Bojan Hvala

Zbirka izpitnih nalog iz analize

Z namigi, nasveti in rezultati

DMFA – založništvo
Ljubljana 2007

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(075.8)(079.1)

HVALA, Bojan

Zbirka izpitnih nalog iz analize: z namigi, nasveti in rezultati / Bojan Hvala. – 3. natis – Ljubljana: DMFA–založništvo, 2007. – (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva, ISSN 1408-0850; 35)

ISBN 978-961-212-062-7

233392640

Kazalo

Predgovor

V tej zbirki so zbrane naloge s kolokvijev in izpitov, ki sem jih v letih 1985–1991 pripravljal za študente matematike, fizike in računalništva na Univerzi v Ljubljani in v letih 1991–1996 za študente matematike na Pedagoški fakulteti v Mariboru.

Uvodoma želim omeniti, da se zbirka izpitnih nalog od sistematičnih zbirk nalog nujno loči. Pri izpitnih nalogah teme med seboj niso strogo ločene. Pri pripravi se pogosto zavestno teži k temu, da bi naloge pokrivale več različnih področij in jih povezovale. Snov z nalogami ni enakomerno pokrita, določene teme nastopajo poredkeje, druge so poudarjene. Lahkih uvajalnih nalog običajno ni. Zato zbirka najbrž ni primerna za uvodno seznanjanje s snovmi; temu so namenjene sistematične zbirke nalog. Bodo pa objavljene naloge koristne, ko bodo začetne težave premagane, predvsem pa v zaključni fazi priprav na kolokvije in izpite.

Zbirka po obsegu in globini pokriva dvoletni tečaj iz Analize za študente pedagoških smeri matematike, vendar bi utegnila koristiti tudi študentom drugih smeri in fakultet.

Študentom, ki bi pri reševanju težjih nalog zašli v težave, so v zadnjih razdelkih dodani namigi in nasveti, pri vseh pa rezultati. Namigi poskušajo reševalčevo pozornost z nekaj besedami usmeriti v smer ene od možnih rešitev. Nasveti poskušajo isto, vendar bolj jasno in nedvoumno.

Večina od objavljenih nalog je izvirnih, le redke so deloma ali v celoti povzete po zbirkah [1]–[6]. Izpitne naloge so, preden so se pojavile na izpitih, pregledali in s predlogi sooblikovali nosilci predmetov, predavatelji M. Brešar, M. Černe, J. Globevnik, P. Legiša, P. Petek, N. Prijatelj, J. Vrabec in J. Vukman. Nekatere naloge iz Analize I. so nastale v sodelovanju s kolegi P. Šemrlom, M. Dobovišekom, T. Koširjem in J. Škarabotom. Nekaj nalog iz zadnjih poglavij je za izpite iz Analize III. prispeval M. Brešar.

Bralcem želim mnogo potrpežljivosti in natančnosti pri rutinskih, računskih nalogah in veliko zasledovalne sreče pri nalogah, kjer je treba spretno najti in pozorno slediti pot k rešitvi; predvsem pa, da bi ob nalogah poglobili razumevanje temeljnih pojmov matematične analize.

Bojan Hvala

1 Realna števila in realne funkcije

1. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsako n-terico pozitivnih realnih števil $x_1, \ldots, x_n$ velja
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n \geq n! \cdot x_1 x_2 \cdots x_n \,.$$

2. Naj bo $[x]$ celi del realnega števila x. Ugotovi, za katera realna števila velja:
   (a) $[x] + [x] = [2x]$,
   (b) $[x + \frac{1}{2}] + [x - \frac{1}{2}] = [2x]$.

3. Za $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo $a_n(x) = [7(nx - [nx])]$.
   (a) Izračunaj $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$, za $x = \frac{1}{7}$.
   (b) Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. Skiciraj graf funkcije
$$f(x) = |2x - 1| + |2x + 4| \,.$$
Ugotovi, ali je funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektivna in ali je surjektivna. Odgovor utemelji.

5. (a) Določi naravna definicijska območja funkcij
$$f_1(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x), \qquad f_2(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x), \qquad f_3(x) = x \,.$$
   Ali sta kateri od teh funkcij enaki?
   (b) Preveri, da je $g(x) = \operatorname{tg}(3 \operatorname{arc\,tg} x)$ racionalna funkcija in skiciraj njen graf.

6. Dani sta funkciji $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -(x-1)^{-2} & x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq -1 \\ 0 & x < -1 \end{cases}.$$
Izračunaj kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ ter skiciraj grafe funkcij f, g, $f \circ g$ in $g \circ f$.

7. Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$
   (a) Ugotovi, ali je funkcija $f \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ injektivna in ali je surjektivna.
   (b) Določi splošni člen zaporedja $a_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-krat}}(1)$.

8. Določi definicijsko območje D_f funkcije
$$f(x) = \ln(4x^2 - x^4) + \sqrt{1 + \ln(x + 1)} \,.$$
Določi tudi tista od števil $\sup D_f$, $\inf D_f$, $\max D_f$ in $\min D_f$, ki obstajajo. Odgovor utemelji.

9. Dani sta funkciji:
$$f(x) = \sqrt{1 + \tfrac{1}{2}x^2} \qquad \text{in} \qquad g(x) = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}x^2} \,.$$
   (a) Določi definicijski območji funkcij f in g.
   (b) Izračunaj $g \circ f$.
   (c) Naj bo $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-krat}}$. Dokaži: $(g \circ f_n)(x) = 2^{-\frac{n}{2}} g(x)$.

2 Kompleksna števila

10. Reši enačbo:
$$z^2 - \mathrm{i}z = |z - \mathrm{i}|\,.$$

11. Poišči kompleksne rešitve enačbe in jih skiciraj v kompleksni ravnini:
$$z^2\,\overline{z}^7 = (\mathrm{i}-1)^6.$$

12. Reši enačbi:

(a) $z^4 = 8\,\mathrm{i}\,\overline{z}$, (b) $z^{10} + 2^{10} = 0$.

Poišči vse rešitve prve enačbe, ki niso rešitve druge enačbe.

13. Katera izmed kompleksnih števil $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{i}$, $z_2 = 1+\mathrm{i}$, $z_3 = -1-\mathrm{i}$, $z_4 = 1-i$ so koreni enačbe $z^{17} + 2z^{15} - 512 = 0$?

14. (a) Skiciraj množico kompleksnih rešitev enačbe
$$z^6 - 7\mathrm{i}z^3 + 8 = 0\,.$$

(b) Naj bodo $z_1, \ldots, z_6$ rešitve zgornje enačbe. Dokaži ali ovrzi: obstaja polinom z realnimi koeficienti, katerega ničle so
$$\frac{z_1}{|z_1|}, \ldots, \frac{z_6}{|z_6|}\,.$$

15. Dokaži: za kompleksni števili z in w velja $|z+w| = |\mathrm{i}z + w|$ natanko tedaj, ko velja $\mathrm{Re}(z\overline{w}(1-\mathrm{i})) = 0$.

16. Naj bosta z in w kompleksni števili. Dokaži:
$$|z-w| = |1 - \overline{z}w| \iff |z| = 1 \quad \text{ali} \quad |w| = 1\,.$$

17. (a) Skiciraj množico
$$D = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z^3) > 0\}\,.$$

(b) Za katera naravna števila n in kompleksna števila a ležijo vse rešitve enačbe $z^n = a$ v množici D?

18. (a) Zapiši preslikavo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ki vsako točko $z \in \mathbb{C}$ zavrti za kot $\frac{\pi}{4}$ okrog točke 1.

(b) Rotacijo za kot ϕ okrog točke $w \in \mathbb{C}$ označimo z $R(w,\phi)$. Določi množico točk w v kompleksni ravnini, za katere obstaja tak kot ϕ, da kompozitum $R(w,\phi) \circ R(1,\frac{\pi}{4})$ preslika izhodišče v izhodišče.

3 Zaporedja

19. Razišči zaporedje
$$a_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cos\left(n(n+1)\tfrac{\pi}{3}\right).$$

20. Za različne vrednosti $x \in [0,\infty)$ izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}\,.$$

21. Za vsako naravno število n naj bo a_{2n-1} manjši, a_{2n} pa večji od korenov kvadratne enačbe
$$n^t x^2 + n^2 x - 1 = 0\,.$$

Razišči zaporedje (a_n) za vse možne pozitivne vrednosti parametra t.

22. Zaporedje (x_n) je podano takole:
$$x_0 = 3\,, \qquad x_{n+1} = \tfrac{1}{4}x_n + 1\,.$$

Pokaži, da je konvergentno in izračunaj limito.

23. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno:
$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}\,.$$

Dokaži, da je zaporedje omejeno in monotono ter izračunaj njegovo limito.

24. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno:
$$a_1 = 21\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6}\,.$$

Dokaži, da je zaporedje monotono in omejeno ter izračunaj njegovo limito.

25. Dokaži, da je rekurzivno podano zaporedje
$$x_1 = \sqrt{2}\,, \qquad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$$

navzdol omejeno, monotono, konvergentno in izračunaj limito.

26. Zaporedji (p_n) in (q_n) sta rekurzivno podani takole:
$$p_0 = \frac{2}{3}\,, \qquad q_0 = \frac{1}{3}\,, \qquad p_{n+1} = \frac{7}{10}p_n + \frac{5}{10}q_n\,, \qquad q_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{5}{10}q_n\,.$$

(a) Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $p_n + q_n = 1$.

(b) Dokaži, da sta zaporedji konvergentni in poišči limiti.

4 Zveznost in limite funkcij

27. Funkcija $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definirana takole: če je $x = d, d_1 d_2 d_3 \ldots$ decimalni razvoj števila x (za števila, ki imajo dva razvoja, vzamemo tistega, v katerem se ponavljajo ničle), je $f(x) = d_2$.

    (a) Funkcijo f izrazi s funkcijo $x \mapsto [x]$ (celi del).

    (b) V katerih točkah je funkcija f zvezna? Odgovor natančno utemelji.

28. Dane so funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = |x|, \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

    (a) Ugotovi, ali obstaja $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x)$.

    (b) Dokaži ali ovrzi: obstaja tako število $k \in \mathbb{R}$, da je funkcija

$$H(x) = (f \circ g)(x) + k \cdot h(x)$$

    zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

    (c) Ugotovi, katerim pogojem morata ustrezati funkciji $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da bosta funkciji $F \circ h$ in $h \circ G$ zvezni v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

29. (a) Poišči primer funkcij $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z naslednjo lastnostjo: funkcija g ni zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}$, funkcija $f \circ g$ pa je zvezna v točki a.

    (b) Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in injektivna funkcija, za funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pa obstaja limita $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

    Dokaži: če funkcija g ni zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$, potem tudi funkcija $f \circ g$ ni zvezna v točki a.

Opomba: izraz ***obstaja limita*** nam bo vseskozi pomenil obstoj končne limite.

30. Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje z limito a in f funkcija, za katero obstaja limita $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve:

    (a) Zaporedje $(f(a_n))$ je konvergentno.

    (b) Če je zaporedje $(f(a_n))$ konvergentno, potem je njegova limita b.

    (c) Če je zaporedje (a_n) strogo naraščajoče, potem je zaporedje $(f(a_n))$ konvergentno.

31. Naj bosta $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji. Dokaži ali ovrzi:

    (a) Če obstaja limita $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x)$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

    (b) Če obstaja limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x)$.

    (c) Če obstaja limita $\lim_{x\to\infty} g(x)$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x)$.

32. Naj bosta a in b dve različni realni števili in $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, o katerih vemo naslednje: $f(a) = a$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, funkcija g je zvezna v točki b.

    (a) Izračunaj $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x)$.

    (b) Dokaži ali ovrzi: če je funkcija g injektivna, potem funkcija $g \circ f$ ni zvezna v točki a.

    (c) Dokaži ali ovrzi: če funkcija g ni injektivna, potem je funkcija $g \circ f$ zvezna v točki a.

33. Naj bosta a in b dve različni realni števili. Poišči primer funkcij $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za kateri <u>ne</u> velja, da

$$\text{iz} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \text{in} \quad \lim_{x\to a} g(x) = b \quad \text{sledi} \quad \lim_{x\to\infty} (g \circ f)(x) = b. \qquad (1)$$

    Dokaži, da pa sklep (1) velja, če dodatno privzamemo katerokoli od naslednjih predpostavk:

    (a) funkcija g je zvezna v točki a,

    (b) funkcija f je injektivna.

4.1 Računanje limit

Vse limite iz tega razdelka je mogoče izračunati brez uporabe L'Hospitalovega pravila.

34. Izračunaj limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{tg} x}{x^3} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

35. Izračunaj limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{x^7+2x+1}}{x^{\frac{7}{2}} + 7\sqrt{x^2+7x+1}}.$$

36. Izračunaj limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sh} x}{(e^x - 1)^2}.$$

37. Izračunaj limito $\lim_{x\to 0}[x+\log(e+x)]^{1/x}$.

38. Izračunaj limiti:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; $a>0$ (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

39. Izračunaj limiti:

(a) $\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(e^{x/(x+1)}-\mathrm{e}\right)$ (b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\cos x/\log(1+x)}$.

40. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x)=\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

in izračunaj limito $\lim_{x\to\infty}f(x)$. Kako je z limito $\lim_{x\to-\infty}f(x)$?

5 Odvod

41. Ugotovi, ali je funkcija $x\mapsto|x|\sin x$ odvedljiva, zvezno odvedljiva, dvakrat odvedljiva, dvakrat zvezno odvedljiva na realni osi.

42. Dokaži, da je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin^2 x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

zvezna in odvedljiva v točki $x=0$. Ali je tam tudi zvezno odvedljiva?

5.1 Tangente in normale

43. Ugotovi, za katere vrednosti $a\in\mathbb{R}$ je premica $2x+y=0$ tangenta grafa funkcije

$$g(x)=a(x-2)^2.$$

Za vsak dobljeni a nariši primerno sliko.

44. Naj bo a realno število in $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkciji: $f(x)=x^2-7x+6$ in $g(x)=(x-1)(x^2+ax-2)$.
   (a) Za katere vrednosti parametra a se grafa funkcij f in g v točki $(1,0)$ sekata pod kotom $\pi/4$?
   (b) Za katere točke $x_0\in\mathbb{R}$ tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0,f(x_0))$ poteka skozi točko $(0,2)$?

5.2 Rolleov in Lagrangeov izrek

45. Z uporabo Rolleovega izreka dokaži, da polinom

$$p(x)=\frac{x^7}{7}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-1$$

nima več kot ene realne ničle. Koliko realnih ničel potemtakem ima? Vsak korak dobro utemelji!

46. Naj bo $D[0,1]$ množica tistih funkcij $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, ki so zvezne na intervalu $[0,1]$ in odvedljive na intervalu $(0,1)$. Za vsako funkcijo $f\in D[0,1]$ definiramo množico K_f takole:

$$K_f=\{\xi\in(0,1)\,;\quad f'(\xi)=f(1)-f(0)\}.$$

Dokaži ali ovrzi:

(a) Obstaja funkcija $f \in D[0,1]$, za katero je K_f prazna množica.

(b) Obstaja točka $q \in (0,1)$, da za vsak polinom p stopnje 2 velja $K_p = \{q\}$.

5.3 L'Hospitalovo pravilo

47. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + e^{x^3} - 1}{\ln(1+x) - \sin x}$.

Poskusi rešiti naloge iz razdelka 4.1 še enkrat, tokrat z uporabo L'Hospitalovega pravila.

5.4 Risanje grafov funkcij ene spremenljivke

48. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje nariši graf funkcije
$$f(x) = \frac{x^4}{10}(12\ln x - 7).$$

49. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije
$$f(x) = x^2\sqrt{1-\ln x}.$$

50. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije
$$f(x) = x^4 e^x.$$
Nato poišči vse točke $a \in \mathbb{R}$ z naslednjo lastnostjo: tangenta na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$ seka abscisno os pri $x = a+1$.

51. Upoštevaj pomen prvega odvoda in čim natančneje nariši graf funkcije
$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}.$$

52. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje nariši graf funkcije
$$f(x) = \sin^3 x \cos x.$$

53. Nariši graf funkcije
$$f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$$

54. Skiciraj graf funkcije
$$f(x) = x^{-1} \cdot \log x \cdot e^{-\log^2 x}.$$

55. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije
$$f(x) = x^4(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

56. Nariši graf funkcije
$$f(x) = \left(x - \tfrac{3}{16}\right) e^{\frac{1}{x}}.$$

57. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije
$$f(x) = e^{\ln x(1-\ln x)}.$$

58. Dana je funkcija
$$f(x) = xe^{-x^2-x}.$$
   (a) Upoštevaj pomen prvega odvoda in skiciraj graf funkcije f.
   (b) Za vsak $k \in \mathbb{R}$ ugotovi, koliko presečišč ima graf funkcije f s premico $y = kx$. Odgovor utemelji.

59. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje nariši graf funkcije
$$f(x) = \sqrt{x}\,(2 - \ln x^2).$$

60. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje nariši graf funkcije
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$
S pomočjo te funkcije brez uporabe kalkulatorja ugotovi, katero od števil e^π, π^e je večje.

61. Določi definicijsko območje in asimptoto funkcije $f(x) = x \cdot \ln\left(e + x^{-1}\right)$.

62. Skiciraj graf funkcije
$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+x}}{|x-1|}.$$
V katerih točkah graf seka asimptoto?

63. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije
$$f(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{1 + \ln x}.$$
Ali ima dana funkcija asimptoto?

64. Dana je funkcija

$$f_a(x) = a \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

(a) Skiciraj graf funkcije f_1.

(b) Za katere $a > 0$ je funkcija $f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektivna?

(c) Dokaži: Če je $a > 0$ in je funkcija $f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektivna, je na intervalu $(0,\infty)$ konkavna.

65. Dani sta funkciji

$$g(x) = \left(\sqrt{1+x} - 1\right)^{-1} \qquad \text{in} \qquad f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{1+x} - 1}\,.$$

(a) Skiciraj graf funkcije g.

(b) Izračunaj limite:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} f'(x)\,, \qquad \lim_{x\to -1} f'(x)\,, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f'(x)\,.$$

(c) S pomočjo grafa funkcije g in brez računanja ekstremov skiciraj graf funkcije f.

5.5 Ekstremi – uporabne naloge

66. Med trapezi, katerih osnovnica je interval $[-R,R]$ na abscisni osi in so včrtani v polkrog

$$x^2 + y^2 \le R^2, \qquad y \ge 0\,,$$

poišči tistega z največjo ploščino.

67. Dana je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Med vsemi tetivami skozi točko $(-a,0)$ poišči najdaljšo!

68. Narediti želimo šotor, ki bo imel obliko valja, ki ga zgoraj dopolnjuje stožec z isto osnovno ploskvijo. Naročnik šotora je postavil naslednji dve zahtevi: radij valja naj bo 5 m, površina v šotor vgrajenega platna pa 100π m^2. Določi višini H valja in h stožca, da bo volumen šotora pri danih pogojih največji.

69. Naj bosta $a,b > 0$ realni števili in $A = (0,b)$. Med vsemi trikotniki ABC z oglišči na elipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ki imajo stranico BC vzporedno osi x, poišči tistega z največjo ploščino.

70. V poljubni točki M na paraboli $y = 2x^2 + 1$ potegnemo normalo. Ta seka parabolo še v točki N. Za katero točko M je odsek MN najkrajši?

71. Dana je funkcija $f(x) = e^x + \sqrt{2}$.

(a) Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Zapiši enačbi tangente in normale na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$.

(b) Presečišči tangente oz. normale iz točke (a) z abscisno osjo označimo s T_a oz. N_a. Izračunaj dolžino daljice T_aN_a in ugotovi, pri katerem $a \in \mathbb{R}$ je ta daljica najkrajša.

72. V centru jezera, ki ima obliko kvadrata s stranico $2a$, je plavalec, ki bi rad prispel v desni zgornji kot jezera. Pod kakšnim kotom glede na stranico naj plava, da bo najhitreje na cilju, če plava s hitrostjo 3 km/h, po bregu pa hodi s hitrostjo 6 km/h.

73. Naj bo $0 < p < 1$. Iz točke $T(x,y)$ na grafu funkcije $f(x) = \ln x$ izstrelimo kroglico v smeri tangente na krivuljo proti ordinatni osi, in sicer s hitrostjo x^p. Poišči točko na krivulji, od koder bo izstrelek najhitreje priletel do ordinatne osi.

74. Ribič bi moral odnesti sporočilo v mesto, ki leži na nasprotnem bregu reke, 10 km ob toku navzgor. Reka je široka 200 m in teče s hitrostjo 8 km/h. Pod kakšnim kotom glede na breg naj pluje, da bi čimprej prispel v mesto, če lahko njegov čoln razvije hitrost 4 km/h, po kopnem pa hodi ribič s hitrostjo 5 km/h?

6 Integral

6.1 Določeni integral

75. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}.$$

76. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}+\frac{\ln\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}{n}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)}{n}+\frac{\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}{n}\right).$$

6.2 Računanje nedoločenih in določenih integralov

77. Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int\frac{x^2+x+18}{(x^2+2x+10)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\left(\frac{3x^4-1}{x^2}\right)\operatorname{arc\,tg} x^2 dx.$

78. Izračunaj integral
$$\int_0^1\frac{(2x^2+3)\,dx}{(x+1)(2x^2-2x+1)}.$$

79. Izračunaj integral
$$\int_0^\infty\frac{14-6x}{(3x^2+7)^2}\,dx.$$

80. Izračunaj integral
$$\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

81. Izračunaj integral
$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2\,(1+x^2)^2}.$$

82. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

83. Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int\cos^3 x\ln(\sin x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3-\sqrt{3}}^{-3+\sqrt{3}}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx.$

84. Izračunaj integral
$$\int_2^\infty\frac{5x^2+1}{x^2\,(x^2+4)^2}\,dx.$$

85. Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ (b) $\displaystyle\int x\ln(1+x^4)\,dx.$

86. Izračunaj integral
$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

87. Izračunaj integral
$$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{2\sin x+6\cos x+7}.$$

88. Naj bo $0<a<b$. Izračunaj integral
$$\int\frac{dx}{\sin x(a\sin x+b)}.$$

89. Funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je podana takole:
$$f(x)=\int_0^x\frac{(t^2-3)\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Funkcijo izrazi eksplicitno (tj. izračunaj integral), določi njene ekstreme ter čim natančneje nariši njen graf.

90. Naj bo
$$f(x)=\int_0^x\frac{t\operatorname{arc\,tg} t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$$

(a) Izračunaj $f(x)$ eksplicitno (tj. izračunaj integral).

(b) Dokaži, da je funkcija f liha, monotono naraščajoča in da ima eno samo prevojno točko.

(c) Ugotovi, ali ima funkcija f asimptoto.

(d) Skiciraj graf funkcije f.

91. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Dokaži: Če je funkcija f soda, je tudi funkcija F soda.

(b) V primeru $f(t) = |t|$ določi funkcijo F in skiciraj njen graf.

6.3 Posplošeni določeni integral

92. Ugotovi, ali konvergirata posplošena integrala:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(b)} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\,.$$

93. Ugotovi, ali konvergirata posplošena integrala:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} \qquad \text{(b)} \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^2 - a} \qquad a \in (0,1)\,.$$

94. (a) Ugotovi, za katere $n \in \mathbb{Z}$ konvergira integral

$$I_n = \int_n^\infty \frac{x^{2n-4}}{x^2 - 4x + 5}\,dx\,.$$

(b) Izračunaj I_1.

95. Ugotovi, ali konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}\,.$$

96. Za katera števila $a > 0$ konvergira integral

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{[(x-2a)(3x+1)]^a}\,?$$

Pri vrednosti parametra $a = 1/2$ integral tudi izračunaj.

97. Naj bo $a > 0$. Točki $t \in [0,a]$ priredimo vrednost $f(t)$ takole: skozi koordinatno izhodišče $(0,0)$ in točko $T(t,y)$, $y > 0$ na krogu $x^2 + y^2 - ax = 0$ potegnemo premico. Ordinata presečišča te premice s premico $x = a$ je $f(t)$. Izračunaj integral $\int_0^a f(t)\,dt$.

98. Ugotovi, za katera pozitivna realna števila a, b in p konvergirata integrala:

$$\text{(a)} \quad \int_1^\infty \frac{x\,dx}{(x^{2a}-1)^b} \qquad \text{(b)} \quad \int_1^\infty \frac{\log(1+x)\,dx}{x^p}.$$

99. Naj bo n naravno število. Izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{t^n - 1}{t-1}\, e^{-t}\,dt$.

100. Dana je funkcija $f(x) = \int_0^x \sin(\log|t|)\,dt$.

(a) Izrazi $f(x)$ eksplicitno (tj. izračunaj integral).

(b) Ali je funkcija f v točki 0 zvezna? Ali je tam odvedljiva?

6.4 Uporaba določenega integrala

101. Izračunaj ploščino tistega dela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$, ki leži nad grafom funkcije $f(x) = \frac{9x^2}{32}$.

102. Graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

na intervalu $[0,\infty)$ zavrtimo okrog osi x. Izračunaj volumen nastale vrtenine.

103. Naj bo P ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{2ax}$ zavrtimo okrog osi x. Ploskev P razdeli kroglo s središčem v izhodišču in radijem $\sqrt{3}a$ na dva dela. Izračunaj razmerje njunih volumnov.

104. Del grafa funkcije $f(x) = x^{-2}\ln x$, ki leži nad abscisno osjo, zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj volumen nastale vrtenine.

105. Del hiperbole $x^2 - y^2 = 1$, kjer je $1 \le x \le 5$, zavrtimo okrog osi x. Izračunaj površino nastale vrtenine.

106. Del grafa funkcije $f(x) = 3^{-1}\sqrt{x}|x-3|$ med obema ničlama zavrtimo okoli osi x. Izračunaj površino nastale vrtenine.

107. Graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$$

zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj površino nastale vrtenine.

108. Izračunaj dolžino krivulje $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ nad intervalom $[a,b]$. Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ je naloga smiselna?

109. Faraon je dal zgraditi pravilno štiristrano piramido s stranico osnovne ploskve a in višino h. Zaradi težav pri dviganju materiala je čas, potreben za izdelavo enote volumna piramide, odvisen od višine x, na kateri gradijo. Zveza je

$$T(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right).$$

Izračunaj čas, potreben za gradnjo.

7 Vrste

110. Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!!}.$$

111. Ugotovi, ali konvergira katera od vrst:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^{4n}}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

112. Preveri konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih dveh vrst:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n!)^2} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n\, n!}{n^n}.$$

113. Ugotovi, ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log^{3/4}(1+n)}$$

konvergira in ali konvergira absolutno!

114. Seštej:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{n \cdot 2^{4n}}$$

115. Ugotovi, za katera realna števila $x > 0$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Izračunaj vsoto vrste za $x = 2$.

116. Naj bosta b in c pozitivni realni števili. Zaporedje $(a_n)_n$ je definirano takole:

$$a_n = \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}.$$

(a) Ugotovi, za katere b in c konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$.

(b) Naj bo $c > b + 1$. Dokaži, da je v tem primeru zaporedje $(a_n)_n$ monotono in konvergentno ter s pomočjo točke (a) poišči limito.

117. Naj bo $\{a_n\}$ tako zaporedje pozitivnih realnih števil, da obstaja limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = q\,.$$

Dokaži: če je $q > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če pa je $q < 1$, potem vrsta divergira.

7.1 Potenčne vrste

118. Ugotovi, za katera realna števila x konvergira potenčna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{4^n(2n-1)!!}\,.$$

119. Dani sta potenčni vrsti

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^k \ln^k\left(1+\tfrac{1}{k}\right) x^k \qquad \text{in} \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln^k\left(\tfrac{9}{4}\right) x^k.$$

(a) Poišči konvergenčni polmer vrste f.

(b) Ugotovi, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta g in izračunaj njeno vsoto.

(c) Ugotovi, za katera naravna števila n velja

$$f^{(n)}(0) > g^{(n)}(0)\,.$$

120. Zaporedje (a_n), $n = 1, 2, \ldots$ je podano s predpisom

$$a_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(1+n)}\,.$$

(a) Dokaži, da je zaporedje monotono, konvergentno in izračunaj limito.

(b) Dokaži, da za $n \geq 2$ velja $a_n > \dfrac{1}{4n\ln n}$.

(c) Ugotovi, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

121. Naj bo $a_n = \dfrac{\log n}{n^2}$.

(a) Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

(b) Ugotovi, za katera realna števila x konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

122. Izračunaj konvergenčni polmer vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n\,, \quad \text{kjer je} \quad k_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

ter njeno vsoto izrazi z elementarnimi funkcijami.

123. (a) Določi konvergenčni polmer vrste $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

(b) Dokaži, da je funkcija $f(x) + f(1-x) + \log x \, \log(1-x)$ na intervalu $(0,1)$ konstanta. Določi to konstanto, če veš, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

7.2 Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

124. Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) - \frac{1}{n} f'(0)\right].$$

Pri tem je f realna funkcija, dvakrat zvezno odvedljiva v okolici točke 0.

125. Funkcijo

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Izračunaj vsoto vrste

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{3^k}\,.$$

126. (a) Funkcijo $h(x) = (1+x)\ln(1-x)$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0. Za katere $x \in \mathbb{R}$ ta vrsta konvergira?

