Filtrado Frecuencial

¿Qué es una transformada?

La transformada de Fourier

Filtros en el dominio frecuencial

Universidad de Granada

DECSAI

Computer Vision Group

¿Qué es una transformada?

Es una operación matemática que transforma una señal (imagen) en otra señal (imagen).

En el dominio transformado ...

... algunas operaciones son más fáciles de realizar.

... se ponen de manifiesto datos que no son obvios en el original.

Existen transformadas:

Contínuas: transforman funciones en funciones.

Discretas: transforman secuencias de datos en secuencias de datos (son muestreos de las transformadas contínuas).

Es importante que la transformada sea invertible.

f(x,y) → F(u,v) → f(x,y)

Transformada (directa)   *Transformada inversa*

La idea es expresar la función original como una suma ponderada de un conjunto de funciones base B:

$$F(u,v) = k \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) * B(x,y,u,v)$$

f(x,y) es una imagen de N filas y M columnas.

$$f(x,y) = k' \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u,v) * B^{-1}(x,y,u,v)$$

(transformada inversa)

Ejemplo

f(x,y)=

5	3
1	2

B(x,y,0,0)

1	1
1	1

B(x,y,1,0)

1	-1
1	-1

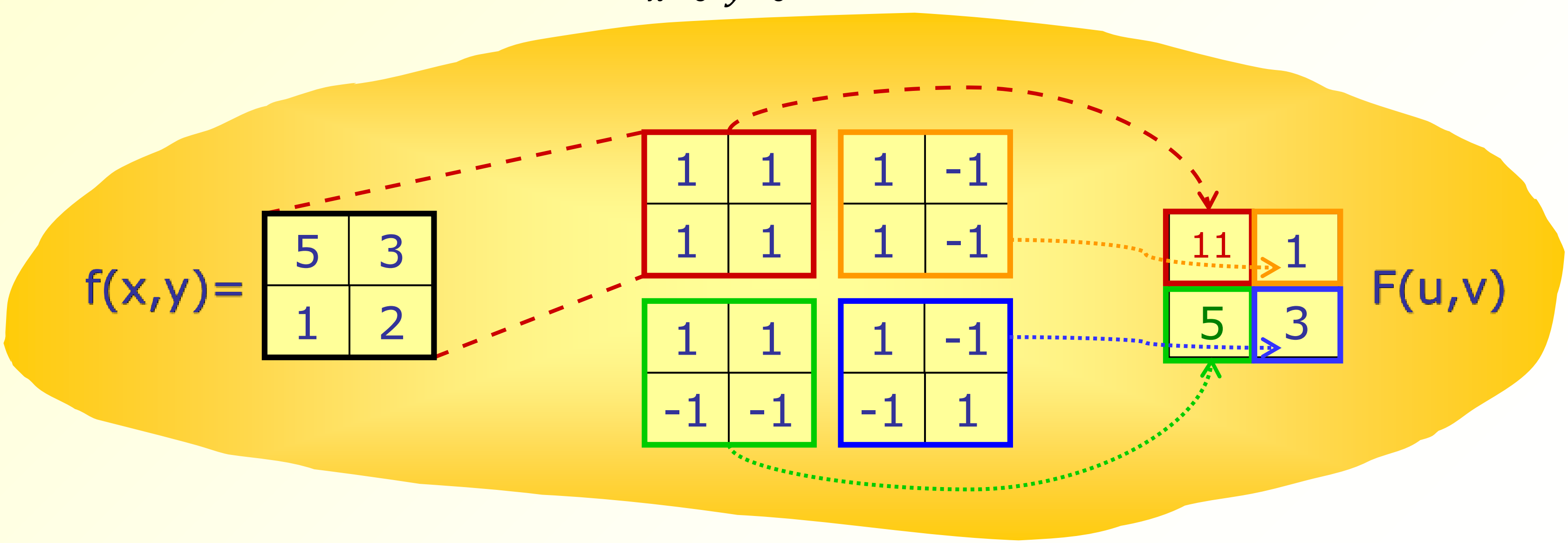
B(x,y,0,1)

1	1
-1	-1

B(x,y,1,1)

1	-1
-1	1

$$F(u,v) = k \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) * B(x,y,u,v)$$



Ejemplo

La transformada inversa

$B^{-1}(x,y,0,0)$

1	1
1	1

$B^{-1}(x,y,1,0)$

1	-1
1	-1

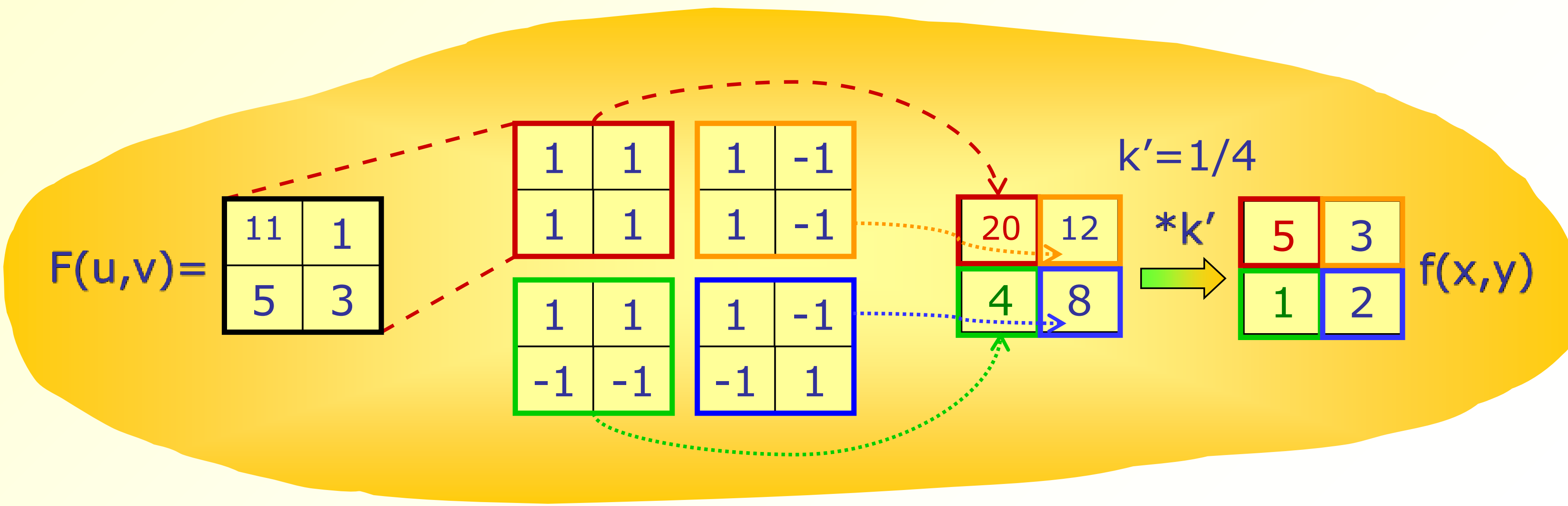
$B^{-1}(x,y,0,1)$

1	1
-1	-1

$B^{-1}(x,y,1,1)$

1	-1
-1	1

$$f(x,y) = k' \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u,v) * B^{-1}(x,y,u,v)$$



Filtrado Frecuencial

¿Qué es una transformada?

