj je enolično rešljiv? V tem primeru poišči rešitev.

3.10. Reši enačbo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.11. Izračunaj inverze naslednjih matrik:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3.12. Določi vsa taka števila a, da bo matrika A obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru izračunaj inverz.

3.13. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriki $6A^{-1} + A^2$ ter $4B^{-1} + B^T$.

3.14. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ki reši enačbo

$$AXA^T = A^T A.$$

3.15. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo

$$XA + XB - C = I.$$

3.16. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Reši matrično enačbo

$$AX + 2X = A + I$$

4 Permutacije

4.1. Zmnoži permutacije:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4.2. Izračunaj inverze permutacij:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 10 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4.3. Preštej inverzije in izračunaj signature permutacij:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 10 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4.4. Koliko je permutacij reda 2 v množici vseh permutacij petih elementov S_5? Permutacija π je reda 2, če velja $\pi \neq \mathrm{id}$ in $\pi^2 = \mathrm{id}$.

5 Determinante

5.1. Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5.2. Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5.3. Poišči vsa taka realna števila x, za katera je determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

enaka 0.

5.4. Določi vsa taka realna števila x, da bo matrika A obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4x & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6x \end{bmatrix}.$$

5.5. Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.6. Reši enačbo, v kateri nastopa determinanta velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & n-2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x \end{vmatrix} = 0$$

5.7. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5.8. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5.9.* Izračunaj determinanto velikosti $2n \times 2n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 & n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n+2 & 0 & n+2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n & 0 & 0 & \cdots & 2n \end{vmatrix}.$$

5.10.* Dana je matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Naj bo

$$p(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

(a) Dokaži, da je p linearen polinom v spremenljivki x.
(b) Dokaži: $p(x) = (1-x)\det A + xp(1)$.

5.11. Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

5.12.* Izračunaj determinanto velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

5.13. Izračunaj determinanto velikosti $2n \times 2n$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

5.14. S pomočjo Kramerjevega pravila reši sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrrcr} x_1 & + & x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & +4x_3 & = & -2 \end{array}.$$

5.15. Izračunaj inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

s pomočjo prirejenke.

6 Grupe, kolobarji, obsegi

6.1. Pokaži, da je množica

$$\{a + b\sqrt{3};\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$

grupa za množenje.

6.2.* Na potenčni množici dane množice M definiramo simetrično razliko množic s pravilom:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Pokaži, da je potenčna množica za dano operacijo grupa.

6.3.* Naj za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ velja $ad - bc = 1$. V množici $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ smiselno definiramo operacije s številom ∞ (tako, da so ustrezna pravila skladna z limitami).

(a) Pokaži, da je vsaka preslikava oblike

$$f\colon\ \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

bijekcija.

(b) Pokaži, da vse možne preslikave iz točke (a) tvorijo grupo za komponiranje preslikav.

6.4. Pokaži, da množica ostankov pri delitvi s 6, označimo jo z $\mathbb{Z}_6$, ni grupa za množenje; množica $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ pa je grupa za moženje.

6.5. Naj bo

$$G \;=\; \{z \in \mathbb{C};\ z = 2^k\big(\cos(m\pi\sqrt{2}) + i\sin(m\pi\sqrt{2})\big), k, m \in \mathbb{Z}\},$$

Pokaži, da je G podgrupa v grupi $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.

6.6. Dani sta grupi $(G, *)$ in $(H, \circ)$. V množici $G \times H$ definiramo operacijo

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2) \ \ .$$

Pokaži, da je množica $G \times H$ je grupa za to operacijo.

6.7.* Naj bo $(G, +)$ komutativna grupa, A pa poljubna množica. Naj bo $f : G \to A$ bijektivna preslikava. Dokaži, da je A komutativna grupa za operacijo

$$s \circ t = f(f^{-1}(s) + f^{-1}(t)).$$

6.8. Naj bo

$$\begin{aligned} G &= \{z \in \mathbb{C};\ z = 2^k\big(\cos(m\pi\sqrt{2}) + i\sin(m\pi\sqrt{2})\big), k, m \in \mathbb{Z}\}, \\ H &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in \mathbb{Z}\}\ . \end{aligned}$$

Pokaži, da je preslikava $f\colon\ H \to G$, podana s pravilom

$$(x,y) \mapsto 2^x\big(\cos(y\pi\sqrt{2}) + i\sin(y\pi\sqrt{2})\big)\ ,$$

izomorfizem grup G in H.

6.9. Naj bo

$$\begin{aligned} G &= \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2}; A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\right\}, \\ H &= \left\{A \in G; A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\ . \end{aligned}$$

Pokaži, da je G grupa za množenje matrik, H pa njena podgrupa edinka.

6.10.* Dokaži:

(a) Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *ni* izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$.

(b) Grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_{10}$.

6.11. Dopolni tabelici seštevanja in množenja tako, da dobiš kolobar z enoto:

$+$	a	b	c	d
a	a		c	
b	b	c		
c			a	
d				c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b		
c	a			c
d	a	d	c	

6.12. Sestavi tabelo za seštevanje, množenje in invertiranje v obsegu $\mathbb{Z}_7$

7 Evklidov algoritem, polinomi

7.1. Določi celi števili x in y, ki zadoščata enačbi

$$102x + 125y = 1\,.$$

7.2. Določi celi števili x in y, ki zadoščata enačbi

$$152x - 231y = 1\,.$$

7.3. (a) Izračunaj inverz števila 15 v $\mathbb{Z}_{17}$.