(b) S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+(1+x)\ln(1-x)}{x^2}.$$

Rezultat preveri z L'Hospitalovim pravilom.

127. Limito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)-\ln(x+1)}{\ln(x+1)-\ln x}$$

izračunaj na dva načina, in sicer:

(a) z L'Hospitalovim pravilom; (b) s pomočjo vrst.

128. Funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{7+x}}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 2$. Izračunaj tudi konvergenčni polmer dobljene vrste.

129. Dana je potenčna vrsta

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,x^k}{(2k)!!\,(2k+1)}.$$

(a) Določi njen konvergenčni polmer R.

(b) Dokaži: $x + xf(x^2) = \arcsin x, \quad x \in (-R,R)$.

130. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2+\cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4}\right)$;

(b) $f^{(1994)}(0)$ za funkcijo $f(x) = x^6 e^x$.

131. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto ugotovi, za katera realna števila a in b obstaja (končna) limita

$$\lim_{x\to 0} x^{-3}\left[x\sqrt{1-x^2} - a\cos x\,\ln(1+x) - bx^2\right]$$

in jo izračunaj.

132. Ugotovi, za katera naravna števila n obstaja končna limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{2x^3 \operatorname{arctg} x + \ln(1+x^2) - x^2}.$$

Če za $n \in \mathbb{N}$ limita obstaja, jo tudi izračunaj.

133. Funkcijo $f(x) = x\sqrt{1+x^3}$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0. S pomočjo tega razvoja dokaži:

$$\left|f^{(1990)}(0)\right| < 1989!.$$

134. Dana je funkcija $f(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 dt$. Zapiši Taylorjev polinom P funkcije f v okolici točke $x = 0$ tako, da bo za vsak $x \in [0, \pi/4]$ napaka manjša od 10^{-3}.

8 Funkcijska zaporedja in funkcijske vrste

135. Dano je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}.$$

Dokaži, da je za vsak $x \in (0,1]$ zaporedje $f_n(x)$ konvergentno, poišči limitno funkcijo f in ugotovi, ali je kovergenca na intervalu $(0,1]$ enakomerna.

136. Ista naloga za funkcijsko zaporedje

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{nx}.$$

137. Dano je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+n+x} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Skiciraj grafa funkcij f_1 in f_2.

(b) Ugotovi, kam funkcijsko zaporedje konvergira po točkah z intervala $[0,1]$. Ali je konvergenca na tem intervalu enakomerna?

138. Dokaži, da funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \sqrt{n}\cdot(x^n - x^{n+1})$$

konvergira v vsaki točki $x \in [0,1]$, poišči limitno funkcijo f in ugotovi, ali je na intervalu $[0,1]$ konvergenca enakomerna.

139. Dano je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = e^{\frac{nx}{x^2+1}}.$$

(a) Ugotovi, v katerih točkah $x \in \mathbb{R}$ zaporedje funkcij konvergira.

(b) Ugotovi, na katerih od intervalov $(-\infty,-\pi]$, $(-\sqrt{5},-\sqrt{2})$, $[-1,0)$ ali $[-1,0]$ je konvergenca enakomerna.

140. Dana je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

(a) Dokaži, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira absolutno?

(b) Dokaži, da je funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$.

(c) Izračunaj $f(0)$ in $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

141. Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$ in izračunaj njeno vsoto. Ali je konvergenca enakomerna na $\mathbb{R}$?

142. Naj bo $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zaporedje zveznih funkcij, ki po točkah konvergirajo k funkciji f. Naj bo nadalje x_n konvergentno zaporedje realnih števil z limito x. Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi:

(a) Funkcija f je zvezna v točki x.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

143. Naj bo $(f_n)_n$ funkcijsko zaporedje zveznih funkcij z lastnostjo $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 1$, ($n \in \mathbb{N}$), ki po točkah konvergira k funkciji f (pomeni $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.)

(a) S primerom pokaži, da iz navedenih predpostavk ne sledi nujno $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(b) Dokaži, da v primeru, ko zaporedje $(f_n)_n$ konvergira k f enakomerno na $\mathbb{R}$, iz navedenih predpostavk sledi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

144. (a) Dokaži: če je $I = [a,b]$ in f_n in g_n ($n \in \mathbb{N}$) funkcijski zaporedji zveznih realnih funkcij, ki konvergirata k funkcijam f oz. g enakomerno na I, potem zaporedje $f_n \cdot g_n$ konvergira k $f \cdot g$ enakomerno na I.
Pozor: znak $\cdot$ označuje produkt dveh funkcij in ne kompozituma!

(b) Navedi primer, ki bo pokazal, da na neomejenem intervalu I ta trditev ne velja.

9 Krivulje v parametričnem in polarnem zapisu

145. Skiciraj krivuljo
$$\left(x^2+y^2\right)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2).$$

146. Krivulja K je parametrično podana z enačbama
$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{ch} t \cdot \cos t + \operatorname{sh} t \cdot \sin t , \\ y(t) &= -\operatorname{ch} t \cdot \sin t + \operatorname{sh} t \cdot \cos t . \end{aligned}$$

(a) Izračunaj dolžino krivulje, ki jo dobimo, če parameter teče od $t = 0$ do $t = \log 2$.

(b) Izračunaj kot, pod katerim ta krivulja seka abscisno os v točki $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

147. Naj bo $a > 0$ in K krožnica $x^2 - 2ax + y^2 = 0$. Koordinatno izhodišče označimo z O. V točki $A = (2a, 0)$ potegnemo na krog tangento t. Za vsako točko $B \in t$ naj bo C_B presečišče daljice OB s krožnico K in M_B točka z daljice OB, ki ustreza enakosti $\overline{OM_B} = \overline{C_BB}$. Točke M_B, $B \in t$ tvorijo krivuljo L.

(a) Poišči enačbo krivulje L v polarnih koordinatah.

(b) Skiciraj njen potek. Posebej obravnavaj kot, pod katerim seka os x in obnašanje za kote blizu $\phi = \frac{\pi}{2}$ in $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

(c) Zapiši enačbo krivulje L v kartezičnih koordinatah.

10 Metrični prostori

148. (a) Dokaži, da je s predpisom
$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R},$$
definirana metrika na množici $\mathbb{R}$.

(b) V tej metriki skiciraj kroglo s središčem v točki 1 in z radijem $\ln \frac{3}{2}$.

(c) Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ konvergentno v metričnem prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Odgovor utemelji.

149. S katerimi od naslednjih predpisov:

(a) $d_1(x, y) = |x - y|^2$,

(b) $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$ in

(c) $d_3(x, y) = |x^4 - y^4|$

je definirana metrika na množici realnih števil? Odgovore utemelji!

150. Preslikavo $D\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiramo takole:
$$D((a, b), (c, d)) = |a + b - c - d| + |-a + b + c - d|.$$

(a) Dokaži, da je D metrika na $\mathbb{R}^2$.

(b) V metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, D)$ skiciraj kroglo $K_2(0, 0)$ s središčem v točki $(0, 0)$ in z radijem 2.

151. Naj bo M množica vseh zveznih funkcij, ki slikajo iz intervala [0,1] v $\mathbb{R}$. S katerimi izmed naslednjih predpisov je definirana metrika na M:

(a) $d(f, g) = |f(1) - g(1)|$,

(b) $d(f, g) = 2\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$,

(c) $d(f, g) = \left|\max_{x\in[0,1]} (f(x) - g(x))\right|$.

152. Za poljubni realni števili x in y definiramo:
$$d(x, y) = |\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y)|.$$

(a) Dokaži, da je $(\mathbb{R}, d)$ metrični prostor.

(b) Skiciraj krogli $K_2(0)$ in $K_{\pi/4}(0)$ s središčem v točki 0 in z radijema 2 oz. $\frac{\pi}{4}$.

(c) Dokaži, da je zaporedje $x_n = n$ Cauchyjevo v prostoru $(\mathbb{R}, d)$, vendar ni konvergentno.

153. Množico pozitivnih realnih števil označimo z $\mathbb{R}^+$. Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}^+$ naj bo

$$d(x,y) = |1/y - 1/x|\,.$$

(a) Dokaži, da je d metrika na $\mathbb{R}^+$.

(b) Ali je $(\mathbb{R}^+, d)$ poln metrični prostor?

(c) Ali je metrika d ekvivalentna običajni metriki na $\mathbb{R}^+$?

154. Naj bo X prostor vseh realnih zaporedij. Za zaporedji $x = (x_1, x_2, \ldots)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots)$ definiramo

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sign}|y_n - x_n|\,.$$

(a) Dokaži, da je (X, d) metrični prostor.

(b) Opiši, katera zaporedja ležijo (glede na dano metriko) v zaprtih kroglah $\overline{K}_1(0)$ in $\overline{K}_{1/8}(0)$ s središčem v ničelnem zaporedju 0 in z radijem 1 oz. 1/8.

155. Naj bo M prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje manjše ali enake 2, in $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ preslikava, definirana takole:

$$d(p,q) = |p(0) - q(0)| + |p(1) - q(1)| + |p(2) - q(2)|\,.$$

(a) Dokaži, da je d metrika na M.

(b) Za vsako od množic

$$A = \{p \in M\,;\ \mathrm{st}(p) = 0\} \qquad \text{in} \qquad B = \{p \in M\,;\ p(1) = 0\}$$

ugotovi, ali je v metričnem prostoru (M, d) odprta in ali je zaprta.

156. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ zvezna funkcija. Za poljubni števili $a, b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$d(a,b) = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Dokaži: $(\mathbb{R}, d)$ je metrični prostor natanko tedaj, ko množica $N = \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) = 0\}$ ne vsebuje nobenega odprtega intervala.

157. Denimo, da imata zaporedji (x_n) in (y_n) v metričnem prostoru (M, d) isto limito. Dokaži, da je potem

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\,.$$

158. Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora, $f\colon M \to M'$ enakomerno zvezna preslikava in (x_n) Cauchyjevo zaporedje v M. Dokaži, da je potem $(f(x_n))$ Cauchyjevo zaporedje v M'.

159. Katere od naslednjih trditev veljajo v poljubnem metričnem prostoru (M, d)?

(a) Če množica $A \subset M$ ni niti odprta niti zaprta, potem tudi množica A^C ni niti odprta niti zaprta.

(b) Če sta A in B zaprti množici, potem je zaprta tudi množica $A - B$.

(c) Če je $A \subseteq B \subseteq M$, potem je $\mathrm{Rob}(A) \subseteq \mathrm{Rob}(B)$.

Odgovore utemelji.

160. Izmed naslednjih štirih trditev:

(a) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$,

(b) $\overline{A} \cap A^C = \emptyset$,

(c) $\mathrm{Rob}(\overline{A}) = \mathrm{Rob}(A)$ in

(d) $\mathrm{Rob}(A) \cap \mathrm{Int}(A^C) = \emptyset$

dve veljata za vsako podmnožico A v poljubnem metričnem prostoru, dve pa ne. Pravilni trditvi dokaži, nepravilni pa ovrzi s konkretnima primeroma.

161. Naj bo (M, d) metrični prostor in naj bosta A in B poljubni podmnožici množice M. Preveri resničnost naslednjih dveh trditev in jih bodisi dokaži, bodisi ovrzi s protiprimerom:

(a) Če je A odprta in B zaprta množica, je $A - B$ odprta množica.

(b) Če je A odprta in B zaprta množica, je $A \cap B$ odprta množica.

162. Naj bo (M, d) metrični prostor in $A, B \subseteq M$. Dokaži ali ovrzi:

(a) Če je $B \subseteq A$, je tudi $\mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

(b) $\mathrm{Rob}(A) \cap \mathrm{Rob}(B) \subseteq \mathrm{Rob}(A \cap B)$.

163. Naj bo (M, d) metrični prostor in naj bosta A in B poljubni podmnožici množice M.

(a) Dokaži, da je $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. S primerom pokaži, da vselej ne velja $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) Dokaži, da je $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

164. Dokaži, da je unija dveh omejenih podmnožic metričnega prostora spet omejena podmnožica.

165. Naj bo (M,d) poljuben metrični prostor in naj bo $a \in M$. Dokaži, da sta preslikavi $f,g\colon M \to M$, definirani s predpisoma

$$f(x) = x\,, \quad g(x) = a\,,$$

zvezni.

166. Naj bo $M = \mathbb{R} - \{0\}$ in d običajna metrika na M: $d(x,y) = |x-y|$. Naj bo nadalje $f(x) = \frac{x}{2}$.

(a) Ali je $f\colon (M,d) \to (M,d)$ skrčitev?
(b) Ali ima f v M kako fiksno točko?

Ali so ugotovitve v nasprotju z Banachovim skrčitvenim načelom?

167. Preslikava $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definirana takole:

$$f(x,y) = \left(y-1, \frac{x+y}{2}\right).$$

Dokaži ali ovrzi: obstaja taka zaprta podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^2$, da je $f\colon D \to D$ skrčitev.

168. Za poljubno zvezno funkcijo $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ in poljuben $x \in [0,\pi]$ naj bo

$$(Af)(x) = e^x + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\,\sin(x-t)\,dt\,.$$

(a) Dokaži, da preslikava A zvezni funkciji $f \in C[0,\pi]$ priredi zvezno funkcijo $A(f) \in C[0,\pi]$.
(b) Dokaži, da obstaja funkcija $g \in C[0,\pi]$, za katero velja $Ag = g$.
(c) Poišči kak trodimenzionalen podprostor prostora $C[0,\pi]$, v katerem leži fiksna točka preslikave A.

169. Naj bo $M = \{x = (x_1, x_2, \ldots)\,;\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\ldots\}$ množica realnih zaporedij in D primerjalna metrika na M. Določi notranjost, rob in zunanjost množice

$$A = \{x = (x_1, x_2, \ldots)\,;\ x_i \in \mathbb{N}\,,\ i = 1,2,\ldots\}\,.$$

Ugotovi, ali je množica A zaprta in ali je odprta.

11 Funkcije več spremenljivk, uvodni pojmi

170. Dana je funkcija

$$f(x,y) = e^x y (x-1)^{-1}.$$

(a) Poišči in skiciraj definicijsko območje funkcije f.
(b) Graf funkcije f predstavi z nivojnicami.
(c) S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost $f\left(\frac{1}{100}, \frac{96}{100}\right)$.

171. Funkcija g dveh spremenljivk je definirana takole: če ima polinom $x^2 + ax + b$ realni ničli, potem funkcija g paru (a,b) priredi večjo od ničel polinoma.

(a) Skiciraj naravno definicijsko območje funkcije g.
(b) Izračunaj približno vrednost $g(-1{\cdot}01, -1{\cdot}97)$.

172. S pomočjo nivojnic predstavi ploskev $z = y(x^2-1)$. Na sliki označi, kako bi po ploskvi prišel iz točke $(-2,1,3)$ v točko $(2,-1,-3)$ tako, da se med potjo ne bi nikdar vzpenjal. Pomagaj si z ustreznimi prerezi.

173. Dana je funkcija

$$f(x,y) = \left(-x + \sqrt{x^2+y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

(a) Poišči in skiciraj definicijsko območje funkcije f.
(b) Graf funkcije f predstavi s pomočjo nivojnic. Nariši vsaj nivojnice N_1, $N_{\frac{1}{2}}$, N_2 in N_{-1}.

174. Dana je funkcija $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

(a) Dokaži, da točka (x,y) ni v naravnem definicijskem območju funkcije f natanko tedaj, ko je $y = 0$ in $x \le 0$.
(b) Graf funkcije f predstavi s pomočjo nivojnic. (Nariši vsaj nivojnice N_0, N_1 in N_{-1} ter nakaži trend pri nivojnicah N_a za $a > 0$ in za $a < -1$.)

175. Dana je funkcija

$$f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(x - 2 + \sqrt{x^2-y^2}\right).$$

(a) Skiciraj: definicijsko območje funkcije f, nivojnico $N_{\pi/4}$, ter prerez grafa nad premico $y = x$.
(b) Izračunaj približno vrednost $f(0{\cdot}987, 0{\cdot}015)$.

176. Dana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Ali je funkcija f zvezna v točki (0,0)?

(b) Ali v točki (0,0) obstajata parcialna odvoda f_x in f_y? Odgovore utemelji!

(c) Graf funkcije f predstavi z nivojnicami. (Nariši vsaj N_0, N_1, N_2, $N_{1/2}$ in N_{-1}!)

177. Naj bo

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Izračunaj parcialni odvod $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ funkcije g po spremenljivki y. Za vsako od funkcij g in $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ ugotovi, ali je zvezna v točki (0,0).

178. Dana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Ali je funkcija f zvezna v točki (0,0)?

(b) Ali v točki (0,0) obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$?

179. Dani sta množici

$$F = \{(-1,0),(1,0)\} \qquad \text{in} \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 = 1\}.$$

Naj bo $f(x,y)$ kvadrat razdalje od točke (x,y) do množice F, $g(x,y)$ pa kvadrat razdalje od točke (x,y) do množice G. Eksplicitno zapiši funkcijska predpisa za funkciji f in g ter ugotovi, v katerih točkah sta parcialno odvedljivi.

180. Približno za koliko se spremeni večja ničla polinoma $x^2 - 3x + 2$, če vse tri koeficiente povečamo za 0'01. Nalogo reši z diferencialom.

181. Naj bo $z = z(x,y)$ parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk in f odvedljiva realna funkcija.

(a) Transformiraj izraz $xz_x + yz_y$ v polarne koordinate.

(b) Izračunaj ta izraz za funkcijo $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(c) Poveži oba rezultata.

182. Zgraditi želimo silos. Imel naj bi obliko valja $r = 10$ m, $h = 40$ m, ki se na vrhu konča s polkroglo. Po začetku gradnje so izvajalci opazili, da je radij osnovne ploskve za 2 % večji od predvidenega. Za koliko % bi morali zmanjšati višino h, da bi dobili silos prej predvidenega volumna? Nalogo reši s pomočjo diferenciala.

12 Ekstremi funkcij več spremenljivk

12.1 Lokalni ekstremi

183. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4\,.$$

184. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 y}\,.$$

185. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$g(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7\,.$$

186. Dana je funkcija

$$f(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

(a) Skiciraj prereza grafa funkcije f nad premicama $y=0$ in $x=1/2$.

(b) Poišči lokalne ekstreme funkcije f in pri vsakem od njih ugotovi, za katero vrsto ekstrema gre.

12.2 Izrek o implicitni funkciji

187. Dana je funkcija

$$F(x,y) = \left(y-x^2\right)^2 - x^5.$$

(a) Dokaži, da obstaja okolica U točke $x=1$ in zvezna funkcija $y=y(x)$, definirana na U, da velja $y(1)=0$ in $F(x,y(x))=0$ za vsak $x\in U$.

(b) Skiciraj množico točk (x,y) v ravnini, za katere velja $F(x,y)=0$. Iz slike je razvidno, da nam enačba $F(x,y)=0$ ne določi zvezne funkcije $y=y(x)$ v okolicah točk $a\le 0$. Za vsako od teh točk ugotovi, katere predpostavke izreka o implicitni funkciji niso izpolnjene.

188. Preveri, da nam enačba $x^2+y^2+z^2-\mathrm{e}^z=0$ v okolici točke $(1,0)$ določa zvezno funkcijo $z=z(x,y)$, za katero velja $z(1,0)=0$. Razvij jo v Taylorjevo vrsto do členov reda 2.

189. Dokaži, da nam enačba

$$z^3 - z - xy\sin z = 0$$

v okolici točke (0,0) določa zvezno funkcijo $z=z(x,y)$ z lastnostjo $z(0,0)=1$. Razvij to funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke (0,0) do členov reda 2.

190. Naj bo $F(x,y,z) = x^4+y^4+z^4-18$.

(a) Dokaži, da obstaja okolica U točke $(1,1)$ in na njej enolično določena zvezna funkcija $z(x,y)$ z lastnostjo $z(1,1)=2$, da za vsako točko $(x,y)\in U$ velja $F(x,y,z(x,y))=0$.

(b) Funkcijo $z(x,y)$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke (1,1) do členov reda 2.

191. Dana je funkcija

$$F(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 - \left(y^2+z^2\right)^2.$$

(a) Dokaži, da obstaja odprta okolica U točke (0,0) v ravnini xy in enolično določena zvezna funkcija $z=z(x,y)$, definirana na U, da velja $z(0,0)=1$ in $F(x,y,z(x,y))=0$ za vsak $(x,y)\in U$.

(b) Funkcijo $z(x,y)$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke (0,0) do členov reda 2.

(c) Dokaži, da ima funkcija $z(x,y)$ v točki (0,0) lokalni ekstrem in ugotovi, za katere vrste ekstrem gre.

192. Dani sta funkciji:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3-3xyz-4 \quad \text{in} \\ g(x,y,z) &= \sin(\pi xyz)\,. \end{aligned}$$

(a) Dokaži, da obstaja natanko en tak par funkcij $y(x), z(x)$, definiranih na neki okolici U točke $x=1$, da je $y(1)=1$, $z(1)=2$ ter

$$f(x,y(x),z(x))=0 \quad \text{in} \quad g(x,y(x),z(x))=0 \quad \text{za vsak } x\in U\,.$$

(b) Dokaži, da je funkcija $y(x)$ v okolici točke 1 padajoča, funkcija $z(x)$ pa ima v točki 1 lokalni maksimum.

12.3 Vezani ekstremi

193. Ugotovi, kje na lemniskati

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

doseže funkcija $f(x,y)=x^2-3y^2$ največjo vrednost in kje najmanjšo. Dobljene točke označi na skici.

194. Ugotovi, v katerih točkah na kardioidi $\left(x^2+y^2-x\right)^2 = x^2+y^2$ zavzame funkcija $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ največjo vrednost in v katerih najmanjšo. Nalogo reši z vezanim ekstremom. Rezultat geometrijsko interpretiraj.

195. Med točkami (x,y,z) v prostoru, ki zadoščajo zvezi

$$z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 ,$$

poišči tiste, za katere je vrednost izraza $x^2+y^2+z^2$ najmanjša. Nariši skico in rezultat geometrijsko interpretiraj.

196. Med točkami na sferi $x^2+y^2+z^2 = 1$ poišči tiste, v katerih zavzame funkcija

$$f(x,y,z) = [xyz]^{2/3}$$

največjo oz. najmanjšo vrednost.

197. Dokaži ali ovrzi: za poljubno točko (x,y,z) na elipsoidu $x^2+2y^2+z^2 = 1$ velja

$$x+y+z \leq 8/5 .$$

198. Poišči točke na elipsoidu

$$4x^2+3y^2+z^2 = 1 ,$$

ki so najbolj oz. najmanj oddaljene od točke $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$.

199. Med točkami $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ki zadoščajo zvezi

$$2x^2+3y^2+2z^2+2xz = 6 ,$$

poišči tiste, ki so od ravnine $z=0$:

(a) najbolj oddaljene,

(b) najmanj oddaljene.

Najdene točke tudi skiciraj.

200. Cena vesoljskega poleta od točke (x_1,y_1,z_1) do točke (x_2,y_2,z_2) znaša

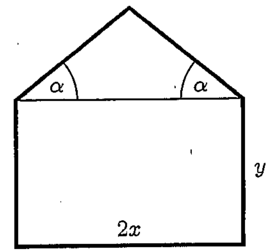
$$2\cdot|x_1-x_2| + 3\cdot|y_1-y_2| + 5\cdot|z_1-z_2|$$

dolarjev. Smo v točki $(0,0,0)$. Do katere točke na ploskvi

$$2x^2+y^2+3z^2 = 174, \qquad x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

je polet najdražji? Nakaži, kako bi našli točke, do katerih je polet najcenejši.

201. Na sliki je predstavljen petkotnik, sestavljen iz pravokotnika in enakokrakega trikotnika.



(a) Izračunaj obseg in ploščino petkotnika v odvisnosti od parametrov x, y in α.

(b) Kateri petkotnik predpisane oblike z obsegom $ob = 4+2\sqrt{3}$ ima največjo ploščino? Kolikšna je ta ploščina?

202. Za koliko se lahko največ razlikujeta koordinati točke (x,y), če točka leži na elipsi $x^2+y^2+xy = 1$?

203. Dokaži: Med točkami na elipsi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $a>0$, je točki $T(0,1)$ najbližja:

(a) točka (0,2), če je $a \geq \sqrt{2}$ in

(b) točka z ordinato $y = 4\left(4-a^2\right)^{-1}$, če je $0 \leq a \leq \sqrt{2}$.

204. Med vsemi pravilnimi tristranimi piramidami z volumnom $2\sqrt{2}/3$ poišči tisto, ki ima najmanjšo vsoto robov.

205. Med vsemi pravilnimi štiristranimi piramidami s površino $P = 400$ poišči tisto z največjim volumnom.

206. Med vsemi pokončnimi stožci s površino 4π poišči tistega, ki ima največji volumen.

207. Za poljubno kompleksno število $z = x+iy$ definiramo

$$f(z) = (z+\overline{z})(z-\overline{z}+6\mathrm{i}) + 2z\overline{z} - 4 .$$

(a) Izračunaj realno in imaginarno komponento kompleksnega števila $f(z)$.

(b) Med kompleksnimi števili $f(z)$; $z\in\mathbb{C}$, ki ležijo na imaginarni osi, poišči tisti, ki imata največjo oz. najmanjšo imaginarno komponento. Nalogo reši z vezanim ekstremom.

208. Poišči točke na krivulji

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+z^2 = 1,\ z = x^2+y^2\right\},$$

ki so najbolj oz. najmanj oddaljene od točke $\left(0,0,\sqrt{5}\right)$.

209. Naj bo K presek ploskev $x^2+y^2+z^2 = 3$ in $x^2-y^2 = 1$, $x>0$. Poišči točke na krivulji K, ki so najbolj oz. najmanj oddaljene od točke (2,0,0).

12.4 Globalni ekstremi funkcij več spremenljivk

210. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \left(2x^2 + 3y^2\right) e^{-x^2-y^2}.$$

Kje na krogu $x^2+y^2 \leq 4$ doseže ta funkcija največjo vrednost in kje najmanjšo?

211. Naj bo D množica točk v ravnini, ki zadoščajo pogoju $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} \leq 1$. Ugotovi, kje na množici D zavzame funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - xy - 2y$$

največjo vrednost, in kje najmanjšo.

212. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

V kateri točki pravokotnika $[0,6] \times [0,16]$ zavzame funkcija največjo vrednost, in v kateri najmanjšo?

213. Naj bosta $p, q > 1$ konjugirani števili (to pomeni: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy + y^2 - 2y,$$

ki ležijo v prvem kvadrantu $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$. Kako je z globalnimi ekstremi na D?

214. Poišči in skiciraj definicijsko območje D funkcije

$$f(x,y) = \ln x + \ln y + \ln(5 - x - y)$$

ter poišči njene lokalne ekstreme. Kako je z globalnimi ekstremi na D?

13 Integral s parametrom

215. Z odvajanjem po parametru izračunaj integral

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2 x + m^2 \cos^2 x\right) dx, \qquad (m > 0).$$

216. Funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana takole:

$$g(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\, dx.$$

Dokaži: $g(y) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} y \ln\left(1 + y^2\right)$.

217. Izračunaj odvod funkcije

$$I(a) = \int_1^{e^{1/a}} \frac{\ln(1 + a \ln x)}{x \ln x}\, dx, \quad (a > 0).$$

218. Naj bo $\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{24}\right)$. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty dt \int_\alpha^{\sqrt{3}} \frac{x^t \ln x\, dx}{(1+x^2)\left(1+x^t\right)^2}.$$

219. Naj bo c pozitivno realno število. Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ definiramo

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx.$$

(a) Izračunaj limito $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.

(b) Izračunaj odvod $I'(a)$ funkcije $I(a)$ v poljubni točki $a \in (c, \infty)$.

Vse korake dobro utemelji!

13.1 Eulerjevi funkciji beta in gama

220. Naj bo

$$F(t)=\int_0^\infty x^t e^{-\sqrt{x}}dx\,, \qquad t\in\mathbb{R}\,,\ t>-1\,.$$

Funkcijo F izrazi s funkcijo Γ in poišči vse $t>-1$, za katere velja $F\left(t+\frac{1}{2}\right)=6F(t)$.

221. (a) Izračunaj integral

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{8/3}x\,\sin^{4/3}x\,dx\,.$$

(b) Poišči vsa naravna števila n, za katera velja

$$\int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{1+x^{1992}}=\frac{\pi}{1992}\,.$$

222. Naj bo $0<a<1$. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{t^{-a}}{(1+t)^3}\,dt\,.$$

223. Izračunaj integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^{\frac{1}{3}}\,x\,dx\,.$$

224. Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^{12}e^{2x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{11}{3}}t\,\cos^{\frac{1}{3}}t\,dt.$

225. Dana je funkcija

$$f(t)=t\int_0^1\left(x^{t-1}(1-x)^{2-t}-x^{t+1}(1-x)^{-t}\right)dx\,.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije f in poišči njene ničle.

(b) Izračunaj $\lim\limits_{t\to 0}f(t)$.

14 Dvojni integral

226. Dan je dvakratni integral:

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}f(x,y)\,dy\,.$$

Skiciraj integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integracije.