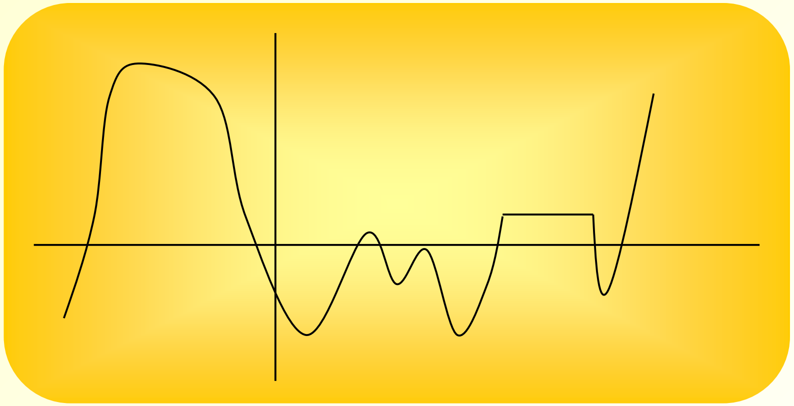
La transformada de Fourier

Filtros en el dominio frecuencial

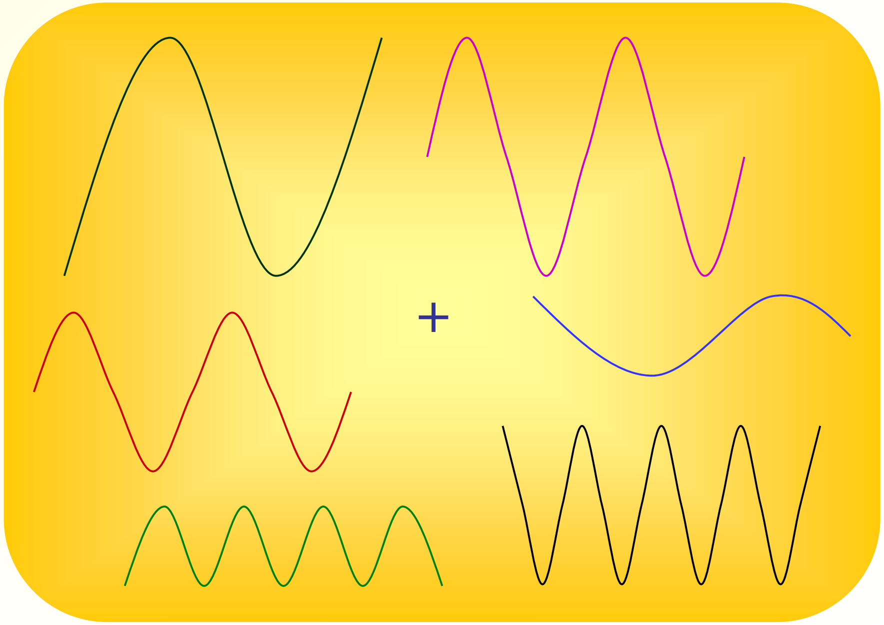
Joseph Baron Fourier (1768-1830)

Matemático francés

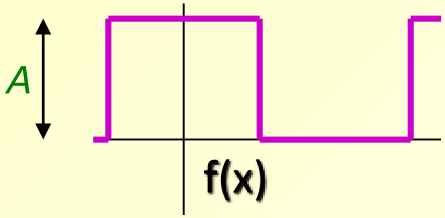
"Una **función arbitraria**, continua o con discontinuidades, definida en un intervalo finito por una gráfica arbitrariamente caprichosa se puede expresar siempre como **suma de sinusoides**"



=



Aproximar la función f(x) con una suma de sinusoides.



