



Introducción a las Wavelets. Transformada Coseno

El objetivo de las transformaciones

Por qué usar wavelets.

Análisis Wavelet. Ejemplos de wavelets

Transformada wavelet rápida

Transformada Coseno



ugr

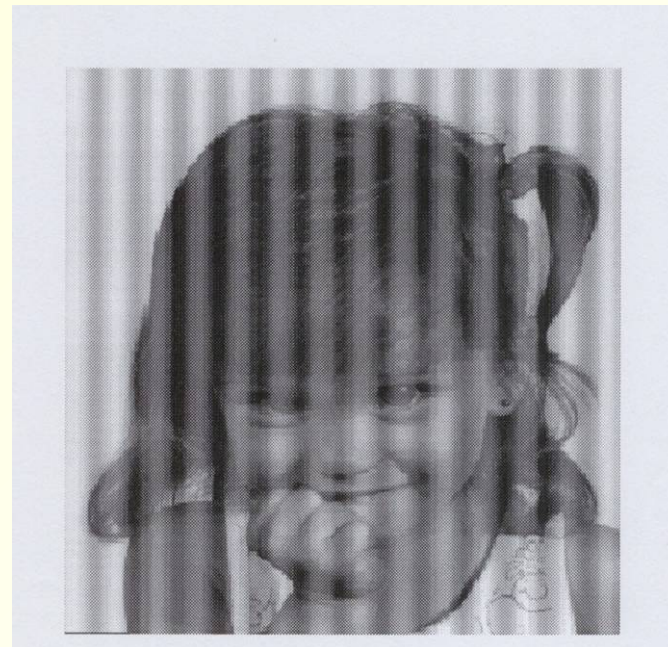
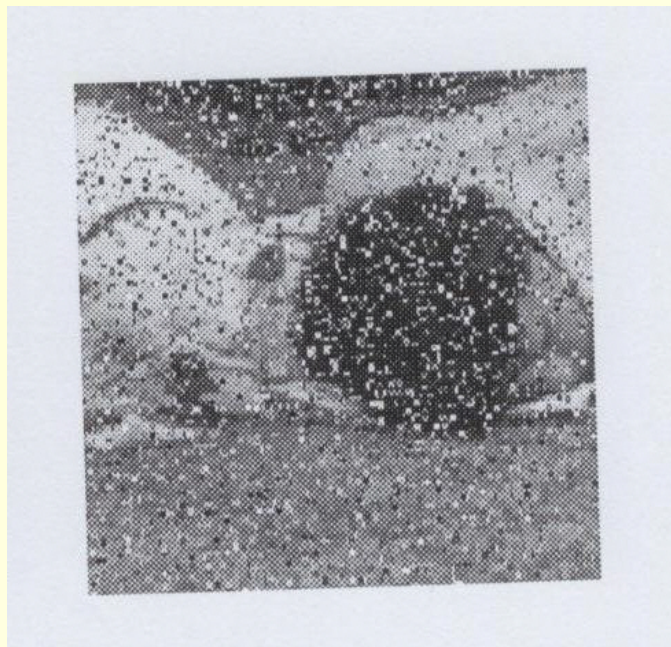
Universidad
de Granada



Computer
Vision
Group



Transformaciones: Nos permiten detectar rasgos o características de la imagen con objeto de obtener información y/o mejorar el aspecto de la imagen





El objetivo de las transformaciones

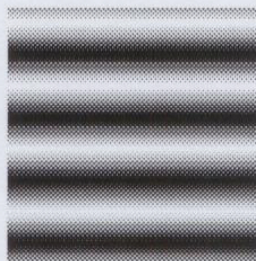
Representación de una imagen



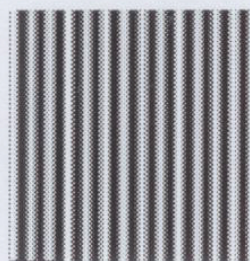
Solution: Image Representation



= 3



+ 5



+

+ 10



+ 23

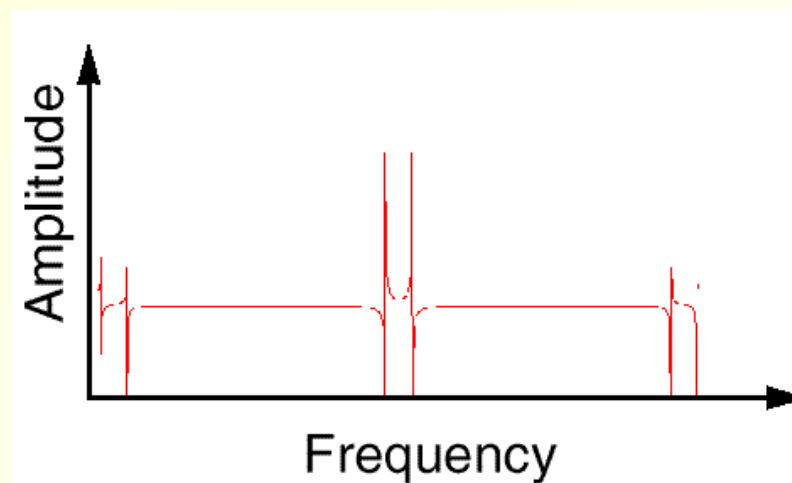
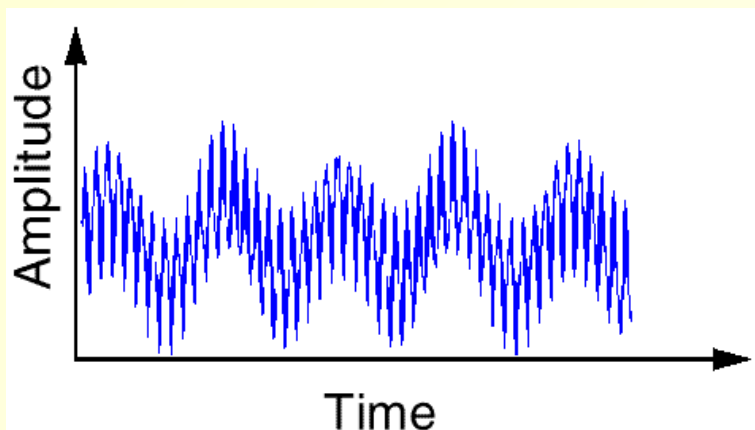


+ ...



Análisis de Fourier

- Descompone la señal en sus componentes sinusoidal de diferentes frecuencias



Esto significa: Expresada una señal en el dominio del tiempo se cambia a una expresión en el dominio de las frecuencias



El objetivo de las transformaciones

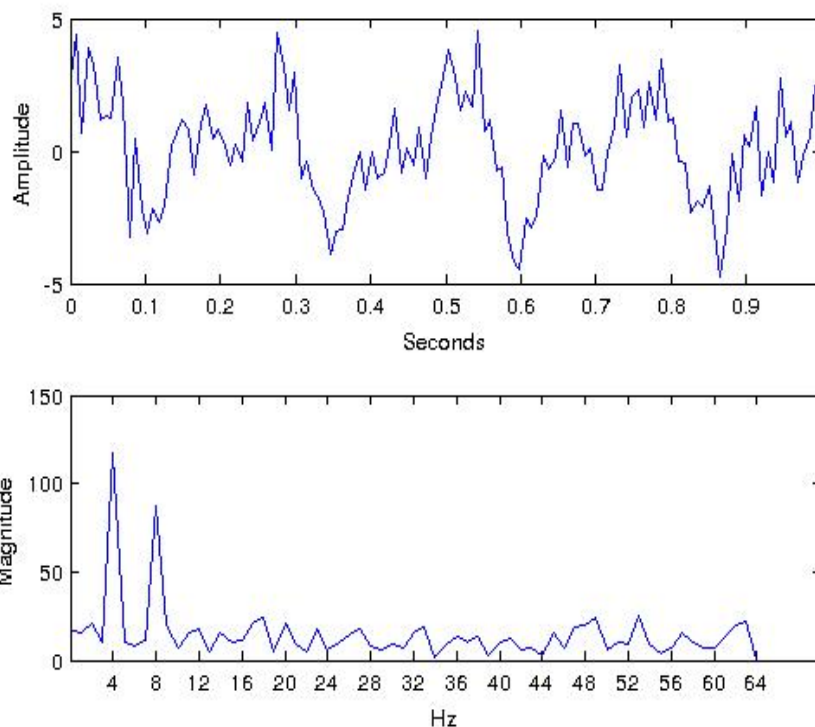
Representación de una imagen



Análisis de Fourier . Ejemplo (Matlab)

Para ilustrar como la TF obtiene la similaridad entre una señal y sinusoides de diferentes frecuencias veamos el siguiente ejemplo en el que tenemos una señal consistente de 4 y 8Hertz y ruido aditivo.

```
rng(0,'twister'); %numero aleatorios
Fs = 128;
t = linspace(0,1,128);%valores en el tiempo
x = 2*cos(2*pi*4*t)+1.5*sin(2*pi*8*t)+randn(size(t));
xDFT = fft(x); %TF
Freq = 0:64;
Subplot(2,1,1);
plot(t,x); xlabel('Seconds'); ylabel('Amplitude');
Subplot(2,1,2);
plot(Freq,abs(xDFT(1:length(xDFT)/2+1)))
set(gca,'xtick',[4:4:64]);
xlabel('Hz'); ylabel('Magnitude');
```





Introducción a las Wavelets. Transformada Coseno

El objetivo de las transformaciones

Por qué usar wavelets.