227. Dan je dvakratni integral:

$$\int_1^{\sqrt5}dx\int_0^{\sqrt{x^2-1}}f(x,y)\,dy+\int_{\sqrt5}^3 dx\int_0^{\sqrt{9-x^2}}f(x,y)\,dy\,.$$

Skiciraj integracijsko območje ustreznega dvojnega integrala, zamenjaj vrstni red integracije in uvedi polarne koordinate.

228. Z integracijo v polarnih koordinatah izračunaj ploščino lika, ki ga določata neenakosti $x^2+y^2-8y\le 0$ in $x^2+y^2\le 48$.

229. Izračunaj ploščino dela kroga $\left(x-\frac{\sqrt3}{3}\right)^2+y^2\le\frac{1}{3}$, ki leži zunaj kroga $x^2+y^2\le 1$.

230. Skiciraj integracijsko območje integrala

$$\int_{-\sqrt5}^{-2}dy\int_{-\sqrt{5-y^2}}^{0}f(x,y)\,dx+\int_{-2}^{0}dy\int_{y/2}^{0}f(x,y)\,dx\,,$$

zamenjaj vrstni red integracije in v ustrezni dvojni integral uvedi polarne koordinate.

231. Dan je dvojni integral

$$\iint_{D_a}y\,dS\,,$$

kjer je $a>0$ in

$$D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 4a^2,\ x^2+y^2\le 4ax\,,\ y\ge 0\}\,.$$

(a) Zapiši oba dvakratna integrala.

(b) V integral uvedi polarne koordinate.

(c) V točkah (a) in (b) se skrivajo tri možnosti za izračun danega dvojnega integrala. Izberi eno od njih in integral izračunaj.

232. Skiciraj integracijsko območje integrala

$$\int_{-6}^{0} dx \int_{\sqrt{-x^2-6x}}^{\sqrt{36-x^2}} xy\,dy$$

in zamenjaj vrstni red integracije. V ustrezni dvojni integral uvedi polarne koordinate in integral izračunaj.

233. Naj bo D območje v ravnini, določeno z neenakostmi

$$x^2+y^2 \leq 16\,, \quad x^2+y^2+32 \leq 8\sqrt{3}y \quad \text{in} \quad x \geq 0\,.$$

V integral

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

uvedi polarne koordinate in ga izračunaj.

234. Zamenjaj vrstni red integracije in izračunaj integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{\operatorname{tg} y}^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi-y}} \frac{4}{1+x^2}\,dx\,.$$

235. Naj bo R paralelogram, omejen s premicami $2x-y=1$, $2x-y=3$, $x+y=-2$ in $x+y=0$. Dvojni integral

$$\iint_R xy\,dx\,dy$$

izračunaj tako, da uvedeš novi spremenljivki $u=2x-y$ in $v=x+y$.

236. Naj bo D območje, določeno z neenakostmi:

$$1-x^2 \leq y \leq 2-2x^2, \qquad x \geq 0\,.$$

Ploščino območja D izračunaj:

(a) z enim od dvakratnih integralov,

(b) z uvedbo novih spremenljivk $u=y\,(x+1)^{-1}$, $v=x$.

237. Naj bo D območje v ravnini, ki ga določajo naslednje neenakosti:

$$x \leq 2\,, \quad y \geq x^2-x\,, \quad y \leq x^2+2x\,.$$

(a) Skiciraj območje D.

(b) Integral $\iint_D (y-x^2)\,dx\,dy$ izračunaj z uvedbo novih spremenljivk u in v, ki sta s starima spremenljivkama povezani takole:

$$x=u+v\,, \quad y=2u-v+(u+v)^2\,.$$

238. Izračunati želimo integral $\iint_D xy\,dS$, kjer je D območje, omejeno s krivuljami:

$$y^3=x^2, \quad y^3=2x^2, \quad y=x \quad \text{in} \quad y=\sqrt[3]{2}x\,.$$

(a) Skiciraj območje D.

(b) Zapiši vsaj enega od dvakratnih integralov.

(c) V integral uvedi novi spremenljivki $u=y^3x^{-2}$ in $v=yx^{-1}$ ter integral izračunaj.

239. Naj bo D množica, ki jo določajo neenakosti $x \geq 0$, $y \leq 1$ in $y \geq x^2$. V integral

$$\iint_D \frac{xy}{1+y-x^2}\,dx\,dy$$

uvedi novi spremenljivki $u=y-x^2$ in $v=y-1$ ter integral izračunaj.

15 Trojni integral

240. Naj bo G območje, ki ga določajo neenakosti

$$x^2 + y^2 \leq 3, \qquad 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1.$$

Izračunaj integral

$$\iiint_G \frac{dV}{z^2+1}.$$

241. Naj bo G telo, ki ga določajo neenakosti

$$x \geq 0, \qquad 0 \leq z \leq x \quad \text{in} \quad \left(x^2+y^2\right)^3 \leq 16x^2.$$

Izračunaj trojni integral $\iiint_G x\, dV$.

242. Naj bo G območje, ki ga določata neenakosti

$$x^2 + y^2 \leq 4, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9.$$

Izračunaj integral

$$\iiint_G (x + z^2)\, dV.$$

243. Izračunaj volumen omejenega območja. ki ga omejujejo valj $y = x^2$ in ravnine $x + z = 1$, $y + z = 1$ in $z = 0$.

244. Naj bo G območje, ki ga omejujeta ploskvi $z = x^2+y^2$ in $z = (4xy)^{\frac{2}{3}}$. Izračunaj integral

$$\iiint_G z^2\, dV.$$

Pomagaj si s funkcijo beta.

245. Izračunaj volumen omejenega telesa, ki ga omejujeta paraboloid $4z = x^2 + y^2$ in stožec $(z+1)^2 = x^2 + y^2$.

246. Naj bosta a in b pozitivni realni števili in $b \leq a$. Izračunaj volumen telesa, ka ga določata neenakosti:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \quad \text{in} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Za kontrolo si oglej rezultat v primeru $a = b$.

247. Izračunaj integral

$$\iiint_G \frac{z\, dV}{\left(R^2 - x^2 - y^2\right)^{3/2}\left(R^2 + x^2 + y^2\right)^{1/2}},$$

kjer je G del območja $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, $\left(x^2+y^2\right)^2 = R^2(x^2-y^2)$, kjer je $x \geq 0$ in $z \geq 0$.

15.1 Uporaba trojnega integrala

248. Izračunaj volumen telesa, ki ga določjo naslednje neenakosti:

$$x \geq 0, \qquad 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \qquad \left(x^2+y^2\right)^3 \leq 16x^2.$$

249. Dana je ploskev

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^4 = 4z^2(x^2+y^2).$$

(a) Opiši (skiciraj) dano ploskev.

(b) Izračunaj prostornino telesa, ki ga omejuje.

250. Izračunaj volumen območja $G \subset \mathbb{R}^3$, ki leži v prvem oktantu in ga omejujeta ploskvi $z = xy$ in $\left(x^2+y^2\right)^6 = xy^3$.

251. Izračunaj maso dela krogle

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \qquad 3z^2 \geq x^2 + y^2, \qquad z \geq 0,$$

če je gostota $\rho(x,y,z) = \left(1 + \frac{z^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

252. Naj bo G del krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$, kjer je $z \geq 3$. Izračunaj maso telesa G, če je gostota

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

253. Naj bo G del krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, kjer je $1 \leq z \leq \sqrt{2}$. Izračunaj težišče homogenega telesa G.

254. Izračunaj volumen in težišče telesa, ki je omejeno s ploskvijo

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 z, \qquad (a > 0).$$

255. Izračunaj volumen in težišče homogenega telesa, ki ga določata neenakosti:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \geq 12.$$

256. Izračunaj vztrajnostni moment dela krogle

$$x^2+y^2+z^2\leq 4\,,\qquad z\geq 1$$

pri vrtenju okrog osi z, če je gostota $\rho(x,y,z)=1+z^2$.

257. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega stožca

$$x^2+y^2\leq z^2,\qquad 0\leq z\leq h$$

pri vrtenju okrog osi x. Masa stožca je M.

16 Krivulje in ploskve

258. Dana je krivulja $\vec{r}(t)=(t,t,t^3)$, $t\in[-1,2]$. Krivuljo skiciraj in poišči tisto točko na njej, ki je najbližja točki $(1,-1,0)$.

259. Določi parameter a tako, da bo krivulja $\vec{r}(t)=(t^3+t,t^3+at^2,4t^2+2t-1)$ ravninska. Zatem poišči ravnino, na kateri krivulja leži.

260. Naj bo a pozitivno realno število in L presek ploskev $x^2+y^2=a^2$ in $z=a-y$.

(a) Poišči enačbo tangente na krivuljo L v točki $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a\right)$.

(b) Poišči vse točke T na krivulji L z naslednjo lastnostjo: tangenta na krivuljo L v točki T poteka skozi točko $(2a,-a,2a)$.

261. Krivulja je podana kot presek ploskev $(x-y)^2=3(x+y)$ in $x^2-y^2=(9/8)z^2$. Izračunaj dolžino krivulje od točke (0,0,0) do točke $(9/8,-3/8,1)$.

262. Dana je krivulja $\vec{r}(t)=\left(t,\frac{t^2}{3},\frac{2t^3}{27}\right)$.

(a) Izračunaj ločno dolžino krivulje od točke $(-3,3,-2)$ do točke (3,3,2).

(b) Dokaži, da je v vsaki točki na krivulji kot med tangento krivulje in ravnino $x+z=3$ enak in ga izračunaj.

263. Dana je krivulja

$$r(t)=\left(t+t^{-1},t-t^{-1},2\ln t\right),\qquad t>0\,.$$

(a) Skiciraj projekcijo te krivulje na ravnino $z=0$. S pomočjo tega opiši, kako približno ta krivulja izgleda.

(b) Poišči smeri tangente, glavne normale in binormale ter zapiši enačbo pritisnjene ravnine v točki (2,0,0).

264. Dana je krivulja K:

$$\vec{r}(t)=\left(t,t^2-1,-t^4+t^2+8\right),\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(a) Skiciraj projekcije krivulje K na ravnine $z=0$, $y=0$ in $x=0$.

(b) Dokaži, da krivulja K leži na ploskvi $z=9-x^2-y^2$ in s pomočjo točke (a) skiciraj njen potek.

(c) Zapiši enačbo glavne normale krivulje K v točki $(0,-1,8)$.

265. Dana je krivulja

$$\vec{r}(t)=\left(3t-t^3,3t^2,3t+t^3\right),\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

(a) Izračunaj dolžino dela krivulje med točkama (0,0,0) in (2,3,4).
(b) Poišči enačbo pritisnjene ravnine v točki $(\sqrt{2}, 6, 5\sqrt{2})$.
(c) Poišči vse točke $\vec{r}(t)$ na krivulji, v katerih drugi odvod $\ddot{\vec{r}}(t)$ kaže v smer glavne normale.

266. Dana je krivulja
$$\vec{r}(t) = \left(t, (t^2+1)^{-1}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$
(a) Skiciraj (ali kako drugače opiši) krivuljo.
(b) Ugotovi, ali je to ravninska krivulja.
(c) Poišči vse točke na krivulji, v katerih glavna normala poteka skozi koordinatno izhodišče.

267. Skiciraj krivuljo $\vec{r}(t) = (t-1, t, t^2)$, $t \in [-3, 1]$, in poišči tisti točki na krivulji, v katerih je fleksijska ukrivljenost krivulje največja oz. najmanjša.

268. Dana je ploskev $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^{-4})$, $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
(a) Poišči eksplicitno enačbo ploskve in ploskev skiciraj.
(b) Poišči točke na ploskvi, ki so najbližje koordinatnemu izhodišču.

269. Poišči vse točke (a,b,c) na rotacijskem paraboloidu $z = x^2 + y^2$, ki imajo naslednjo lastnost: tangentna ravnina paraboloida v točki (a,b,c) poteka skozi točki $(1,0,0)$ in $(0,2,-2)$.

270. Skiciraj ploskev $\vec{r}(u,v) = (u^2+1, u\cos v, u\sin v)$, $u > 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$ ter določi in skiciraj tiste točke na ploskvi, v katerih tangentna ravnina gre skozi izhodišče.

271. V točki $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$ paraboloida $z = x^2 + y^2$ izračunaj kot med ploskovno normalo paraboloida in osjo z. Zatem določi (in skiciraj) vse ostale točke na paraboloidu, v katerih ploskovna normala in os z oklepata ta kot.

272. Dana je ploskev
$$\vec{r}(u,v) = (4u\cos v, u\sin v, u^2(1+3\cos^2 v)), \quad u > 0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$
(a) Skiciraj ploskev.
(b) Določi kot, pod katerim se v točki (2,0,1) sekata koordinatni krivulji ploskve.

273. Naj bo S ploskev $z = \dfrac{x^2}{9} + y^2$ in K krivulja
$$\vec{r}(t) = \left(t, -t, \frac{10t^2}{9}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Dokaži, da krivulja K leži na ploskvi S.
(b) Skiciraj ploskev S in krivuljo K na njej.
(c) Poišči vse točke na krivulji K, v katerih se smer glavne normale krivulje ujema s smerjo normale ploskve S.

274. Poišči glavni ukrivljenosti in glavni krivinski smeri ploskve
$$4z = 4 - x^2 - 4y^2$$
v točki $(2,0,0)$.

275. Naj bo S ploskev
$$\{(u+v^2, v+u^2, uv)\,;\quad u,v \in \mathbb{R}\}.$$
Poišči tangentno ravnino, glavni ukrivljenosti in glavni krivinski smeri ploskve S v točki (0,0,0).

276. Naj bo S ploskev $z = \sin(x^2+y^2)$.
(a) Dokaži, da je $(\sqrt{\pi}, 0, 0)$ eliptična točka ploskve S.
(b) Ugotovi, ali na ploskvi S obstajajo tudi parabolične in hiperbolične točke.

277. Dana je funkcija $f(x,y) = a\ln\cos x + b\ln\cos y$, $a, b \in \mathbb{R}$, $ab > 0$.
(a) Skiciraj definicijsko območje funkcije f.
(b) Poišči njene lokalne ekstreme. Ali so vsi lokalni ekstremi tudi globalni?
(c) Dokaži, da so vse točke na ploskvi $z = f(x,y)$ eliptične.

17 Krivuljni in ploskovni integral

278. Krivulja K je podana kot presek ploskev

$$z = x^2 + y^2 + 3 \quad \text{in} \quad z = 4y$$

in orientirana tako, da je projekcija na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno. Izračunaj integral $\int_K \vec{F}\, d\vec{r}$ polja $\vec{F} = (y, -x, z)$ po krivulji K.

279. Naj bo krivulja K presek ploskev $x^2 + y^2 = 1$ in $z = x^2 + y^2 - 2y + 2$. Krivuljo orientiramo tako, da je projekcija na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno. Izračunaj krivuljni integral $\int_K \vec{F}\, d\vec{r}$ polja $\vec{F} = (z, y, -x)$ po krivulji K.

280. Krivulja K je podana takole:

$$\vec{r}(t) = \left(t, t^2 - 1, -t^4 + t^2 + 8\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Poišči vsa presečišča krivulje K s premico

$$x - 2 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-11}{3}.$$

(b) Ugotovi, ali na krivulji K obstajajo točke T z naslednjo lastnostjo: tangenta, ki jo potegnemo na krivuljo K v točki T, seka os y. V primeru, da take točke obstajajo, jih tudi poišči.

(c) Naj bo L del krivulje K med točkama $(-1, 0, 8)$ in $(2, 3, -4)$. Izračunaj integral $\int_L \vec{F} d\vec{r}$ polja $\vec{F} = (y, x, 0)$ po krivulji L.

281. Naj bo K presek ploskev $z = x^2 + y^2$ in $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Krivuljo K orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno.

(a) Poišči vse točke T na krivulji K z naslednjo lastnostjo: tangenta, ki jo na krivuljo K potegnemo v točki T, seka ravnino $x - 2y - 3\sqrt{2}z = 5$ pod pravim kotom.

(b) Izračunaj integral $\int_K \vec{F} d\vec{r}$ polja $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$ po krivulji K.

282. Naj bo S del sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, kjer je $x \geq 0$, $y \geq 0$, in $0 \leq z \leq 1$. Izračunaj ploskovni integral $\iint_S x\, dP$.

283. Izračunaj ploskovni integral $\iint_S z\, dP$, kjer je S rob območja, ki ga določata neenakosti

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{in} \quad 1 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2.$$

284. Naj bo S plašč valja $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$. Izračunaj ploskovni integral

$$\iint_S \frac{dP}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

285. Naj bo S ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, \ln 3]$ zavrtimo okrog osi x.

(a) Izračunaj ploskovni integral $\iint_S \sqrt{1 + y^2 + z^2}\, dP$.

(b) Poišči glavni ukrivljenosti in glavni krivinski smeri ploskve S v točki (1,0,e).

286. Naj bo S ploskev

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ \cos u), \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi/2.$$

(a) Opiši (skiciraj) ploskev S.

(b) Izračunaj ploskovni integral $\iint_S (2 - z^2)^{-1/2}\, dP$.

287. Naj bo S del ravnine $z = 6x$ znotraj valja $x^2 + y^2 + 8 \leq 6x$.

(a) Izračunaj ploskovni integral $\iint_S y^2 dP$.

(b) Izračunaj krivuljni integral $\int_{\partial S} \vec{F}\, d\vec{r}$ polja $\vec{F} = (y, 0, y)$ po robu ∂S ploskve S, ki ga orientiramo tako, da je projekcija na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno.

288. Izračunaj maso sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, če je njena površinska gostota v vsaki točki enaka njeni oddaljenosti od osi z.

289. Po ploskvi $z = x^2 + y^2 - \frac{1}{4}$, $z \leq \frac{3}{4}$ je enakomerno razmazan naboj s površinsko gostoto ρ. Izračunaj silo, s katero ta naboj deluje na točkast naboj intenzitete e_1 v koordinatnem izhodišču.

290. Naj bo $u = x^3 + y^3 + z^3$ in P del ploskve $y = 2x^2 + z^2$ znotraj valja $x^2 + z^2 \leq 1$. Ploskev P orientiramo tako, da normala v izhodišču kaže v smer negativne ordinatne osi. Izračunaj integral $\int_P \operatorname{grad} u\, d\vec{P}$.

291. Izračunaj pretok polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ skozi del valja $x^2 + y^2 = 2x$, ki leži med zgornjo in spodnjo polovico stožca $z^2 = x^2 + y^2$. Valj orientiramo z zunanjo normalo.

17.1 Greenova formula

292. (a) Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja z enačbo

$$\left(x^2+y^2\right)^2=16x^2.$$

(b) Uporabi Greenovo formulo in ploščino območja izračunaj še enkrat, tokrat s krivuljnim integralom.

17.2 Stokesov izrek

293. Naj bo S del sfere $x^2+y^2+z^2=4$ v prvem oktantu ($x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$). Rob ∂S ploskve S orientiramo tako, da je njen del v ravnini $z=0$ orientiran pozitivno. Izračunaj krivuljni integral $\int\limits_{\partial S}\vec{F}\,d\vec{r}$ polja $\vec{F}=(0,x,0)$ po krivulji ∂S, in sicer:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

294. Naj bo K presek ploskev $x^2+y^2=4$ in $x^2=2z$. Krivuljo K orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. S pomočjo Stokesovega izreka (!) izračunaj integral $\int\limits_K x\,dx+z\,dy+xy\,dz$.

295. Krivulja $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\; x^2+y^2=1\,,\; z=xy\right\}$ je orientirana tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. Naj bo $\vec{F}(x,y,z)=(-y,x+y,-y)$. Integral $\int\limits_K\vec{F}\,d\vec{r}$ izračunaj:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

296. Naj bo S del stožca $z^2=x^2+y^2$, kjer je $x\geq 0$, $y\geq 0$ in $0\leq z\leq 2$. Rob ∂S ploskve S orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. Integral $\int\limits_{\partial S}\vec{F}\,d\vec{r}$ polja $\vec{F}=(z,0,x)$ po krivulji ∂S izračunaj:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

297. Naj bo K krivulja podana kot presek valja $x^2-4x+y^2=0$ in ravnine $z=3x+2y$. Krivuljo orientirama tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. Integral $\int\limits_K\vec{F}\,d\vec{r}$ polja $\vec{F}=(0,z,-y)$ izračunaj:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

298. Naj bo S del stožca $z^2=x^2+y^2$, kjer je $1\leq z\leq 2$. Ploskev S orientiramo z normalo, ki s pozitivno smerjo osi z tvori topi kot. Rob ∂S ploskve S orientiramo koherentno. Izračunaj krivuljni integral polja

$$\vec{F}=(e^x\sin y, e^x\cos y-z, xy)$$

po krivulji ∂S.

299. Dani sta vektorsko polje $\vec{F}=(1,1,y)$ in krivulja K, ki je presek ploskev $x^2+y^2=1$ in $z=(x-1)^2+y^2$. Krivuljo K orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. Izračunaj integral $\int\limits_K\vec{F}\,d\vec{r}$, in sicer:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

300. Dani sta vektorsko polje $\vec{F}=(-y,x,z)$ in krivulja K, ki je presek valja $x^2+y^2-6y=0$ in stožca $z^2=x^2+y^2$ ($z\geq 0$). Krivuljo K orientiramo tako, da je njena projekcija na ravnino $z=0$ orientirana pozitivno. Izračunaj integral $\int\limits_K\vec{F}\,d\vec{r}$, in sicer:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

301. Naj bo dano vektorsko polje

$$\vec{F}=(x^2+z, y^2+x, z^2+y)$$

in naj bo S del sfere $x^2+y^2+z^2=1$, kjer je $z\geq\sqrt{2}/2$. Ploskev S orientiramo tako, da v točki $(0,0,1)$ normala kaže v smer osi z. Izračunaj integral $\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\,d\vec{P}$, in sicer:

(a) neposredno;
(b) s pomočjo Stokesovega izreka.

17.3 Gaussov izrek

302. Naj bo S sfera $x^2+y^2+z^2=1$, orientirana z zunanjo normalo, in $\vec{F}$ vektorsko polje $\vec{F}=(x^3,y^3,z^3)$. Izračunaj integral $\iint_S \vec{F}\,d\vec{P}$, in sicer:

(a) s pomočjo Gaussovega izreka;

(b) z direktno parametrizacijo.

303. Naj bo G telo, določeno z neenakostmi

$$x \geq 0\,, \qquad y \geq 0\,, \qquad z \geq 0\,, \qquad x+y+z \leq 1\,.$$

Rob ∂G telesa G orientiramo z zunanjo normalo. Integral $\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$ polja $\vec{F} = (-1,0,z)$ izračunaj:

(a) neposredno;

(b) s pomočjo Gaussovega izreka!

304. Naj bo G območje v prostoru, ki je določeno z neenakostma $z \geq x^2+y^2-2$ in $z \leq 0$. Rob ∂G območja G orientiramo z zunanjo normalo. Integral polja $\vec{F}=(xz,yz,xy)$ po ploskvi ∂G izračunaj:

(a) s pomočjo Gaussovega izreka;

(b) direktno.

305. Naj bosta a in b poljubni realni števili. Izračunaj pretok polja

$$\vec{F}=\left(\sin(a^2+y^2)+ax(b^2+z^2),\ \sin(a^2+z^2)+ay(b^2+z^2),\ \sin(a^2+x^2)+az(b^2+z^2)\right)$$

skozi sfero $x^2+y^2+z^2=1$, orientirano z zunanjo normalo.

306. Naj bo G del valja $x^2+y^2 \leq 1$, kjer je $0 \leq z \leq x+2$ in $\vec{F}=(0,xy,0)$ vektorsko polje. Izračunaj ploskovni integral $\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$, in sicer:

(a) neposredno;

(b) s pomočjo Gaussovega izreka.

307. Naj bo G telo, določeno z neenakostima $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $y \geq 0$. Rob ∂G telesa G orientiramo z zunanjo normalo. Integral $\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$ polja $\vec{F}=(0,y^2,0)$ po ploskvi ∂G izračunaj:

(a) neposredno;

(b) s pomočjo Gaussovega izreka.

308. Naj bo G območje, omejeno s ploskvama $z=x^2+y^2$ in $z=27-2x^2-2y^2$. Izračunaj integral

$$\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$$

polja $\vec{F}=\left(x^2,y,-2xz\right)$ po robu telesa G, ki je orientiran z zunanjo normalo.

309. Naj bo G območje, ki ga omejujeta ploskvi $z=x^2+y^2$ in $z=2x$. Rob ∂G območja G orientiramo z zunanjo normalo. Izračunaj ploskovni integral $\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$ polja $\vec{F}=(2x,y,z)$ po ploskvi ∂G.

310. Naj bo G telo, določeno z neenakostmi

$$z \geq 0\,, \qquad x^2+y^2 \leq 3z^2, \qquad x^2+y^2+z^2 \leq 1\,.$$

Izračunaj ploskovni integral $\iint_{\partial G} \vec{F}\,d\vec{P}$ polja $\vec{F}=\left(x^3,z^3,3zy^2\right)$ po robu območja G, orientiranega z zunanjo normalo.

311. Naj bo G območje, omejeno s ploskvama $y=x^2$ in $z^2=4-y$. Izračunaj ploskovni integral polja $\vec{F}=(x,-2y,3z)$ po robu območja G, ki ga orientiramo z zunanjo normalo.

18 Gradient, divergenca, rotor

312. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in S_2 sfera
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,$$
orientirana z zunanjo normalo. Označimo še $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ in $\vec{r} = (x, y, z)$.
   (a) Dokaži: $\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = rf'(r) + 3f(r)$.
   (b) Preveri enakost
$$\iint\limits_{S_2} f(r)\vec{r}\,d\vec{P} = 4\pi f(1)$$
   in to na dva načina: z neposrednim računom in s pomočjo Gaussovega izreka.

313. Dano je vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z) = (2x, z, y)$.
   (a) Dokaži, da imajo za poljubni točki $A, B \in \mathbb{R}^3$ integrali $\int\limits_K \vec{F}\,d\vec{r}$ po vseh krivuljah K od A do B isto vrednost.
   (b) V katerih točkah T na sferi $x^2+y^2+z^2 = 1$ doseže integral $\int\limits_{0^3}^{T} \vec{F}\,d\vec{r}$ največjo vrednost, in v katerih najmanjšo.

19 Laplaceova transformacija

314. Z Laplaceovo transformacijo reši diferencialno enačbo:
$$y' + 2y = 4x\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

315. Z Laplaceovo transformacijo reši diferencialno enačbo:
$$y''' + 4y' = 4\,, \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 3\,,\ y''(0) = 0\,.$$

316. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 4y - 8\,, \\ \dot{y} &= 3x + 6y\,, \end{aligned}$$
$x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

317. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y\,, \\ \dot{y} &= 2x - y\,, \end{aligned}$$
$x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

318. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 5\cos t\,, \\ \dot{y} &= 2x + y\,, \end{aligned}$$
$x(0) = -1$, $y(0) = 3$.

319. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y\,, \\ \dot{y} &= 2x - y + 15\,\mathrm{e}^t\sqrt{t}\,, \end{aligned}$$
$x(0) = y(0) = 0$.

320. Naj bo
$$h(t) = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{t-u}u^2\,du\,.$$
Laplaceovo transformiranko funkcije h izračunaj na dva načina, in sicer:
   (a) tako, da najprej izračunaš dani integral in dobljeni rezultat transformiraš;

(b) s pomočjo pravila o transformaciji konvolucije!

Primerjaj oba rezultata.

321. Z Laplaceovo transformacijo reši diferencialno enačbo:

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y = \cos t\,,$$

$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$, $\ddot{y}(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = -1$, $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)}(0) = 1$.

322. Z Laplaceovo transformacijo reši diferencialno enačbo:

$$y^{(7)} - y' = 2\sin x\,,$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 0$, $y^{(6)}(0) = -1$.

323. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:

$$\ddot{x} = y\,, \qquad \ddot{y} = x\,,$$

$x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$.

324. Z Laplaceovo transformacijo reši sistem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3x + 4y\,, \\ \ddot{y} &= -x - y\,, \end{aligned}$$

$x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = -4$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

325. Naj bosta m in n naravni števili in a realno število. Funkcije $f_m\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiramo takole:

$$f_m(x) = x^{m-1}e^{ax}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Dokaži, da obstaja tako racionalno število $k(m,n)$, odvisno od m in n in neodvisno od x, da velja

$$k(m,n)\cdot \underbrace{f_m * \cdots * f_m}_{n\text{-krat}} = f_{mn}\,.$$

Pri tem $*$ označuje konvolucijo funkcij.

20 Funkcije kompleksne spremenljivke, analitične funkcije

326. Poišči funkcijo $f = u + iv$, ki je analitična na območju $D \subseteq \mathbb{C}$, in za katero velja $2v - u = 10xy$. Zapiši jo kot funkcijo kompleksnega argumenta z.

327. Poišči analitično funkcijo f, za katero velja $\mathrm{Re}(f) = x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2$ in $f(0) = \mathrm{i}$. Kam ta funkcija preslika množico $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\}$?

328. Naj bo $k \in \mathbb{R}$ in $u_k(x,y) = e^{ky}(\sin x + \cos x)$.

(a) Ugotovi, za katere k je funkcija u_k realni del neke holomorfne funkcije.