$$s_1 = \frac{A}{2}$$

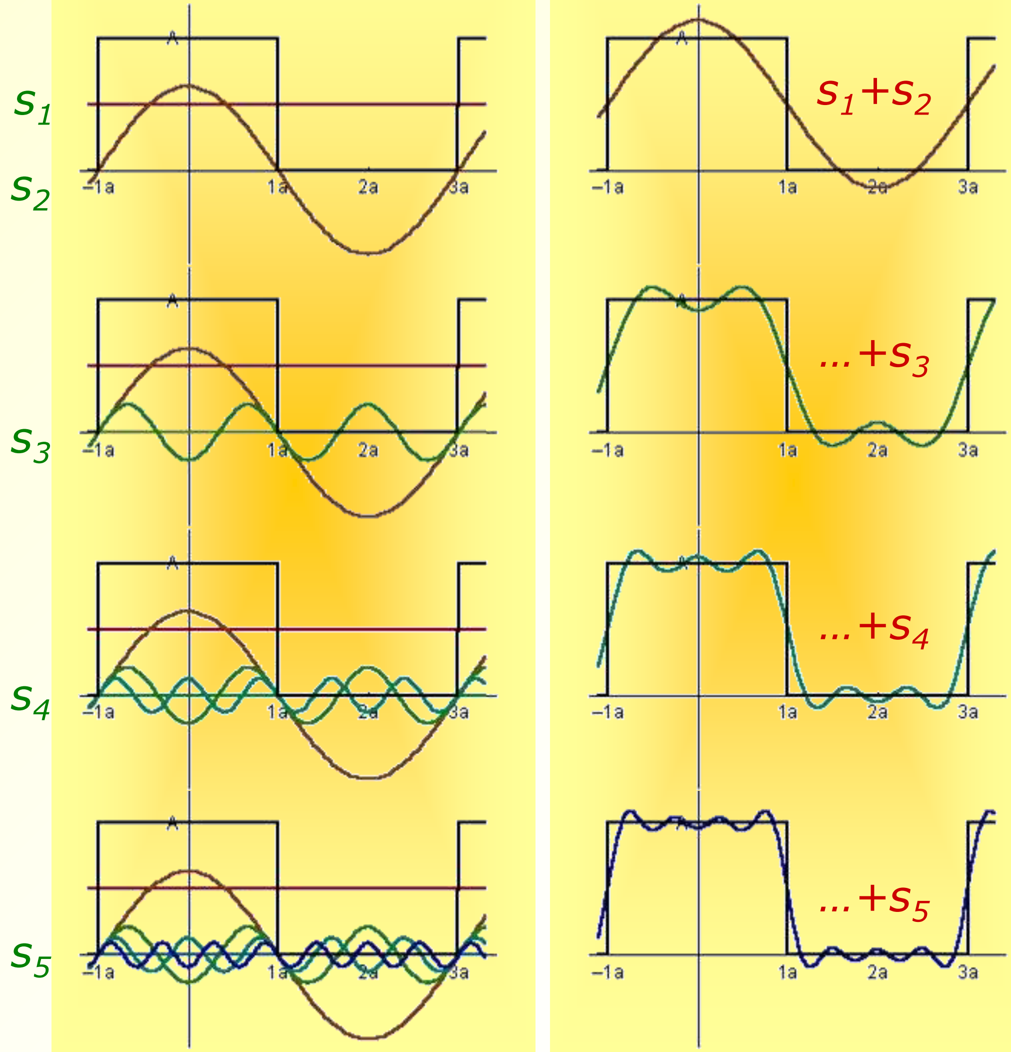
$$s_2 = \frac{2A\cos(wt)}{\pi}$$

$$s_3 = -\frac{2A\cos(3wt)}{3\pi}$$

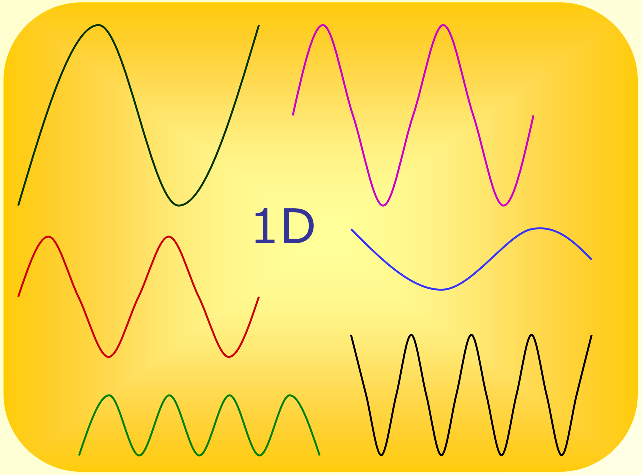
$$s_4 = \frac{2A\cos(5wt)}{5\pi}$$

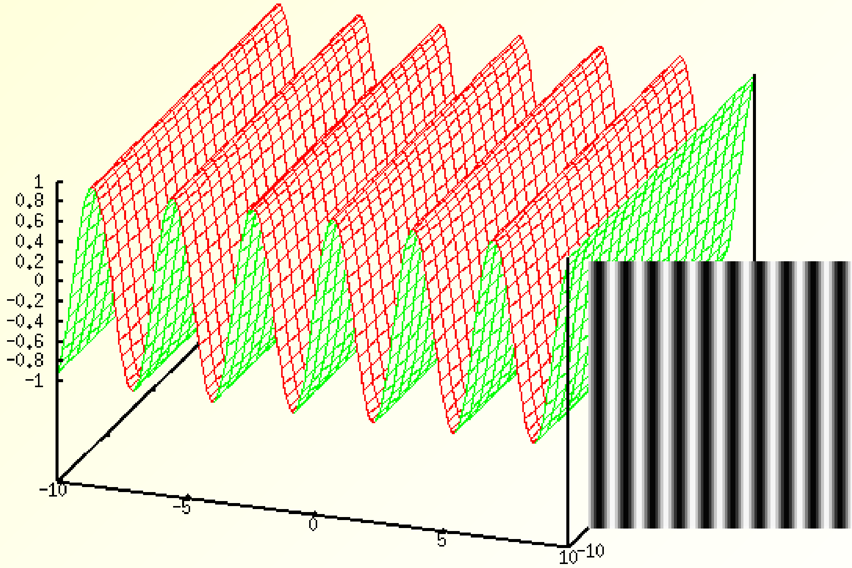
$$s_5 = -\frac{2A\cos(7wt)}{7\pi}$$

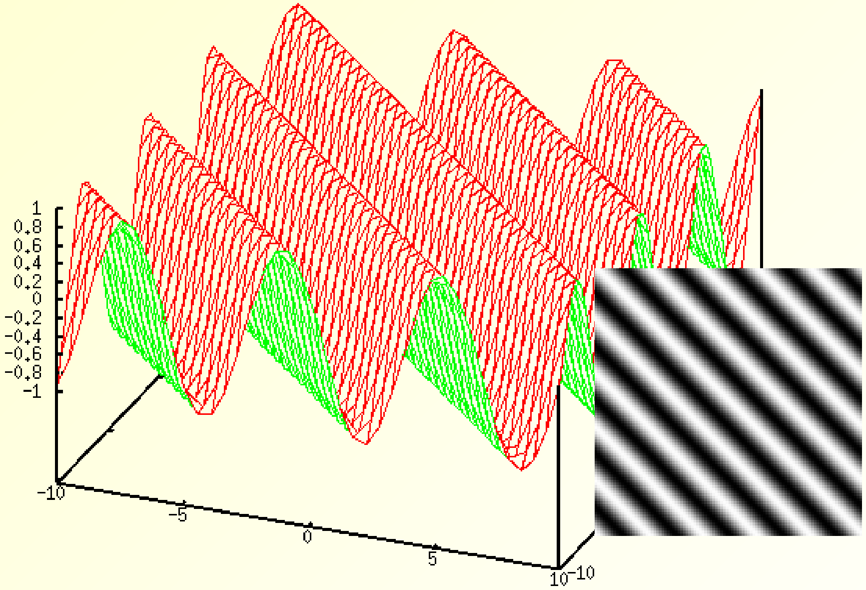
Sinusoides | *Función resultante*

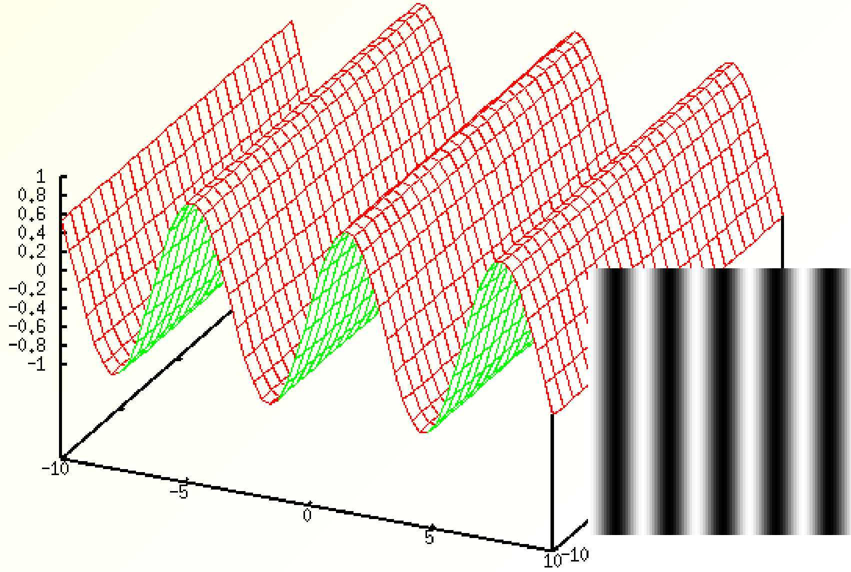


¿Qué aspecto tiene un sinudoide en 2D?