Análisis Wavelet. Ejemplos de wavelets

Transformada wavelet rápida

Transformada Coseno



ugr

Universidad
de Granada



Computer
Vision
Group



¿Qué problemas existen con Fourier?

- Cuando usamos la TF, perdemos información del tiempo o espacio: cuando o dónde un evento tuvo lugar ?. P.e en una imagen: ¿es un pixel determinado una arista?.
- FT no puede localizar tendencias, cambios abruptos, donde se inicia y termina un evento, etc
- Usa números complejos para su cálculo.



Función Kronecker

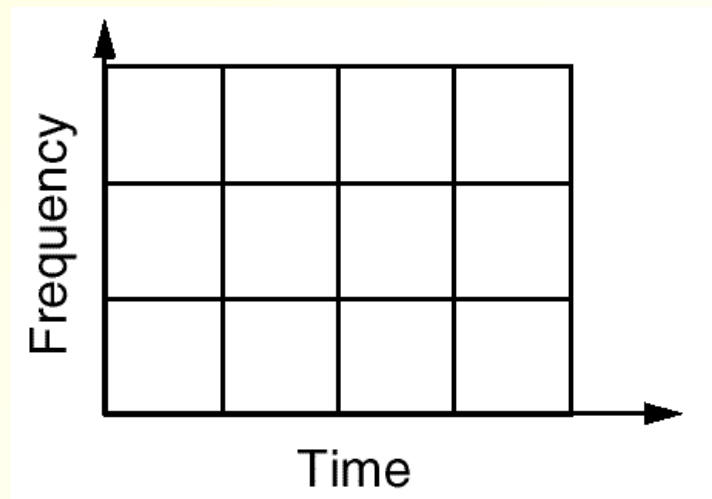
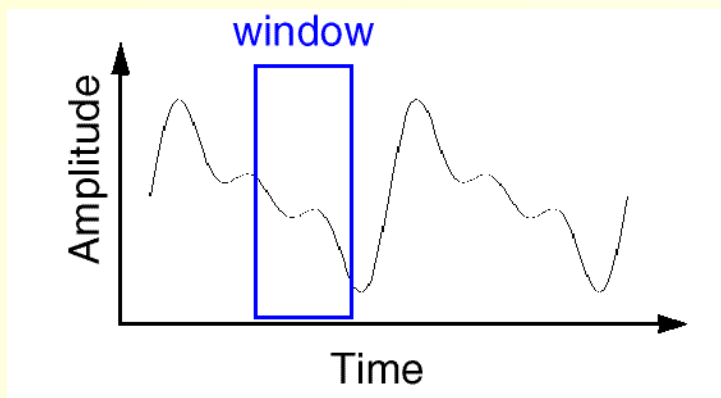
$$\psi_k(t) = \delta_k(t) = \begin{cases} 1, & k = t \\ 0, & k \neq t \end{cases}$$

Es una función que se caracteriza por un completo conocimiento del tiempo (cuando ocurre un evento) pero un total desconocimiento de las frecuencias. Todas las frecuencias participan para representar la función



Transformada de Fourier Aventanada

Denis Gabor (1946) para poder analizar una pequeña sección de la señal, desarrolló una técnica basada en le TF aventanada: STFT (short time Fourier Transform).





STFT (o: Transformada Gabor)

- Esta transformada intenta expresar con una mayor precisión a la señal en ambos dominios: espacio o tiempo y el dominio de las frecuencias.
- La precisión viene dada por el tamaño de la ventana.
- El tamaño de la ventana es el mismo para todas las frecuencias.

Problemas de la Transformada Gabor :

- Muchas señales necesitan una aproximación más flexible, esto quiere decir, debemos de tener la posibilidad de adaptar el tamaño de la ventana para ser más precisos en tiempo o frecuencia.



Introducción a las Wavelets. Transformada Coseno

El objetivo de las transformaciones

Por qué usar wavelets.

Análisis Wavelet. Ejemplos de wavelets

Transformada wavelet rápida

Transformada Coseno



ugr

Universidad
de Granada

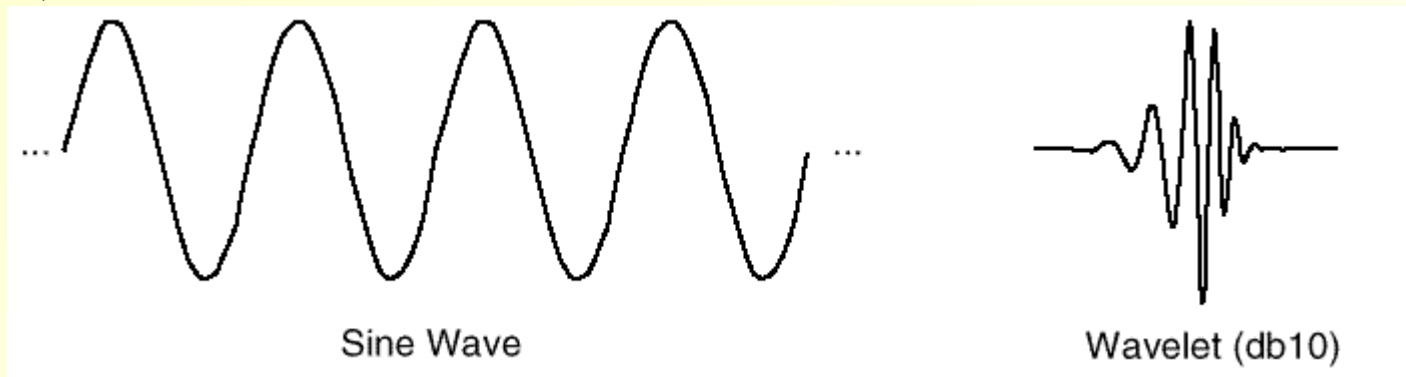


**Computer
Vision
Group**



¿En qué consiste el Análisis Wavelet?

- Qué es una wavelet?



- Una wavelet es una señal con forma de onda de duración limitada (**soporte finito**) y con **valor medio 0**.
- Bien localizada en el tiempo con integral 0.
- Se puede desplazar a lo largo del tiempo
- Se puede escalar.



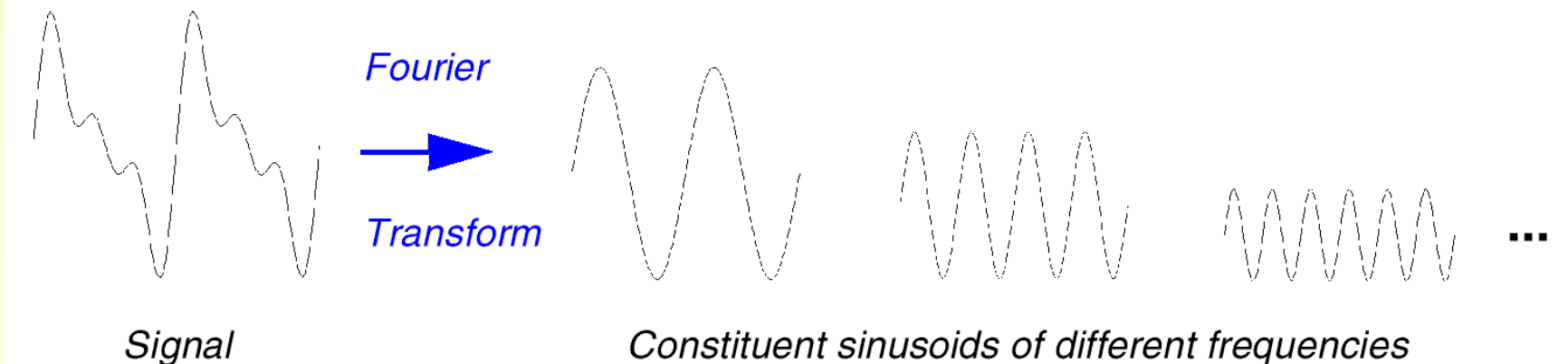
Transformada Wavelet Continua (CWT)

■ Transformada de Fourier:

■ Estos coeficientes, cuando se multiplican por la apropiada sinusoidal de frecuencia, produce la componente sinusoidal de la señal de entrada

- Los coeficientes de Fourier se obtienen como la suma global de la señal $f(t)$ en todos los instantes multiplicada por exponenciales complejas