(b) Poišči holomorfno funkcijo f, katere realni del je u_1 in zadošča pogoju $f(0) = 1$. Zapiši jo kot funkcijo kompleksnega argumenta z.

329. (a) Dokaži, da za poljubno kompleksno število $z = x + \mathrm{i}y$ velja

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}\,.$$

(b) Poišči vse točke $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $\cos z = \frac{3+\mathrm{i}}{4}$.

330. (a) Poišči vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $\operatorname{tg} z = 1 + \mathrm{i}$.

(b) Na premici $\mathrm{Im}(z) = \ln\sqrt{3}$ poišči najprej vse točke z, za katere velja $|\operatorname{tg} z| = 1$, nato pa še točke, za katere velja $|\operatorname{tg} z| = 4$.

331. Dana je funkcija $f(z) = \mathrm{Log}(\sin z)$, kjer je logaritem definiran na kompleksni ravnini, prerezani po negativnem delu realne osi.

(a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f.

(b) Izračunaj $f(\mathrm{i}\ln 2)$.

(c) Dokaži ali ovrzi: Če je $z \in D_f$ točka, za katero velja $f(z) \in \mathbb{R}$ potem je $f(z) < 0$.

21 Kompleksne vrste

332. Ugotovi, ali konvergira katera od vrst:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{2^{\frac{n}{2}}} (1+i)^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (1+2i)^n .$$

333. Za poljubno naravno število n in pozitivno realno število r definiramo:

$$t_n = (-1)^n \frac{2\pi}{3n}, \qquad a_n = re^{it_n} \qquad \text{in} \qquad b_n = (a_n)^n .$$

Ugotovi, za katere vrednosti parametra r konvergira vsaka od vrst:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n , \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{b_n} .$$

334. Dana je funkcija

$$f(z) = \frac{2z-2}{z^2-2z-3} .$$

(a) Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto okrog točke $z=0$.

(b) Razvij funkcijo f v Laurentovo vrsto okoli točke $z=3$.

Poišči čim večji odprti množici, na katerih konvergirata zgornji vrsti.

22 Izrek o residuumih

335. Izračunaj integrala:

$$\text{(a)} \int_{|z-i|=\sqrt{2}} \frac{\sin z \, dz}{z(z^2+1)} \qquad \text{(b)} \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} dz}{z^{11}} .$$

336. Dana je funkcija

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^4} .$$

(a) Točka 1 je singularna točka funkcije f. Ugotovi, za katero vrsto singularnosti gre.

(b) Izračunaj integral

$$\int_{|z|=2} f(z) \, dz .$$

337. Izračunaj

$$\int_K z^5 e^{\frac{1}{z^2}} dz ,$$

pri čemer je $K = \{z \in \mathbb{C} ; \; |z-2i| = |1+2iz|\}$.

338. Izračunaj integrala:

$$\text{(a)} \int_{|z-i|=6/5} \frac{dz}{z^4+z} \qquad \text{(b)} \int_{|z|=1} z^5 \left(\cos\frac{1}{z} + \sin\frac{1}{z^2} \right) dz .$$

V obeh primerih najprej poišči, skiciraj in analiziraj singularne točke.

339. Izračunaj integrala:

$$\text{(a)} \int_{|z+1|=1/10} \frac{1}{(z^5+1)^2} \, dz \qquad \text{(b)} \int_{|z|=1} (z^4-z^2) \sin z^{-1} dz .$$

V obeh primerih najprej poišči, skiciraj in analiziraj singularne točke.

340. Dana je funkcija

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} z\right)}{(z+2)^4} .$$

(a) Točka -2 je singularna točka funkcije f. Ugotovi, za katero vrsto singularnosti gre.

(b) Izračunaj integrale:

$$\int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz\,, \qquad \int\limits_{|z|=3} f(z)\,dz\,, \qquad \int\limits_{|z|=7} f(z)\,dz\,.$$

341. Izračunaj integrala:

(a) $$\int\limits_{|z-\frac{2}{3}|=1} (z^4+z^2+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,dz$$ (b) $$\int\limits_{|z-1|=\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{e}^z dz}{z^4+z^2+1}\,.$$

342. Izračunaj

$$\int\limits_{C} \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}z}{z-1}\,dz\,,$$

pri čemer je C krožnica $|z| = 3/2$ s pozitivno orientacijo.

343. Določi singularnosti integrandov in izračunaj integrale:

(a) $$\int\limits_{|z+\mathrm{i}|=\sqrt{2}} \frac{(z^4+1)\,dz}{(z^2-\mathrm{i}z)(2z^2-\mathrm{i})}$$ (b) $$\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{dz}{\mathrm{e}^{z^2}-1}\,.$$

344. Izračunaj integral

$$\int\limits_{|z|=1} z(z^2+1)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}-1\right)dz\,.$$

345. Izračunaj integral

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{z}{z+3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3z}}\,dz\,.$$

346. Naj bo n poljubno naravno število. Izračunaj integrala:

(a) $$\int\limits_{|z+\mathrm{i}|=2} \frac{dz}{(z^2+4)^n}$$ (b) $$\int\limits_{|z|=1} z^n \cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{z}\right)dz\,.$$

347. Za vsak $r\in\mathbb{Q}$, $r>0$ izračunaj integral

$$\int\limits_{|z-\frac{2}{\pi}|=r} \frac{\sin\frac{1}{z}\,dz}{\pi z-1}\,.$$

348. Dana je funkcija

$$f(z) = \tfrac{1}{z+1}\cos\tfrac{1}{z}\,.$$

(a) Poišči glavni del razvoja funkcije f v Laurentovo vrsto okrog točke $z=-1$.

(b) Izračunaj integral

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz\,.$$

(c) Za vsako od števil $a_1 = 2\pi\mathrm{i}$, $a_2 = 0$ in $a_3 = \pi$ ugotovi, ali obstaja kakšna sklenjena krivulja $K_i \subset \mathbb{C} - \{-1, 0\}$, za katero bo

$$\int\limits_{K_i} f(z)\,dz = a_i\,, \qquad (i = 1,2,3)\,.$$

Odgovor utemelji. Če katera od krivulj obstaja, jo tudi skiciraj.

349. Dana je funkcija

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z\sin\pi z}\,.$$

(a) Izračunaj integral $\int\limits_K f(z)\,dz$, kjer je K elipsa $|z|^2 + \mathrm{Re}^2(z) = 1$.

(b) Označimo z S množico singularnih točk funkcije f. Za vsak $s\in S$ izračunaj $\mathrm{Res}(f,s)$.

(c) Dokaži, da za vsako racionalno število $q=\frac{m}{n}$ obstaja taka sklenjena krivulja $K_q\subset\mathbb{C}$, da velja $\int\limits_{K_q} f(z)\,dz = q$.

350. Dana je funkcija

$$f(z) = \tfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}}.$$

(a) Poišči glavni del razvoja funkcije f v Laurentovo vrsto okrog točke $z=0$.

(b) Razvij funkcijo f v Laurentovo vrsto okrog točke $z=-1$.

(c) Skiciraj kako sklenjeno krivujo $K\subset\mathbb{C}$, za katero bo veljalo

$$\int\limits_K f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,.$$

22.1 Računanje realnih integralov s kompleksno integracijo

351. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{1-2a\cos t+a^2}\,; \qquad a\in\mathbb{R}\,,\ a>1\,.$$

352. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}.$$

353. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx.$$

354. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+18}\,dx.$$

355. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 t\,dt}{13+12\cos t}.$$

356. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{1+x^6}.$$

357. Naj bo x realno število z intervala $(0,1)$. S kompleksno integracijo izračunaj integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{(x-\cos t)\,dt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

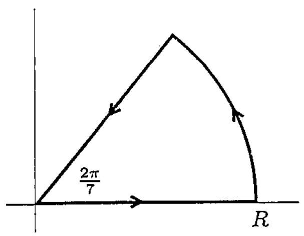
Nato z uporabo dobljenega rezultata določi funkcijo

$$\Phi(x)=\int_{0}^{\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,dt, \qquad |x|<1.$$

358. Z integracijo po skicirani krivulji v kompleksni ravnini izračunaj integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^7}.$$

Rezultat preveri z uporabo funkcije beta.



23 Preslikovanje območij v kompleksni ravnini

23.1 Möbiusove transformacije

359. Ugotovi, kam se s preslikavo

$$f(z)=\frac{z+2}{1-z}$$

preslikata:

(a) krog $\{z\in\mathbb{C};\ |z|\le 1\}$;
(b) premica $\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)=-2\}$.

360. (a) Poišči Möbiusovo transformacijo, ki krožnico $|z+\mathrm{i}|=1$ preslika v premico $\mathrm{Im}(z)=2$.
(b) Ugotovi, kam se s preslikavo $f(z)=\frac{(\mathrm{i}-1)z}{z+2\mathrm{i}}$ preslika krožnica $|z+\mathrm{i}|=1$.

361. Dani sta množici:

$$Q=\left\{z\in\mathbb{C};\ |z-1+\mathrm{i}|<\sqrt{2},\ \mathrm{Im}\,z>0\right\} \text{ in}$$
$$K=\{z\in\mathbb{C};\ 0<\mathrm{Arg}\,z<\pi/4\}.$$

Poišči Möbiusovo transformacijo f, ki množico Q preslika na množico K.

362. Poišči Möbiusovo transformacijo $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, ki:

(a) krožnico $|z-\mathrm{i}|=1$ preslika v premico $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$ in ohranja točko 0;
(b) premico $\mathrm{Re}(z)=1$ preslika v krožnico $|z|=2$.

363. Na krožnici $|z-1|=2$ izberemo točke -1, 3 in $\sqrt{3}\mathrm{i}$. Ugotovi, ali obstaja kaka Möbiusova transformacija, ki:

(a) izbrane točke preslika na enotsko krožnico $|z|=1$;
(b) izbrane točke preslika na krožnico $|z|=1$ in ohranja točko $z=0$;
(c) izbrane točke preslika na krožnico $|z|=1$ in ohranja točko $z=-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

V vsakem od primerov preslikavo poišči ali dokaži, da je ni.

23.2 Druge elementarne funkcije

V tem razdelku nekajkrat nastopa kompleksni logaritem. Dogovorimo se, da Log označuje tisto njegovo vejo, ki preslika množico $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ (tj. kompleksno ravnino, prerezano po nepozitivnem delu realne osi) na pas $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$.

364. Določi množici $f(A)$ in $g(A)$, pri čemer je $f(z) = -\mathrm{i}z$, $g(z) = z^2$ in

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Množice A, $f(A)$ in $g(A)$ tudi skiciraj.

365. Za vsak $k = 1, 2, 3$ ugotovi, kam se s preslikavo f_k preslika množica D_k. Množice D_k in $f(D_k)$ tudi skiciraj!

(a) $f_1(z) = 2\mathrm{i}(z^3 + 1)$, $\quad D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \pi/6 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/3\}$;

(b) $f_2(z) = \sin(\pi z)$, $\quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1,\ \operatorname{Im}(z) = \pi^{-1} \ln 3\}$;

(c) $f_3(z) = \operatorname{Log} z$, $\quad D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}\operatorname{Im}(z),\ \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$.

366. Ugotovi, kam se s preslikavama

$$f(z) = \frac{3z+1}{2z} \qquad g(z) = \frac{3z^2+1}{2z}$$

preslika enotska krožnica $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

367. Za vsak $k = 1, 2, 3$ skiciraj množico D_k, ugotovi, kam se ta preslika s preslikavo f_k in skiciraj množico $f_k(D_k)$:

(a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z+1| = 1\}$, $\quad f_1(z) = \frac{z}{z+2}$;

(b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = \mathrm{e},\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad f_2(z) = \operatorname{Log} z$;

(c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C};\ z^2 - 2\pi z + \pi^2 + \ln^2 2 = 0\}$, $\quad f_3(z) = \sin z$.

368. Dani sta množici $K_1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{2}\}$ in $K_2 = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0\}$.

(a) Poišči vsaj eno Möbiusovo transformacijo, ki množico K_1 preslika na K_2.

(b) Poišči vsaj eno Möbiusovo transformacijo, ki množici K_1 in K_2 preslika na dve premici skozi izhodišče.

(c) Naj bo $f(z) = \operatorname{Log} z$ in D_f definicijsko območje funkcije f. Ugotovi, kam se s preslikavo f preslika množica $D_f \cap (K_1 \cup K_2)$.

24 Diferencialne enačbe

24.1 Diferencialne enačbe prvega reda

369. Reši diferencialno enačbo

$$y' \sin x = y \log y, \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = a > 0.$$

370. Reši diferencialno enačbo

$$(2y^2 + 21xy) + y'(3xy + 14x^2) = 0, \qquad y(1) = -7.$$

371. Reši diferencialno enačbo

$$xy' + y = x^2 \ln x, \qquad y(1) = 0.$$

372. Reši diferencialno enačbo

$$xy' + y = y^2 \ln x, \qquad y(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}.$$

373. Reši enačbo

$$y' + x\sqrt[3]{y} = 3y, \qquad y(0) = 1.$$

374. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \sin\left(\ln \tfrac{y}{x}\right)\right),$$

ki zadošča pogoju $y(1) = 1$, nato pa še rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = \mathrm{e}^2$.

375. Reši diferencialno enačbo

$$y' = y^2 - 2y\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x, \qquad y(0) = 0.$$

376. Reši diferencialno enačbo

$$y' + y = xy^{2/3}.$$

377. Reši diferencialno enačbo

$$3y' \cos x + y \sin x - \frac{1}{y^2} = 0, \qquad y(0) = 1.$$

378. Reši diferencialno enačbo

$$xy' + 2y + x^5 y^3 \mathrm{e}^x = 0, \qquad y(1) = 1.$$

379. Reši diferencialno enačbo

$$xy^2y' = x^2 + y^3, \qquad y(1) = 0.$$

380. Reši diferencialno enačbo

$$x^2y' - xy + x^2y^2 = 3.$$

381. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$$

382. Reši diferencialno enačbo

$$x^{\frac{5}{2}}y' = \frac{5}{2}y^{\frac{5}{3}} + yx^{\frac{3}{2}}, \qquad y(4) = 0.$$

383. Poišči konstantno funkcijo, ki reši diferencialno enačbo

$$(x+1)y' = (x+1)y^2 + (2x+3)y + (x+2).$$

Nato poišči splošno rešitev te diferencialne enačbe.

384. Preveri, da ima diferencialna enačba

$$x(2x^3y^2 - 1)\,dy + y(4x^3y^2 - 1)\,dx = 0$$

integrirajoči množitelj oblike x^ny^m ter poišči njeno splošno rešitev.

385. Reši diferencialno enačbo

$$(x^3 + xy^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0, \qquad y(\ln\sqrt{17}) = \ln(17^2).$$

(Namig: enačba ima integracijski množitelj oblike $\mu = \mu(x)$.)

386. Poišči implicitno enačbo funkcije $y(x)$, ki je rešitev diferencialne enačbe

$$(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$$

in zadošča pogoju $y(1) = -1$. (Namig: integrirajoči množitelj je oblike $\mu(x,y) = f(xy)$.)

387. Reši diferencialno enačbo

$$\left(y - \frac{x^2}{\cos x}\right)dx + \left(\frac{y}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right)dy = 0, \qquad y(0) = -1.$$

(Namig: integrirajoči množitelj je funkcija spremenljivke x.)

388. Reši diferencialno enačbo

$$y = xy'^2 - 2y'^3.$$

Poišči tudi ogrinjačo.

24.2 Uporaba

389. Poišči odvedljivo funkcijo f, definirano na neki okolici U točke 0, za katero velja

$$(1 - \ln f(x))f(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt, \qquad x \in U.$$

390. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ naj bo $T_x = (x, y)$ točka na grafu funkcije f in $A_x = (x, 0)$. Koordinatno izhodišče označimo z O: $O = (0,0)$. Poišči vse funkcije f z naslednjo lastnostjo: pri poljubnem $x \in \mathbb{R}$ tangenta na graf funkcije f v točki T_x razdeli trikotnik OT_xA_x na dva ploščinsko enaka dela.

391. Naj bo f odvedljiva realna funkcija. V točki $T = (x, f(x))$ potegnemo tangento na graf funkcije f in s T_X in T_Y označimo presečišči tangente s koordinatnima osema x oz. y. Poišči vse funkcije, za katere v vsaki točki velja

$$d(T, T_X) = 2d(T, T_Y).$$

392. Po morju pluje čoln mase m. Sila upora je sorazmerna s hitrostjo (koeficient je k), sila motorja je F_0. V trenutku $t = 0$ je hitrost čolna enaka v_0.

(a) Izračunaj odvisnost hitrosti čolna od časa.

(b) Izračunaj odvisnost poti od časa.

(c) Kolikšno razdaljo še lahko prepluje čoln, če se mu je trenutku $t = 0$ pokvaril motor?

393. Reši enačbo

$$2\int_0^x y(t)\,dt = x + (2y(x) - 1)\sin x\cos x.$$

394. Kamen mase m vržemo navpično v zrak z začetno hitrostjo v_0. Recimo, da je sila upora premosorazmerna s kvadratom hitrosti: $F_u = kv^2$.

(a) Zapiši hitrost dvigajočega se kamna v odvisnosti od časa.

(b) Koliko časa preteče, preden kamen doseže najvišjo točko?

24.3 Diferencialne enačbe drugega in višjih redov

395. Poišči polinom, ki je rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2+1)y''-2y=0\,.$$

Nato z determinanto Wronskega poišči splošno rešitev te diferencialne enačbe.

396. Preveri, da je $y=x^2\mathrm{e}^{-x}$ rešitev diferencialne enačbe

$$x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0$$

in nato poišči njeno splošno rešitev.

397. Dana je diferencialna enačba

$$xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0\,.$$

(a) Z nastavkom $y=\mathrm{e}^{ax}$ poišči eno rešitev diferencialne enačbe.
(b) Z determinanto Wronskega poišči splošno rešitev te diferencialne enačbe.

398. Preveri, da je $y=1+\frac{1}{x}$ rešitev diferencialne enačbe

$$x^2(x+1)y''-2y=0$$

in z determinanto Wronskega poišči splošno rešitev te enačbe.

399. Preveri, da funkcija $f(x)=\frac{1}{x+1}$ reši diferencialno enačbo

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0\,.$$

Nato poišči splošno rešitev enačbe.

400. Ugani eno rešitev diferencialne enačbe

$$xy''-(2x+1)y'+2y=0\,.$$

Nato z determinanto Wronskega poišči splošno rešitev te enačbe.

401. Reši enačbo

$$y''+4y'+4y=\mathrm{e}^x\sin 2x\,.$$

402. Reši diferencialno enačbo

$$y^{(4)}+y'=x+\cos x\,.$$

403. (a) Reši diferencialno enačbo

$$y''+4y=\cos x\cos 3x\,.$$

(b) Poišči Eulerjevo diferencialno enačbo, katere splošna rešitev je

$$y=Ax^{19}+Bx^{-94}.$$

404. Reši diferencialno enačbo

$$y'''-8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\sin x)\,.$$

405. Reši diferencialni enačbi:

(a) $y''+2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$;
(b) $x^2y''-xy'+y=x$.

406. Reši diferencialno enačbo

$$y''-4y'+5y=8\cos x\,.$$

Dokaži ali ovrzi: Obstaja rešitev te enačbe, ki ima v točki $(0,2)$ lokalni maksimum.

407. Dana je diferencialna enačba

$$y''-xf(x)y'+f(x)y=0\,.$$

(a) Poišči vse funkcije f, za katere je dana enačba Eulerjeva in v tem primeru enačbo reši.
(b) Enačbo reši za $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$ in to tako, da najprej eno rešitev uganeš.

408. Reši:

(a) $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^x+1$;
(b) $y''+3y'+2y=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

409. Reši diferencialno enačbo

$$y''-2y'+y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,.$$

410. Z vrstami reši diferencialno enačbo

$$(1+x^2)y''+4xy'+2y=0\,.$$

Ali prepoznaš katero od nastopajočih vrst?

411. Z vrstami reši diferencialno enačbo

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=0\,.$$

412. Z vrstami poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$2x^2y''+(3x-2x^2)y'-(x+1)y=0\,.$$

Ali v kateri od nastopajočih vrst prepoznaš kako znano funkcijo?

413. Dana je diferencialna enačba

$$x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=0\,.$$

(a) Enačbo reši z vrstami. Rezultat izrazi z elementarnimi funkcijami.

(b) Enačbi je mogoče rešiti tudi z uvedbo nove neznane funkcije $z(x)$. Samo iz diferencialne enačbe bi zvezo med y in z težko uganili, na podlagi točke (a) pa je zveza na dlani. Nalogo reši tudi na ta način.

414. Z vrstami reši diferencialno enačbo

$$x^2y''-2xy'+(2+x^2)y=0\,.$$

415. Z vrstami reši diferencialno enačbo

$$x^2y''-4xy'+(6+x^2)y=0\,.$$

Ali prepoznaš katero od nastopajočih vrst?

416. Z vrstami reši diferencialno enačbo

$$xy''+2y'-xy=0\,.$$

Rezultat izrazi z elementarnimi funkcijami.

417. Diferencialno enačbo

$$x^2y''+\frac{1}{4}(x^4-3)y=0$$

reši na dva načina, in sicer:

(a) z vrstami; (b) kot Ciryjevo enačbo.

418. Diferencialno enačbo

$$x^2y''-xy'+4x^4y=0$$

reši na dva načina, in sicer:

(a) z vrstami; (b) kot Ciryjevo enačbo.

419. Dana je diferencialna enačba

$$x^2y''+2xy'+\left(x^4+\frac{1}{4}\right)y=0\,.$$

(a) Z vrsto poišči eno od rešitev diferencialne enačbe.

(b) Dobljeno rešitev izrazi z Besselovo funkcijo J_0.

(c) Odvod dobljene rešitve izrazi z Besselovima funkcijama J_0 in J_1.

(d) Zapiši diferencialno enačbo prvega reda, ki ji zadošča druga, od dobljene rešitve neodvisna rešitev diferencialne enačbe.

24.4 Sistemi diferencialnih enačb

420. Z uporabo matrik reši sistem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x+5y\,,\\ \dot{y} &= x-y\,,\end{aligned}$$

$x(0)=1$, $y(0)=5$.

421. Sistem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x-2y\,,\\ \dot{y} &= 4x+5y\end{aligned}$$

reši s pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev ustrezne matrike.

422. Poišči splošno rešitev sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x-y+z\,,\\ \dot{y} &= -5x+y-z\,,\\ \dot{z} &= 2z-y\,.\end{aligned}$$

423. Z uporabo matrik reši sistem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x-3y+2\,,\\ \dot{y} &= x-2y+4e^t\,.\end{aligned}$$

424. Z uporabo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev ustrezne matrike poišči tisto rešitev sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x-y\,,\\ \dot{y} &= -2x+y+18t\,,\end{aligned}$$

ki zadošča pogojema $x(0)=1$, $y(0)=0$.

25 Fourierove vrste

425. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in skiciraj funkcijo, h kateri ta vrsta konvergira. S pomočjo te vrste izračunaj vsoto vrste

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots .$$

426. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ 3x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in skiciraj funkcijo, h kateri ta vrsta konvergira.

427. Funkcijo $f(x) = x \sin x$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. S pomočjo tega razvoja izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} .$$

428. Funkcijo $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $f(x) = \cos \frac{x}{3}$, razvij v Fourierovo vrsto in skiciraj graf funkcije, h kateri ta vrsta konvergira. S pomočjo dobljenega razvoja izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1} .$$

429. Funkcijo $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f(x) = \left(\pi^2 - x^2\right)^2 ,$$

razvij v Fourierovo vrsto in s pomočjo dobljenega rezultata izračunaj vsoto vrste

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \cdots$$

430. Funkcijo $f \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} ,$$

razvij v Fourierovo vrsto po samih sinusih in skiciraj graf funkcije, h kateri ta vrsta konvergira.

431. Funkcijo $f \colon [0, \pi]$, podano s predpisom

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} ,$$

razvij v Fourierovo vrsto po samih kosinusih in skiciraj graf funkcije, h kateri ta vrsta konvergira.

432. Funkcijo $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \end{cases} ,$$

razvij v Fourierovo vrsto in skiciraj funkcijo, h kateri ta vrsta konvergira.

26 Parcialne diferencialne enačbe – Fourierova metoda

433. Reši diferencialno enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (0 \le x \le a),$$

z naslednjimi začetnimi in robnimi pogoji:

$$u(x,0) = 2u_0 \cos^2 \frac{\pi x}{4a}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(a,t) = u_0.$$

434. Reši diferencialno enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (0 \le x \le a),$$

z naslednjimi začetnimi in robnimi pogoji:

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0.$$

435. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

s pogoji:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \omega\left(\tfrac{2x}{a} - 1\right), \quad u(0,t) = -\sin\omega t, \quad u(a,t) = \sin\omega t.$$

436. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$u_{xx} = c^{-2} u_t + t\mathrm{e}^t$$

s pogoji: $u(x,0) = u(0,t) = u(d,t) = 0$.

27 Normirani prostori, prostori s skalarnim produktom

437. Naj bo X prostor polinomov z realnimi koeficienti in

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{p \in X\,;\ p(1) = 0\}, \\ Y_2 &= \{p \in X\,;\ p'(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Dokaži, da sta Y_1 in Y_2 linearna podprostora prostora X, opiši prostor $Y_1 \cap Y_2$ ter dokaži $Y_1 + Y_2 = X$.

438. Naj bo X prostor zveznih realnih funkcij na intervalu $[0,1]$. Definirajmo:

$$\begin{aligned} A &= \{f \in X\,;\ f \text{ ima vsaj eno ničlo na intervalu } [0,1]\}, \\ B &= \{f \in X\,;\ f(0) = f(1)\}, \\ C &= \{f \in X\,;\ f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Preveri, da sta natanko dve od množic A, B, C linearna podprostora prostora X in izračunaj njun presek in njuno vsoto.

439. Naj bo X prostor zveznih realnih funkcij na intervalu $[0,2]$ s skalarnim produktom

$$(f,g) = \int_0^2 f(t)g(t)\,dt.$$

Naj bosta S in T naslednja podprostora prostora X:

$$\begin{aligned} S &= \{f \in X \mid f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in [0,1]\}, \\ T &= \{f \in X \mid f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in [1,2]\}. \end{aligned}$$

(a) Določi $S \cap T$ in $S + T$.

(b) Dokaži ali ovrzi: Če je $f \in S$ in $g \in T$, potem sta f in g ortogonalna.

440. Naj bo X prostor zveznih realnih funkcij na intervalu $[0,2\pi]$ s skalarnim produktom

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Definirajmo množici:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{f \in X\,;\ f(\pi) = 0\}, \\ X_2 &= \{f \in X\,;\ f \text{ je periodična funkcija s periodo } \pi\}. \end{aligned}$$

(a) Preveri, da sta X_1 in X_2 vektorska podprostora prostora X ter izračunaj njuno vsoto.

(b) Dokaži: Če sta $f, g \in X_2$ odvedljivi funkciji in sta f in g' ortogonalna elementa, sta tudi f' in g ortogonalna elementa.

441. Naj bo X normiran prostor. Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi:

(a) Če je Y neničelni podprostor prostora X in je A neko pozitivno število, potem obstaja tak $y \in Y$, da je $\|y\| = A$.

(b) Če sta $\{0\}$ in X edina linearna podprostora prostora X, potem je dimenzija $\dim X = 1$.

442. (a) Naj bosta x in y ortogonalna vektorja v Hilbertovem prostoru X. Dokaži, da iz $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ sledi $x = 0$ ali $y = 0$.

(b) Dokaži: Če je X realen Hilbertov prostor in vektorja $x, y \in X$ zadoščata zvezi
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$
potem sta x in y ortogonalna. Ali trditev velja tudi v kompleksnih Hilbertovih prostorih?

443. Dokaži ali ovrzi:

(a) Če elementa $x, y \in \ell_1$ zadoščata zvezi $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, potem sta linearno odvisna.

(b) Če sta elementa $x, y \in \ell_1$ linearno odvisna, potem zadoščata zvezi $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

444. Dokaži: v Banachovem prostoru ℓ_1 obstajata linearna podprostora Y_1 in Y_2, da velja $Y_1 \oplus Y_2 = \ell_1$. Ugotovi, ali trditev še vedno velja, če dodatno zahtevamo:

(a) $\dim Y_1 = 2$;

(b) $\dim Y_1 = 2, \dim Y_2 = 3$.

445. Le ena izmed naslednjih dveh formul
$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp, \qquad (A \cup B)^\perp = A^\perp \cup B^\perp$$
velja za poljubni podmnožici Hilbertovega prostora. Pravilno formulo dokaži, nepravilno pa ovrzi s konkretnim primerom.