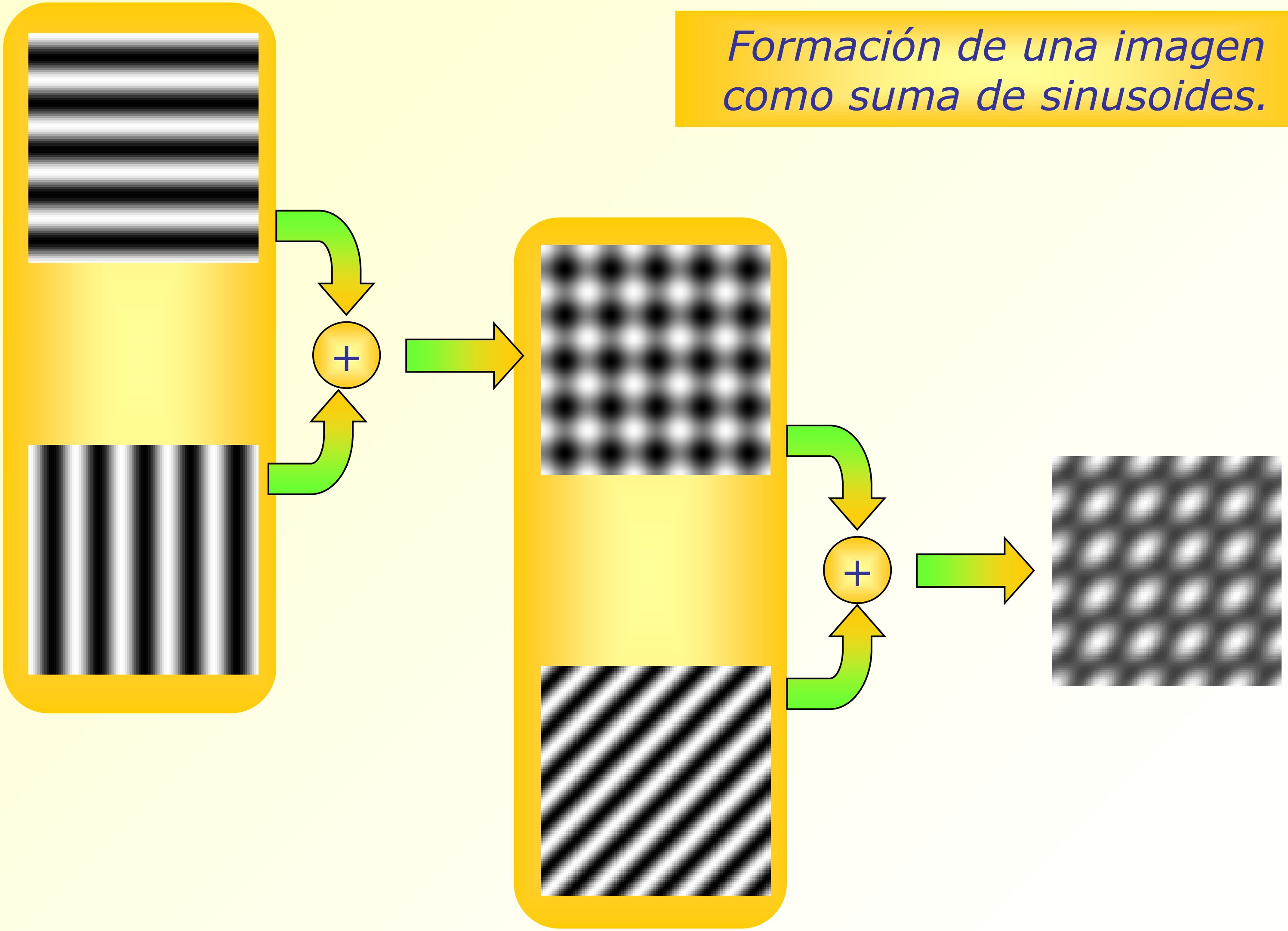








Formación de una imagen como suma de sinusoides.



La **transformada de Fourier** permite descomponer una señal como la suma ponderada de:

- Un término de frecuencia cero (**componente DC**).
- Una serie de términos sinusoidales (funciones base).

Cada una de las funciones base se denomina **armónico**:

El primer armónico se llama **fundamental** (frecuencia más baja).

El resto de armónicos son múltiplos (en frecuencia) del primero.

En el caso discreto se denomina Transformada Discreta de Fourier (**DFT**)

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) * e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u,v) * e^{j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}$$

IDFT: *transf. inversa*

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{NM}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)*e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)}$$

(Es una función compleja)

$$e^{j\varphi}=cos\varphi+j\,sin\varphi$$

... la transformamos en forma de senos y cosenos ...

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{NM}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)*\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)\right)-j\sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)\right)\right]$$

$$\begin{cases} F(u,v)=\mathrm{Re}(u,v)+j\,\mathrm{Im}(u,v) \\ \mathrm{Re}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{NM}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)*\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)\right) \\ \mathrm{Im}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{NM}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)*\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)\right)\right) \end{cases}$$