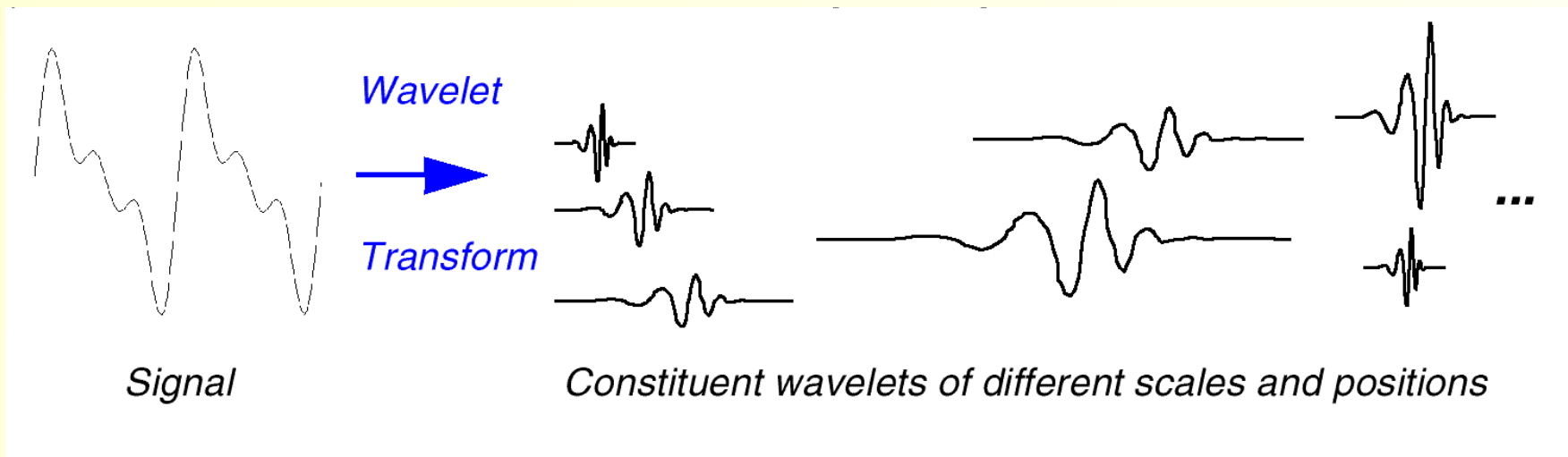
$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$





Transformada Wavelet

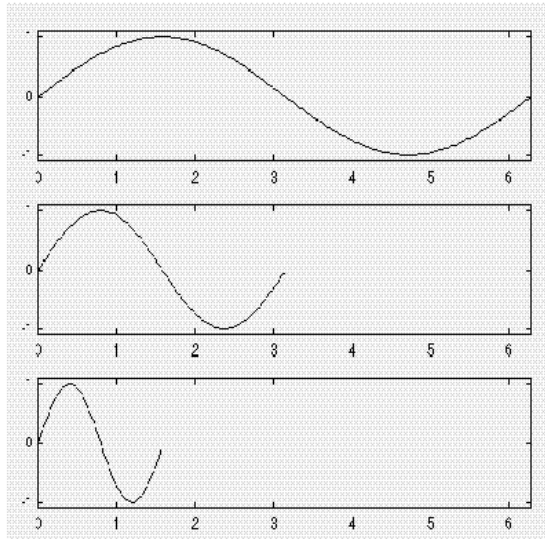
- De igual manera el resultado de la CWT son **coeficientes Wavelet** .
- Multiplicando cada coeficiente por la **wavelet** a una escala y desplazamiento concreto da lugar a la wavelet de la señal original





Escala

- El análisis wavelet produce una visión tiempo-escala de la señal original
- Escalar lo tenemos que entender como estiramiento o compresión de la señal
- **Factor Escala** (a) para ondas seno



$$f(t) = \sin(t); a = 1$$

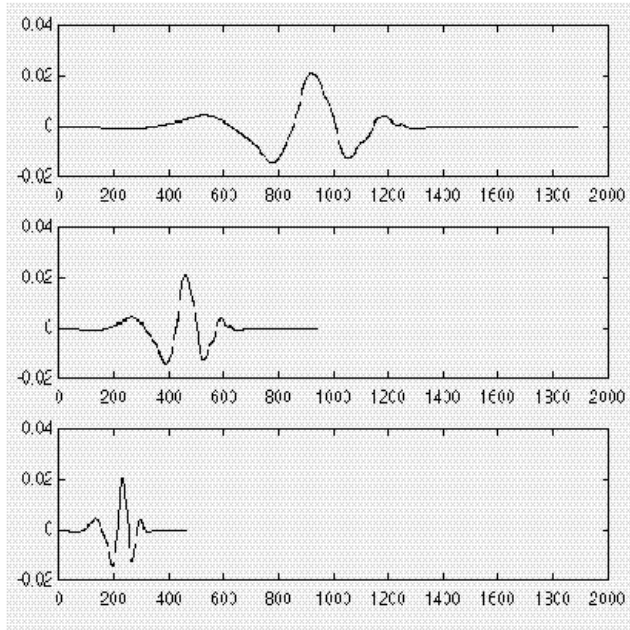
$$f(t) = \sin(2*t); a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sin(4*t); a = \frac{1}{4}$$



Escala

Factor Escala (a) tiene el mismo comportamiento con las wavelets



$$f(t) = \psi(t); a = 1$$

$$f(t) = \psi(t); a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \psi(t); a = \frac{1}{4}$$

En resumen, la correspondencia entre escala y frecuencia es:

Baja escala $a \Rightarrow$ Wavelet comprimida \Rightarrow Cambios rápido (detalles) \Rightarrow Alta frecuencia ω

Alta escala $a \Rightarrow$ Wavelet estirada \Rightarrow Cambios lentos (rasgos gruesos) \Rightarrow Baja frecuencia ω

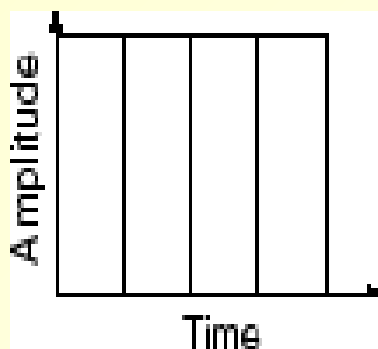


El objetivo de las transformaciones

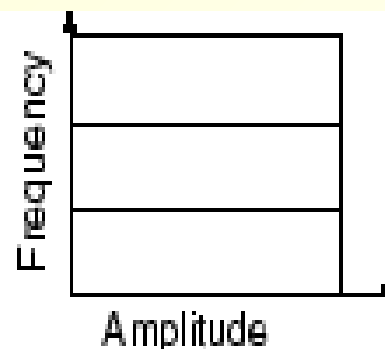
Transformada Wavelet



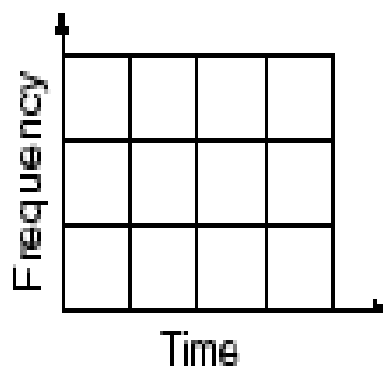
Diferentes espacios de representación de una Señal:



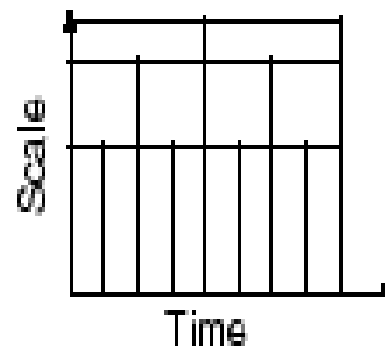
Time Domain (Shannon)



Frequency Domain (Fourier)



STFT (Gabor)



