Отчет по лабораторной работе
по курсу *Модели оценки качества*
Вариант 17-12

студент: Миникс И.В.
группа: ИУ7-101

Формулировка задачи

В ВС, содержащей N процессоров и M каналов обмена данными, постоянно находятся K задач. Разработать модель (исходную и с применением укрупнения моделей) оценивающую производительность системы с учетом отказов и восстановлений процессоров и каналов. Имеется не более L ремонтных бригад, которые ремонтируют отказывающие устройства с бесприоритетной дисциплиной.

Сравнить полученные результаты с результатами имитационного моделирования. Интенсивность отказов, восстановлений, средние времена обработки сообщения и среднее время обдумывания известны и задаются пользователем. Известно также количество процессоров, каналов и задач.

Построить графики зависимостей выходных результатов от исходных данных. С помощью имитационной модели исследовать влияние функций распределения интервалов времени прихода требований и времени обслуживания на выходные результаты.

Исходная модель

На рисунке 1 представлена схема исходной модели системы.

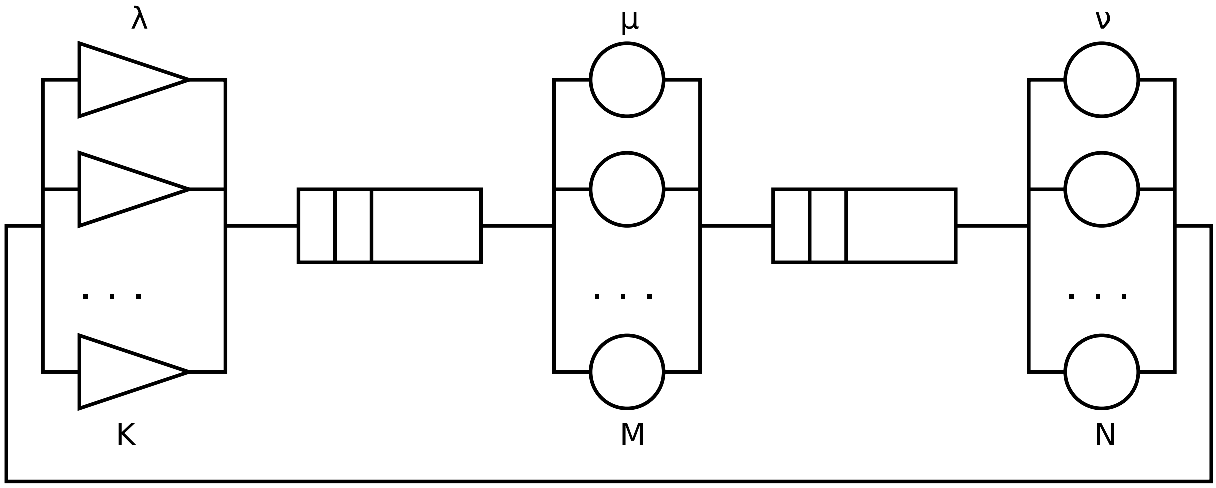

Рисунок 1 — Исходная модель

Параметры системы

K — число задач.

M — число процессоров.

N — число каналов.

L — число ремонтных бригад.

λ — интенсивность обдумывания.

μ — интенсивность обработки задачи на процессорной фазе.

ν – интенсивность обработки задачи на канальной фазе.

α — интенсивность отказа процессоров.

β — интенсивность восстановления процессоров.

γ — интенсивность отказа каналов.

δ — интенсивность восстановления каналов.

Моделирование отказов и восстановлений

Состояние системы будем описывать вектором $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, где $\xi_1(t)$ - число неисправных процессоров в момент времени t, $\xi_2(t)$ - число неисправных каналов в момент времени t.

На рисунке 2 показана структура фрагмента графа состояний системы, где $\beta_{ij} = \beta\frac{i}{i+j}min\left\{i+j,L\right\}$, $\delta_{ij} = \delta\frac{j}{i+j}min\left\{i+j,L\right\}$.

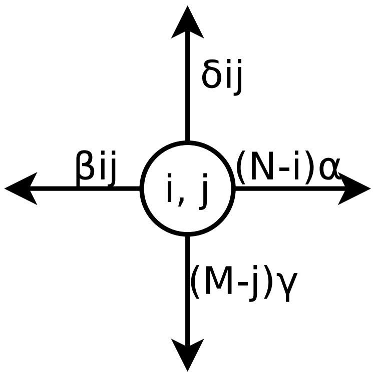

Рисунок 2 — Структура фрагмента графа состояний системы

Проведем укрупнение состояний сисетмы. Объединим в одно макросостояние все врешины графа, у которых одинаковым является первый компонент $\xi_1(t)$ — число неисправных процессоров. Полученный граф представлен на рисунке 3, где $\beta_i = \beta\sum\limits_{j=0}^{N}\pi_j\frac{i}{i+j}min\left\{i+j,L\right\}$, π_j — вероятность того, что отказали ровно j каналов.