Parte real

Parte imaginaria

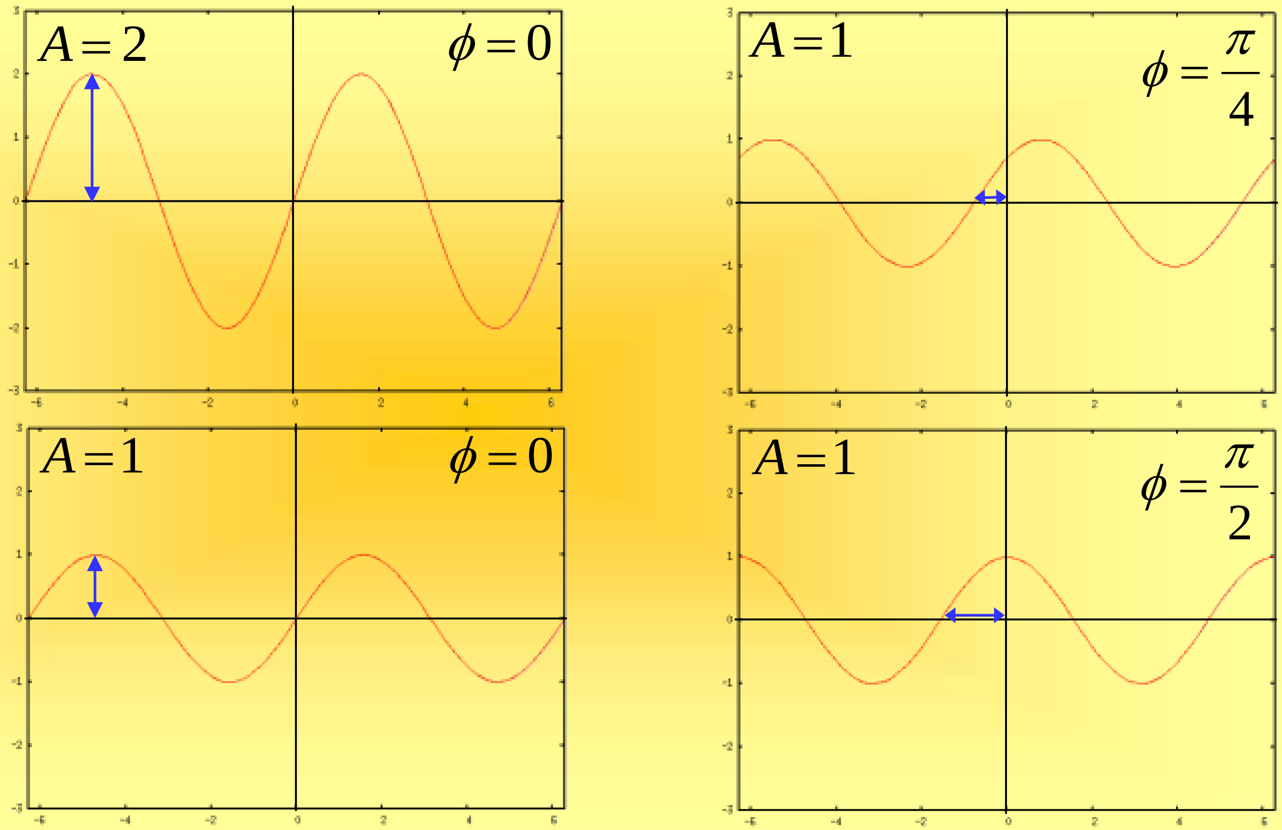
$$Magnitud = |F(u,v)| = \sqrt{\mathrm{Re}(u,v)^2 + \mathrm{Im}(u,v)^2}$$

La magnitud es la amplitud de la señal sinusoidal.

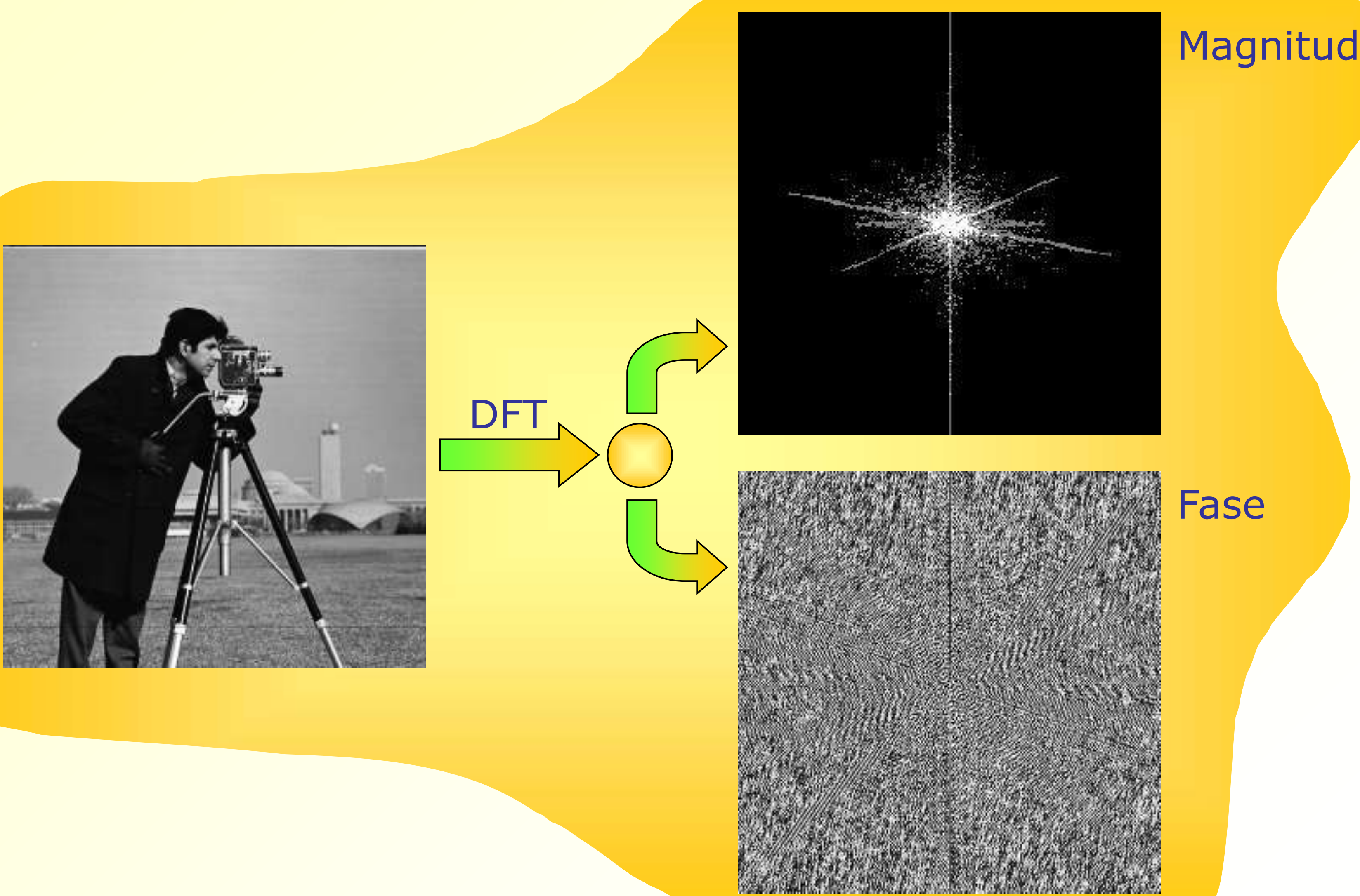
$$Fase = \phi(u,v) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right)$$

La fase indica el origen de la señal sinusoidal.