Wavelet Analysis



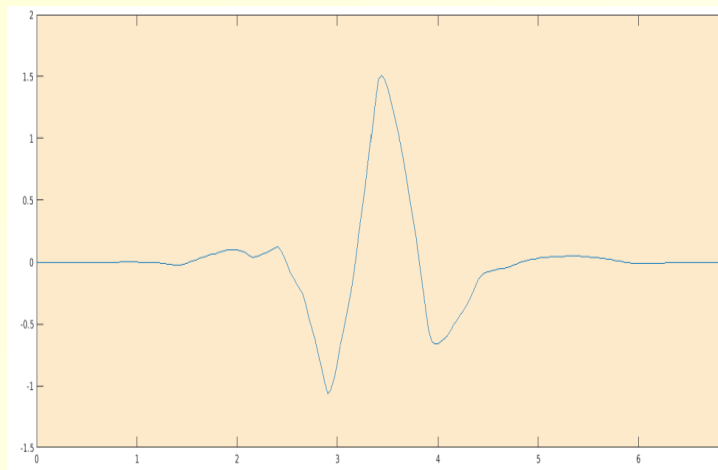
Wavelet

Función 1D

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

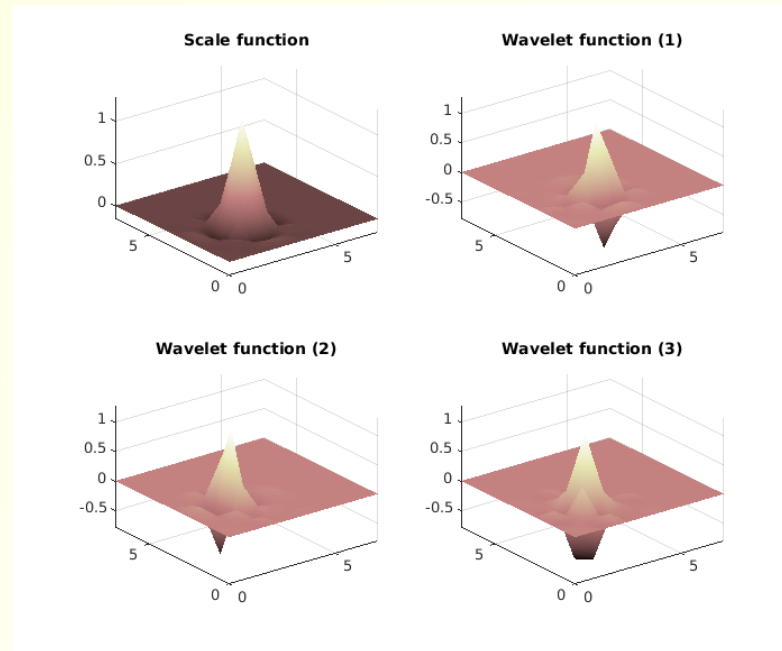
a – escala

b –desplazamiento



Función 2D

$$\Psi_{a,b_x,b_y}(x,y) = \frac{1}{|a|} \Psi\left(\frac{x-b_x}{a}, \frac{y-b_y}{a}\right)$$





CWT

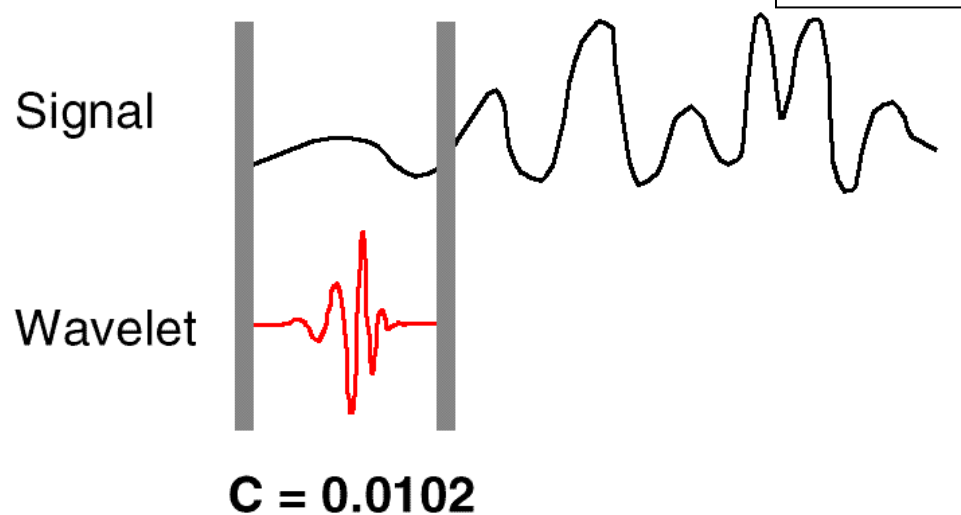
- Recordar: La CWT es la suma sobre todos los instantes de la señal, multiplicado por una versión escalada y desplazada de la función wavelet

Paso 1:

Tomar una Wavelet y compararla con una porción, desde el principio, de la señal de entrada.

Paso 2:

Calcular un número, C , que representa como de correlada esta la wavelet a esta sección de la señal original. Cuanto más grande sea C más similaridad habrá.





El objetivo de las transformaciones

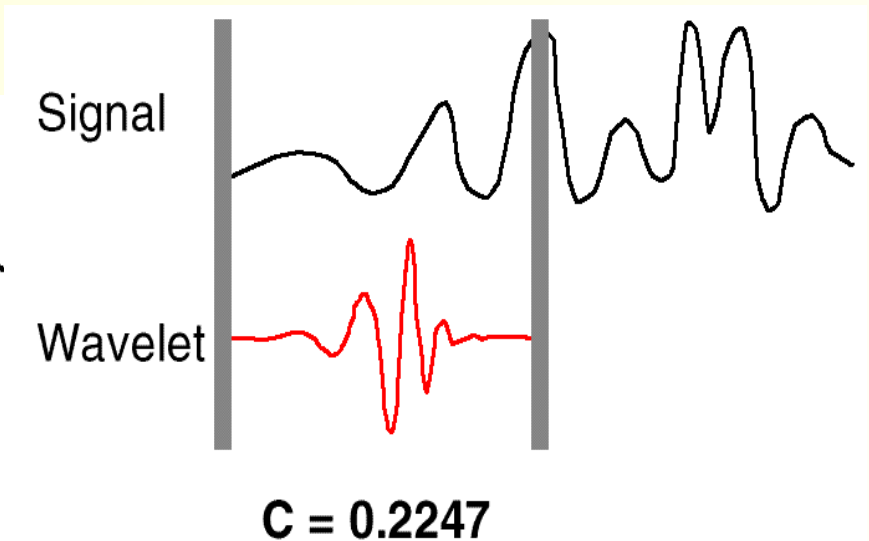
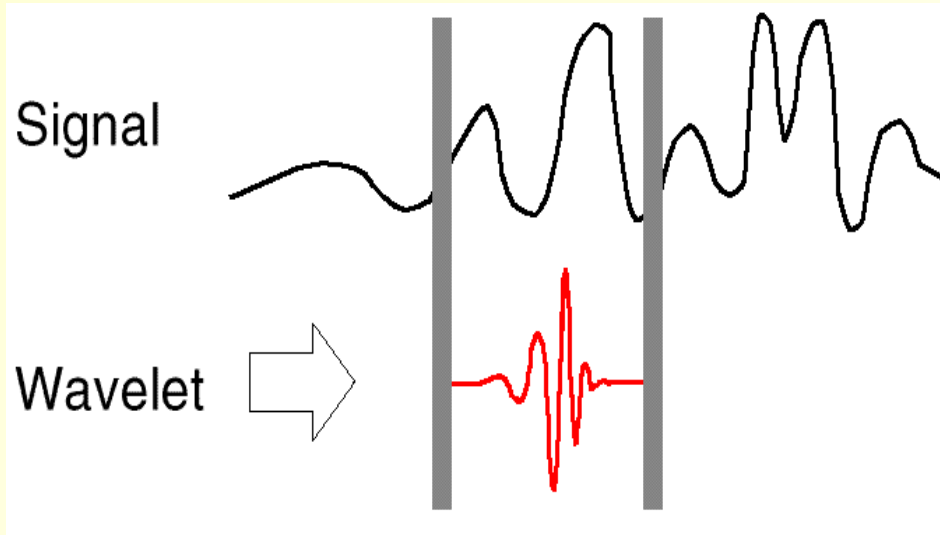
Transformada Wavelet



CWT

- **Paso 3:** Desplazar la wavelet a la derecha y repetir los pasos 1 y 2, hasta atravesar la señal entera.

- **Paso 4:** Escalar la wavelet y repetir los paso 1-3



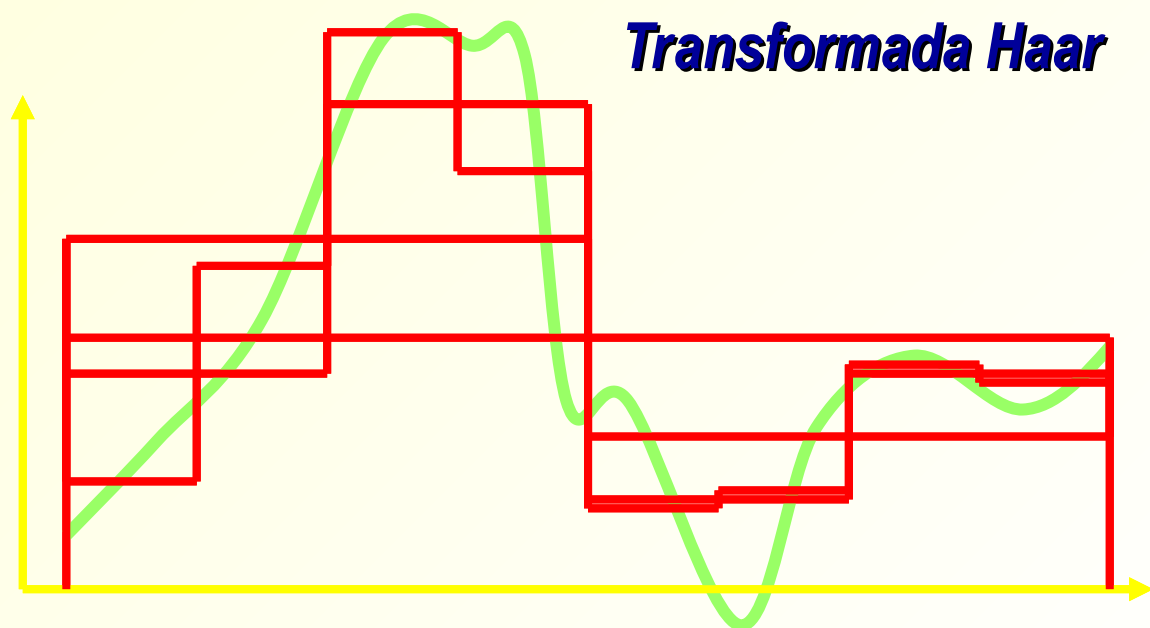


Ejemplos de Wavelets. Transformada *Dyadic*

- Para facilitar el cálculo se discretiza la señal continua.
- Tenemos una matriz de valores discretos denominados enrejado dyadic.
- Las funciones wavelet tienen un soporte compacto.