(b) Izračunaj inverz števila 27 v $\mathbb{Z}_{61}$.

7.4. Določi takšna polinoma $p(x)$ in $q(x)$, da za vsak x velja enakost

$$(x^3 + 2)p(x) + (x^2 - x)q(x) = 6\,.$$

7.5. Določi takšna polinoma $a(x)$ in $b(x)$, ki rešita polinomsko enačbo

$$(x^5 + 2x^3 + 2x^2)a(x) + (x^2 + 1)b(x) = 1\,.$$

7.6. Poišči največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik naslednjih parov polinomov p in q:

(a) $p(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$, $q(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$.

(b) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$, $q(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$.

7.7.* Poišči polinom najnižje stopnje, ki pri deljenju z $x+2$ da ostanek 3, pri deljenju z $(x + 1)^2$ pa ostanek $-3x$. Določi vse polinome s to lastnostjo.

8 Vektorski prostori

8.1. Pokaži, da je množica

$$A = \{p \in \mathbb{R}_n[x], p(x) = p(1-x)\}$$

vektorski podprostor v prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ polinomov stopnje največ n.

8.2. Naj bodo vektorji $x, y, z, w \in \mathbb{R}^6$ linearno neodvisni. Pokaži, da so tudi vektorji

$$x + y - z,\ x + z - w,\ x + 2z,\ y + z + w$$

linearno neodvisni.

8.3. Ugotovi, ali je množica

$$\{x^2 + 3x - 2, x^2 + 4x - 3, x^2 + 2x + 1\}$$

linearno neodvisna.

8.4. Dan je vektorski prostor

$$U = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

8.5. Dana je množica $U \subset \mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x - t(y + 2z - 2) = 4 \right\}.$$

Določi parameter t tako, da bo U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Poišči bazo prostora U.

8.6. Dana je matrika $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in množica

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}; AJ^T + JA^T = 0\}.$$

Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

8.7. Dana je množica

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pokaži, da je U vektorski podprostor v prostoru vseh realnih 2×2 matrik. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

8.8. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 je dana množica

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x];\; p''(1) = p'(1),\; p(1) = 0\}.$$

Pokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$. Poišči njegovo bazo in dimenzijo.

8.9. Dan je vektorski podprostor

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči kakšno bazo prostora U in določi $\dim U$.

8.10.* Naj bo $n \geq 4$ in $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje največ n. Dana je množica

$$U = \{p \in \mathbb{R}_n[x]; p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}.$$

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}_n[x]$.
(b) Poišči kakšno bazo prostora U in določi $\dim U$.
(c) Dopolni bazo U do baze vsega $\mathbb{R}_n[x]$.

8.11. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora U in V. Prostor U ima bazo

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

prostor V pa bazo

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči bazi podprostorov $U \cap V$ in $U + V$.

8.12. Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(-1) = p(1) = 0\} \quad \text{in}$$
$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p'''(0) = p'(0) = 0\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči baze prostorov $U + V$ in $U \cap V$.

8.13. Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(0) = p'(0) = 0\}$$

in

$$V = Lin\{x^3 - x + 1, x^3 - x^2, x^2 - x + 1\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3. Poišči baze prostorov U, V, $U + V$ in $U \cap V$.

8.14. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 sta dana podprostora

$$U = Lin\{x^3 - x - 1, x^2 + x + 1, x^3 - x^2 - 2x - 2\}$$

in

$$V = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + bx - a; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Poišči baze podprostorov $U, V, U + V$ in $U \cap V$.

8.15. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stonje največ 3 sta dana podprostora

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x], p(1) = p(-1), p''(0) = 2p(1)\}$$

in

$$V = Lin\{x^2, 1\}.$$

Poišči bazi prostorov $U + V$ in $U \cap V$.

8.16. V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dana baza

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči vektor koeficientov razvoja vektorja

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

po tej bazi.

8.17. Podprostor U v $\mathbb{R}^4$ ima bazo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pokaži, da je vektor

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

element prostora U in poišči njegov vektor koeficientov razvoja po bazi $\mathcal{B}$.

8.18. Podprostor U v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ ima bazo

$$\mathcal{B} = \{x^3 - x - 1, x^2 + x + 1, x^3 - x^2 - 2x\}.$$

Pokaži, da je polinom

$$p(x) = 2$$

element prostora U in poišči njegov vektor koeficientov razvoja po bazi $\mathcal{B}$.

8.19. V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dana baza

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči prehodno matriko iz baze $\mathcal{B}$ v standardno bazo prostora $\mathbb{R}^4$ in prehodno matriko iz standardne baze v bazo $\mathcal{B}$.

8.20. Vektorski prostor U ima bazi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

in

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poišči prehodno matriko iz baze $\mathcal{B}_1$ v bazo $\mathcal{B}_2$ in prehodno matriko iz baze $\mathcal{B}_2$ v bazo $\mathcal{B}_1$.