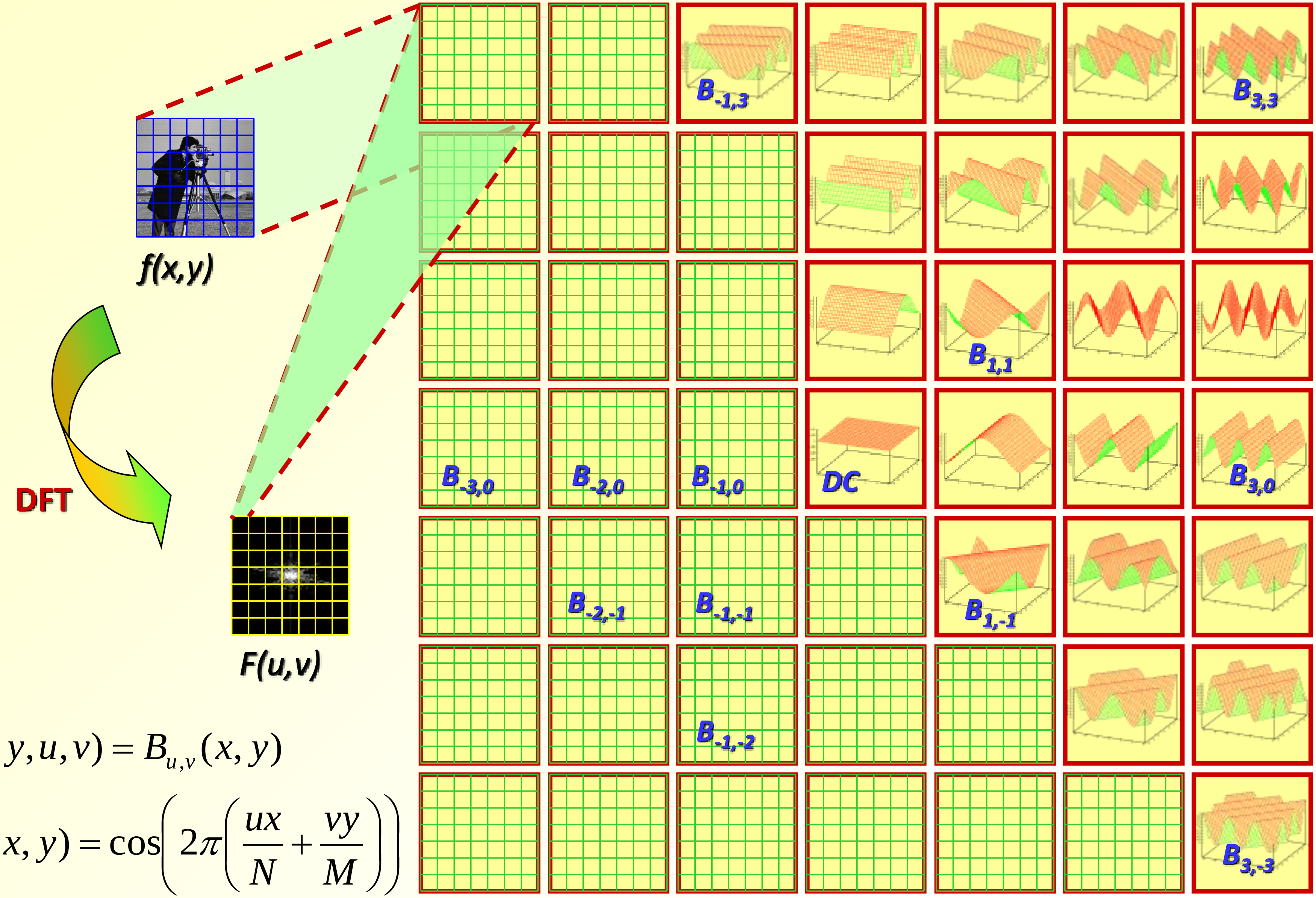
$A\sin(x+\phi)$



Ejemplo



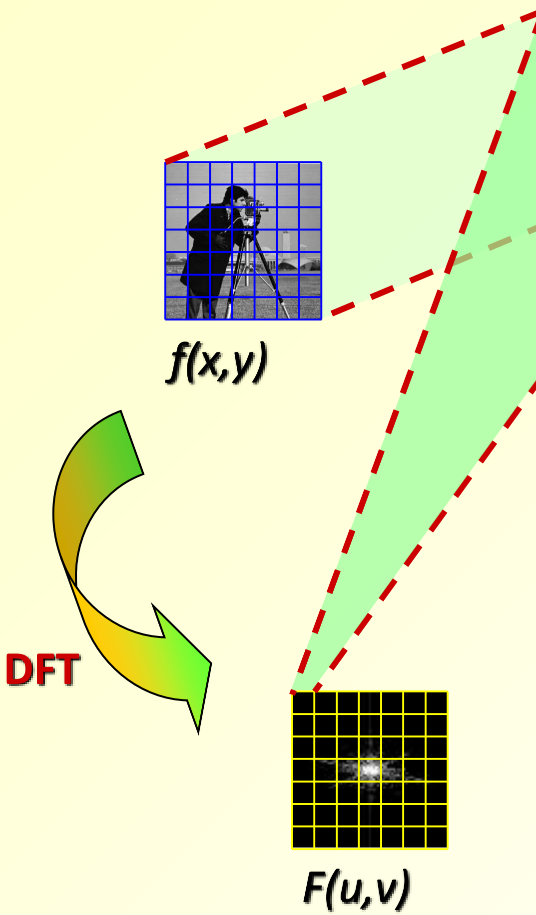
Las funciones base de la DFT (sólo cosenos)