$$a = 2^j$$

$$b = k2^j$$

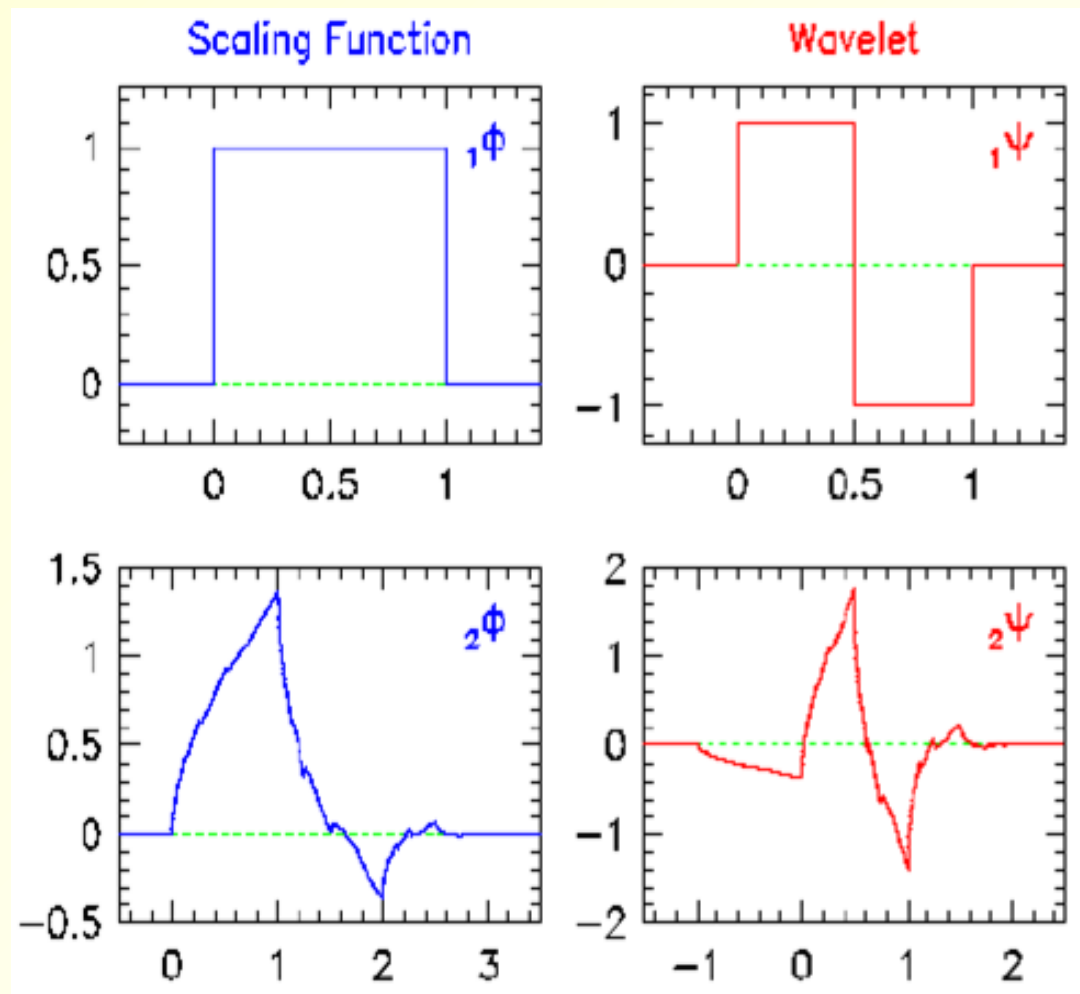




Ejemplos de funciones Wavelet

- Haar

- Daubechies





Properties of Daubechies wavelets

I. Daubechies, *Comm. Pure Appl. Math.* 41
(1988) 909.

■ Soporte Compacto

- ☐ Número finito de parámetros de los filtros/ implementaciones rápidas
- ☐ Compresión alta.
- ☐ Las amplitudes de las escalas finas (detalle) son muy pequeñas en regiones donde la función es suave/sensible al reconocimiento de estructuras

■ Los parámetros de los filtros de análisis y síntesis son los mismos

- ☐ Rápida y reconstrucción exacta



Introducción a las Wavelets. Transformada Coseno

El objetivo de las transformaciones

Por qué usar wavelets.

Análisis Wavelet. Ejemplos de wavelets

Transformada wavelet rápida

Transformada Coseno



ugr

Universidad
de Granada



Computer
Vision
Group



El objetivo de las transformaciones

Transformada Wavelet



■ Transformada Wavelet Rápida:

Mallat fue el primero en usar este esquema, usando un diseño de filtro denominado “**codificador de sub-bandas de 2 canales**”

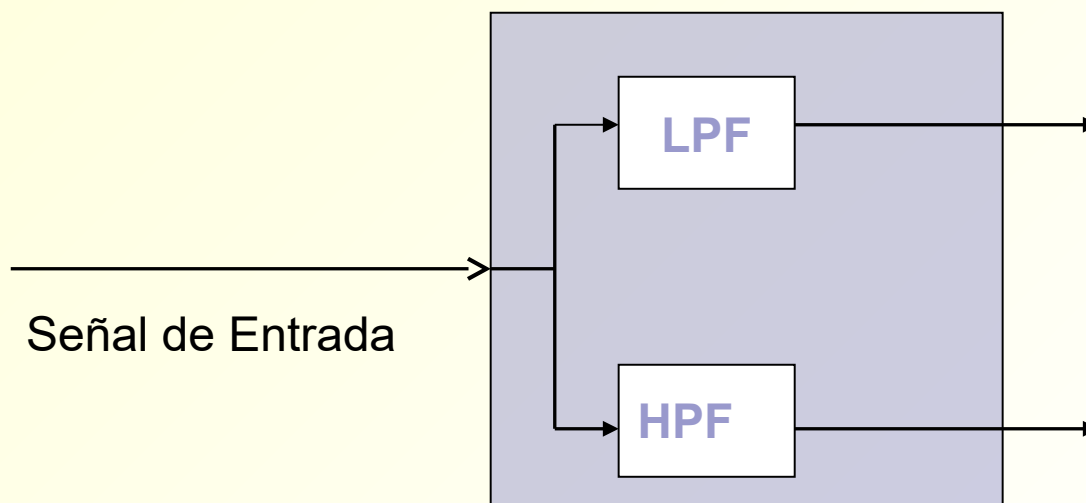
Aproximaciones y Detalle

Aproximaciones: Componentes frecuenciales bajas de la señal.

Escala Alta

Detalle: Componentes alta de frecuencia.