8.21. Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ ima baze

$$\mathcal{S} = \{x^2, x, 1\},$$

$$\mathcal{B}_1 = \{x^2 - x - 1, x + 1, x^2 + 1\}$$

in

$$\mathcal{B}_2 = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + x, x^2 - 2\}.$$

Poišči prehodne matrike $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{S}}$, $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{S}}$, $P_{\mathcal{S}\mathcal{B}_1}$, $P_{\mathcal{S}\mathcal{B}_2}$, $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ in $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$.

9 Linearne preslikave

9.1. Naj bo preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Ugotovi, ali je linearna.

9.2. Naj bo preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$\mathcal{A}\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \vec{x}.$$

Ugotovi, ali je linearna.

9.3. Naj bo preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = x^2 p(\frac{1}{x}).$$

Ugotovi, ali je linearna.

9.4. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y + z \\ x - y - 2z \\ -2x - 3z \end{bmatrix}.$$

Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

9.5. Dana sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava dana s predpisom

$$\mathcal{A}\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} + 2\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}.$$

Pokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava. V primeru

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

9.6. Dan je vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$\mathcal{A}\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$

Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

9.7. Pokaži, da je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - x)p''(x) + (2x - 1)p'(x)$$

linearna. Določi njeno jedro in sliko.

9.8. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x - 2)(p'(x) + xp(1)).$$

Določi njeno jedro in sliko.

9.9. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{T}(X) = AX - XA.$$

Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{T}$.

9.10. Naj bo $\mathcal{A}$ pravokotna projekcija na premico v $\mathbb{R}^3$ z enačbo

$$\frac{x}{-2} = y = \frac{z}{-1}.$$

Določi jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

9.11. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ima v standardnih bazah matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Poišči kaki bazi za jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

9.12. Dana sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava dana s predpisom

$$\mathcal{A}\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} + 2\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}.$$

Poišči matriko za $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9.13. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - 2)\Big(p'(x) + xp(-1)\Big).$$

Poišči njeno matriko v bazah $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ za $\mathbb{R}_2[x]$ in $B_2 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$.

9.14. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ je podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - x)p''(x) + (2x - 1)p'(x)$$

Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v bazi $\{x^2, x, 1\}$.

9.15. Dana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x - 2)(p'(x) + xp(1)).$$

Poišči njeno matriko v bazi $\{x^2, x, 1\}$.

9.16. Pokaži, da je preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ podana s predpisom

$$\mathcal{T}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

linearna. Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{T}$ v bazi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

9.17. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in linearna preslikava $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{T}(X) = AX - XA.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{T}$ v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

9.18. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ima v bazi $\{1, x, x^2\}$ matriko

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v bazi $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

9.19.* Linearna preslikava $\mathcal{T}_A\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\mathcal{T}_A(X) := AXA^{-1}\,,$$

kjer je A neka obrnljiva matrika iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Določi vse matrike A, za katere preslikavi $\mathcal{T}_A$ v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ustreza matrika

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.20. Linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pripada v standardni bazi $\mathcal{S}$ matrika

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika ji pripada v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}?$$

9.21. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima v bazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

matriko

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9.22. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ -x + y - 3z \\ -x - 2z \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v bazi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

9.23. Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deluje takole

$$\mathcal{A}\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \mathcal{A}\vec{b} = 2\vec{a}, \quad \mathcal{A}\vec{c} = \vec{c}.$$

Poišči matriki za to linearno preslikavo v bazi $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9.24. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ so dani polinomi

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x^2 + x + 1.$$

Poišči prehodno matriko iz baze $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ na standardno bazo $\mathcal{S} = \{x^2, x, 1\}$. Za linearno preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ velja

$$\mathcal{A}p_1 = p_2 + p_3, \quad \mathcal{A}p_2 = p_2, \quad \mathcal{A}p_3 = p_1.$$

Poišči njeno matriko v bazi $\mathcal{B}$ in matriko v bazi $\mathcal{S}$.

9.25. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino $x - y - z = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko tega zrcaljenja v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9.26. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico $x = y = -z/2 = 0$. S pomočjo prehoda na novo bazo poišči matriko te projekcije v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

9.27. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deluje takole:

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

9.28. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x^2 - 2)p(1) - xp'(x).$$

Poišči njeno matriko v bazi $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$ in v bazi $\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.

9.29. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x-2)(p'(x) + xp(1)).$$

Določi matriko za

$$\mathcal{A} : (\mathbb{R}_2[x], \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}_2[x], \mathcal{B}_2)$$

v bazah

$$\mathcal{B}_1 = \{1,\ x-1,\ x^2-3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{x^2-2x,\ x-2,\ 1\}.$$

10 Lastne vrednosti in lastni vektorji

10.1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje. Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki? Kateri? Poišči še prehodno matriko.

10.2. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

10.3. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & b & 0 \\ -1 & c & -1 \end{bmatrix}$$

ima dvojno lastno vrednost 1. Lastni podprostor pri tej lastni vrednosti je napet na vektorja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določi števila a, b in c. Poišči tretjo lastno vrednost in lastni vektor.