Тогда выражения для определенияя вероятностей стационарных состояний примут вид:

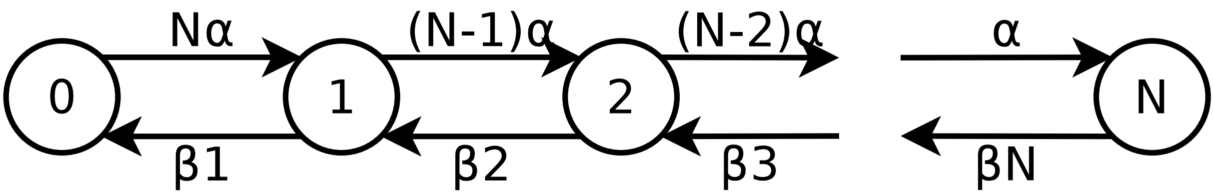

Рисунок 3 — Граф состояний системы

$$\begin{cases} p_0 = \left(1 + \frac{N\alpha}{\beta_1} + ... + \frac{N!\alpha^N}{\prod\limits_{i=1}^{N}\beta_i}\right)^{-1} \\ p_i = p_0 \frac{\alpha^i \prod\limits_{j=1}^{i}(N-j+1)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\beta^j}, \quad i = \overline{1,N} \\ \beta_i = \beta \sum\limits_{j=0}^{N} \pi_j \frac{i}{i+j} min\left\{i+j,L\right\} \end{cases} \tag{1}$$

Аналогичным образом объединим в одно макросостояние все врешины графа, у которых одинаковым является второй компонент $\xi_2(t)$ — число неисправных каналов. Полученный граф представлен на рисунке 4, а выражения для определениям вероятностей стационарных состояний примут вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \left(1 + \frac{M\gamma}{\delta_1} + ... + \frac{M!\gamma^M}{\prod\limits_{i=1}^{M}\delta_i}\right)^{-1} \\ \pi_i = \pi_0 \frac{\gamma^i \prod\limits_{j=1}^{i}(N-j+1)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\delta^j}, \quad i = \overline{1,M} \\ \delta_j = \delta \sum\limits_{i=0}^{M} p_i \frac{j}{i+j} min\left\{i+j,L\right\} \end{cases} \tag{2}$$

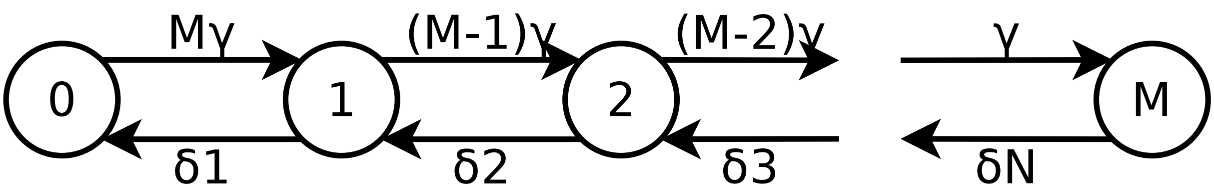

Рисунок 4 — Граф состояний системы

Применяя формулы 1 и 2 итеративно получим вероятности отказов процессоров и каналов в системе. В качестве начального приближения можно взять $\pi_i = \frac{1}{M}$

Укрупнение модели

Заменим исходную модель агрегированной однофазной моделью АМ1 (см. рисунок 5). В агрегированный узел объединена подсистема включающая в себя процессоры и каналы. Интенсивность обслуживания в этом узле зависит от числа находящихся в нем заявок.

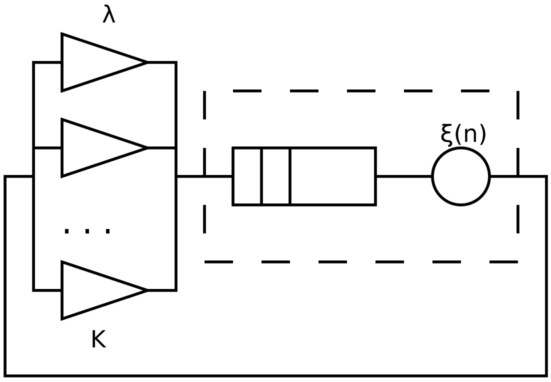

Рисунок 5 — Укрупненная модель АМ1

Граф состояний полученной системы представлен на рисунке 6. Производительность системы может быть вычислена по формулам:

$$\begin{cases} \hat{\pi}_0 = \left(1 + \dfrac{K\lambda}{\xi_1} + ... + \dfrac{K!\lambda^K}{\prod\limits_{i=1}^{K} \xi_i}\right)^{-1} \\ \hat{\pi}_i = \hat{\pi}_0 \dfrac{\lambda^i \prod\limits_{j=1}^{i} (K - j + 1)}{\prod\limits_{j=1}^{i} \xi_j}, \quad i = \overline{1,M} \\ \xi^* = \sum\limits_{i=1}^{K} \xi_i \hat{\pi}_i \end{cases} \tag{3}$$