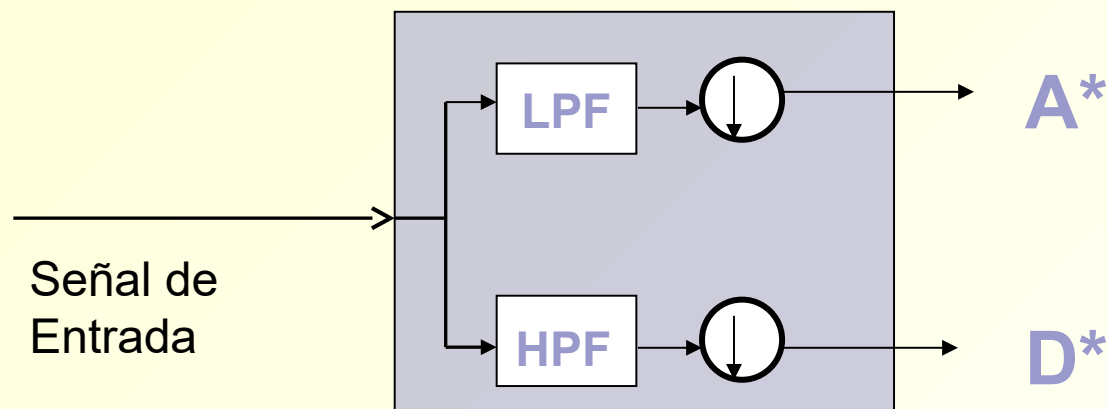
Escala Baja





Submuestreo

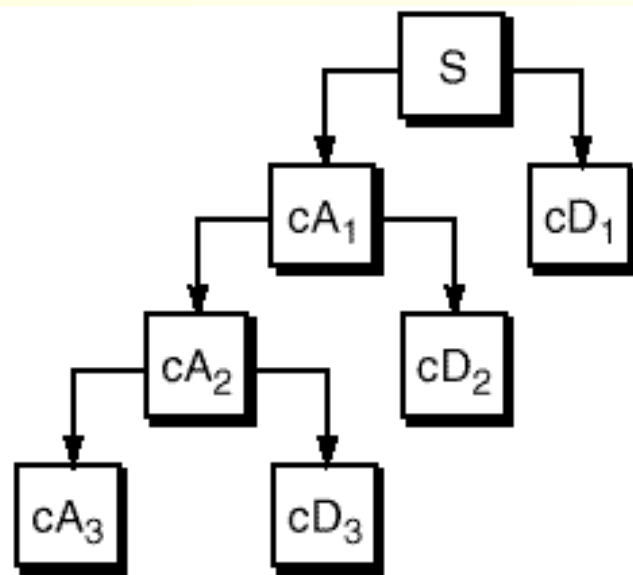
- El proceso tal cual produce el doble de datos: Con N muestras produce N coeficientes de aproximación y N coeficientes de detalle.
- Para corregirlo, submuestreamos el filtro de salida por dos, simplemente eliminando un coeficiente de cada dos.





Descomposición en diferente niveles

- **Arbol de descomposición wavelet:** Iterando el proceso de descomposición, descomponemos la señal en muchas componente de menor resolución.





Orthogonality

- Para dos vectores

$$\langle v, w \rangle = \sum_n v_n w_n^* = 0$$

- Para dos funciones

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt = 0$$



El objetivo de las transformaciones ***Transformada Wavelet***



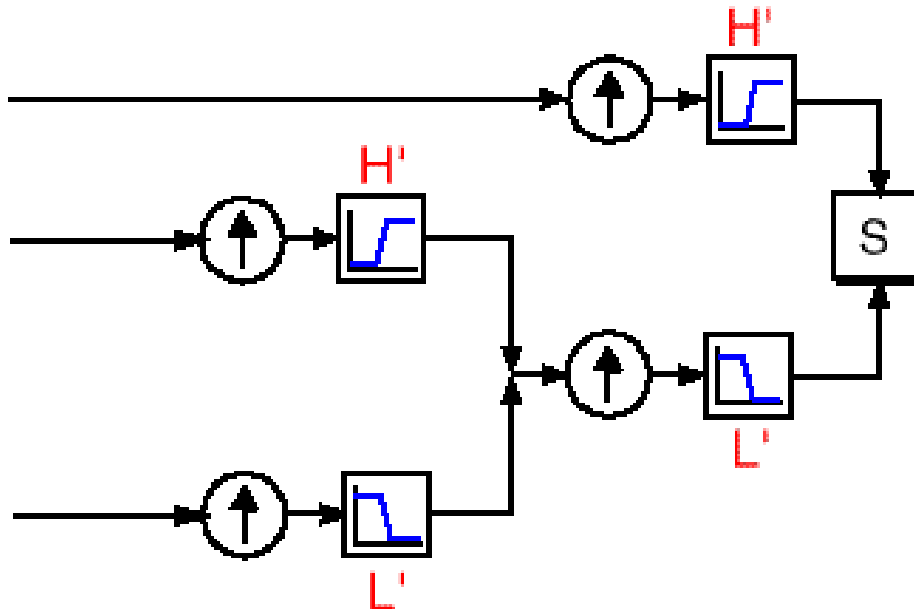
Por qué es deseable una base ortogonal en las wavelets?

- El cálculo es más simple
- La precisión es mayor
- La multiplicación escalar con otra función base es cero

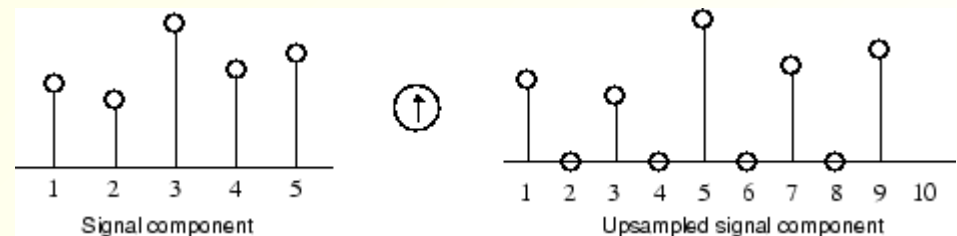


Reconstrucción Wavelet

- Síntesis o reconstrucción es el proceso por el que se unen todas las componentes wavelet



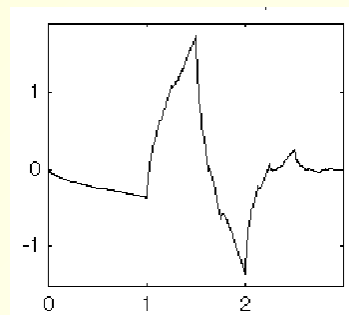
Sobremuestreo
(o **interpolación**) : se inserta un cero cada dos coeficientes





Example

- Un filtro paso-bajo (L') para la wavelet db2:



Los coeficientes del filtro son (usando el comando `dbaux(2)` de Matlab)

0.3415 0.5915 0.1585 -0.0915

*Invertiendo el orden de este vector y multiplicando las posiciones impares por -1 obtenemos el **filtro paso alto** H' :*