10.4. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$

ima lastne vrednosti 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 2 je

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določi števila a, b in c.

10.5. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $b \neq 0$. Poišči lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

ter njihove algebraične in geometrične večkratnosti. Poišči tudi lastne vektorje in lastne podprostore.

10.6. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali je matrika A podobna kakšni diagonalni matriki?

10.7.* Naj bodo $a_1, a_2, ..., a_n$ dani linearno neodvisni vektorji iz $\mathbb{R}^n$. O linearni preslikavi $\mathcal{A}$ vemo:

$$\mathcal{A}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ;$$

$$\mathcal{A}a_1 = a_2,\ \mathcal{A}^2 a_1 = a_3,\ ...,\ \mathcal{A}^{n-1}a_1 = a_n,\ \mathcal{A}^n a_1 = a_1\ .$$

Določi lastne vrednosti, lastne vektorje in karakteristični polinom preslikave $\mathcal{A}$.

10.8. Dana je preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{F}X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

10.9.* Naj bosta a in b linearno neodvisna vektorja iz $\mathbb{R}^n$ in matrika $C = ab^T + ba^T$. Pokaži, da je

$$Lin\{a, b\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 0\}$$

lastni podprostor matrike C za lastno vrednost 0. Določi še ostale lastne vrednosti in lastne vektorje.

10.10.* Za realni 2×2 matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

naj bo

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} ax & bx & ay & by \\ cx & dx & cy & dy \\ az & bz & at & bt \\ cz & dz & ct & dt \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da velja: če je λ lastna vrednost za A in μ lastna vrednost za B, potem je $\lambda\mu$ lastna vrednost za $A \otimes B$.

11 Schurov izrek in minimalni polinom

11.1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njej podobno zgornje trikotno matriko in prehodno matriko.

11.2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njej podobno zgornje trikotno matriko in prehodno matriko.

11.3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči njej podobno zgornje trikotno matriko in prehodno matriko.

11.4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike A. Ali je matrika podobna kakšni diagonalni matriki?

11.5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike A. Ali je matrika podobna kakšni diagonalni matriki?

11.6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike A. Ali je matrika podobna diagonalni matriki?

11.7. Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11.8. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 2a-1 & -a \\ 0 & 0 & 4a & -1-2a \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike A v odvisnosti od parametra a.

11.9. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a-1 & a \\ -1 & 2 & 4a & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrike A v odvisnosti od parametra a.

12 Jordanova kanonična forma

12.1. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Določi še prehodno matriko.

12.2. Poišči Jordanovo kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi še prehodno matriko.

12.3. Poišči Jordanovo kanonično formo in prehodno matriko za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a-1 & a \\ -1 & 2 & 4a & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno Jordanovo kanonično formo v odvisnosti od parametra a. Za $a = 0$ poišči tudi prehodno matriko.

12.5. O linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ vemo naslednje: edini lastni vrednosti sta 1 in 2. Lastni podprostor za 1 je trirazsežen, lastni podprostor za 2 je dvorazsežen. Velja še

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A} - I)^5 = \operatorname{rang}(\mathcal{A} - I)^4 = 3\,.$$

Kolikšna je razsežnost jedra preslikave $(\mathcal{A} - I)^2$? Napiši vse možne Jordanove kanonične forme za $\mathcal{A}$.

12.6.* Matrika A ima karakteristični in minimalni polinom

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^6, \qquad m_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2(\lambda - 1).$$

Poleg tega velja še:

$$\dim\ker(A^2 - I) = 7, \qquad \dim\ker(A^2 - I)^2 = 10.$$

Poišči karakteristični in minimalni polinom preslikave A^2 ter Jordanovo kanonično formo preslikav A^2 in A.

12.7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $A^{11} + A^4 + A^{2000}$.

12.8. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko B, za katero velja $B^3 = A$.

12.9. Izračunaj $\exp(A)$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.10.* Matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ je spodnjetrikotna matrika (to je $a_{ij} = 0$ za $i < j$), ima diagonalne elemente paroma različne, velja pa

$$e^{a_{11}} = e^{a_{22}} = ... = e^{a_{nn}}.$$

Izračunaj $\exp(A)$.

13 Skalarni produkt

13.1. Podprostor V in vektor $\vec{v}$ prostora $\mathbb{R}^4$ (opremljenega s standardnim skalarnim produktom) sta dana takole:

$$V = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v}$ na podprostor V.

13.2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom je dan podprostor

$$W = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora W. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$ na podprostor W.

13.3. Pokaži, da je

$$\left\langle \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right\rangle = 2xa + xb + ya + yb$$

skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$. Poišči kako ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^2$.

13.4. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan predpis

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Pokaži, da je to skalarni produkt. Poišči kako ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

13.5. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

sta dana podprostor V in polinom p

$$V = Lin\{x^2 - 1, x - 1\}, \qquad p(x) = x^2.$$

Poišči ortonormirano bazo za V in izračunaj pravokotno projekcijo polinoma p na podprostor V.