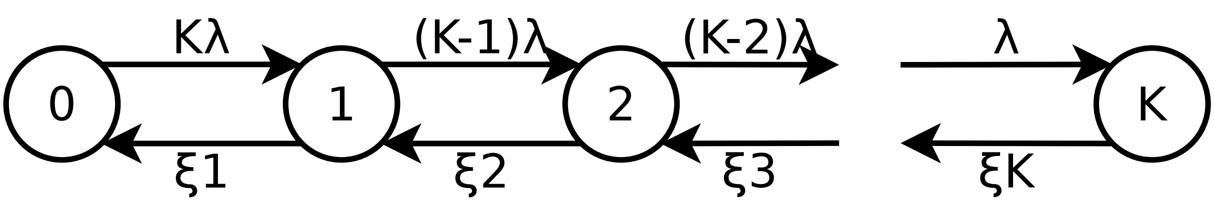

Рисунок 6 — Граф состояний модели АМ1

Однако, чтобы воспользоваться приведенными формулами, необходимо знать параметры связи μ_i. Чтобы их найти рассмотрим укрупненную модель АМ2 структура и граф состояний которой показаны на рисунках 7 и 8. За состояние системы примем количество заявок на процессорной фазе, а интенсивности переходов могут быть выражены по формулам:

$$\mu_i = \mu \sum_{j=0}^{M} p_j min\left\{i, j\right\} \tag{4}$$

$$\nu_i = \nu \sum_{j=0}^{N} \pi_j min\left\{K - i, j\right\} \tag{5}$$

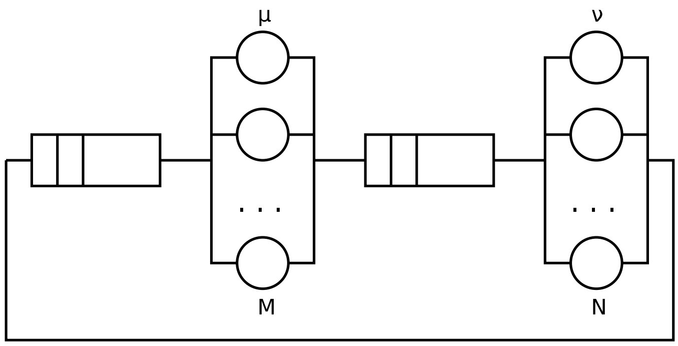

Рисунок 7 — Укрупненная модель АМ2

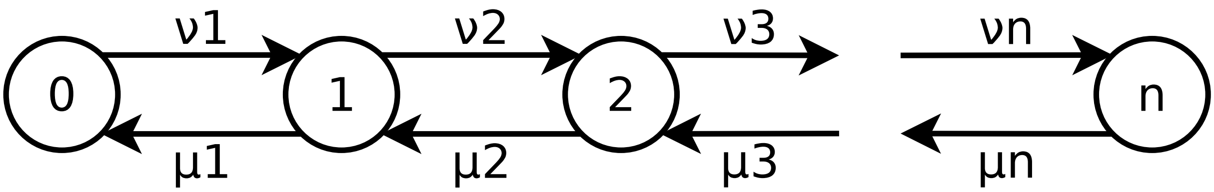

Рисунок 8 — Граф состояний модели АМ2

Параметр связи может вычислен по следующим формулам:

$$\begin{cases} \hat{p}_0 = \left(1 + \frac{\nu_1}{\mu_1} + ... + \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \nu_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} \mu_i}\right)^{-1} \\ \hat{p}_i = \hat{p}_0 \frac{\prod\limits_{j=1}^{i} (\nu_i)}{\prod\limits_{j=1}^{i} \mu_j}, \quad i = \overline{1,n} \\ \xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{p}_i \mu_i \end{cases} \tag{6}$$

Окончательная расчетная схема

Последовательность расчета производительности системы должна быть следующей:

а) По формулам 1 и 2 вычислить $\pi_i, i = \overline{0,N}$ и $p_i, i = \overline{0,M}$.
б) По формулам 4, 5 и 6 вычислить $\xi_n, n = \overline{1,K}$.
в) Вычислить ξ^* по формулам 3.