28 Namigi

1. Matematična indukcija.
2. $x = [x] + o;\ o \in [0,1)$.
3. (a) $n = 7k + o;\ o \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ (b) $0 \le x - [x] < 1$.
5. Funkcija f_1 je periodična.
7. (a) $f(\sqrt[4]{2})$, praslika množice $\{1\}$.
9. (c) Matematična indukcija.
10. $z = x + iy$.
11. 12. 13. Polarni zapis.
14. (a) $t = z^3$.
17. (a) Polarni zapis.
19. Posebej obravnavaj vsakega od faktorjev.
20. Primerjaj x in $\frac{x^2}{2}$.
22. 23. 24. 26. (a) Matematična indukcija.
29. (b) Kaj lahko rečemo o $g(a)$ in b?
30. (a)(b) Trditvi ne veljata nujno, veljata pa, če je funkcija f zvezna.
31. (a)(b) Razmisli o trditvah v primeru, ko je funkcija g omejena.
33. (a) $g(a) = b$.
    (b) V točko a se s preslikavo f preslika največ ena točka.
34. (b), 35. (a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
36. (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.
38. (a) $a \ln x = \ln x^a$, (b) $u = x - \frac{\pi}{4}$.
39. (a)(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
40. Če sta x, y pozitivni realni števili, je $x \le y$ natanko tedaj, ko je $x^2 \le y^2$.
41. V vseh točkah z izjemo ene je funkcija neskončnokrat zvezno odvedljiva.
42. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

44. (a) Kot med krivuljama je kot med tangentama. Kot ϕ med dvema premicama v ravnini izračunamo takole: $\operatorname{tg}\phi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

45. Če bi polinom imel dve realni ničli, bi med njima ležala točka ξ, za katero bi veljalo $p'(\xi) = 0$.

46. (a) Lagrangeov izrek.

50. Tangenta poteka skozi točko $(a+1, 0)$.

52. Funkcija je periodična s periodo π.

53. Funkcija je periodična s periodo π.

55. Ob prehodu preko točke $x = 1$ se spremenita predznaka prvega in drugega odvoda.

58. (b) Število realnih korenov kvadratne enačbe je odvisno od diskriminante.

60. Če sta a in b pozitivni realni števili, je $a < b$ natanko tedaj, ko je $\ln a < \ln b$.

63. Funkcija f ima asimptoto ko $x \to \infty$, če obstajata limiti $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ in $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. V tem primeru je asimptota $y = kx + n$.

65. (a) Začni z grafom funkcije $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$.

68. $h \in [0, 5\sqrt{15}]$.

69. $x \in [0, a]$.

72. 74. $t = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$.

75. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

77. (b) Per partes.

81. Integrand je soda funkcija.

82. Per partes.

83. (a) $u = \sin x$.

84. Integrand je soda funkcija.

85. (b) Per partes.

86. $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

87. $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

88. $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

89. Odvod $f'(x)$ lahko izračunamo, še preden smo izračunali $f(x)$.

90. (a) Per partes.
    (b) Glej namig k prejšnji nalogi.

93. (b) Če je $a \in (0,1)$, je $\sqrt{a} > a$.

99. $\dfrac{t^n - 1}{t - 1}$ je polinom.

106. Na integracijskem intervalu je $|x-3| = 3 - x$.

108. Hiperbolične funkcije.

110. Kvocientni kriterij.

111. (b) Odvedi funkcijo $\phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Druga možnost: Taylorjeva vrsta za logaritemsko funkcijo.

113. Vrsta je alternirajoča.

114. Taylorjeva vrsta za logaritemsko funkcijo.

115. Raabejev kriterij. $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

116. (a) Raabejev kriterij.
     (b) Če limita ρ ni enaka 0, je pozitivna, torej $\rho > 0$. Potem so vsi členi od nekega člena dalje večji od $\rho/2$.

117. Če je limita $q > 1$, potem so vsi členi od nekega člena naprej večji od s, $1 < s < q$. Če je limita $q < 1$, potem so vsi členi od nekega člena naprej manjši od 1.

119. (b) Geometrijska vrsta.
     (c) Če je $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je $h^{(n)}(0) = n! a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

124. Taylorjeva formula:
     $f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x)$, $R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)\, x^2$, $0 < \xi < x$.

127. $x = \dfrac{1}{u}$.

128. Binomska vrsta.

129. $(2k)!! = 2^k k!$

130. (a) Skupni imenovalec.

133. Binomska vrsta.

135. $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{nx}$, $x \in (0,1]$.

136. $|g_n(x)| \le \dfrac{1}{n}$, $x \in (0,1]$.

138. Za $|x| < 1$ velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} x^n = 0$.

139. (a) Naj bo $h(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Tedaj je $f_n(x) = \left(e^{h(x)}\right)^n$.

141. Geometrijska vrsta. Zveznost limitne funkcije.

142. $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$.

143. (b) $|f(x) - 1| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - 1|$.

144. (a) Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu $[a,b]$ omejena.
$|g_n(x)| \le |g_n(x) - g(x)| + |g(x)|$.

145. Polarne koordinate.

147. (a) Trikotnik OC_BA je pravokoten.
(c) $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

148. (a)(b) Logaritemska funkcija je monotono naraščajoča.

149. (a) Trikotniška neenakost.

152. (a) Funkcija arc tg je strogo naraščajoča, torej injektivna.
(b) $\operatorname{arc\,tg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
(c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

154. (b) $0 \le \operatorname{sign}|x_n| \le 1$.

155. (a) Koliko ničel ima lahko polinom stopnje manjše ali enake 2?
(b) Polinomu $p \in B$ prištej konstantni polinom.

156. Če množica N vsebuje interval (a,b), $a < b$, lahko izračunamo $d(a,b)$.

157. Naj bo a skupna limita danih zaporedij. Potem je

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, a) + d(a, y_n)\,.$$

160. (b) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Rob}(A)$.

161. (a) $A - B = A \cap B^C$.

167. Če je (M,d) poln metrični prostor in D zaprta podmnožica množice M, je tudi (D, d_D) poln metrični prostor.

168. Adicijski izrek za sinusno funkcijo. Banachovo skrčitveno načelo.

169. Za realni zaporedji $x = (x_1, x_2, \ldots)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots)$ naj bo

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{n} & x_i = y_i \text{ za } i < n \text{ in } x_n \ne y_n \end{cases}.$$

Preslikava D je metrika in jo imenujemo *primerjalna* metrika na prostoru M vseh realnih zaporedij.

170. (b) Nivojnica N_a je množica točk (x,y), za katere velja $f(x,y) = a$.

171. $g(a,b) = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

180. $g(a,b,c) = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

181. (a) $z_r = z_x x_r + z_y z_r$ in podobno.

182. $dV = V_r\,dr + V_h\,dh = 0$.

186. (a) Prereza sta grafa funkcij $h(x) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) e^{-x^2}$ in $k(y) = e^{-1/4} e^{-y^2}$.

187. (a) $F(1,0) = 0$, $F_y(1,0) = -2 \ne 0$.

188. (a) $F(1,0,0) = 0$, $F_z(1,0,0) = -1 \ne 0$.

189. (a) $F(0,0,1) = 0$, $F_z(0,0,1) = 2 \ne 0$.

190. (a) $F(1,1,2) = 0$, $F_z(1,1,2) = 32 \ne 0$.

191. (a) $F(0,0,1) = 0$, $F_z(0,0,1) = 2 \ne 0$.

192. (a) $f(1,1,2) = g(1,1,2) = 0$, $f_y(1,1,2)g_z(1,1,2) - f_z(1,1,2)g_y(1,1,2) = -21\pi \ne 0$.
(b) $y'(1) = -1$, $z'(1) = 0$, $z''(1) = -\frac{8}{7} \ne 0$.

193. $F(x,y,\lambda) = x^2 - 3y^2 + \lambda\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - a^2(x^2 - y^2)\right)$.

194. $F(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda\left(\left(x^2+y^2-x\right)^2 - (x^2+y^2)\right)$.

195. $F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left((x-1)^2 + (y-2)^2 - z^2\right)$.

196. $F(x,y,z,\lambda) = [xyz]^{2/3} + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

197. $F(x,y,z,\lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$.

198. $F(x,y,z,\lambda) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(4x^2+3y^2+z^2-1)$.

199. $F(x,y,z,\lambda) = z + \lambda(2x^2+3y^2+2z^2+2xz-6)$.

200. $F(x,y,z,\lambda) = 2x+3y+5z+\lambda(2x^2+y^2+3z^2-174)$.

201. $F(x,y,\alpha,\lambda) = 2xy + x^2\operatorname{tg}\alpha + \lambda\left(2x+2y+\dfrac{2x}{\cos\alpha} - 4 - 2\sqrt{3}\right)$.

202. $F(x,y,\lambda) = x-y+\lambda(x^2+y^2+xy-1)$.

203. $F(x,y,z,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$.

204. $F(a,v,\lambda) = 3a + \sqrt{3a^2+9v^2} + \lambda\left(\dfrac{a^2v\sqrt{3}}{12} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

Nalogo lahko rešimo tudi z iskanjem ekstrema funkcije ene spremenljivke.

205. $F(a,v,\lambda) = \dfrac{a^2v}{3} + \lambda\left(a^2 + a\sqrt{a^2+4v^2} - 400\right)$.

206. $F(r,s,\lambda) = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{s^2-r^2} + \lambda\pi(r^2+rs-4)$.

207. $F(x,y,\lambda) = 4xy + 12x + \lambda(x^2+y^2-2)$.

208. $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+(z-\sqrt{5})^2 + \lambda(x^2+z^2-1) + \mu(x^2+y^2-z)$.

209. $F(x,y,z,\lambda,\mu) = (x-2)^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)+\mu(x^2-y^2-1)$.

210. Globalni ekstremi so bodisi lokalni ekstremi bodisi ležijo nekje na robu.

211. Glej namig k prejšnji nalogi.

212. Glej namig k prejšnji nalogi.

213. Glej namig k prejšnji nalogi.

215. $\cos^2 x = \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{-1}$.

217. Tudi meja je funkcija parametra a.

220. $u = \sqrt{x}$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

221. (b) Za $p,q>0$ velja $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

224. (a) $2x = -u$.

235. Preslikano območje v ravnini uv je kvadrat.

236. Preslikano območje v ravnini uv je trikotnik.

237. Preslikano območje v ravnini uv je trikotnik.

238. Preslikano območje v ravnini uv je pravokotnik.

239. Preslikano območje v ravnini uv je trikotnik.

240. Cilindrične koordinate.

242. Cilindrične koordinate.

243. Kartezične koordinate.

246. Kartezične koordinate.

249. Sferne koordinate. Eulerjeva funkcija beta.

250. Cilindrične koordinate. Eulerjeva funkcija beta.

251. Sferne koordinate.

252. Sferne koordinate.

253. Cilindrične ali sferne koordinate. V vsakem primeru je treba integracijsko območje razdeliti na dva dela.

255. Sferne koordinate.

256. Sferne koordinate.

257. Sferne ali cilindrične koordinate. $\rho = \frac{M}{V}$.

259. Če je krivulja ravninska, je torzijska ukrivljenost v vsaki točki enaka 0. Krivulja ima v vsaki točki isto pritisnjeno ravnino. To je ravnina, v kateri krivulja leži.

265. (c) Smer glavne normale je pravokotna na smer tangente.

267. Zvezna funkcija zavzame največjo vrednost na nekem intervalu bodisi v lokalnem ekstremu bodisi na robu.

277. (c) Gaussova ukrivljenost.

281. (a) Smerni vektor tangente je vzporeden normali ravnine.

283. Množica S je sestavljena iz treh ploskev, zato je končni rezultat vsota treh integralov.

285. $\vec{r}(x,\varphi) = (x, e^x\cos\varphi, e^x\sin\varphi)$.

288. $m = \iint \rho(x,y,z)\,dP$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

289. $F_z = \kappa \displaystyle\iint \frac{ze_1\rho\,dP}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $F_x = F_y = 0$. Če namig ne pomaga, preberi še nasvet.

290. Eulerjeva funkcija beta.

291. Integriramo po delu valja $x^2+y^2=2x$, kjer je $-\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

293. Rob ∂S je sestavljen iz treh krivulj.

295. Sedlo.

296. (a) Rob ploskve S je sestavljen iz dela krožnice in dveh daljic.
(b) $\vec{F} = \operatorname{grad}(xz)$.

301. Rob ploskve je krožnica $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

302. (b) Eulerjeva funkcija beta.

303. (a) Rob sestavljajo štiri ploskve.
(b) Volumen piramide.

304. (b) Rob sestavljata dve ploskvi, del paraboloida in krog.

306. Rob sestavljajo tri ploskve.

307. (a) Eulerjeva funkcija beta.

310. Gaussov izrek. Sferne koordinate.

312. (a) $f(r)\vec{r} = (xf(r), yf(r), zf(r))$.
(b) $\iint\limits_S \vec{F}\,d\vec{P} = \iint\limits_S \vec{F}\vec{\nu}\,dP$. Pri tem je $\vec{\nu}$ enotska normala na ploskvi.

313. (a) Ker je $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, $u(x,y,z) = x^2+yz$, je obravnavani integral enak $u(B)-u(A)$.

320. Če je $f(t)=\mathrm{e}^t$ in $g(t)=t^2$, je $h(t)=(f*g)(t)$.

325. Pravilo o transformaciji konvolucije in injektivnost Laplaceove transformacije.

326. Cauchy–Riemannovi enačbi.

327. Cauchy–Riemannovi enačbi. Preslikava: $z \mapsto z^2 \mapsto \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z^2 \mapsto f(z)$.

328. $u_{xx}+u_{yy}=0$.

329. (a) $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1$.
(b) $\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$.

330. (a) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})}$.
(b) $\operatorname{tg}(x+\mathrm{i}y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \mathrm{i}\operatorname{th} y}{1-\mathrm{i}\operatorname{tg} x \operatorname{th} y}$.

332. Če je vrsta $\sum a_k$ konvergentna, potem členi a_k konvergirajo k 0.

334. Parcialni ulomki. Geometrijska vrsta.

335. (b) Laurentova vrsta.

336. Laurentova vrsta.

337. Krivulja K je krožnica $|z|=1$.

343. (b) Integrand ima več kot eno singularnost.

345. Laurentova vrsta je produkt dveh vrst.

347. Integrand ima dve singularni točki. Krivulja lahko obkroži eno, obe ali nobene.

351. Pogoj $a>1$ vpliva na to, katere singularnosti obkrožimo.

354. L'Hospitalovo pravilo za računanje limit.

357. Integral s parametrom.

358. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$, $\qquad B(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$.

360. (a) Primer: $-2\mathrm{i} \mapsto \infty$, $0 \mapsto 2\mathrm{i}$, $1-i \mapsto 2+2\mathrm{i}$.

361. Möbiusove transformacije ohranjajo kote.

362. (a) Primer: $0 \mapsto 0$, $1+\mathrm{i} \mapsto 1+\mathrm{i}$, $2\mathrm{i} \mapsto \infty$.
(b) Primer: $1 \mapsto 2$, $\infty \mapsto -2$, $1+\mathrm{i} \mapsto 2\mathrm{i}$.

363. (a) Premik in razteg.
(b) Avtomorfizem kroga. Če ta namig ne pomaga, uberi drugo pot, ki je skicirana med nasveti.
(c) Krožnica skozi tri točke se preslika v krožnico skozi njihove slike.

365. (a) $z \mapsto z^3 \mapsto 2\mathrm{i}z^3 \mapsto 2\mathrm{i}z^3+2i$.
(b) $\sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y$. Običajna parametrizacija elipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
(c) $\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$.

366. Preslikava f je Möbiusova transformacija.

367. (a) Preslikava f_1 je Möbiusova transformacija.
(c) $\cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y$.

368. (a) Primer: $\sqrt{2} \mapsto 0$, $\sqrt{2}\mathrm{i} \mapsto -1+\mathrm{i}$, $-\sqrt{2} \mapsto \infty$.
(b) Zadošča: $1-\mathrm{i} \mapsto 0$, $-1+\mathrm{i} \mapsto \infty$.

369. Ločljivi spremenljivki.

370. Homogena enačba.

371. Linearna enačba.

372. Bernoullijeva enačba.

373. Bernoullijeva enačba.

374. Homogena enačba.

375. Riccatijeva enačba.

376. Bernoullijeva enačba.

377. Bernoullijeva enačba.

378. Bernoullijeva enačba.

379. Bernoullijeva enačba.

380. Riccatijeva enačba.

381. Riccatijeva enačba.

382. Bernoullijeva enačba.

383. Riccatijeva enačba.

388. Lagrangeova enačba.

389. Odvajaj.

392. (a) $m\dot{v} = -kv + F_0$.
(c) $\lim_{t\to\infty} s(t)$.

393. Po odvajanju dobiš diferencialno enačbo $y' = 2y \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$.

394. $m\dot{v} = -mg - kv^2$.

395. Polinom druge stopnje.

400. Polinom prve stopnje.

403. (b) Znani sta ničli karakterističnega polinoma.

406. $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$.

407. (b) $y = x$.

408. (b) Variacija konstant.

409. Variacija konstant.

416. Hiperbolične funkcije.

417. (b) Ciryjeva enačba se glasi:

$$x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \left((\beta\gamma x^\gamma)^2 + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)\right) y = 0\,.$$

S primerno substitucijo jo prevedemo na Besslovo enačbo. Če sta J_ν in $J_{-\nu}$ linearno neodvisni funkciji, je rešitev Ciryjeve enačbe

$$y = x^\alpha \left(AJ_\nu(\beta x^\gamma) + BJ_{-\nu}(\beta x^\gamma)\right).$$

S pomočjo vrste za Besslovo funkcijo lahko izpeljemo:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,.$$

418. (b) Glej namig k prejšnji nalogi.

419. (d) Determinanta Wronskega.

427. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

428. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.

437. $p(x) = (x-1)q(x) + p(1)$.

438. $p(x) = x$, $q(x) = 1 - x$, $p, q \in A$.

440. (a) Konstantne funkcije so periodične.
(b) Per partes.

442. $\|x\|^2 = (x, x)$.

444. (b) $\dim(Y_1 \oplus Y_2)$.

29 Nasveti

1. Naj bo $a_n = x_1 + \cdots + x_n$. Tedaj velja

$$(a_n + x_{n+1})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_n^k x_{n+1}^{n+1-k} \geq \binom{n+1}{n} a_n^n x_{n+1}.$$

5. (b) Izrazi $\operatorname{tg} 3x$ s $\operatorname{tg} x$.

7. (b) Izračunaj nekaj začetnih členov, ugani splošni člen in hipotezo dokaži z matematično indukcijo.

14. (b) Naj bo $a \in \mathbb{C}$. Premisli, kje ležijo rešitve enačbe $z^n = a$.

15. 16. Upoštevaj $|z|^2 = z\bar{z}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

17. (b) Obravnavaj naslednje možnosti: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4, 5$, $n \geq 6$.

19. Pri obravnavi desnega faktorja $b_n = \cos\left(n\,(n+1)\,\frac{\pi}{3}\right)$ razišči podzaporedja (b_{3k}), (b_{3k+1}) in (b_{3k+2}).

20. Pod korenom izpostavi največjega od sumandov.

21. Obravnavaj možnosti $0 \leq t < 2$, $t = 2$, $2 < t < 4$, $t \geq 4$.

22. Dokaži, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 0.

23. Dokaži, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno s 3.

24. Dokaži, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 0.

25. Najprej brez indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $x_n \geq 1$. Nato z indukcijo dokaži monotonost.

26. Izpelji rekurzivni formuli $p_{n+1} = f(p_n)$ in $q_{n+1} = g(q_n)$.

27. Premisli, čemu je enako $[10x]$.

28. (a) Dokaži: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} |x| + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

(c) Dokaži: $(F \circ h)(x) = \begin{cases} F(0) & x \neq 0 \\ F(1) & x = 0 \end{cases}$, $(h \circ G)(x) = \begin{cases} 0 & G(x) \neq 0 \\ 1 & G(x) = 0 \end{cases}$.

29. (b) Izračunaj $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x)$.

30. Dokaži, da je $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$.

31. (c) Naj bo $b = \lim_{x \to \infty} g(x)$. Dokaži: $\lim_{x \to \infty} (f \circ g)(x) = f(b)$.

32. (b) Izračunaj $(g \circ f)(a)$.

34. (b) V oklepaju prištej in odštej enko.

37. Izračunaj logaritem iskane limite, ali pa v izrazu $(e + x)$ izpostavi e.

39. (a) V oklepaju izpostavi e. V končni fazi upoštevaj $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

42. Neposredno po definiciji odvoda izračunaj $f'(0)$.

43. Dva od možnih pristopov:

(a) Naj bo dana premica tangenta grafa funkcije f v točki (x_0, y_0). Izračunaj x_0 in a.

(b) Upoštevaj, da se parabola dotika dane premice.

44. (b) Zapiši enačbo tangente v poljubni točki (x_0, y_0) na grafu funkcije f.

46. (b) Zapiši $p(x) = ax^2 + bx + c$ in poišči iskani q.

54. Pri računanju limit uvedi novo spremenljivko $u = \ln x$.

56. Izračunaj limite $\lim_{x \to 0+} f(x)$, $\lim_{x \to 0-} f(x)$ in $\lim_{x \to 0+} f'(x)$.

57. Pri računanju limit uvedi novo spremenljivko $u = \ln x$.

62. Naj bo $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 + x}}{x - 1}$. Pri računanju odvoda $f'(x)$ upoštevaj, da je

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x > 1 \\ -g(x) & x < 1 \end{cases}.$$

64. (b) Premisli naslednji trditvi: Strogo naraščajoča funkcija je injektivna. Zvezna funkcija v okolici lokalnega ekstrema ni injektivna.

65. (c) Upoštevaj, da v točkah, kjer je $\sin \pi x = \pm 1$, velja $f(x) = \pm g(x)$.

67. Denimo, da izrazimo dolžino tetive skozi točko (x, y) na elipsi kot funkcijo spremenljivke x. Preveri, ali abscisa lokalnega ekstrema sploh leži na intervalu $[-a, a]$.

70. Obravnavana funkcija ni definirana v točki $x = 0$. Zaradi simetrije se lahko omejimo na iskanje ekstremov na intervalu $(0, \infty)$.

71. (b) Pri iskanju lokalnih ekstremov dobimo kubično enačbo za spremenljivko $u = e^a$. Ugani eno rešitev te enačbe. Če te moti, da enačba nima celih koeficientov, jo na primeren način kvadriraj.

72. Najprej izračunaj dolžino poti izstrelka do ordinatne osi.

74. Hitrost čolna razstavi na komponento v smeri reke in komponento v smeri pravokotno nanjo.

75. V imenovalcu izpostavi n^2.

80. Integral razbij na vsoto dveh integralov.

82. Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

85. (a) V oklepaju izpostavi $\cos x$.
(b) Integracijo racionalne funkcije si lahko olajšaš z uvedbo nove spremenljivke.

89. Izračunaj $f(0)$.

91. (a) Zapiši $F(-x)$ in uvedi novo spremenljivko.
(b) Obravnavaj naslednje možnosti: $x \geq 1$, $|x| < 1$, $x \leq 1$.

93. (a) Števec in imenovalec pomnoži z x in izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$.

94. Paziti moramo na dvoje: na neskončno zgornjo mejo in na to, da pri nekaterih $n \in \mathbb{Z}$ integrand na integracijskem območju ni omejen.

95. Odpravi koren iz imenovalca.

96. Najprej ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ ima funkcija pol na integracijskem intervalu. Nato si oglej stopnje teh polov.

97. Izpelji: $f(t) = a\sqrt{\frac{a-t}{t}}$.

98. (a) Števec in imenovalec pomnoži z $(x-1)^b$ in izračunaj limito

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\left(x^{2a}-1\right)^b}{(x-1)^b}.$$

(b) Upoštevaj, da za vsak $s > 0$ velja $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^s} = 0$.

100. Uvedi novo spremenljivko. Upoštevaj, da sta sin in cos omejeni funkciji.

103. Ploskev P razdeli kroglo na manjši del T_1 in preostanek T_2. Upoštevaj, da je T_1 rotacijsko telo, ki ga dobimo z vrtenjem dela ravnine med parabolo, krožnico in abscisno osjo.

107. Najprej določi definicijsko območje funkcije f.

109. Izračunaj čas, potreben za izgradnjo sloja debeline dx na višini x.

111. (a) Izračunaj kvocient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ in dokaži, da členi a_n ne konvergirajo k 0.

112. (a) Absolutno konvergenco dokaži s kvocientnim kriterijem.

(b) Izračunaj kvocient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ in dokaži, da členi a_n ne konvergirajo k 0.

113. Z integralskim kriterijem preveri, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^{3/4}(1+n)}$ ni konvergentna.

118. Najprej izračunaj konvergenčni radij. Pri ugotavljanju konvergence na robovih konvergenčnega intervala bo koristila zveza $2^n n! = (2n)!!$.

120. (a) Glede monotonosti obravnavaj števec in imenovalec posebej.
(b) Dokaži: $4\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{\ln(1+n)}{\ln n}$. Če tega ne uspeš dokazati za vsak $n \geq 2$, preveri vsaj, da obstaja tak n_0, da ocena velja za vse $n \geq n_0$.
(c) Pri obravnavi robov konvergenčnega intervala si pomagaj z integralskim kriterijem za konvergenco vrst in s točkama (a) in (b).

121. (a) Limito razbij na vsoto treh limit.
(b) Na desnem robu konvergenčnega intervala uporabi Raabejev kriterij oz. točko (a). Na levem robu dobimo alternirajočo vrsto.

122. Izračunaj limiti $\lim_{n\to\infty} k_n$ in $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_n}$. Vrsto pomnoži z $(1-x)$. Poišči vsoti vrst $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ in $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Nato posebej obravnavaj možnosti $x > 0$, $x = 0$ in $x < 0$.

123. Dokaži, da je odvod izraza enak 0. Nato upoštevaj Abelov izrek in izračunaj limito izraza ko $x \to 1$.

125. Najprej razvij funkcijo $h(x) = \frac{1}{x-1}$ v vrsto, nato pa odvedi levo in desno stran dobljene enakosti.

126. Uporabi razvoj logaritemske funkcije v Taylorjevo vrsto in seštej dobljeni vrsti.

129. (b) Funkcijo $g(x) = \arcsin x$ razvij v Taylorjevo vrsto in to tako, da najprej razviješ $g'(x)$.

130. (b) Oglej si koeficient, ki stoji v razvoju funkcije f v Taylorjevo vrsto pri x^{1994}.

132. Imenovalec ima v točki 0 ničlo. Razvij ga v Taylorjevo vrsto in ugotovi stopnjo te ničle.

133. Preveri: $\frac{f^{(1990)}(0)}{1990!} = \frac{1323!!}{1326!!}$.

134. Integrand razvij v Taylorjevo vrsto in ga členoma integriraj. Spomni se, kolikšna je napaka, če pri izračunu alternirajoče vrste s členi, ki po absolutni vrednosti monotono konvergirajo k 0, seštejemo le prvih nekaj členov.

135. Izračunaj limito $\lim_{x\to 0} f_n(x)$.

137. Dokaži, da za vsak $x \in [0,1]$ velja $|f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{1}{n+1}$.

138. Poišči največjo vrednost funkcije f_n na intervalu $[0,1]$ in dokaži

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad x \in [0,1].$$

139. (b) Izračunaj limiti $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ in $\lim_{x\to 0} f_n(x)$. Določi limitni funkcijo na vsakem od intervalov in preveri, če je zvezna. Dokaži, da za $x \in (-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$ velja $|f_n(x)| < \left(e^{-\sqrt{5}/6}\right)^n$.

140. (a) Primerjaj z geometrijsko vrsto.

(b) Oceni $\sum_{n=N}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{10^n}$.

146. (b) Izračunaj limito $\lim_{t\to 0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

147. (b) Izračunaj limite $\lim_{\varphi\to 0} \dfrac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)}$, $\lim_{\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}} x(\varphi)$, $\lim_{\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}} y(\varphi)$.

150. (b) Posebej obravnavaj štiri možnosti.

151. (a)(c) Poišči različni funkciji f in g, za kateri velja $d(f,g) = 0$.

153. (b) Oglej si zaporedje $a_n = n$.

(c) Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$ in naj bosta $K_R(a)$, $k_r(a)$ krogli s središčem v točki a in radijema R oz. r, prva v dani metriki d, druga v običajni metriki na $\mathbb{R}^+$. Pri danem R poišči r tako, da bo $k_r(a) \subseteq K_R(a)$. Nato pri danem r poišči R, da bo $K_R(a) \subseteq k_r(a)$.

154. (a) Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za poljubna zaporedja $x, y, z \in X$ velja

$$\operatorname{sign}|x_n - y_n| \le \operatorname{sign}|x_n - z_n| + \operatorname{sign}|z_n - y_n|.$$

155. (b) Naj bo $p \in A$, $q \in M - A$ in $\epsilon > 0$. V krogli $K_\epsilon(p)$ poišči polinom stopnje 1. Dokaži, da sta vsaj dve od števil $q(0)$, $q(1)$ in $q(2)$ različni. Premisli, da za polinom $r \in M - B$ velja $|r(1)| = \delta > 0$. Nato oceni razdaljo $d(r,s)$, kjer je $s \in B$.

156. Dokaži: če na intervalu (a,b) obstaja točka x, za katero je $f(x) \neq 0$, potem je $d(a,b) > 0$.

160. (a) Premisli, da je enakost ekvivalentna dejstvu, da je množica $\operatorname{Int}(A)$ odprta.

(c) Poišči primer množice, za katero bo veljalo $\overline{A} = M$ in zato $\operatorname{Rob}(\overline{A}) = \emptyset$.

162. (b) Poišči dve množici, katerih presek je prazen, presek njunih robov pa ni prazen.

163. (b) Poišči dve množici, katerih presek je prazen, presek njunih zaprtij pa ni prazen.