13.6. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

in podprostor

$$U = Lin\{x^2 - 1,\ x^2 - 2x + 1\}.$$

Poišči kako ortonormirano bazo prostora U in jo dopolni do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

13.7. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polinomov stopnje največ 3 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + \int_0^1 p'(x)q'(x)dx.$$

Poišči kako ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(x) = ax + bx^3,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

13.8. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 3p(1)q(1).$$

Poišči kakšno ortonormirano bazo podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x]; p(1) = p'(-1)\}.$$

13.9. Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[x]$ je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Naj bo $V = Lin\{1 + x\}$. Poišči $V^{\perp}$!

13.10. V prostoru $Lin\{1, \cos t, \sin t\}$ je dan skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Določi pravokotno projekcijo funkcije $\cos t$ na prostor $V = Lin\{\sin t, 1 - \cos t\}$.

14 Adjungirane preslikave

14.1. Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj

$$\mathcal{A}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

14.2. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, dana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = xp'(x) \quad .$$

Določi $\mathcal{A}^*(x^2 - 1)$.

14.3. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polinomov stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava dana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = p'(x) \quad .$$

Določi $\mathcal{A}^*(x^2 - x - 1)$.

14.4. Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v standardni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^*$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^2$.

14.5. V prostoru $\mathbb{R}^2$ je dan skalarni produkt

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^*$ v standardni bazi, če ima preslikava $\mathcal{A}$ v standardni bazi matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

14.6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

14.7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^4$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

14.8. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana linearna preslikava, ki ima lastno vrednost -2. Za vsak vektor u, ki leži na ravnini $x + z = 0$ velja $\mathcal{A}u = 2u$. Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

14.9. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima dvojno lastno vrednost 2 in velja

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

14.10. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana linearna preslikava, ki ima lastno vrednost 3. Za vsak vektor v, ki leži na ravnini $x + y = 0$, velja $\mathcal{A}v = -v$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

15 Normalne preslikave

15.1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Ali je matrika A sebi adjungirana, ali je normalna, ali je unitarna, ali je pozitivno definitna?

15.2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Ali je matrika A sebi adjungirana, ali je normalna, ali je unitarna, ali je pozitivno definitna?

15.3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika sebi adjungirana.
(b) Poišči vse vrednosti parametrov a in b tako, da bo matrika normalna.

15.4. Določi manjkajoča števila v matriki A tako, da bo unitarna.

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2i & * & * \\ 2i & -i & * \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}.$$

Ali je tako dobljena matrika sebi adjungirana, ali je normalna?

15.5. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da sta lastna vektorja pravokotna v skalarnem produktu

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}.$$

Ali je matrika A v tem skalarnem produktu normalna, ali je sebi adjungirana, ali je unitarna?

15.6. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da predstavlja rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije.

15.7. Dana je matrika

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da predstavlja zrcalno rotacijo. Izračunaj os in kot rotacije ter zrcalno ravnino.

15.8. Naj bo V končnorazsežen realen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle ., . \rangle$ in $a, b \in V$ dana vektorja.
(a) Pokaži, da je preslikava $\mathcal{A} : V \to V$

$$\mathcal{A}x = \langle x, a \rangle b$$

linearna in določi preslikavo $\mathcal{A}^*$.
(b) Kdaj je preslikava $\mathcal{A}$ sebi adjungirana?
(c) Kdaj je preslikava $\mathcal{A}$ normalna?

15.9.* Naj bosta x, y neničelna vektorja evklidskega prostora V. Pokaži, da obstaja taka pozitivno definitna preslikava $\mathcal{A}$, za katero je $\mathcal{A}x = y$ natanko takrat, ko je $\langle x, y \rangle > 0$.

15.10. (a) Poišči normalni matriki $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ za kateri matrika AB ni normalna.
(b) Naj bosta $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normalni matriki, za kateri velja $AB^* = B^*A$. Dokaži, da je matrika AB normalna.

16 Kvadratne forme

16.1. Katero krivuljo v ravnini predstavlja enačba

$$-3x^2 - 8xy + 3y^2 = 20 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi ter jo nariši.

16.2. Katero krivuljo v ravnini prestavlja enačba

$$19x^2 - 6xy + 11y^2 = 10 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi ter jo nariši.

16.3. Nariši krivuljo

$$3x^2 - 4xy = 4 \, .$$

16.4. Nariši krivuljo

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 10 \, .$$

16.5. Katero ploskev v prostoru predstavlja enačba

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

16.6. Katero ploskev v prostoru prestavlja enačba

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

16.7. Katero ploskev v prostoru prestavlja enačba

$$y^2 - 2xy + 2yz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

16.8. Katero ploskev v prostoru prestavlja enačba

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz - 4yz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

16.9. Katero ploskev v prostoru prestavlja enačba

$$-y^2 + 3z^2 - 4xz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

16.10. Katero ploskev v prostoru prestavlja enačba

$$x^2 + z^2 - 2xy + 2yz = 1 \ ?$$

Poišči njene glavne osi in polosi.

Rešitve

1.1. (a) $2\sqrt{6}$.

(b) $\cos\angle BAC = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1.2. $x = -2$, $y = 1$.

1.3. (a) 1.

(b) Izračunaj, da je $\langle \vec{d}, \vec{b} \rangle = 9$, $\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = 3$.