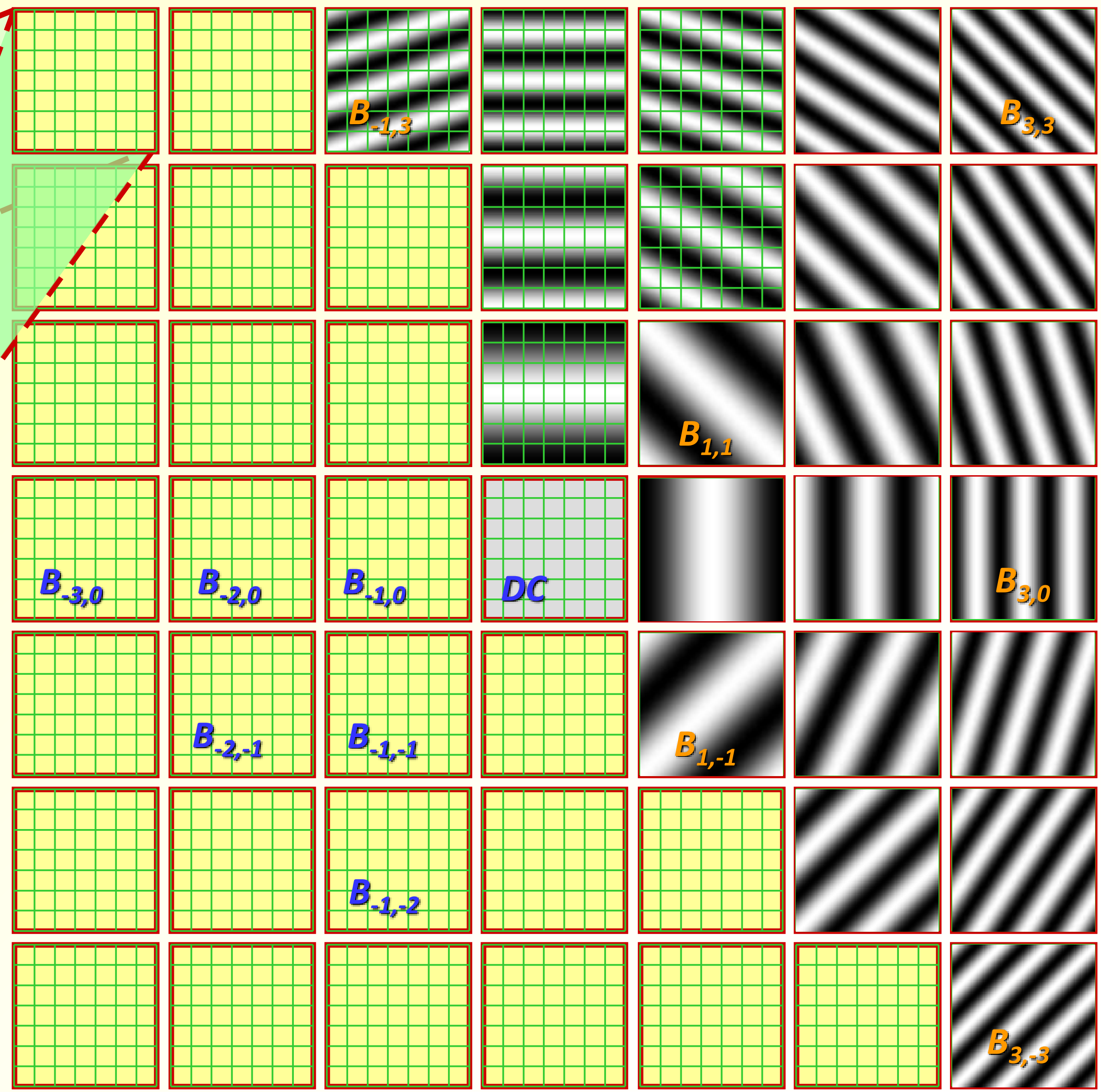


$$B(x,y,u,v) = B_{u,v}(x,y)$$

$$B_{u,v}(x,y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M}\right)\right)$$

Las funciones base de la DFT (sólo cosenos)



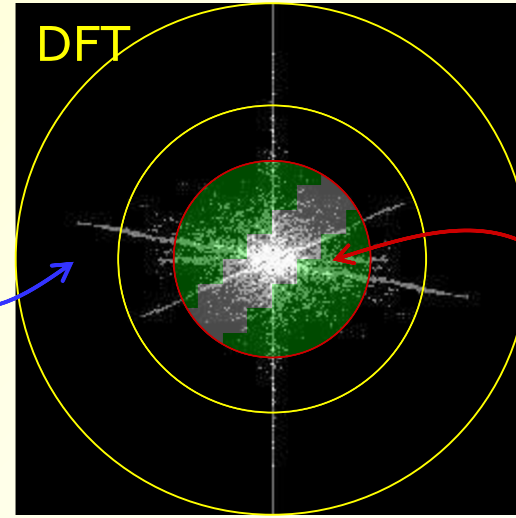


$$B(x,y,u,v) = B_{u,v}(x,y)$$

$$B_{u,v}(x,y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M}\right)\right)$$

Interpretación visual de la DFT

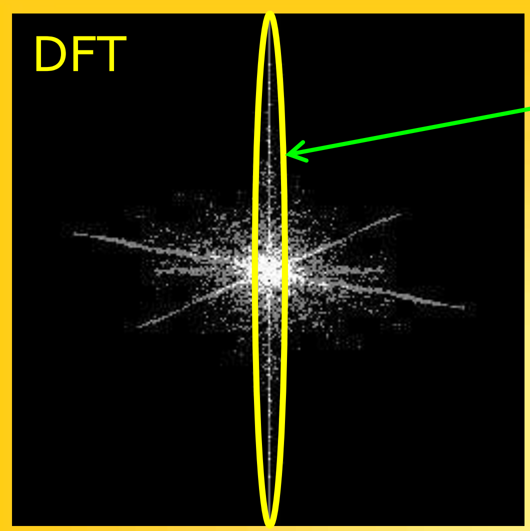
Frecuencias altas



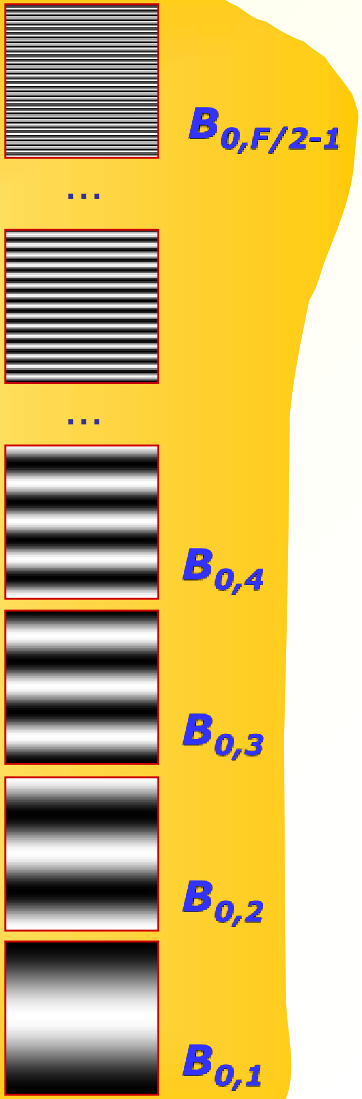
Frecuencias bajas

Los coeficientes almacenados en DFT son la *proyección de la imagen* mediante la función base correspondiente:

- Un **valor bajo** implica que la sumatoria es baja y, por tanto, que la imagen ***no*** *tiene formas similares a la función base*.
- Un **valor alto** implica que la sumatoria es alta y, por tanto, que la imagen ***si*** *tiene formas similares a la función base*.