164. Naj bosta A in B omejeni množici in naj prva leži v krogli $K_r(x)$, druga pa v krogli $K_\rho(y)$. Poišči tak radij R, da bo unija $A \cup B$ ležala v krogli $K_R(x)$.

167. Upoštevaj Banachovo skrčitveno načelo.

168. Naj bo $M = C[0,\pi]$ in d maksimum norma na množici M. Preveri, da je $A\colon (M,d) \to (M,d)$ skrčitev.

169. Naj bo $x \in M$. Premisli, da odprta krogla $K_{1/n}(x)$ vsebuje natanko tista zaporedja $y \in M$, ki se na prvih n komponentah ujemajo z zaporedjem x. Nato ugotovi, v katerih od množic $\operatorname{Int}(A)$, $\operatorname{Out}(A)$, $\operatorname{Rob}(A)$ ležijo točke iz množic A oz. A^C.

170. (b) Izračunaj lokalne ekstreme ustrezne funkcije ene spremenljivke in razišči njeno obnašanje na robovih definicijskega območja.

173. Preveri, da velja $x \le \sqrt{x^2 + y^2}$. Kdaj velja enačaj?

174. Glej nasvet k prejšnji nalogi.

175. (a) Pozor: enačba $g(x) = h(x)$ ni ekvivalentna enačbi $g(x)^2 = h(x)^2$.

176. (a) Uvedi polarne koordinate.

177. Parcialni odvod izračunaj najprej v točki $(0,0)$, nato pa še v vseh ostalih točkah. Pri obravnavi zveznosti uvedi polarne koordinate.

179. Pri izpeljavi predpisa za funkcijo f loči možnosti $x > 0$ in $x < 0$. Pri izpeljavi predpisa za funkcijo g na skici nariši poltrak skozi izhodišče in točko (x,y).

188. Enačbo $x^2 + y^2 + z^2(x,y) - e^{z(x,y)} = 0$ parcialno odvajaj po spremenljivkah x in y in izračunaj odvode $z_x(1,0)$, $z_y(1,0)$, $z_{xx}(1,0)$, $z_{xy}(1,0)$ in $z_{yy}(1,0)$.

189. Postopaj podobno kot pri prejšnji nalogi.

190. (b) Postopaj podobno kot pri prejšnji nalogi.

191. (b) Postopaj podobno kot pri prejšnji nalogi.

192. (b) Enačbi $f(x, y(x), z(x)) = 0$ in $g(x, y(x), z(x)) = 0$ odvajaj po spremenljivki x in izračunaj potrebne odvode v točki 1.

199. Razdalja točke (x,y,z) od ravnine z je $|z|$. Premisli, da iskanje največje vrednosti te funkcije lahko prevedemo na iskanje največje oz. najmanjše vrednosti funkcije $f(x,y,z)=z$.

200. Premisli, kje so še lahko kandidati za globalni minimum, če je v notranjosti ploskve en sam lokalni ekstrem in to maksimum.

202. Ugotovi, kje na dani elipsi zavzame največjo oz. najmanjšo vrednost funkcija $f(x,y)=x-y$.

203. Pazljivo določi kandidate za ekstreme. Pri nekaterih vrednostih parametra a sta namreč kandidata samo dva, pri drugih pa so štirje.

207. Dejstvo, da kompleksno število leži na imaginarni osi, zapiši z enačbo.

210. Pri obravnavi obnašanja funkcije na robu kroga zadošča, če upoštevaš zvezo med neodvisnima spremenljivkama na robu in poenostaviš funkcijski predpis. V tem primeru iskanje z vezanim ekstremom ni potrebno.

212. Obravanavaj vsako od stranic pravokotnika posebej. Med točkami dane stranice je globalni ekstrem spet lahko na njenem robu.

213. Obravnavaj obnašanje funkcije na obeh pozitivnih poltrakih koordinatnih osi. Ugotovi, kaj se zgodi, če pošljemo x oz. y čez vse meje.

214. Ugotovi, kaj se dogaja s funkcijskimi vrednostmi, če se bližamo robu definicijskega območja.

215. Izračunaj $I(1)$.

216. Naj bo $h(y)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(y)\ln(1+y^2)$. Dokaži, da velja $g'(y)=h'(y)$. Odtod sledi $g(y)=h(y)+c$. Določi konstanto c.

218. Zamenjaj vrstni red integracije. Pri dokazu enakomerne konvergence integrala na intervalu $[\alpha,\sqrt{3}]$ najprej preveri neenakost

$$\left|\int_B^\infty \frac{x^t \ln x\, dt}{(1+x^2)(1+x^t)^2}\right| < \frac{1}{1+\alpha^B}, \quad x\in[\alpha,\sqrt{3}].$$

219. (a) Dokaži, da je funkcija I zvezna v točki 0. Uporabi Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco integrala.

(b) Uporabi Leibnizovo pravilo. Pri računanju si pomagaj z Eulerjevo funkcijo Γ. Pri dokazu enakomerne konvergence integrala

$$\int_0^\infty (-2a)e^{-a^2(1+x^2)}dx$$

na intervalu $[b,d]\subset(c,\infty)$ upoštevaj omejenost funkcije $g(t)=te^{-t^2}$ in uporabi Weierstrassov kriterij.

221. (b) Najprej ugotovi, za katere $n\in\mathbb{N}$ integral konvergira. Nato upoštevaj namig in uvedi novo spremenljivko.

222. Upoštevaj namig k prejšnji nalogi in zvezo $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$, $a\in(0,1)$.

225. Funkcijo f izrazi s funkcijo beta in upoštevaj, da je funkcija $B(p,q)$ definirana za $p>0$, $q>0$. Uporabi lastnosti funkcije Γ in dokaži $f(t)=\dfrac{\pi t(1-2t)}{\sin(\pi t)}$, $t\in(0,1)$.

228. Enačbi krogov zapiši v polarnih koordinatah in ugotovi, pri katerem kotu φ se sekata.

229. Glej prejšnji nasvet.

231. (b) Glej prejšnji nasvet.

233. Glej prejšnji nasvet.

235. Skiciraj območje R in preslikano območje v ravnini uv. Izrazi u in v kot funkciji spremenljivk x in y in izračunaj Jacobijevo determinanto.

236. Glej nasvet k prejšnji nalogi. Pri tem območje D v ravnino uv preslikaj tako, da najprej ugotoviš, kam se preslika rob območja D.

237. Glej nasvete k prejšnjim nalogam.

238. Glej nasvete k prejšnjim nalogam.

239. Glej nasvete k prejšnjim nalogam.

241. V ravnini uvedi polarne koordinate in skiciraj krivuljo $(x^2+y^2)^3=16x^2$. Nato integriraj v cilindričnih koordinatah.

243. Ugotovi, kje dani ravnini sekata ravnino $z=0$. Skiciraj projekcijo preseka danih ravnin na ravnino $z=0$.

244. Če točka (x,y,z) leži na obeh ploskvah, velja $(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$. Skiciraj to krivuljo v polarnih koordinatah. Nato integriraj v cilindričnih koordinatah.

245. Ugotovi, kje se ploskvi sekata. Nato integriraj v cilindričnih koordinatah.

247. Integriraj v cilindričnih koordinatah. Upoštevaj, da je $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

248. V ravnini uvedi polarne koordinate in skiciraj krivuljo $(x^2+y^2)^3=16x^2$. Nato integriraj v cilindričnih koordinatah.

249. Enačba ploskve v sfernih koordinatah je neodvisna od kota φ, torej ploskev pri vsakem kotu φ izgleda enako. Nariši npr. prerez ploskve nad poltrakom $\varphi=0$ in ga zavrti okrog osi z.

252. Nariši pregledno sliko. Presek krogle z ravnino je krožnica. Izračunaj njen radij in od tod izpelji meje za kot θ.

254. Enačbo ploskve zapiši v sfernih koordinatah in nariši pregledno skico.

258. Pri risanju skice upoštevaj, da krivulja leži na ploskvah $x = y$ in $z = x^3$. Naj bo $f(t)$ kvadrat razdalje od točke $\vec{r}(t)$ do točke $(1, -1, 0)$. Določi ekstreme te funkcije na intervalu $[-1, 2]$.

260. Krivuljo parametriziraj s polarnim kotom v ravnini $z = 0$.

261. Krivuljo parametriziraj s parametrom z.

263. (a) Izračunaj $x^2(t)$ in $y^2(t)$.

264. (a) Projekcija točke $(x(t), y(t), z(t))$ na ravnino $z = 0$ je točka $(x(t), y(t), 0)$. Poišči zvezo med $x(t)$ in $y(t)$. Podobno postopaj pri ostalih projekcijah.

266. (a) Upoštevaj, da krivulja leži v ravnini $x = z$ in da je njena projekcija na ravnino $z = 0$ krivulja $y = (x^2 + 1)^{-1}$.

267. Upoštevaj, da krivulja leži na ploskvah $y = x + 1$ in $z = y^2$.

268. Naj bo $g(u, v)$ kvadrat razdalje od točke $\vec{r}(u, v)$ do koordinatnega izhodišča. Določi ekstreme funkcije g.

269. Zapiši enačbo tangentne ravnine v točki (a, b, c) na paraboloidu in upoštevaj pogoja. Nato reši sistem treh enačb s tremi neznankami.

270. Najprej poišči eksplicitno enačbo ploskve.

272. (a) Najprej izpelji eksplicitno enačbo ploskve.

273. (b) Upoštevaj, da krivulja leži tudi na ravnini $y = -x$.

(c) Upoštevaj, da je v primeru, ko je ploskev podana z enačbo $F(x, y, z) = 0$, smerni vektor ploskovne normale v točki (a, b, c) enak $\operatorname{grad} F(a, b, c)$.

276. Za računanje je ugodneje, če ploskev parametriziramo s polarnima parametroma r in φ. Izračunaj Gaussovo ukrivljenost in obravnavaj možnosti za njen predznak.

278. Najprej določi in parametriziraj projekcijo krivulje K na ravnino $z = 0$. Že v začetni fazi integriranja lahko upoštevaš, da so nekateri integrali trigonometričnih funkcij v mejah od 0 do 2π enaki 0. Ta nasvet velja tudi za večino nalog iz naslednjih treh razdelkov.

279. Najprej določi in parametriziraj projekcijo krivulje K na ravnino $z = 0$.

280. (b) Enačbo tangente na krivuljo K v točki $T = \vec{r}(t)$ zapiši v obliki $\vec{R} = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$. Nato z enačbami opiši dejstvo, da ta tangenta seka os y.

282. Pazljivo določi meje za kota φ in θ.

289. Najprej izračunaj silo, s katero delček ploskve s površino dP v okolici točke (x, y, z) deluje na naboj v izhodišču. Nato izračunaj komponente te sile v smeri koordinatnih osi. Zaradi simetrije bo končni rezultat oblike $\vec{F} = (0, 0, F_z)$. Zato je treba sešteti prispevke h komponenti F_z po celi ploskvi.

290. Ploskev najprej parametriziraj s parametroma x in z, v dobljeni dvojni integral pa uvedi polarne koordinate.

292. (b) Izberi primerno funkcijo $\vec{F} = (f, g)$, da bo integral $\int_{\partial G} \vec{F}\vec{r}$ enak ploščini danega območja G.

294. Nariši pregledno skico. Pomagaš si lahko z dvema listoma papirja. Prvi naj predstavlja ravnino $z = 0$ s koordinatnima osema in projekcijo valja $x^2 + y^2 = 4$, drugi pa ploskev $z = x^2/2$.

295. Krivuljo si poskusi predstaviti podobno kot pri prejšnji nalogi.

297. Krivuljo si poskusi predstaviti podobno kot pri nekaterih prejšnjih nalogah. Krivuljo parametriziraj tako, da najprej parametriziraš projekcijo na ravnino $z = 0$.

298. Uporabi Stokesov izrek.

299. Krivuljo parametriziraj tako, da najprej parametriziraš projekcijo na ravnino $z = 0$.

300. Glej nasvet k prejšnji nalogi.

305. Uporabi Gaussov izrek.

307. Pazljivo določi meje za kote.

308. Ugotovi, kje se ploskvi sekata in nariši pregledno skico. Nato uporabi Gaussov izrek.

309. Glej prejšnji nasvet. Oglej si prereza obeh ploskev nad premico $y = x$. Pri integraciji si pomagaj z Eulerjevo funkcijo beta.

311. Najprej nariši paraboli, prvo v ravnini xy, drugo v ravnini yz. Nato si z dvema listoma papirja ponazori dani ploskvi, ki sta parabolična valja. Integriraj v kartezičnih koordinatah.

312. (b) Pri izpeljavi zveze z uporabo Gaussovega izreka upoštevaj točko (a) in enega od nastopajočih členov integriraj per partes.

313. (b) Upoštevaj dejstvo iz namiga in nalogo reši z vezanim ekstremom.

319. Z direktnim računom preveri, da je za $a > 0$ Laplaceova transformiranka funkcije $f(t) = t^a$ funkcija $F(z) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$. Najprej izračunaj $x(t)$ in šele nato $y(t)$.

324. Najprej izračunaj $y(t)$ in šele nato $x(t)$.

326. Dano zvezo parcialno odvedi po x in po y.

327. Število $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ zapiši v polarnem zapisu.

331. (a) Ugotovi, kdaj je $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{sh} y$ negativno realno število.
(c) Oglej si vse točke, za katere je $f(z) \in \mathbb{R}$.

332. Najprej razišči absolutno konvergenco.

333. Upoštevaj namige in nasvete k prejšnji nalogi. Pri točki (c) uporabi kvocientni kriterij za konvergenco vrst s pozitivnimi členi.

335. Pri vseh nalogah v tem razdelku najprej poišči, skiciraj in analiziraj singularne točke integranda.

340. Funkcija v števcu ima ničlo v točki -2. Preoblikuj jo tako, da se bo to opazno že na prvi pogled.

345. Residuum se izraža v obliki vrste. Preoblikuj to vrsto tako, da dobiš vrsto za znano funkcijo v neki točki.

346. (b) Posebej obravnavaj možnosti, ko je n sodo oz. liho število.

348. Upoštevaj namig in nasvet k nalogi 316.

349. (c) Oglej si integral po krožnici s središčem v točki $2n$ in radijem $1/2$.

350. Laurentovo vrsto zapiši kot produkt dveh vrst. Zaporedoma izračunaj koeficiente $c_0, c_1, \ldots$, nato pa še koeficiente $c_{-1}, c_{-2}, \ldots$

357. Dani integral pri $x = 0$ izračunaj posebej (neposredno). Nato izračunaj $\Phi'(x)$.

358. Integral po dani krivulji izračunaj na dva načina: z uporabo izreka o residuumih in z neposredno parametrizacijo. Nato pošlji $R \to \infty$. Preveri, da se pri tem integral po sklenjeni krivulji ne spreminja, integral po loku teži k 0, preostala dva integrala težita pa k številom, ki sta v zvezi z iskanim integralom.

359. (a) Ugotovi, kam se preslikajo točke 1, i, -1, 0.
(b) Zanesljiva, a daljša je pot z računom. Krajša pot: ugotovi, kam se preslika realna os, kam se preslikata točki -2 in ∞ in katera točka se preslika v ∞. Nato upoštevaj, da Möbiusove transformacije ohranjajo kote.

360. (b) Ugotovi, kam se preslikajo točke $-2\mathrm{i}$, 0 in $1 - \mathrm{i}$.

361. Premisli, da zadošča, če tri točke preslikaš takole: $0 \mapsto 0$, $2 \mapsto \infty$, $1 \mapsto 1$.

363. (b) Primerno preslikaj točke -1, 0 in 3 in premisli, da se bo tudi točka $\sqrt{3}\mathrm{i}$ preslikala pravilno.

364. Premisli, kam se preslikajo tisti poltraki skozi izhodišče, ki ležijo v A.

366. Izračunaj $g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$.

368. (b) Najprej preslikaj presek $K_1 \cap K_2$.

375. Ugani eno rešitev.

380. 381. Poišči rešitev oblike $y = Ax^n$.

385. Izpelji: $\mu(x) = x^{-3}\mathrm{e}^{-2x}$.

386. Izpelji: $f(t) = t^{-2}$.

387. Izpelji: $\mu(x) = \cos x$.

389. Izračunaj $f(0)$.

403. (a) Produkt kosinusov pretvori v ustrezno vsoto.
(b) Zapiši karakteristični polinom Eulerjeve enačbe $x^2y'' + axy' + by = 0$.

405. (b) Eulerjevo enačbo z uvedbo nove spremenljivke prevedemo na enačbo s konstantnimi koeficienti. Premisli, čemu je enaka desna stran transformirane enačbe in poiši nastavek za njeno partikularno rešitev. S tem dobiš nastavek za partikularno rešitev prvotne enačbe, ne da bi zamenjavo spremenljivk dejansko izvedel.

410. Nastavi $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in izpelji rekurzivno zvezo $a_{k+2} = -a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

411. Nastavi $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in izpelji zveze $a_2 = -2a_0$, $a_3 = -\frac{1}{2}a_1$, $a_{k+2} = \frac{k-2}{k+1}a_k$, $k = 2, 3, \ldots$

412. Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Pri manjši od dveh možnosti za m izpelji rekurzivno zvezo $a_k = \frac{1}{k}a_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$; pri večji pa rekurzivno zvezo $a_k = \frac{2}{2k+3}\,a_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$

413. 414. 415. Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Pri manjši od dveh možnosti za m izpelji rekurzivno zvezo $a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-1)}$, $k = 2, 3, \ldots$ Odtod dobiš dve linearno neodvisni rešitvi enačbe in s tem splošno rešitev.

416. Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Pri manjši od dveh možnosti za m izpelji zvezo $a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k-1)}$, $k = 2, 3, \ldots$ Odtod dobiš dve linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe.

417. (a) Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Pri manjši od dveh možnosti za m izpelji zveze $a_1 = a_3 = 0$, $a_k = -\frac{a_{k-4}}{4k(k-2)}$, $k = 4, 5, \ldots$ Odtod dobiš dve linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe.

418. (a) Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Pri manjši od dveh možnosti za m izpelji zveze $a_1 = a_3 = 0$, $a_k = -\frac{4a_{k-4}}{k(k-2)}$, $k = 4, 5, \ldots$ Odtod dobiš dve linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe.

419. Nastavi $y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in določi m. Nato izpelji zveze $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ in $a_k = -\frac{a_{k-4}}{k^2}$, $k = 4, 5, \ldots$

425. Izračunaj $\tilde{f}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Pri risanju grafa bodi pozoren na funkcijske vrednosti v točkah $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

433. Funkciji α in β v zvezi $u(x,t) = v(x,t) + (\alpha(t)x + \beta(t))$ določi tako, da dobiš parcialno diferencialno enačbo za funkcijo v s homogenimi robnimi pogoji.

434. Glej nasvet k prejšnji nalogi.

435. Glej nasvet k prejšnji nalogi.

438. Za poljuben $f \in X$ poišči funkciji $g \in B$, $h \in C$ z lastnostjo $f = g + h$. Najprej izračunaj $g(0)$, $g(1)$ in $h(1)$.

442. (a) Kvadriraj enakost.

30 Rezultati

2. (a) $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{2}\right)$ (b) $\mathbb{R} \setminus A$.

3. (a) Število a_n je ostanek števila n pri deljenju s 7.

4. Ni surjektivna, ni injektivna.

5. (a) $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$, $f_2 = f_3$.
   (b) $g(x) = \dfrac{x(3 - x^2)}{1 - 3x^2}$.

6. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$, $(g \circ f)(x) = f(x) + 1$.

7. (a) Funkcija ni niti injektivna niti surjektivna.
   (b) $a_{2n} = 2^{2^n - 1}$, $a_{2n+1} = \sqrt{2}\, 2^{2^n - 1}$.

8. $D_f = [-1 + e^{-1}, 0) \cup (0, 2)$, $\sup D_f = 2$, $\max D_f$ ne obstaja, $\inf D_f = \min D_f = -1 + e^{-1}$.

9. (a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. (b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} g(x)$.

10. $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

11. $z_k = \sqrt[3]{2}(\cos\phi_k + \mathrm{i}\sin\phi_k)$; $\phi_k = -\frac{9\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

12. (a) $z_0 = 0$; $z_k = 2(\cos\phi_k + \mathrm{i}\sin\phi_k)$; $\phi_k = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
    (b) $z_k = 2(\cos\psi_k + \mathrm{i}\sin\psi_k)$; $\psi_k = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{10}$; $k = 0, 1, \ldots, 9$.
    Edino število, ki je rešitev prve enačbe in ni rešitev druge, je $z = 0$.

13. Korena sta z_2 in z_4.

14. (a) $z_k = 2e^{i\phi_k}$, $\phi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$;
    $z_{k+3} = e^{i\phi_k}$, $\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.
    (b) Obstaja: $p(z) = z^6 + 1$.

17. (a) $D = \left\{z \in \mathbb{C};\ \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$.
    (b) Vse rešitve enačbe ležijo v množici D, če je bodisi $n = 1$ in $a \in D$, bodisi $n = 3$ in $\mathrm{Re}(a) > 0$.

18. (a) $f(z) = (z - 1)e^{i\frac{\pi}{4}} + 1$.
    (b) Premica $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x + 1 - \sqrt{2}$.

19. Zaporedje ima stekališči e in $-\frac{1}{2}$e. Podzaporedji (a_{3k}) in (a_{3k+2}) monotono naraščata proti e, podzaporedje (a_{3k+1}) pa monotono pada proti $-\frac{1}{2}$e.

20. Iskana limita je enaka $\begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \geq 2 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$.

21. Za $t > 2$ je zaporedje konvergentno z limito 0.
Za $t = 2$ ima zaporedje dve stekališči: 0 in -1.
Za $0 \leq t < 2$ ima zaporedje stekališče 0, kamor konvergira podzaporedje a_{2n}, podzaporedje a_{2n-1} pa divergira k $-\infty$.

22. Zaporedje je padajoče in konvergentno. Limita je $\frac{4}{3}$.

23. Zaporedje je naraščajoče in konvergentno. Limita je 3.

24. Zaporedje je padajoče in konvergentno. Limita je 2.

25. Zaporedje je padajoče in konvergentno. Limita je 1.

26. (b) Zaporedje (p_n) konvergira k $\frac{5}{8}$, zaporedje (q_n) pa k $\frac{3}{8}$.

27. (a) $f(x) = [100x] - 10[10x]$.
    (b) Funkcija je zvezna (celo odsekoma konstantna) v vseh točkah, razen v točkah oblike $x = \frac{n}{100}$; $n \in \mathbb{N}$.

28. (a) Limita obstaja in je enaka 1.
    (b) $k = 1$.
    (c) Funkcija $F \circ h$ je na $\mathbb{R}$ zvezna natanko tedaj, ko je $F(0) = F(1)$. Funkcija $h \circ G$ je na $\mathbb{R}$ zvezna natanko tedaj, ko je bodisi $G(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ bodisi $G(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

29. (a) Naj bo f konstantna funkcija in $g(x) = \operatorname{sign}(x - a)$, $x \in \mathbb{R}$. Potem funkcija g ni zvezna v točki a, funkcija $f \circ g$ pa je.

30. (a) Primer: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$ in $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ liho} \\ \frac{1}{n} & n \text{ sodo} \end{cases}$.
    (b) Primer: f kot zgoraj, $a_n = 0$.

31. (a) Trditev ne velja, primer: $g(x) = 0$, $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
    (b) Trditev ne velja, primer: $f(x) = (x^2 + 2)^{-1}$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
    (c) Trditev velja.

32. (a) $g(b)$
    (b) Trditev velja.
    (c) Trditev ne velja. Primer: $a = 0$, $b = 1$, f funkcija iz naloge 28 in $g(x) = x^2$.

33. Primer: $f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} a & x = a \\ b & x \neq a \end{cases}$.

34. (a) 2. (b) e^3.

35. (a) e^2. (b) 3.

36. (a) $\frac{\pi}{2}$. (b) 1.

37. $e^{1+\frac{1}{e}}$.

38. (a) $\frac{1}{a}$. (b) $-\frac{1}{4}$.

39. (a) $-e$. (b) e.

40. $D_f = \{-1\} \cup [0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{\pi}{3}$. Ker za negativne x funkcija ni niti definirana, o limiti $x \to -\infty$ ne moremo govoriti.

41. Funkcija je odvedljiva, odvod je $f'(x) = \operatorname{sign}(x)(\sin x + x \cos x)$. Funkcija je zvezno odvedljiva, ni pa dvakrat odvedljiva.

42. Funkcija je tudi zvezno odvedljiva v točki 0.

43. $a = \frac{1}{4}$.

44. (a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{5}{2}$. (b) $x_0 = \pm 2$.

45. Polinom p ima natanko eno realno ničlo.

46. (a) Trditev ne velja.
    (b) Trditev velja, $q = \frac{1}{2}$.

47. -2.

48. $D_f = (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Lokalni ekstrem $\left(e^{\frac{1}{3}}, -\frac{3}{10} e^{\frac{4}{3}}\right)$, minimum. Funkcija je padajoča na intervalu $\left(0, e^{\frac{1}{3}}\right)$ in naraščajoča na intervalu $\left(e^{\frac{1}{3}}, \infty\right)$. Prevojna točka $\left(1, -\frac{7}{10}\right)$; levo od točke $x = 1$ je funkcija konkavna, desno pa konveksna.

49. $D_f = (0, e]$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to e-} f'(x) = -\infty$. Lokalni ekstrem $\left(e^{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}}\right)$, maksimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu $\left(0, e^{\frac{3}{4}}\right)$ in padajoča na intervalu $\left(e^{\frac{3}{4}}, e\right)$. Prevojna točka $x = e^{\frac{1}{8}(5-\sqrt{17})}$. Levo od nje je funkcija konveksna, desno pa konkavna.

50. (a) $D_f = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Lokalna ekstrema $\left(-4, 2^8 e^{-4}\right)$, maksimum in (0,0), minimum. Funkcija je padajoča na intervalu $(-4, 0)$, sicer je naraščajoča. Prevojni točki $x_1 = -6$, $x_2 = -2$. Med njima je funkcija konkavna, sicer pa konveksna.
    (b) $a = -2$, $a = 0$.

51. $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ničli: $-1 \pm \sqrt{2}$. Lokalni ekstremi $(1, 2\mathrm{e}^{-1})$, maksimum, $(x_1 = \frac{1}{2}(-3-\sqrt{5}), y_1)$, maksimum, $(x_2 = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}), y_2)$, minimum. Pri tem je $y_1 \doteq 6 \cdot 10^{-4}$, $y_2 \doteq -1{\cdot}4$. Funkcija je naraščajoča na intervalih $(-\infty, x_1)$ in $(x_2, 1)$, sicer pa padajoča.

52. $D_f = \mathbb{R}$. Funkcija je periodična s periodo π, zato se bodo vsi nadaljnji računi omejili na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ničle: 0, $\pm\frac{\pi}{2}$. Lokalni ekstremi $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$, maksimum, $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$, minimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, sicer pa padajoča. Prevojne točke: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{2}$, $x_{4,5} = \pm\arcsin\frac{3}{8}$. Funkcija je konveksna na intervalih $(-\frac{\pi}{2}, -\arcsin\frac{3}{8})$ in $(0, \arcsin\frac{3}{8})$, na intervalih $(-\arcsin\frac{3}{8}, 0)$ in $(\arcsin\frac{3}{8}, \frac{\pi}{2})$ pa konkavna.

53. $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkcija je periodična s periodo π, zato se bodo vsi nadaljnji računi omejili na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ničle: 0, $\pm\frac{\pi}{4}$. Poli: $\pm\frac{\pi}{2}$. Lokalni ekstremi (0,0), minimum, $\left(\pm\arccos\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$, maksimuma. Funkcija je naraščajoča na intervalih $\left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$ in $\left(0, \arccos\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$, sicer pa padajoča.

54. $D_f = (0,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ničla: $x = 1$. Lokalna ekstrema $(\mathrm{e}^{-1}, -1)$, minimum in $\left(\sqrt{\mathrm{e}}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)$, maksimum. Funkcija je padajoča na intervalih $(0, \mathrm{e}^{-1})$ in $(\sqrt{\mathrm{e}}, \infty)$ ter naraščajoča na intervalu $(\mathrm{e}^{-1}, \sqrt{\mathrm{e}})$.

55. $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Ničli: 0 in 1. Lokalna ekstrema (0,0), minimum in $(\frac{6}{7}, y_2)$, maksimum. Pri tem je $y_2 \doteq 0{\cdot}15$. Funkcija je padajoča na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(\frac{6}{7}, 1)$, sicer je naraščajoča. Prevojni točki $x_1 \doteq 0{\cdot}67$ in $x_2 \doteq 1{\cdot}04$. Med njima je funkcija konkavna, sicer pa konveksna. Funkcija ni odvedljiva v točki $x = 1$; v bližnjih točkah na grafu je tangenta skoraj navpična.

56. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0-} f'(x) = 0$. Ničla $\frac{3}{16}$. Asiptota $y = x + \frac{13}{16}$. Lokalna ekstrema $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\mathrm{e}^4)$, maksimum in $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\right)$, minimum. Funkcija je padajoča na intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, sicer je naraščajoča. Lokalna ekstrema ležita nad asimptoto.