(c) 15.

(d) $||\vec{c}|| = 2\sqrt{3}$, $||\vec{d}|| = \sqrt{21}$.

1.4. Dolžina diagonal: $\sqrt{3}$, dolžina krajše osnovnice: 1.

1.5. $\alpha = -4$.

1.6. $3 : 1$.

1.7. $1 : 2$.

1.8. $2 : 1$.

1.9. $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1.10. 60^0.

1.11. $pl_{ABC} = \sqrt{3}$, $||AB|| = 2\sqrt{2}$, $||AC|| = \sqrt{2}$, $||BC|| = \sqrt{6}$,
$\angle A = 60^0$, $\angle B = 30^0$, $\angle C = 90^0$.

1.12. (a) 4.

(b) 4.

1.13. 1.

1.17. $\vec{x} = \alpha(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b})$.

1.18. Če je $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -1$, potem je $\vec{x} = \alpha\vec{a}$, sicer je $\vec{x} = 0$.

1.19. $\vec{x} = -\frac{4}{5}\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{5}\vec{a} \times \vec{b}$.

1.20. $\vec{x} = 2\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{b}$.

2.1. $\frac{x}{2} = z - 1$, $y = 2$.

2.2. $B'(1, 0, 1)$.

2.3. $x-1=y-1=\frac{z-2}{-4}$.

2.4. $2x+2x+z=\pm 9$.

2.5. $\frac{x-2}{2}=1-y$, $z=1$.

2.6. $T(1,1,1)$.

2.7. $3:1$.

2.8. $x-3=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

2.9. $T_1(2,2,2)$ in $T_2(8,8,8)$.

2.10. Ravnina ima enačbo $x-z=2$, polmer valja je $\sqrt{2}$.

3.1. $B=\begin{bmatrix} e & 1+f \\ 1-2e & -1-2f \\ e & f \end{bmatrix}$.

3.2. $A^{2k}=\begin{bmatrix} \sin^2\phi & 0 & \sin\phi\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi\cos\phi & 0 & \cos^2\phi \end{bmatrix}$, $\quad A^{2k+1}=A$.

3.3. $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad A^{2k}=2^{k-1}x^ky^kB$, $\quad A^{2k+1}=2^kx^ky^kA$.

3.4. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, kjer je $c\in\mathbb{R}$ poljuben, ali
$A=\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, kjer je $a\in\mathbb{R}$ poljuben in $b\neq 0$.

3.5. Če je $t=1$, je $\mathrm{rang}A=2$, če je $t\neq 1$, je $\mathrm{rang}A=3$.

3.6. x_2,x_4 sta parametra, $x_1=3+x_2-2x_4, x_3=-2$.

3.7. Če je $a=1$, je sistem rešljiv, x_3 je parameter, $x_1=1-x_3, x_2=-2x_3, x_4=-1$
Če je $a\neq 1$, sistem ni rešljiv.

3.8. Če je $b=0$, sistem ni rešljiv.
Če je $b=1$, je sistem rešljiv, x_2,x_3 sta parametra, $x_1=2-x_2-x_3, x_4=0$.
Če je $b\neq 0,1$, je sistem rešljiv, x_3 je parameter, $x_1=\frac{2b-2b^2+4}{b}-x_3, x_2=\frac{2b-4}{b}, x_4=\frac{4b-4}{b}$.

3.9. Sistem je rešljiv, če velja $a \neq -1$ ali $a = -1$ in $c = 2b$.
Sistem je enolično rešljiv, če velja $a \neq -1$.
$x = \frac{b^2-ab^2-bc-2ab-4b+c}{a+1}, y = \frac{b^2-ab^2-bc-4ab-6b+c}{a+1}, z = \frac{b-c-ab}{a+1}, u = \frac{2b-c}{a+1}$.

3.10. $X = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

3.11. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $D^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.12. $a \neq 2$ in $a \neq -1$
$$A^{-1} = \frac{1}{a^2-a-2}\begin{bmatrix} a^2 & -2a^2+a+2 & a & -a-2 \\ -a & a & -1 & a \\ 2 & -2 & a-1 & -2 \\ -4 & a^2-a+2 & -2a+2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.13. $6A^{-1} + A^2 = 7I$, $4B^{-1} + B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

3.14. $X = A^{-1}A^TA(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{bmatrix}$.

3.15. $X = (I + C)(A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

3.16. $X = (A + 2I)^{-1}(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.1. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 5 & 8 & 10 & 4 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4.3. (a) $\mathrm{inv} = 8$, $\mathrm{sgn} = 1$.
(b) $\mathrm{inv} = 4$, $\mathrm{sgn} = 1$.
(c) $\mathrm{inv} = 3$, $\mathrm{sgn} = -1$.
(d) $\mathrm{inv} = 26$, $\mathrm{sgn} = 1$.

4.4. 25.

5.1. 4.

5.2. 6.

5.3. $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

5.4. $x \neq 1$ in $x \neq -1/2$.

5.5. 1.

5.6. $x = 0,\ x = 1, ...,\ x = n - 2$.

5.7. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

5.8. $(-1)^{n-1}n$.

5.9. $-(2n)!(2n-1)$.