-0.0915 -0.1585 0.5915 -0.3415

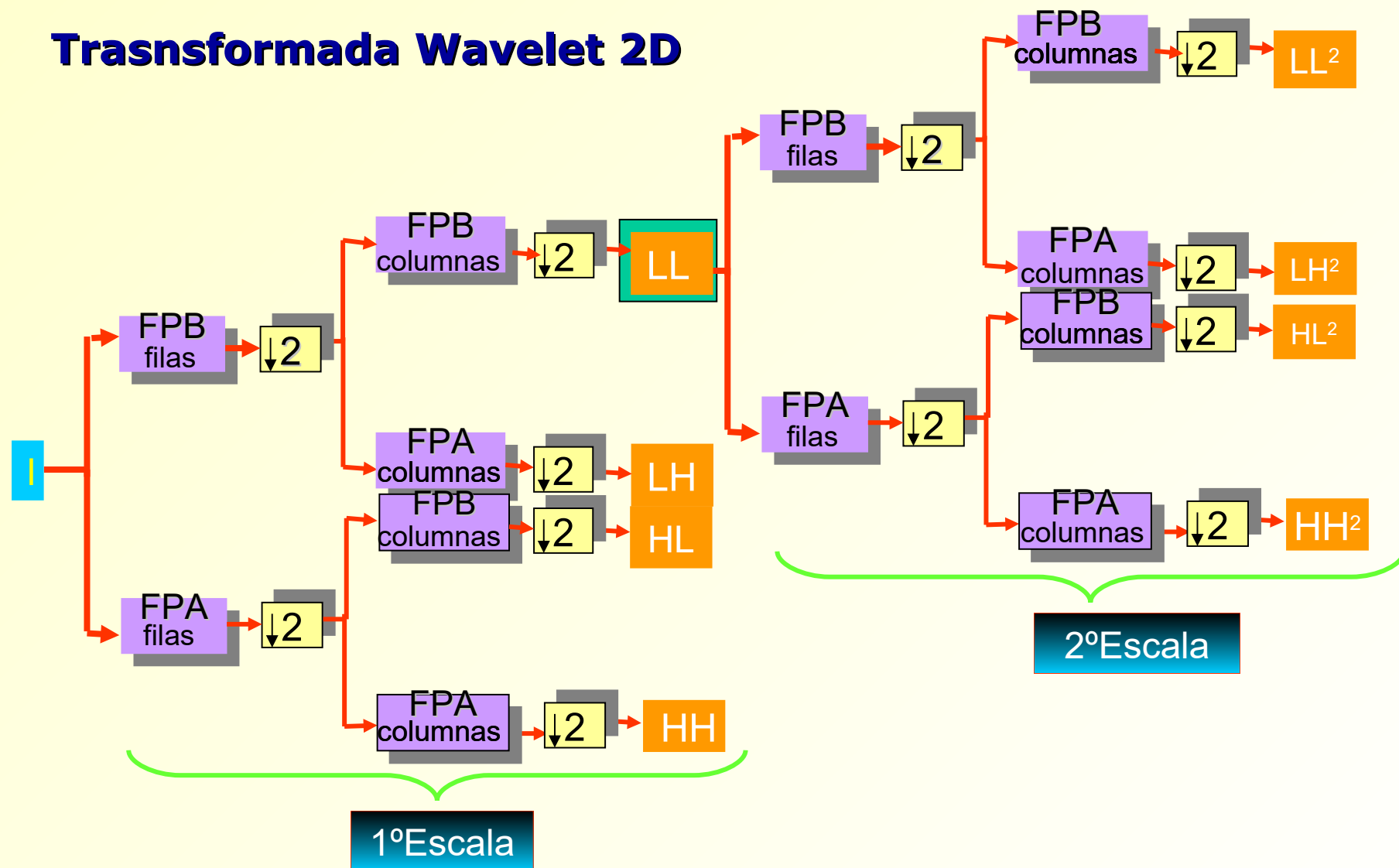


El objetivo de las transformaciones

Transformada Wavelet

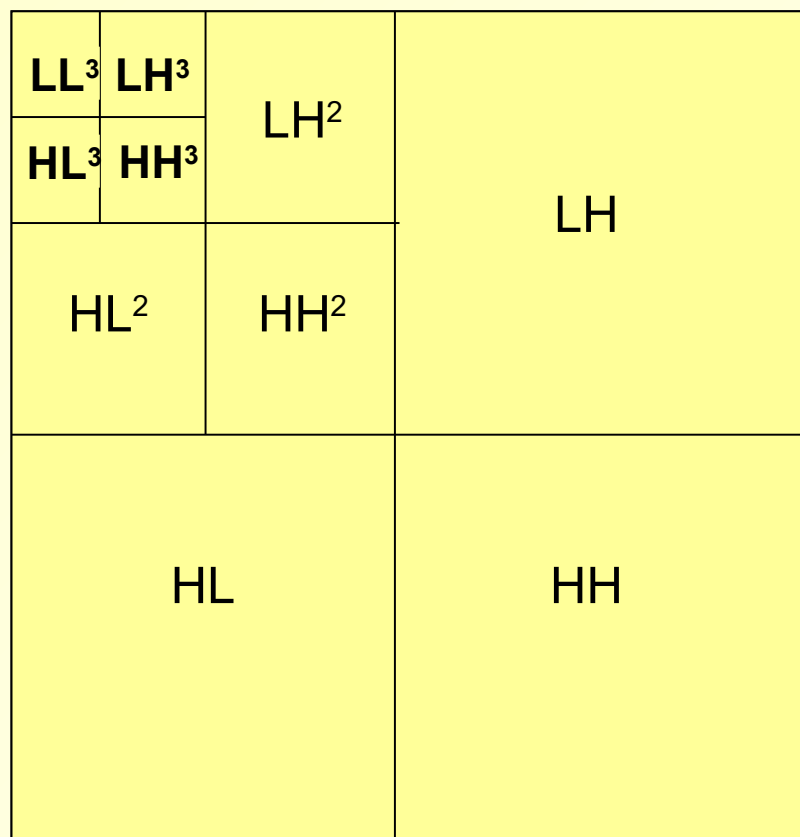


Trasnsformada Wavelet 2D





Trasnsformada Wavelet 2D: Localización de las bandas de frecuencias





Introducción a las Wavelets. Transformada Coseno

El objetivo de las transformaciones

Por qué usar wavelets.

Análisis Wavelet. Ejemplos de wavelets

Transformada wavelet rápida

Transformada Coseno



ugr

Universidad
de Granada



Computer
Vision
Group



Transformada Discreta Coseno (DCT): Se usan para convertir los datos en una sumatoria de una serie de ondas cosenos oscilando a diferentes frecuencias. Esta transformada ha sido usada en uno de los más famosos compresores de imágenes: JPEG

Transformada Coseno Discreta 1D (DCT)

$$C(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]$$

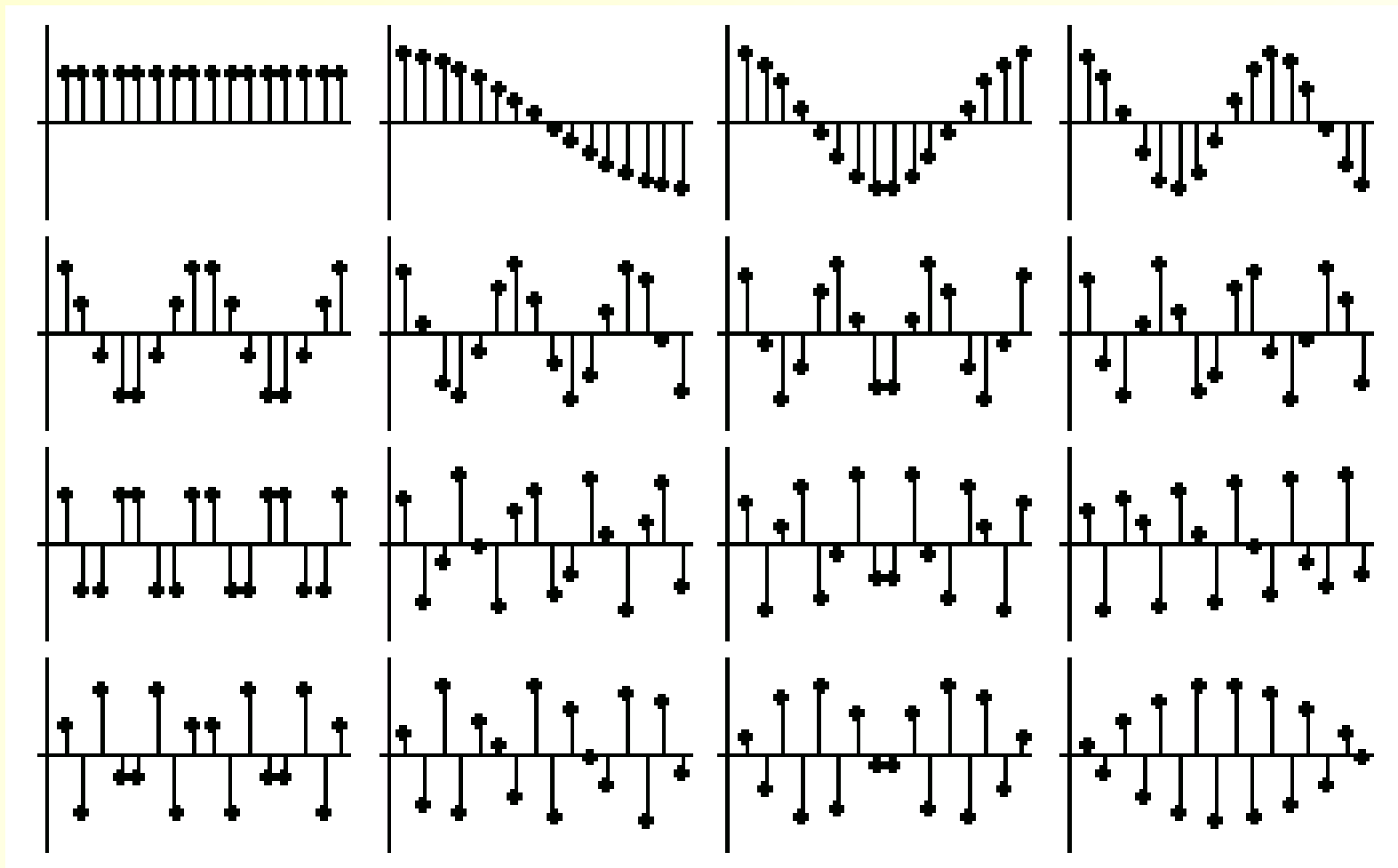
$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)} & \text{si } u=0 \\ \sqrt{\left(\frac{2}{N}\right)} & \text{si } u=1,2,\dots,N-2 \end{cases}$$

Transformada Coseno Discreta Inversa 1D

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) C(u) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]$$