57. $D_f = (0,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ničel nima. Lokalni ekstrem $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)$, maksimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu $\left(0, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$ in padajoča na intervalu $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, \infty\right)$. Prevojni točki sta $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)$ in $(\mathrm{e}, 1)$. Med njima je funkcija konkavna, drugje pa konveksna.

58. (a) $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ničla: 0. Lokalna ekstrema $(-1,-1)$, minimum, in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)$, maksimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu $(-1, \frac{1}{2})$, sicer pa padajoča.
   (b) Graf ima tri prevojne točke, katerih abscise niso racionalna števila.
   (c) Vsaka od premic bo graf sekala vsaj v točki (0,0). Za $k \le 0$ in $k > \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$ je to presečišče tudi edino. Za $0 < k < 1$ in $1 < k < \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$ sta presečišči še dve, v prvem primeru eno levo, drugo desno od ordinatne osi, v drugem primeru pa obe levo od ordinatne osi. V primeru $k = 1$ imamo poleg izhodišča še presečišče $(-1,-1)$, v primeru $k = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$ pa še presečišče $(-\frac{1}{2}, y_0)$.

59. $D_f = (0,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Ničla: e. Lokalni ekstrem $(\mathrm{e}^{-1}, 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$, maksimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu $(0, \mathrm{e}^{-1})$ in padajoča na intervalu $(\mathrm{e}^{-1}, \infty)$. Prevojna točka $(\mathrm{e}, 0)$. Levo od točke $x = \mathrm{e}$ je funkcija konkavna, desno pa konveksna.

60. (a) $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Asimptote nima. Ničel nima. Pol: $x = 1$. Lokalni ekstrem (e, e), minimum. Funkcija je naraščajoča na intervalu (e, ∞) in padajoča na intervalih $(0,1)$ in $(1, \mathrm{e})$. Prevojna točka $(\mathrm{e}^2, \frac{1}{2}\mathrm{e}^2)$. Desno od nje je funkcija konveksna, sicer pa konkavna.
   (b) Večje je število e^{π}.

61. $D_f = (-\infty, -\mathrm{e}^{-1}) \cup (0,\infty)$, asimptota: $y = x + \mathrm{e}^{-1}$, $(x \to \pm\infty)$.

62. $D_f = (-\infty,-1] \cup [0,1) \cup (1,\infty)$, asimptota: $y = x + \frac{3}{2}$, $(x \to \pm\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to -1} f'(x) = \infty$. Ničli: -1, 0. Pol: 1. Lokalni ekstrem $\left(x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}, y_1\right)$, $x_1 \doteq 2.19$, $y_1 \doteq 4{\cdot}86$, minimum. Funkcija je padajoča na intervalu $(1, x_1)$, sicer pa naraščajoča. Asimptoto seka enkrat, in sicer pri $x = \frac{3}{11}(-1 + 2\sqrt{3}) \doteq 0{\cdot}67$.

63. $D_f = (0, \mathrm{e}^{-1}) \cup (\mathrm{e}^{-1}, \infty)$. $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, asimptote nima. Ničla: e. Pol: e^{-1}. Lokalnih ekstremov ni. Funkcija je povsod na D_f naraščajoča. Prevojna točka $(\mathrm{e}, 0)$. Na intervalu $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$ je funkcija konkavna, drugje pa konveksna.

64. (a) $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\frac{\pi}{2}$. Ničla: 0. Lokalna ekstrema $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, minimum in $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, maksimum. Funkcija je na intervalu $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ naraščajoča, sicer pa padajoča.
   (b) Za $a \ge 2$ je funkcija f_a injektivna, za $0 < a < 2$ pa ne.

65. (a) $D_g = [-1, 0) \cup (0, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $g(-1) = -1$. Pol: 0. Funkcija g je na D_g padajoča.
   (b) 2π, $\frac{\pi}{2}$, π, $4 + 3\sqrt{2}$.

66. Največjo ploščino ima trapez s krajšo osnovnico na premici $y = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

67. Če je $0 < b \leq \sqrt{2}a$, leži najdaljša tetiva na abscisni osi. Če je $b > \sqrt{2}a$, sta najdaljši tisti dve tetivi, ki potekata skozi točki na elipsi z absciso $x = a^3\left(b^2 - a^2\right)^{-1}$.

68. $h = 2\sqrt{5}$, $H = 10 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

69. Največjo ploščino ima trikotnik z osnovnico na premici $y = -\frac{b}{2}$.

70. $M_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

71. (a) Tangenta: $y = e^a x - ae^a + e^a + \sqrt{2}$; normala: $y = -e^{-a}x + ae^{-a} + e^a + \sqrt{2}$.
   (b) Daljica je najkrajša pri $a = -\frac{1}{2}\ln 2$.

72. Denimo, da plavalec plava iz centra S proti točki T na zgornji stranici kvadrata, katerega levo krajišče označimo z D, desno pa s C. Najhitreje bo prispel, če bo $\angle STD = \frac{\pi}{3}$.

73. $T = \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}}, \ln\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)$.

74. Najhitreje bo prispel, če bo plul pod kotom $\phi = \arccos\frac{4}{13}$ glede na smer reke proti toku.

75. $\frac{1}{2}\ln 2$.

76. $\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2$.

77. (a) $\frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+10} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3} + C$.
   (b) $\frac{x^4+1}{x}\operatorname{arc\,tg} x^2 - 2x + C$.

78. $\pi + \ln 2$.

79. $\frac{\sqrt{21}\pi}{42} - \frac{1}{7}$.

80. $e^{\sin x}\left(x - \cos^{-1} x\right) + C$.

81. $\frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}$.

82. 2.

83. (a) $\frac{1}{9}\sin^3 x - \sin x + \left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\ln\sin x + C$.
   (b) $2\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

84. $\frac{17\pi-30}{256}$.

85. (a) $-\dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x} + C$.

   (b) $\frac{x^2}{2}\ln\left(1 + x^4\right) - x^2 + \operatorname{arc\,tg} x^2 + C$.

86. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \ln\dfrac{3 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + C$.

87. $-\frac{1}{9}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{1}{5}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + \frac{7}{45}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 13\right) + \frac{8}{45}\operatorname{arc\,tg}\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3} + C$.

88. $\dfrac{1}{b}\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b(b^2 - a^2)}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b\operatorname{tg}\frac{x}{2} + a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$.

89. $f(x) = -\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{arc\,tg} x$. Funkcija je liha, lokalna ekstrema: $\left(\pm\sqrt{3}, \mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Asimptoti: $y = -\frac{\pi}{2}$ (ko $x \to \infty$) in $y = \frac{\pi}{2}$ (ko $x \to -\infty$). Funkcija je padajoča na intervalu $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, sicer pa naraščajoča.

90. (a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}\operatorname{arc\,tg} x - \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.
   (b) Prevojna točka: $x = 0$.
   (c) Funkcija nima asimptote. Obstaja sicer $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$, vendar ne obstaja končna limita $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x$.

91. (b) $F(x) = \begin{cases} 2|x| & |x| \geq 1 \\ 1 + x^2 & |x| < 1 \end{cases}$.

92. Integrala konvergirata.

93. Integrala ne konvergirata.

94. (a) Integral konvergira za $n = 1$ in $n = 2$.
   (b) $I_1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{25}\ln 2 + \frac{9\pi}{100}$.

95. Integral konvergira.

96. Integral konvergira za $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.
   V primeru $a = 1/2$ dobimo $\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}\ln\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{21}\right)$.

97. $\frac{\pi a^2}{2}$.

98. (a) $b < 1$, $a > \frac{1}{b}$.
   (b) $p > 1$.

99. $1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)!$.

100. (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x}{2}\left(\sin\left(\log|x|\right) - \cos\left(\log|x|\right)\right) & x \neq 0 \end{cases}$.
   (b) Funkcija je zvezna in ni odvedljiva v točki 0.

101. $\frac{4\sqrt{2}}{9} + 6\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

102. $\frac{\pi}{2}$.

103. $\frac{6\sqrt{3}-5}{6\sqrt{3}+5}$.

104. $\frac{2\pi}{27}$.

105. $\pi\left(34+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)$.

106. 3π.

107. $\pi\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)$.

108. $\ln\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. Naloga je smiselna za $0<a\leq b$.

109. $\frac{11}{30}kha^2$.

110. Konvergira.

111. (a) Ne konvergira.
(b) Konvergira, vsota $\ln\frac{16}{13}$.

112. (a) Konvergira. Absolutno konvergira.
(b) Ne konvergira. Ne konvergira absolutno.

113. Konvergira. Ne konvergira absolutno.

114. $3\ln\frac{19}{16}$.

115. Vrsta konvergira za $x>1$. Vsota vrste za $x=2$ je 1.

116. (a) Vrsta konvergira za $c>b+1$.
(b) $\lim a_n=0$.

118. Vrsta konvergira za $x\in(-7,9)$.

119. (a) $R=1$.
(b) Naj bo $R_0=\frac{1}{\ln 9-\ln 4}$. Vrsta konvergira za $x\in(-R_0,R_0)$. Vsota: $\frac{x\ln\frac{9}{4}}{1-x\ln\frac{9}{4}}$.
(c) Neenakost velja za $n\geq 3$.

120. (c) Vrsta konvergira za $x\in[-1,1)$.

121. (a) 2.
(b) Vrsta konvergira za $x\in[-1,1]$.

122. $R=1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}k_nx^n=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}(1-x)}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right) & x<0\end{cases}$.

123. (a) $R=1$.
(b) $\dfrac{\pi^2}{6}$.

124. $\frac{1}{2}f''(0)$.

125. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$, vsota vrste 3.

126. (a) $h(x)=-\left(x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n-1)}x^n\right)$, vrsta konvergira za $x\in[-1,1)$.
(b) $-\frac{3}{2}$.

127. 1.

128. $f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}(x-2)+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k+2)(2k-3)!!}{3^{k+1}(2k)!!}(x-2)^k$, $R=3$.

129. (a) $R=1$.

130. (a) $\frac{1}{60}$.
(b) $\frac{1994!}{1988!}$.

131. $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, limita $-\frac{1}{3}$.

132. Limita obstaja za $n\geq 4$. Če je $n>4$, je enaka 0, če je $n=4$, pa $\frac{2}{3}$.

133. $f(x)=x+\dfrac{x^4}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{3k+1}$.

134. $P(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^7}{42}$.

135. $f(x)=0$, $x\in(0,1]$. Konvergenca ni enakomerna.

136. $g(x)=0$, $x\in(0,1]$. Konvergenca je enakomerna.

137. (b) Limitna funkcija: $f(x)=x$. Konvergenca je enakomerna.

138. $f(x)=0$. Konvergenca je enakomerna.

139. (a) Funkcijsko zaporedje konvergira za $x \leq 0$.

(b) Konvergenca je enakomerna le na intervalu $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$.

140. (a) Vrsta konvergira absolutno za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(0) = \frac{10}{9}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{100}{101}$.

141. Pri $x = 0$ je vsota vrste 0, sicer pa 1. Konvergenca ni enakomerna.

142. (a) Trditev ne velja. Veljala bi, če bi dodatno predpostavili enakomerno konvergenco.

(b) Trditev velja.

143. (a) Primer: $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ x - n & n \leq x \leq n+1 \\ 1 & x > n+1 \end{cases}$, $\quad f(x) = 0$.

144. (b) Primer: $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = x$.

145. Enačba krivulje v polarnih koordinatah $r = a\sqrt{\sin 4\varphi}$. Krivuljo dobimo pri $\varphi \in [\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}]$, $k = 0, 1, 2, 3$. Na sredi teh intervalov je r največji, na robovih pa enak 0.

146. (a) $\frac{5}{2}$.

(b) 0.

147. (a) $r = \dfrac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.

(c) $x\left(x^2 + y^2\right) - ay^2 = 0$.

148. (b) Iskana krogla je interval $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(c) Zaporedje a_n je konvergentno z limito 0.

149. (a) Preslikava d_1 ni metrika, zanjo ne velja trikotniška neenakost.

(b) Preslikava d_2 je metrika.

(c) Preslikava d_3 ni metrika, $d_3(-1, 1) = 0$.

150. (b) Krogla $K_2(0, 0)$ je odprt kvadrat z oglišči $(\pm 1, \pm 1)$.

151. Od treh preslikav je metrika edino preslikava iz točke (b).

152. (b) Krogla z radijem 2 vsebuje vsa realna števila, krogla z radijem $\frac{\pi}{4}$ pa je interval $(-1, 1)$.

153. (b) Prostor ni poln.

(c) Metriki sta ekvivalentni.

154. (b) Krogla $K_1(0)$ vsebuje vsa zaporedja iz X, krogla $K_{1/8}(0)$ pa zaporedja oblik $(0, 0, 0, x_4, x_5, \ldots)$ in $(0, 0, x_3, 0, 0, \ldots)$; $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 3, 4, \ldots$

155. (b) Množici A in B sta zaprti in nista odprti.

159. Velja trditev (a), ostali dve pa ne.

160. Veljata trditvi (a) in (d), preostali dve pa ne.

161. Trditev (a) velja, trditev (b) pa ne.

162. Trditev (a) velja, trditev (b) pa ne.

166. Preslikava f je skrčitev, vendar nima fiksne točke v M. To ni v protislovju z Banachovim skrčitvenim načelom, saj prostor (M, d) ni poln.

167. Taka podmnožica D ne obstaja.

168. Fiksna točka leži v podprostoru prostora $C[0, \pi]$, napetem na funkcije sin, cos in $x \mapsto e^x$.

169. $\mathrm{Int}\,(A) = \emptyset$, $\mathrm{Rob}\,(A) = A$, $\mathrm{Out}\,(A) = A^C$. Množica A je zaprta in ni odprta.

170. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq 1\}$.

(b) Nivojnica N_a je krivulja z enačbo $y = a(x-1)e^{-x}$.

(c) $-0{\cdot}98$.

171. (a) $D_g = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad 4b \leq a^2\}$.

(b) $\frac{599}{300}$.

172. Nivojnica N_0 je sestavljena iz treh premic, nivojnice N_a, $a \neq 0$, pa so krivulje $y = \frac{a}{x^2 - 1}$. Označimo: $T_1 = (-2, 1)$, $T_2 = (-1, 0)$, $T_3 = (1, 0)$ in $T_4 = (2, -1)$. Pogoju ustreza npr. pot, katere projekcija na ravnino $z = 0$ so daljice T_1T_2, T_2T_3 in T_3T_4.

173. (a) Naj bo $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0\}$. Tedaj je $D_f = \mathbb{R}^2 - A$.

(b) Nivojnice obstajajo za $a > 0$. V tem primeru je nivojnica N_a parabola z enačbo $a^4y^2 = 1 + 2a^2x$.

174. (b) Za vsak $a \in \mathbb{R}$ je nivojnica N_a parabola $y^2 = e^a(e^a - 2x)$.

175. (a) Nivojnica je del parabole $y^2 = 3(2x - 3)$, $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$. Premici $y = x$ in $y = -x$ razdelita ravnino na štiri kvadrante. Funkcija je definirana na levem in desnem kvadrantu vključno z robnima premicama. Prerez je krivulja $z = \mathrm{arc\,tg}(x - 2)$.

(b) $-0{\cdot}026$.

176. (a) Funkcija f ni zvezna v točki $(0, 0)$.

(b) $f_y(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0)$ pa ne obstaja.

(c) Nivojnice N_a, $a \neq 0$, so krožnice $(x - \frac{1}{2a})^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$. Nivojnica N_0 pa je ordinatna os.

177. $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^4 - 6x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Funkcija g je zvezna v točki $(0,0)$, funkcija $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ pa ne.

178. (a) Funkcija je zvezna v točki $(0,0)$.

(b) $f_y(0,0) = 0$, $f_x(0,0)$ pa ne obstaja.

179. $f(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 & x \geq 0 \\ (x+1)^2 + y^2 & x < 0 \end{cases}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.
Funkcija g je parcialno odvedljiva povsod, razen v točki $(0,0)$. Funkcija f je v vsaki točki parcialno odvedljiva na spremenljivko y, na spremenljivko x pa ni parcialno odvedljiva v točkah na ordinatni osi.

180. Večja ničla se zmanjša za približno 0'07.

181. (a) rz_r.

(b) 0.

(c) Funkcija iz točke (b) je odvisna le od φ in ni odvisna od r.

182. Višino morajo zmanjšati za 5 %.

183. Funkcija f ima v točki $(0,0)$ lokalni maksimum, v točki $(2,0)$ pa lokalni minimum.

184. Funkcija f ima lokalne ekstreme v točkah $(m\pi, n\pi)$, $m,n \in \mathbb{Z}$. Pri sodih m so to lokalni maksimumi, pri lihih m pa lokalni minimumi.

185. Funkcija g ima v točki $(\frac{27}{2}, 5)$ lokalni minimum.

186. (b) Funkcija ima dva lokalna maksimuma, in sicer v točkah $(\frac{1}{2}, 0)$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$.

187. (b) Za $a < 0$ ne obstaja $b \in \mathbb{R}$, da bi veljalo $F(a,b) = 0$. Za $a = 0$ je $F(a,b) = 0$ le, če je $b = 0$. Tedaj pa je $F_y(0,0) = 0$.

188. $z(x,y) = 2(x-1) + 3(x-1)^2 + y^2 + R_2(x,y)$.

189. $z(x,y) = 1 + \frac{1}{2}xy\sin 1 + R_2(x,y)$.

190. $z(x,y) = 2 - \frac{(x-1)}{8} - \frac{(y-1)}{8} - \frac{1}{256}(51(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + 51(y-1)^2) + R_2(x,y)$.

191. (b) $z(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(3x^2 + y^2) + R_2(x,y)$.

(c) V točki $(0,0)$ je lokalni maksimum.

193. Funkcija f zavzame največjo vrednost a^2 v točkah $(\pm a, 0)$. Funkcija f zavzame najmanjšo vrednost $-\frac{a^2}{8}$ v štirih točkah $\left(\pm\frac{a\sqrt{10}}{8}, \pm\frac{a\sqrt{6}}{8}\right)$.

194. Funkcija f zavzame največjo vrednost 2 v točkah $(0, \pm 1)$ in najmanjšo vrednost 1 v točkah $(2,0)$ in $(0,0)$. To so točke na kardioidi, ki so najbolj oz. najmanj oddaljene od točke $(1,0)$.

195. Vrednost je najmanjša za točki $\left(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. To sta točki na stožcu, ki sta najmanj oddaljeni od koordinatnega izhodišča.

196. Funkcija f zavzame najmanjšo vrednost 0 v točkah na sferi, kjer je ena od koordinat enaka 0. Funkcija f zavzame največjo vrednost $\frac{1}{3}$ v osmih točkah oblike $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

197. Trditev velja. Funkcija $f(x,y,z) = x+y+z$ doseže na danem elipsoidu največjo vrednost v točki $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$. Ta vrednost je $\frac{\sqrt{10}}{2}$, kar je manj od $\frac{8}{5}$.

198. Točka $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ leži na elipsoidu, zato je minimalna razdalja enaka 0. Med točkami elipsoida sta od dane točke najbolj oddaljeni točki $\left(\frac{1}{6}, 0, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, in sicer za $\frac{4}{3}$.

199. Od ravnine sta najbolj oddaljeni točki $(1,0,-2)$ in $(-1,0,2)$. Na elipsoidu obstajajo točke, ki ležijo v ravnini $z = 0$. Te so od ravnine seveda najmanj oddaljene.

200. Najdražji je polet do točke $(3,9,5)$. Najcenejši je polet do točke $(\sqrt{87}, 0, 0)$.

201. (a) $ob = 2x + 2y + \dfrac{2x}{\cos\alpha}$, $pl = 2xy + x^2 \operatorname{tg}\alpha$.

(b) Največjo ploščino ima petkotnik s podatki $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ploščina: $2 + \sqrt{3}$.

202. Koordinati se lahko razlikujeta za največ 2. To se zgodi pri točkah $(1,-1)$ in $(-1,1)$.

204. Najmanjšo vsoto robov ima piramida s podatki $a = 2$, $s = 2$, $v = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

205. Največji volumen ima piramida s podatki $a = 10$, $v = 10\sqrt{2}$.

206. Največji volumen ima stožec s podatki $r = 1$, $s = 3$, $v = 2\sqrt{2}$.

207. (a) $\operatorname{Re} f(z) = 2(x^2 + y^2 - 2)$, $\operatorname{Im} f(z) = 4x(y+3)$.

(b) Največjo imaginarno komponento $7\sqrt{7}$ ima $f(z)$ pri $z = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + i)$, najmanjšo $-7\sqrt{7}$ pa pri $z = \frac{1}{2}(-\sqrt{7} + i)$.

208. Od dane točke sta najbolj oddaljeni točki $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, najmanj pa točki $(0, \pm 1, 1)$.

209. Od dane točke sta najbolj oddaljeni točki $(1, 0, \pm\sqrt{2})$, najmanj pa točki $(\sqrt{2}, \pm 1, 0)$.

210. Funkcija ima lokalne ekstreme v točkah $(0,1)$, $(0,-1)$ (lokalni maksimum) in $(0,0)$ (lokalni minimum). V navedenih točkah zavzame funkcija tudi največjo in najmanjšo vrednost na danem krogu.

211. Funkcija f zavzame največjo vrednost $6 + \frac{8}{3}\sqrt{6}$ v točki $(2, -\frac{2}{3}\sqrt{6})$ in najmanjšo vrednost -1 v točki $(1,1)$.

212. Funkcija ima v točki $(4,4)$ lokalni maksimum, ki je tudi globalni maksimum na danem pravokotniku. Globalni minimum na pravokotniku je v točki $(0,16)$.

213. Funkcija ima lokalni minimum v točki $(1,1)$. To je tudi globalni minimum na D. Globalnega maksimuma ni, ker funcija na množici D ni navzgor omejena.

214. Definicijsko območje je trikotnik z ogliščí $(0,0)$, $(5,0)$ in $(0,5)$ brez robov. Funkcija ima v točki $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ lokalni maksimum, ki je tudi globalni maksimum na D. Funkcija na D ni navzdol omejena.

215. $I(m) = \pi \ln \frac{1}{2}(m+1)$.

217. 0.

218. $\dfrac{\pi}{48}$.

219. (a) $\dfrac{\pi}{2}$.

(b) $I'(a) = -\sqrt{\pi} e^{-a^2}$.

220. $F(t) = 2\Gamma(2t+2)$. Enačaj velja pri $t = 2$.

221. (a) $\dfrac{5\pi}{72}$.

(b) $n = 995$.

222. $\dfrac{a(a+1)\pi}{2\sin(a\pi)}$.

223. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

224. (a) $\dfrac{12!}{2^{13}} = \dfrac{467\,775}{8}$.

(b) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

225. (a) $D_f = (0,1)$, ničla $t = \frac{1}{2}$.

(b) 1.

226. Integracijsko območje je del kroga $x^2 + y^2 \le 9$ nad zgornjim krakom hiperbole $y^2 - x^2 = 1$. Drugi dvakratni integral:

$$\int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx + \int_{\sqrt{5}}^{3} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

227. Integracijsko območje je del kroga $x^2 + y^2 \le 9$ nad abscisno osjo in desno od desnega kraka hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Drugi dvakratni integral in integral v polarnih koordinatah:

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y^2+1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,, \qquad \int_0^{\arcsin\frac{2}{3}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}^{3} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,.$$

228. Meje: $2\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{8\sin\varphi} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\sqrt{3}} r\,dr\right)$. Rezultat: $\dfrac{56\pi}{3} - 8\sqrt{3}$.

229. Meje: $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi} r\,dr$. Rezultat: $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{18}$.

230. Integracijsko območje je krožni izsek kroga $x^2 + y^2 \le 5$ med deloma premic $x = 0$ in $y = 2x$ pod abscisno osjo. Drugi dvakratni integral in integral v polarnih koordinatah:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{5-x^2}}^{2x} f(x,y)\,dy\,, \qquad \int_{\pi+\operatorname{arc\,tg} 2}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,.$$

231. (a) Dvakratna integrala:

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4ax-x^2}} y\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2}} y\,dy\,, \qquad \int_0^{\sqrt{3}a} dy \int_{2a-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} y\,dx\,.$$

(b) Integral v polarnih koordinatah:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2a} r^2 \sin\varphi\,dr + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\,dr\,.$$

(c) $\dfrac{5a^3}{3}$.

232. Integracijsko območje je del kroga $x^2+y^2 \leq 36$ v drugem kvadrantu, ki leži zunaj kroga $(x+3)^2+y^2 \leq 9$. Drugi dvakratni integral:

$$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{36-y^2}}^{-3-\sqrt{9-y^2}} xy\,dx + \int_0^3 dy \int_{-3+\sqrt{9-y^2}}^{0} xy\,dx + \int_3^6 dy \int_{-\sqrt{36-y^2}}^{0} xy\,dx\,.$$

Integral v polarnih koordinatah:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_{-6\cos\varphi}^{6} r^3 \sin\varphi\cos\varphi\,dr\,.$$

Rezultat: -108.

233. Naj bo $h(\varphi) = 4\sqrt{3}\sin\varphi - 4\sqrt{3\sin^2\varphi - 2}$. Integral v polarnih koordinatah:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{h(\varphi)}^{4} \sin\varphi\cos\varphi\,dr\,.$$

Rezultat: $\dfrac{43-24\sqrt{3}}{18}$.

234. Drugi dvakratni integral:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\operatorname{arc\,tg} x} \frac{4}{1+x^2}\,dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{1+x^2}\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}(4-x^2)} \frac{4}{1+x^2}\,dy\,.$$

Rezultat: $5\pi \operatorname{arc\,tg} 2 - \pi(2-\sqrt{3}) - \dfrac{35\pi^2}{24}$.

235. $-\dfrac{44}{81}$.

236. $\dfrac{2}{3}$.

237. 4.

238. (b) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} dx \int_{x^{2/3}}^{2^{1/3}x} xy\,dy + \int_1^2 dx \int_x^{2^{1/3}x^{2/3}} xy\,dy$.

(c) $\dfrac{3}{128}(16-2^{2/3})$.

239. $\dfrac{1}{8}$.

240. Meje: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{r^2+1} \frac{r\,dz}{z^2+1}$. Rezultat: $\dfrac{\pi}{4}\left(16\operatorname{arc\,tg}4 - \pi + 2\ln\dfrac{2}{17}\right)$.

241. Meje: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{\cos\varphi}} dr \int_0^{r\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,dz$. Rezultat: $\dfrac{3\pi}{2}$.

242. Meje: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} dr \int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r(r\cos\varphi + z^2)\,dz$. Rezultat: $4\pi\left(\dfrac{81}{5} - \dfrac{5\sqrt{5}}{3}\right)$.

243. Meje: $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^{1-y} dz + \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^{1-y} dz + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_0^{1-x} dz$. Rezultat: $\dfrac{31}{60}$.

244. Meje: $\displaystyle 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin 2\varphi} dr \int_{r^2}^{(4r^2\sin\varphi\cos\varphi)^{2/3}} rz^2 dz$. Rezultat: $\dfrac{35\pi}{18}$.

245. Meje: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} dr \int_{r-1}^{r^2/4} r\,dz$. Rezultat: $\dfrac{2\pi}{3}$.

246. Meje: $\displaystyle 8\int_0^{a} dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz$. Rezultat: $\dfrac{8}{3}\left(ab\sqrt{a^2-b^2} + a^3 \arcsin\dfrac{b}{a}\right)$.

247. Meje: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \frac{rz\,dz}{(R^2-r^2)^{3/2}(R^2+r^2)^{1/2}}$. Rezultat: $\dfrac{\pi^2}{32}$.

248. Meje: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{\cos\varphi}} dr \int_0^{r^2} r\,dz$. Rezultat: 2π.

249. Meje: $\displaystyle 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r^2\cos\theta\,dr$. Rezultat: $\dfrac{\pi^2}{4}$.

250. Meje: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[8]{\cos\varphi\sin^3\varphi}} dr \int\limits_0^{r^2\cos\varphi\sin\varphi} r\,dz$. Rezultat: $\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{256}$.

251. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2} r^2 dr$. Rezultat: $\dfrac{16\pi^2}{9}$.

252. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{\frac{3}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} r^3\cos\theta\,dr$. Rezultat: $\dfrac{\pi}{10}\left(391 - 192\sqrt{3}\right)$.

253. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} dr \int\limits_1^{\sqrt{2}} r f(\varphi,r,z)\,dz + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dr \int\limits_1^{\sqrt{4-r^2}} r f(\varphi,r,z)\,dz$. Ko računamo volumen, je $f = 1$, ko računamo integral $\iiint z\,dV$, pa je $f = z$. Rezultat: volumen $V = \dfrac{\pi}{3}(10\sqrt{2} - 11)$, težišče $T = (0,0,z_T)$, $z_T = \dfrac{15}{316}(10\sqrt{2} + 11)$.

254. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta}} r^2\cos\theta f(\varphi,\theta,r)\,dr$. Ko računamo volumen, je $f = 1$, ko računamo integral $\iiint z\,dV$, pa je $f = r\sin\theta$. Rezultat: volumen $V = \dfrac{\pi}{3}a^3$, težišče $T = (0,0,z_T)$, $z_T = \dfrac{9a}{20}$.

255. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{2\sqrt{3}}^{4\sin\theta} r^2\cos\theta f(\varphi,\theta,r)\,dr$. Ko računamo volumen, je $f = 1$, ko računamo integral $\iiint z\,dV$, pa je $f = r\sin\theta$. Rezultat: volumen $V = \dfrac{2\pi}{3}(43 - 24\sqrt{3})$, težišče $T = (0,0,z_T)$, $z_T = \dfrac{5}{121}(43 + 24\sqrt{3})$.

256. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{1/\sin\theta}^{2} r^4\cos^3\theta(1 + r^2\sin^2\theta)\,dr$. Rezultat: $\dfrac{494\pi}{105}$.

257. Meje: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{h/\sin\theta} r^4\rho\cos\theta(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta)\,dr$.

Lahko tudi: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{z} \rho r(r^2\sin^2\varphi + z^2)\,dr$. Rezultat: $\dfrac{3Mh^2}{4}$.

258. Točki $(1,-1,0)$ je najbližja točka $(0,0,0)$.

259. Krivulja je ravninska pri vrednosti $a = -2$. V tem primeru leži v ravnini $2x - 2y - z = 1$.

260. (a) $\dfrac{2x - \sqrt{3}a}{2} = \dfrac{2y - a}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{2z - a}{2\sqrt{3}}$.

(b) Pogoju zadoščata točki $(0,-a,2a)$ in $(\frac{4}{5}a, \frac{3}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

261. $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$.

262. (a) 10.

(b) Kot je enak $\dfrac{\pi}{4}$.

263. (a) Projekcija na ravnino $z = 0$ je desni krak hiperbole $x^2 - y^2 = 4$. Krivulja poteka skozi točko $(2,0,0)$ in se nad zgornjo polovico hiperbole vzpenja, nad spodnjo pa spušča.

(b) Smer tangente: $(0,1,1)$, smer binormale: $(0,-1,1)$, smer glavne normale: $(1,0,0)$, pritisnjena ravnina: $y - z = 0$.

264. (a) Projekcija na ravnino $z = 0$ je krivulja $y = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, projekcija na ravnino $y = 0$ je krivulja $z = -x^4 + x^2 + 8$, $x \in \mathbb{R}$, projekcija na ravnino $x = 0$ pa krivulja $z = -y^2 - y + 8$, $y \geq -1$.

(c) $x = 0$, $z = y + 9$.

265. (a) $4\sqrt{2}$.

(b) $x - 2\sqrt{2}y + 3z = 4\sqrt{2}$.

(c) Edina taka točka je $(0,0,0)$.

266. (b) Krivulja leži v ravnini $z = x$.

(c) Pogoju ustreza edino točka $(0,1,0)$.

267. Fleksijska ukrivljenost je največja v točki $(-1,0,0)$ in najmanjša v točki $(-4,-3,9)$.

268. (a) $z = (x^2 + y^2)^{-2}$. Ploskev dobimo, če krivuljo $z = x^{-4}$ zavrtimo okrog osi z.

(b) Najbližje koordinatnemu izhodišču so točke $\vec{r}(\sqrt[5]{2}, v)$, $v \in [0, 2\pi]$, tj. točke s krožnice $x^2 + y^2 = \sqrt[5]{4}$, $z = 2^{-4/5}$.

269. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\right)$ in $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5} + 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\right)$.

270. Ploskev je rotacijski paraboloid z enačbo $x = y^2 + z^2 + 1$. Pogoju ustrezajo točke na krožnici $x = 2$; $y^2 + z^2 = 1$.

271. Kot: $\frac{\pi}{4}$. Isti kot tvori os z s ploskovno normalo v točkah na krožnici $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{4}$.

272. (a) Eksplicitna enačba ploskve: $z = \dfrac{x^2}{4} + y^2$.
(b) Koordinatni krivulji se sekata pod pravim kotom.

273. (c) Pogoju ustreza edino točka $(0,0,0)$.

274. Glavni ukrivljenosti sta $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{8}$ in $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, glavni krivinski smeri pa $s_1 = (1,0,-1)$ in $s_2 = (0,1,0)$.

275. Tangentna ravnina: $z = 0$, glavni ukrivljenosti: $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$, glavni krivinski smeri: $s_1 = (1,1,0)$ in $s_2 = (1,-1,0)$.

276. (b) Na ploskvi obstajajo tudi parabolične točke, na primer $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 1\right)$, pa tudi hiperbolične točke, na primer $(1, 0, \sin 1)$.

277. (a) Definicijsko območje je unija kvadratov

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \times \left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right), \qquad k, m \in \mathbb{Z}.$$

(b) Funkcija ima lokalne ekstreme v točkah $(2k\pi, 2m\pi)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Če je $a > 0$, so to lokalni, pa tudi globalni maksimumi, sicer pa minimumi.

278. -2π.

279. 4π.

280. (a) $(1,0,8)$.
(b) Takih točk ni.
(c) 6.

281. (a) Taka točka je ena sama, in sicer $T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{5}{2}\right)$.
(b) -4π.

282. $\dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

283. $\dfrac{\pi}{60}\left(731\sqrt{17} + 4421\right) = \dfrac{\pi}{60}\left(731\sqrt{17} - 19\right) + 70\pi + 4\pi$.

284. $2\pi \operatorname{arc\,tg} \dfrac{h}{a}$.

285. (a) $\dfrac{64\pi}{3}$.
(b) Glavni ukrivljenosti sta $\lambda_1 = \frac{-e}{(1+e^2)^{3/2}}$ in $\lambda_2 = \frac{1}{e(1+e^2)^{1/2}}$, glavni krivinski smeri pa $s_1 = (1,0,e)$ in $s_2 = (0,1,0)$.

286. (a) Eksplicitna enačba: $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$. Ploskev dobimo, če graf funkcije $z = \cos x$ zavrtimo okrog osi z.
(b) $\dfrac{\pi^3}{4}$.

287. (a) $\dfrac{\pi\sqrt{37}}{4}$.
(b) -7π.

288. $\pi^2 R^3$.

289. $\vec{F} = (0,0,F_z)$, $F_z = \dfrac{8}{75}\pi e_1 \rho \kappa (25 - 13\sqrt{5})$.

290. $-\dfrac{19\pi}{8}$.

291. $\dfrac{64}{3}$.

292. 8π.

293. π.

294. -4π.

295. 2π.

296. 0.

297. 24π.

298. 0.

299. 2π.

300. 18π.

301. $\dfrac{\pi}{2}$.

302. $\dfrac{12\pi}{5}$.

303. $\dfrac{1}{6}$.

304. $-\dfrac{8\pi}{3}$.

305. $\dfrac{4}{3}\pi a(3b^2+1)$.

306. $\dfrac{\pi}{4}$.

307. 8π.

308. $\dfrac{243\pi}{2}$.

309. 2π.

310. $\dfrac{\pi}{4}$.

311. 16π.

313. (b) Integral doseže največjo vrednost 1 v točkah $(\pm 1, 0, 0)$, najmanjšo vrednost $-\frac{1}{2}$ pa v točkah $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

314. $y = 2x - 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.

315. $y = x + \sin 2x$.

316. $x(t) = -\frac{1}{2} - 6t + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{8t}$, $\quad y(t) = \frac{3}{4} + 3t + \frac{9}{4}\mathrm{e}^{8t}$.

317. $x(t) = -2t\mathrm{e}^{t}$, $\quad y(t) = (1 - 2t)\mathrm{e}^{t}$.

318. $x(t) = -2\sin t - \cos t$, $\quad y(t) = \sin t + 3\cos t$.

319. $x(t) = -8\mathrm{e}^{t} t^{\frac{5}{2}}$, $\quad y(t) = -8\mathrm{e}^{t} t^{\frac{5}{2}} + 10\mathrm{e}^{t} t^{\frac{3}{2}}$.

320. $\dfrac{2}{z^3(z-1)}$.

321. $y(t) = \sin t$.

322. $y(x) = \cos x$.

323. $x(t) = \mathrm{e}^{t} + \sin t$, $\quad y(t) = \mathrm{e}^{t} - \sin t$.

324. $x(t) = 2\mathrm{e}^{-t}(1 - t)$, $\quad y(t) = t\mathrm{e}^{-t}$.

325. $k(m, n) = \dfrac{(mn-1)!}{((m-1)!)^n}$.

326. $f(z) = (2 + \mathrm{i})(z^2 + C)$, $C \in \mathbb{R}$.

327. $f(z) = z^2(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) + \mathrm{i}$. Funkcija f preslika dano množico v del premice $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, kjer je $x < 0$.

328. (a) Funkcija u_k je realni del holomorfne funkcije za $k = \pm 1$.
(b) $f(z) = (1 + \mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} - \mathrm{i}$.

329. (b) V dano točko se preslikajo točke $z_k = -\mathrm{i}\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $w_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \mathrm{i}\ln\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

330. (a) Iskane točke so $z_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 2 + k\pi + \mathrm{i}\frac{1}{4}\ln 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Na premici obstajata dve rešitvi prve enačbe: $z_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\ln\sqrt{3}$. Nobena točka na premici ni rešitev druge enačbe.

331. (a) Naj bo $A = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) = 0,\ \mathrm{Re}(z) \in [(2k-1)\pi, 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}\}$ in $B = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Tedaj je $D_f = \mathbb{C} - (A \cup B)$.
(b) $f(\mathrm{i}\ln 2) = \ln\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.
(c) Trditev ne drži; primer $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ln 2$.

332. Desna vrsta je (celo absolutno) konvergentna, leva pa ni konvergentna.

333. (a) Vrsta konvergira le pri $r = 0$.
(b) Vrsta konvergira za $r < 1$.
(c) Vrsta konvergira za $r > 1$.

334. (a) $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left((-1)^k - 3^{-(k+1)}\right)$.
(b) $f(z) = \dfrac{1}{z-3} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-3)^k}{4^{k+1}}$. Prva vrsta konvergira na krogu $|z| < 1$, druga pa na kolobarju $0 < |z-3| < 4$.

335. (a) $\pi\,\mathrm{sh}\,1$.
(b) $\dfrac{\pi\mathrm{i}}{60}$.

336. (a) Pol tretje stopnje.
(b) $-\dfrac{\pi\mathrm{i}}{3}$.

337. $\dfrac{\pi\mathrm{i}}{3}$.

338. (a) $\dfrac{4\pi\mathrm{i}}{3}$.
(b) $\dfrac{-121\pi\mathrm{i}}{360}$.

339. (a) $\dfrac{8\pi\mathrm{i}}{25}$.
(b) $\dfrac{7\pi\mathrm{i}}{20}$.

340. (a) Pol tretje stopnje.
(b) Prvi integral je enak 0, preostala dva pa $\dfrac{-\pi^4\mathrm{i}}{192}$.

341. (a) $\dfrac{47\pi\mathrm{i}}{20}$.

(b) 0.

342. 0.

343. (a) $-\frac{\pi}{20}(3+31\mathrm{i})$.
(b) 0.

344. $3\pi\mathrm{i}$.

345. $-\frac{16}{3}\pi\mathrm{i}$.

346. (a) $-\pi 2^{-4n+3}\binom{2n-2}{n-1}$.
(b) $(-1)^{[(n+1)/2]}\frac{\sqrt{2}\pi\mathrm{i}}{(n+1)!}$; $[x]$ označuje celi del števila x.

347. Ne glede na r je integral vedno enak 0.

348. (a) $\dfrac{\cos 1}{z+1}$.
(b) $2\pi\mathrm{i}(1-\cos 1)$.
(c) Krivulji K_1 in K_2 obstajata. Prva obkroži obe singularnosti, druga pa nobene. Krivulja K_3 ne obstaja.

349. (a) 0.
(b) $S=\mathbb{Z}$. $\mathrm{Res}(f,0)=0$; $\mathrm{Res}(f,n)=\frac{(-1)^n}{\pi n\mathrm{i}}$, $n\neq 0$.

350. (a) $\dfrac{\mathrm{e}}{z}$.
(b) $f(z)=-\mathrm{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(z+1)^k-\sum_{k=1}^{\infty}v_k(z+1)^{-k}$. Pri tem je $v_k=\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!}$.
(c) Npr. krožnica $|z|=2$.

351. $\dfrac{\pi}{a^2}$.

352. $\dfrac{\pi}{9}$.

353. $\dfrac{5\pi}{12}$.

354. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[4]{2}\pi\sin\dfrac{\pi}{8}$.

355. $\dfrac{3\pi}{45}$.

356. $\dfrac{2\pi}{3}$.

357. 0. $\Phi(x)=0$, $|x|<1$.

358. $\dfrac{\pi}{7\sin\frac{2\pi}{7}}$.

359. (a) $\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}z\geq\frac{1}{2}\}$, polravnina.
(b) $\{z\in\mathbb{C},\ |z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$, krožnica.

360. (a) Na primer $f(z)=\dfrac{4(\mathrm{i}z-1)}{z+2\mathrm{i}}$.
(b) $\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,z=\mathrm{Re}\,z\}$.

361. Na primer $f(z)=\dfrac{-z}{z-2}$.

362. (a) Na primer $f(z)=\dfrac{(1-\mathrm{i})z}{z-2\mathrm{i}}$.
(b) Na primer $f(z)=\dfrac{-2z}{z-2}$.

363. (a) Obstaja, na primer $f(z)=\frac{1}{2}(z-1)$.
(b) Obstaja, na primer $f(z)=\frac{2z}{z+3}$.
(c) Ne obstaja.

364. $f(A)=\{z\in\mathbb{C},\ -\frac{3\pi}{4}\leq\mathrm{Arg}\,z\leq-\frac{\pi}{4}\}$, $g(A)=\{z\in\mathbb{C},\ -\frac{\pi}{2}\leq\mathrm{Arg}\,z\leq\frac{\pi}{2}\}$.

365. (a) $f_1(D_1)=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)<0,\ \mathrm{Im}(z)<2\}$.
(b) $f_2(D_2)=\{z=\frac{5}{3}\sin\phi+\mathrm{i}\frac{4}{3}\cos\phi;\ \phi\in[0,\pi]\}$. To je del elipse $\frac{9x^2}{25}+\frac{9y^2}{16}=1$ v polravnini $x\geq 0$.
(c) $f_3(D_3)=\{z=x+\mathrm{i}\frac{\pi}{6},\ x\geq\ln 2\}$.

366. $f(D)=\{z\in\mathbb{C};\ |z-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2}\}$. To je krožnica s središčem v točki $\frac{3}{2}$ in radijem $\frac{1}{2}$. $g(D)=\{z=2\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi;\ \phi\in[0,2\pi]\}$. To je elipsa $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ s polosema 2 in 1.

367. (a) $f_1(D_1)=\{z=x+\mathrm{i}y;\ y=\frac{1}{2}x\}$, premica.
(b) $f_2(D_2)=\{z=1+\mathrm{i}\phi;\ \phi\in(0,\pi)\}$, daljica.
(c) $f_3(D_3)=\{-\frac{5}{4}\}$, točka.

368. (a) Na primer $\dfrac{(1+\mathrm{i})(z-\sqrt{2})}{z+\sqrt{2}}$.
(b) Na primer $\dfrac{z-1+\mathrm{i}}{z+1-\mathrm{i}}$.
(c) Množica se preslika v unijo premic $\mathrm{Im}(z)=\frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{Im}(z)=-\frac{\pi}{4}$ in daljice $\mathrm{Re}(z)=\ln\sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z)\in(-\pi,\pi)$.

369. $y=a^{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$.

370. $y = -7x$.

371. $y = \frac{1}{9}(3x^2 \ln x - x^2 + \frac{1}{x})$.

372. $y = (1 - x + \ln x)^{-1}$.

373. $y = \left[\frac{1}{6}(2x + 1 + 5e^{2x})\right]^{\frac{2}{3}}$.

374. $y_1 = x$, $y_2 = xe^{2\operatorname{arc\,tg}(\pi x/4)}$.

375. $y = e^x - \frac{1}{x+1}$.

376. $y = \left(x - 3 + Ce^{-\frac{1}{3}x}\right)^3$.

377. $y = \sqrt[3]{\sin x + \cos x}$.

378. $y = x^{-2}(2e^x + 1 - 2e)^{-\frac{1}{2}}$.

379. $y = \sqrt[3]{3x^2(x-1)}$.

380. $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{3}{x} + \frac{4}{-x+Cx^5}$.

381. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+Cx^{2/3}}$.

382. $y = (\frac{4}{15})^{\frac{2}{3}}x(\ln 4 - \ln x)^{-\frac{2}{3}}$.

383. $y = -1$, $y = -1 + \frac{x+1}{c - \frac{1}{2}(x+1)^2}$.

384. $y = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - 8x}}{4x^2}$.

385. $y = x\sqrt{e^{2x} - 1}$.

386. $x^2 + y^2 + x^{-1}y^{-1} = 1$.

387. $y = -\sin x - \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{2}{3}x^3 + 1}$.

388. Splošna rešitev:

$$x(t) = \frac{2t^3 - 3t^2}{(t-1)^2} + \frac{c}{(t-1)^2}, \qquad y(t) = \frac{t^4 - 2t^3}{(t-1)^2} + \frac{ct^2}{(t-1)^2};$$

singularni rešitvi: $y = 0$, $y = x - 2$.

389. $f(x) = e^{\sqrt{1 - 2\sin x}}$.

390. $f(x) = Cx^2$.

391. $f(x) = Cx^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

392. (a) $v(t) = \frac{F_0}{k} + (v_0 - \frac{F_0}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$.
(b) $s(t) = \frac{F_0}{k}t + \frac{m}{k}(v_0 - \frac{F_0}{k})(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$.
(c) Čoln lahko prepluje razdaljo $\frac{mv_0}{k}$.

393. $y = \frac{1}{2} + \frac{C}{\cos^2 x}$.

394. (a) $v(t) = \dfrac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)}{1 + v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)}$.
(b) $t = \sqrt{\frac{m}{gk}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)$.

395. $y = A(x^2 + 1) + B(x + (x^2 + 1)\operatorname{arc\,tg} x)$.

396. $y = e^{-x}(Ax^2 + Bx^{-1})$.

397. (a) $y = e^x$.
(b) $y = Ae^x + B\ln x\, e^x$.

398. $y = A(1 + \frac{1}{x}) + B(x + 1 - \frac{1}{x} - 2(1 + \frac{1}{x})\ln(x + 1))$.

399. $y = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2-1}$.

400. $y = A(2x + 1) + Be^{2x}$.

401. $y = \frac{1}{169}e^x(5\sin 2x - 12\cos 2x) + Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.

402. $y = \frac{1}{2}(x^2 + \cos x + \sin x) + A + Be^{-x} + Ce^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + De^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

403. (a) $y = \frac{1}{8}x\sin 2x - \frac{1}{24}\cos 4x + A\cos 2x + B\sin 2x$.
(b) $x^2y'' + 76xy' - 19 \cdot 94y = 0$.

404. $y = \frac{1}{12}xe^{2x} - \frac{1}{157}e^{2x}(6\sin x + 11\cos x) + Ae^{2x} + Be^{-x}\cos\sqrt{3}x + Ce^{-x}\sin\sqrt{3}x$.

405. (a) $y = \frac{1}{20}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$.
(b) $y = \frac{1}{2}x\ln^2 x + Ax + Bx\ln x$.

406. $y = \cos x - \sin x + e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$. Če izberemo $A = -1$, $B = 1$, dobimo rešitev $y = (\cos x - \sin x)(1 + e^{2x})$, ki ima v točki $(0, 2)$ lokalni maksimum.

407. (a) $f(x) = \frac{C}{x^2}$. V primeru, da je $C = 1$, je rešitev enačbe $y = Ax + Bx\ln x$, sicer pa $y = Ax^C + Bx$.
(b) $y = Ax + B(x^2 - 1)$.

408. (a) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^x + Ae^{-2x} + Be^{-x}$.
(b) $e^{-2x}(e^x + 1)\ln(e^x + 1) + Ae^{-2x} + Be^{-x}$.

409. $y = x \ln x \mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^x$.

410. $y = A\dfrac{1}{1+x^2} + B\dfrac{x}{1+x^2}$.

411. $y = A(1-2x^2) + B\left(x - \dfrac{x^3}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^{2k+1}\right)$.

412. $y = Ax^{-1}\mathrm{e}^x + B\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k}{(2k+3)!!} x^{k+\frac{1}{2}}$.

413. (a) $y = x^{-2}(A\cos x + B\sin x)$.

(b) Nova iskana funkcija $z(x)$ je s staro povezana takole: $y(x) = x^{-2}z(x)$.

414. $y = x(A\cos x + B\sin x)$.

415. $y = x^2(A\cos x + B\sin x)$.

416. $y = x^{-1}(A\,\mathrm{sh}\,x + B\,\mathrm{ch}\,x)$ ali $y = x^{-1}(C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x})$.

417. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(A\cos\dfrac{x^2}{4} + B\sin\dfrac{x^2}{4}\right)$.

418. $y = A\sin x^2 + B\cos x^2$.

419. (a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{4k}}{4^{2k}(k!)^2}$.

(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} J_0\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

(c) $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}J_0(\frac{1}{2}x^2) + x^{\frac{1}{2}}J_1(\frac{1}{2}x^2)$.

(d) $xJ_0(\frac{1}{2}x^2)y' + \left(\frac{1}{2}J_0(\frac{1}{2}x^2) - x^2J_1(\frac{1}{2}x^2)\right)y = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}}$.

420. $x(t) = -4\mathrm{e}^{-2t} + 5\mathrm{e}^{4t}$, $\quad y(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{4t}$.

421. $x(t) = -\mathrm{e}^{3t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$, $\quad y(t) = \mathrm{e}^{3t}((A+B)\cos 2t + (B-A)\sin 2t)$.

422. $x(t) = -A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} + C\mathrm{e}^{4t}$, $\quad y(t) = 5A\mathrm{e}^t + 3B\mathrm{e}^{-t} - 2C\mathrm{e}^{4t}$,
$z(t) = 5A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} + C\mathrm{e}^{4t}$.

423. $x(t) = -6t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t - 4 + 3A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$, $\qquad y(t) = -2t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t - 2 + A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$.

424. $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$, $\quad y(t) = 6t^2 - 2t$.

425. $\tilde{f}(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$; vsota vrste: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

426. $\tilde{f}(x) = \pi - \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + 2\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$.

427. $\tilde{f}(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\cos x + 2\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2-1}\cos kx$; vsota vrste $\frac{1}{4}$.

428. $\tilde{f}(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{9k^2-1}\cos kx$; vsota vrste $\dfrac{9-\pi\sqrt{3}}{18}$.

429. $\tilde{f}(x) = \dfrac{8\pi^4}{15} + 48\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^4}\cos kx$; vsota vrste: $\dfrac{7\pi^4}{720}$.

430. $\tilde{f}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}\sin kx$.

431. $\tilde{f}(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$.

432. $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x + \dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x$.

433. $u(x,t) = u_0\left(1 + \cos\dfrac{\pi x}{2a}\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2\pi^2 t}{4a^2}}\right)$.

434. $u(x,t) = 1 - \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{16a^2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2c^2t}{4a^2}}}{(2k+1)((2k+1)^2\pi^2c^2 - 4a^2)}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2a}$.

435. $u(x,t) = \left(\dfrac{2x}{a} - 1\right)\sin\omega t + \dfrac{2\omega^2a^2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\omega\sin\frac{ck\pi t}{a} - \sin\omega t}{k(4c^2k^2\pi^2 - a^2\omega^2)}\sin\dfrac{2k\pi x}{a}$.

436. $u(x,t) = -\dfrac{4c^2d^2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-\gamma_k t} + ((1+\gamma_k)t - 1)\mathrm{e}^t}{(2k+1)(1+\gamma_k)}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{d}$. Pri tem je
$\gamma_k = \dfrac{c^2\pi^2(2k+1)^2}{d^2}$.

437. $Y_1 \cap Y_2 = \{p(x) = (x-1)^2 q(x);\ q \in X\}$. To so polinomi, ki imajo v točki 1 ničlo stopnje, večje ali enake 2.

438. Množica A ni linearni podprostor. $B \cap C = \{f \in X,\ f(0) = f(1) = 0\}$, $B + C = X$.

439. (a) $S \cap T = \{0\}$, $S + T = \{f \in X,\ f(1) = 0\}$.

(b) Trditev velja.

440. (a) $X_1 + X_2 = X$.

441. Obe trditvi veljata.

442. V kompleksnih Hilbertovih prostorih iz predpostavk sledi le $\mathrm{Re}(x,y) = 0$. Trditev torej ne velja.

443. Nobena od trditev ne velja.

444. V primeru (a) trditev še vedno velja, v primeru (b) pa ne.

445. Za poljubni podmnožici velja prva formula. V prostoru $\mathbb{R}^2$ izberimo množici $A = \{(1,0)\}$, $B = \{(0,1)\}$. Zanju druga formula ne velja.

Literatura

[1] G. N. Berman: *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza*, Nauka, Moskva 1969.

[2] M. A. Evgrafov, K. A. Bežanov, J. V. Sidorov, M. V. Fedorjuk in M. I. Šabunin: *Sbornik zadač po teorii analitičeskih funkcij*, Nauka, Moskva 1972.

[3] Fihtengolc: *Kurs matematičeskogo analiza I, II, III*, Nauka, Moskva 1962.

[4] A. F. Filippov: *Sbornik zadač po differencial'nym uravnenijam*, Nauka, Moskva 1970.

[5] M. H. Protter in C. B. Morrey: *Intermediate Calculus*, Springer Verlag, New York 1985.

[6] M. P. Ušćumlić in P. M. Miličić: *Zbirka zadataka iz više matematike I, II*, Naučna knjiga, Beograd 1984.

Nekatere sorodne zbirke v slovenščini

[7] M. Dobovišek, M. Hladnik in M. Omladič: *Rešene naloge iz analize I*, DMFA, Ljubljana 1979.

[8] M. Dobovišek: *Rešene naloge iz analize II*, DMFA, Ljubljana 1996.

[9] M. Hladnik: *Naloge in problemi iz matematične analize*, DMFA, Ljubljana 1988.

[10] P. Mizori - Oblak: *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, I, II, III*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1989.

[11] N. Mramor - Kosta in B. Jurčič Zlobec: *Zbirka vaj iz matematike II*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana 1991.

[12] P. Petek: *Vaje iz diferencialnih enačb*, DMFA, Ljubljana 1979.

IZBRANA POGLAVJA IZ MATEMATIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Izdajajo: Oddelek za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

6. Dobovišek M., Hladnik M. in Omladič M., Rešene naloge iz analize I, 1972, 1973, 1975/76, 1977, 1979, 1982, 1983, 1987, 1992, 1996, 2003
9. Suhadolc A., Sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru, 1977, 1979, 1993
11. Suhadolc A., Linearni topološki prostori, 1. del, 1979
16. Hladnik M., Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere, 1980, 1985
20. Dobovišek M., Kobal D. in Magajna B., Naloge iz algebre I, 1983, 1984, 1987, 1990, 1992, 2000, 2005
24. Kramar E., Rešene naloge iz linearne algebre, 1989, 1990, 1994, 2000, 2003
25. Batagelj V. in Klavžar S., DS1, Logika in množice, Naloge, 1989, 1991, 1994, 1997
26. Hladnik M., Povabilo v harmonično analizo, 1992
27. Batagelj V. in Klavžar S., DS2, Algebra in teorija grafov, Naloge, 1992, 1996, 2000, 2005
28. Juvan M. in Lokar M., 121 nalog iz pascala, 1992, 1997
29. Suhadolc A., Robni problemi za linearne diferencialne enačbe drugega reda, 1993
30. Vrabec J., Tri teme iz teorije vrst, 1994
31. Suhadolc A., Potencialna teorija, 1994
32. Pavešić P. in Vavpetič A., Rešene naloge iz topologije, 1995, 1997
33. Dobovišek M., Rešene naloge iz analize II, 1996, 2001
34. Suhadolc A., Navadne diferencialne enačbe, 1996
35. Hvala B., Zbirka izpitnih nalog iz analize, z namigi, nasveti in rezultati, 1996, 2000, 2007
36. Dobovišek M., Riemannov in Lebesgueov integral v $\mathbb{R}^n$, 1997
37. Drnovšek R., Košir T., Kramar E. in Lešnjak G., Zbirka rešenih nalog iz verjetnostnega računa, 1998
38. Juvan M. in Zaveršnik M., C naj bo, 1999
39. Juvan M. in Potočnik P., Teorija grafov in kombinatorika, Primeri in rešene naloge, 2000, 2007
40. Drnovšek R., Rešene naloge iz teorije mere, 2001
41. Cimprič J., Rešene naloge iz analize III, 2001

IZBRANA POGLAVJA IZ MATEMATIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Izdajajo: Oddelek za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

Založilo: DMFA – založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Odgovorni urednik Matjaž Omladič

35.

Bojan Hvala

ZBIRKA IZPITNIH NALOG IZ ANALIZE
z namigi, nasveti in rezultati

3. natis

Knjiga je bila strokovno pregledana
Jezikovni pregled Zvonka Leder – Mancini
Računalniško stavil avtor
Oblikovanje naslovnice Janez Suhadolc in Metka Žerovnik
Tehnični urednik Vladimir Bensa

Natisnila tiskarna UTRIP Brežice v nakladi 400 izvodov
Natisnjeno na ekološkem papirju

Ljubljana 2007

Cena: 8,99 EUR