5.11. $\frac{4^{n+1}-1}{3}$.

5.12. $2^{n+1}-1$.

5.13. $(a^2-b^2)^n$.

5.14. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

5.15. $A^{-1}=(1/4)A^T$.

7.1. $x=38$, $y=-31$.

7.2. $x=38$, $y=25$.

7.3. (a) $15^{-1}=8$.
(b) $27^{-1}=52$.

7.4. $p(x)=-x+3$, $q(x)=x^2-2x-2$.

7.5. $a(x)=\frac{1}{5}(x-2)$, $b(x)=\frac{1}{5}(-x^4+2x^3-x^2+5)$.

7.6. (a) $(x-1)^2$, $2x^6+x^5-13x^4+10x^3+8x^2-11x+3$.
(b) x^2+3x+2, $x^5+7x^4+17x^3+17x^2+6x$.

7.7. $-3x^2-9x-3$. Vsi polinomi s to lastnostjo so oblike $3+(x+2)(3x(x+1)+(x+1)^2r(x))$, kjer je r poljuben polinom.

8.3. Da.

8.4. baza $U=\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$, $\dim U=2$.

8.5. $t=2$, baza $U=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

8.6. baza $U=\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}\right\}$, $\dim U=2$.

8.7. baza $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim U = 2$.

8.8. baza $U = \{x^3 + 3x - 4, x^2 - 1\}$, $\dim U = 2$.

8.9. baza $U = \{x^3 - x, x^2\}$, $\dim U = 2$.

8.10. Če je n sodo število, je baza $U = \{x^n - 1, n^{n-1} - x, ..., x^4 - 1, x^3 - x, x^2\}$.
Če je n liho število, je baza $U = \{x^n - x, n^{n-1} - 1, ..., x^4 - 1, x^3 - x, x^2\}$.
$\dim U = n - 1$.
baza $\mathbb{R}_n[x] =$ baza $U \cup \{x, 1\}$.

8.11. baza $U + V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, baza $U \cap V = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8.12. baza $U + V = \{x^3 - x, x^2 - 1, x^2\}$, baza $U \cap V = \{x^2 - 1\}$.

8.13. baza $U = \{x^3, x^2\}$, baza $V = \{x^3 - x + 1, x^3 - x^2\}$,
baza $U + V = \{x^3, x^2, x^3 - x + 1\}$, baza $U \cap V = \{x^3 - x^2\}$.

8.14. baza $U = \{x^3 - x - 1, x^2 + x + 1\}$, baza $V = \{x^3 - 1, x^2 + x\}$,
baza $U + V = \{x^3 - x - 1, x^2 + x + 1, x^3 - 1, x^2 + x\}$, baza $U \cap V = \{\}$.

8.15. baza $U + V = \{x^3 - x, x^2, 1\}$, baza $U \cap V = \{x^2\}$.

8.16. $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8.17. $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8.18. $p_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8.19. $P_{\mathcal{SB}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{\mathcal{BS}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8.20. $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8.21. $P_{\mathcal{S}\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{\mathcal{S}\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,
$P_{\mathcal{B}_2\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,
$P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

9.1. Da.

9.2. Ne.

9.3. Da.

9.4. Baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, baza Im $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

9.5. Baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, baza Im $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

9.6. Baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, baza Im $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

9.7. Ker $\mathcal{A} = Lin\{1\}$, Im $\mathcal{A} = Lin\{6x^2 - 4x, 2x - 1\}$.

9.8. Ker $\mathcal{A} = Lin\{x^2 - 3\}$, Im $\mathcal{A} = Lin\{x^2 - 2x, x^2 - x - 2\}$.

9.9. Baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

9.10. Ker $\mathcal{A} = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, Im $\mathcal{A} = Lin \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

9.11. Baza Ker $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

baza Im $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

9.12. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.13. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.14. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.15. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.16. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.17. $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.18. $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

9.19. $A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$.

9.20. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$

9.21. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

9.22. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -28 & 24 & -3 \end{bmatrix}.$

9.23. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9.24. $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9.25. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

9.26. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$

9.27. $A_{\mathcal{S}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -7 \\ 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

9.28. $A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$

9.29. $A_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

10.1. $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

da, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10.2. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

10.3. $a = 2, b = 1, c = 1, \lambda_3 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

10.4. $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$.

10.5. $\lambda_{1,2,3,4} = a$, $a(a) = 4$, $g(a) = 3$,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_a = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

10.6. $\lambda_{1,2,3} = 2, \lambda_4 = -1$,

$$L_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad L_{-1} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{ne.}$$

10.7. $\lambda = 1$ je edina (realna) lastna vrednost, če je n lih, če pa je n sod, sta 1 in -1 lastni vrednosti. Lastni vektor za 1 je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, l. vektor za -1 (če je n sod) pa je $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_n$.

10.8. Lastne vrednosti: -2, -1, 1, 0. Lastni vektorji: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

10.9. $\lambda_{1,2} = \langle a, b \rangle \pm ||a|| \cdot ||b||$. $v_{1,2} = \pm ||b|| a + ||a|| b$.

11.1. $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

11.2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11.3. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

11.4. $m_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2, \quad p_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2, \quad$ ne.