1-D Basis Functions $N=16$





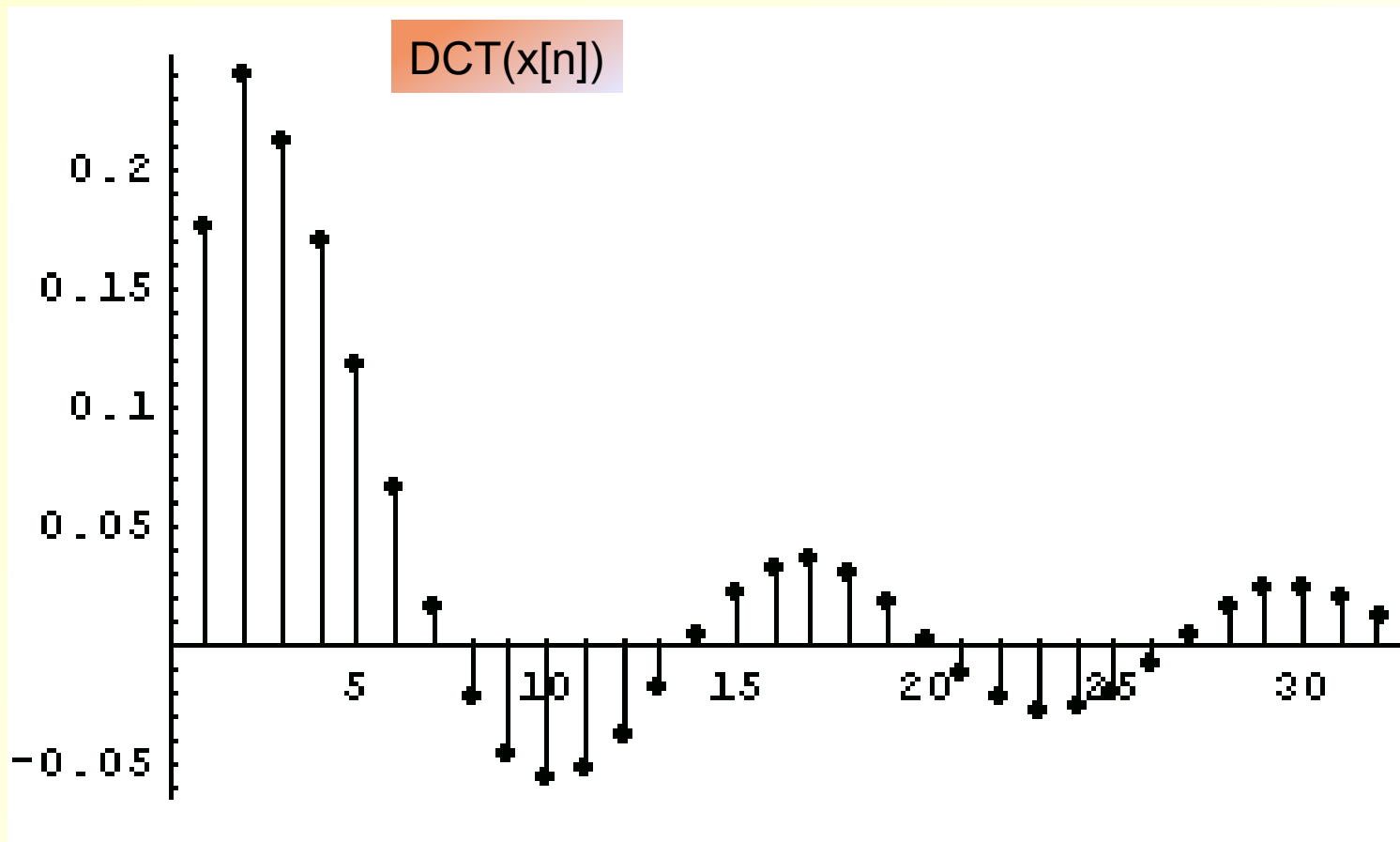
El objetivo de las transformaciones

Otras transformaciones: DCT



Example: 1D signal

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{for } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$





TRANSFORMADA COSENO DISCRETA 2-D (DCT)

$$C(u, v) = a(u)a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u)a(v)C(u, v) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$u, v = 0, 1, \dots, N-1$$



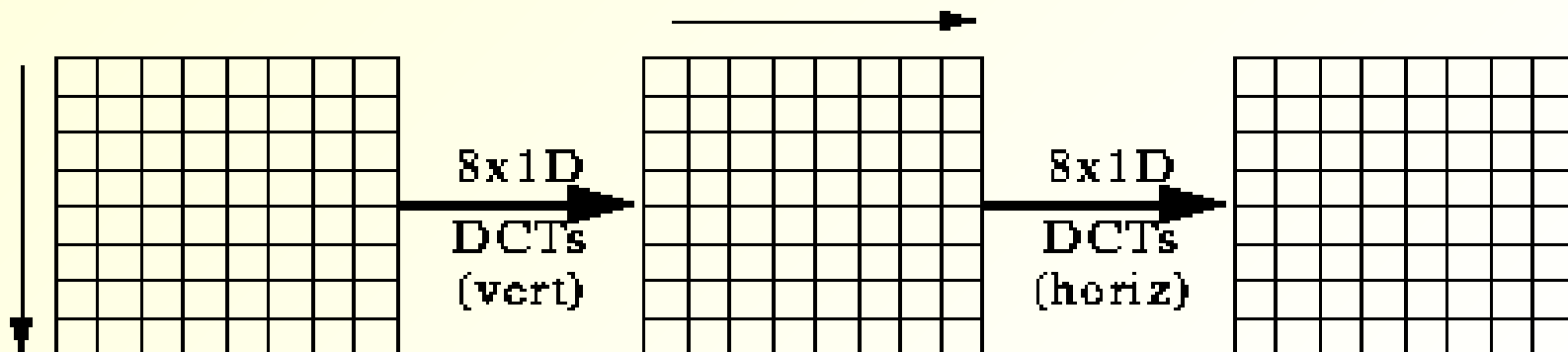
Propiedades

La DCT es una transformada real

Compacta muy bien la energía de la señal de entrada en pocos coeficientes

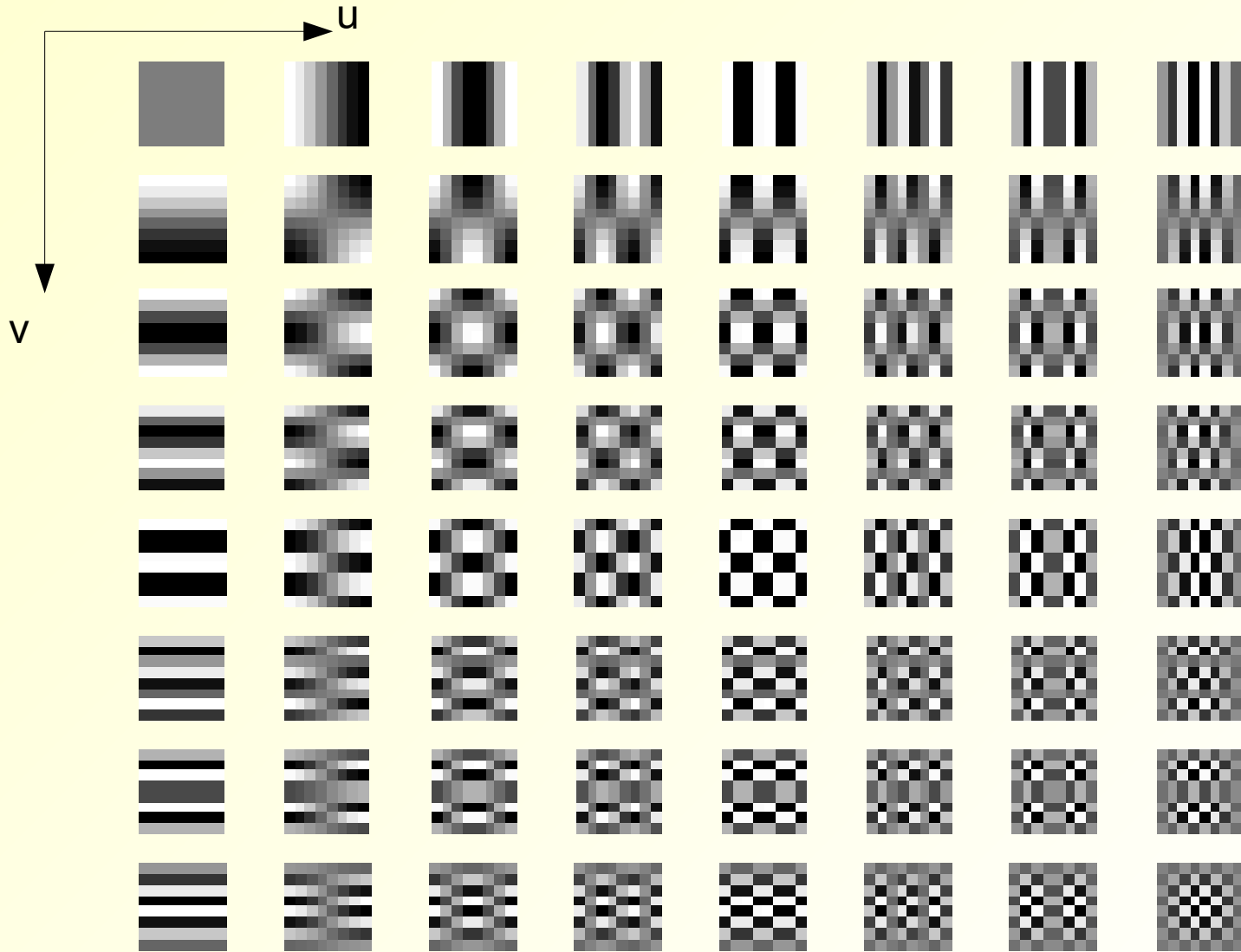
Al igual que con la FFT existen algoritmos rápidos para obtener la transformada

Separable





2-D Funciones Base N=8





- Original Lena image



- 2D DCT