11.5. $p_A(\lambda) = m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4, \quad$ ne.

11.6. $p_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3, \quad m_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda, \quad$ da.

11.7. $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3, \quad m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2.$

11.8. $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^4,$ če $a \neq 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^4,$ če $a = 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^3.$

11.9. $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^4,$ če $a \neq 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^4,$ če $a = 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2.$

12.1. $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 18 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -6 & 1 \end{bmatrix}.$

12.2. $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

12.3. $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

12.4. Če je $a \neq 0$, je $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Če je $a = 0$, je $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.5. $\dim \ker(\mathcal{A}-I)^2 \in \{5, 6\}$. Možne jordanske forme: Za lastno vrednost 2 imamo vedno eno 1×1 in eno 2×2 kletko. Za lastno vrednost 1 imamo naslednje tri možnosti za kletke: (a) ena 1×1, dve 3×3, (b) dve 2×2, ena 3×3, (c) ena 1×1, ena 2×2, ena 4×4.

12.6. $p_{A^2}(\lambda) = (\lambda-1)^{12}$, $m_{A^2}(\lambda) = (\lambda-1)^3$. A^2 ima edino lastno vrednost 1, Jordanova kanonična forma za A^2 pa ima 4 kletke velikosti 1×1, eno kletko velikosti 2×2 in 2 kletki velikosti 3×3. Kanonična forma za A ima dve kletki velikosti 3×3 za lastno vrednost 1, za lastno vrednost -1 pa imamo eno kletko velikosti 2×2 in štiri velikosti 1×1.

12.7. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

12.8. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

12.9. $\begin{bmatrix} e & 4e & 4e \\ 2e & 6e & 5e \\ -2e & -5e & -4e \end{bmatrix}$.

12.10. $\exp(A) = e^{a_{11}} I$.

13.1. $ONB_V = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$, $proj_V \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13.2. $ONB_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$, $proj_W \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13.3. $ONB = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$.

13.4. $ONB = \left\{ 1/\sqrt{3},\ (x-1)/\sqrt{2},\ (3x^2-6x+1)/\sqrt{6} \right\}$.

13.5. $ONB_V = \left\{ x^2-1, \frac{1}{2}(x-x^2) \right\}$, $proj_V p = \frac{1}{2}(x^2-x)$.

13.6. $ONB_U = \left\{ x^2-1, \frac{1}{2}(x^2-x) \right\}$, $ONB_{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{ x^2-1, \frac{1}{2}(x^2-x), \frac{1}{2}(x^2+x) \right\}$.

13.7. $ONB_V = \left\{ x, \frac{\sqrt{5}}{2}(x^3-x) \right\}$.

13.8. $ONB_V = \left\{ \frac{1}{2}x, \frac{1}{\sqrt{21}}(x^2+x-3) \right\}$.

13.9. $V^\perp = \mathcal{L}in\,\{2-3x, 5x^2-2x-2\}$.

13.10. $\frac{\pi^2}{3\pi^2-16}(\cos t + \frac{4}{\pi}\sin t - 1)$.

14.1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

14.2. 0.

14.3. $-6x^2 - \frac{1}{2}x + 4$.

14.4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

14.5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

14.6. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$.

14.7. $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$.

14.8. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14.9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

14.10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

15.1. Je sebi adjungirana, je normalna, je unitarna, ni pozitivno definitna.

15.2. Je sebi adjungirana, ni unitarna, je normalna, je pozitivno definitna.

15.3. (a) $a = 2$, b poljuben,
(b) $a = 2$, b poljuben ali $a = -2, b = 1$.

15.4. $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i & 2i & 1 \\ 2i & -i & -2 \\ 1 & -2 & -2i \end{bmatrix}$, ni sebi adjungirana, je normalna.

15.5. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$
je normalna, ni sebi adjungirana, je unitarna.

15.6. Os $x = z = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

15.7. Os $\frac{x}{1-\sqrt{2}} = -y = z$, $\varphi = \arccos \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, zrcalna ravnina $(1-\sqrt{2})x - y + z = 0$.

15.8. (a) $\mathcal{A}^* x = \langle x, b \rangle a$,
(b) kadar sta vektorja a in b linearno odvisna,
(c) kadar sta vektorja a in b linearno odvisna.

16.1. Hiperbola, $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a = 2,\ b = 2\ .$

16.2. Elipsa, $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a = 1/\sqrt{2},\ b = 1\ .$

16.5. Enodelni hiperboloid,
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = 1/2,\ b = 1/\sqrt{2},\ c = 1\ .$$

16.6. Enodelni hiperboloid,
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = 1,\ b = 1/\sqrt{2},\ c = 1\ .$$

16.7. Hiperbolični valj,
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = 1,\ b = 1/\sqrt{2}\ .$$

16.8. Enodelni hiperboloid,
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = 1/\sqrt{2},\ b = 1/2,\ c = 1/\sqrt{2}\ .$$

16.9. Dvodelni hiperboloid,
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a = 1/2,\ b = 1,\ c = 1\ .$$

16.10. Enodelni hiperboloid,

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = 1,\ b = 1/\sqrt{2},\ c = 1.$$

Kazalo