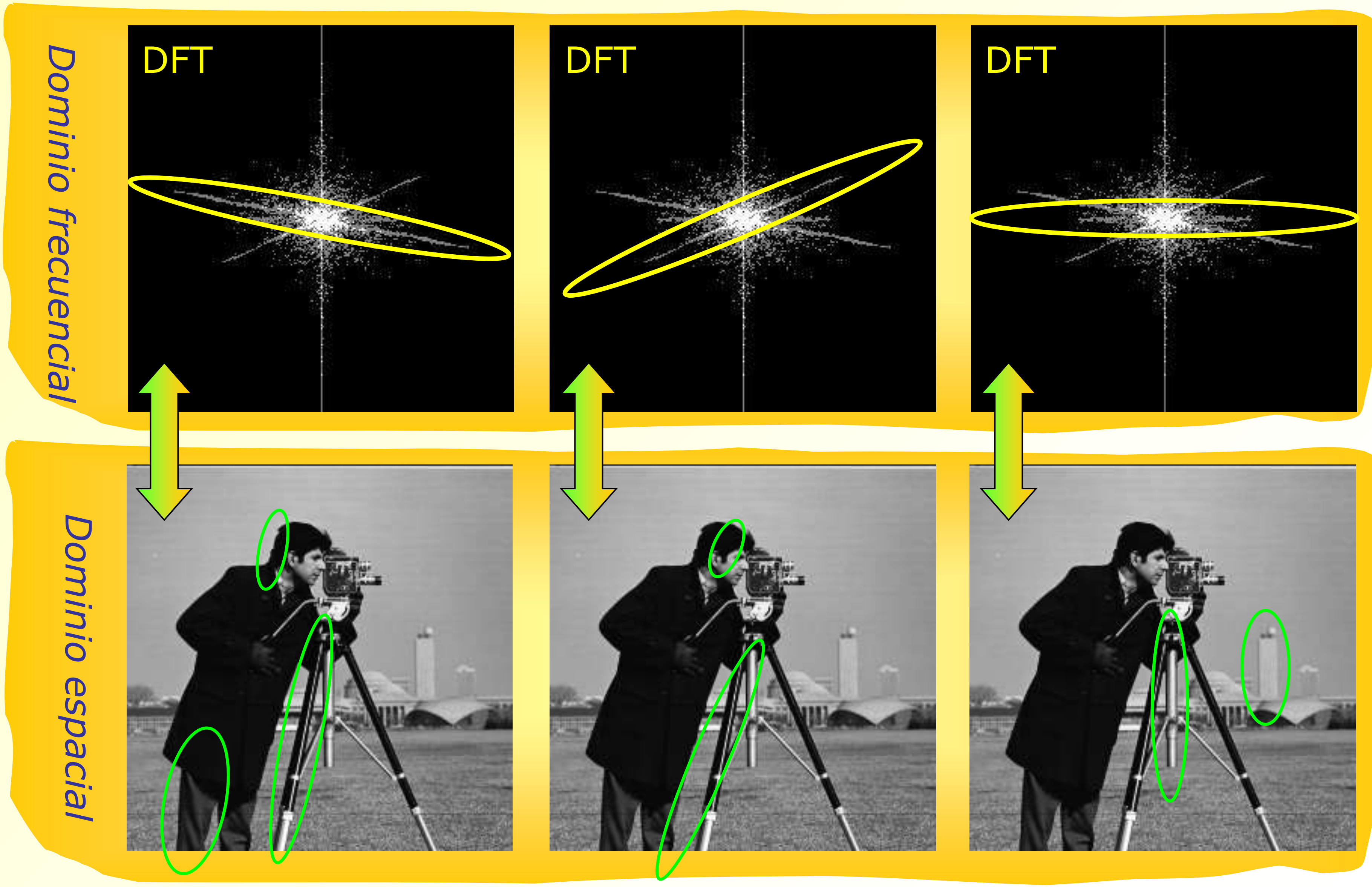


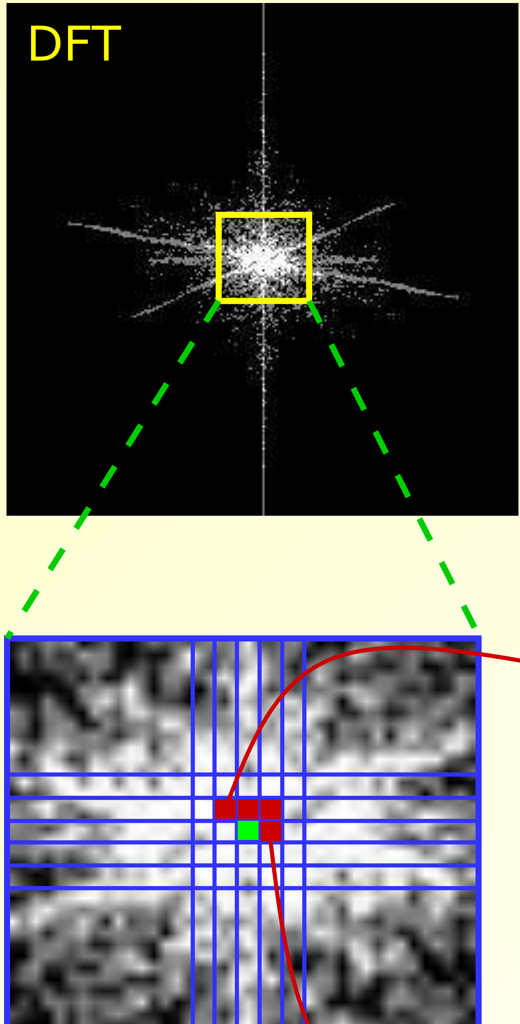
En esta zona (**vertical**) hay valores altos: Las sinusoidales correspondientes aportan mucha información.



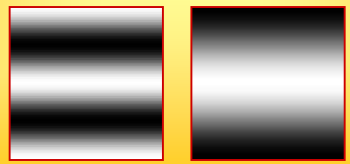
La suma ponderada de estos armónicos permite representar las **formas horizontales** de la imagen original.

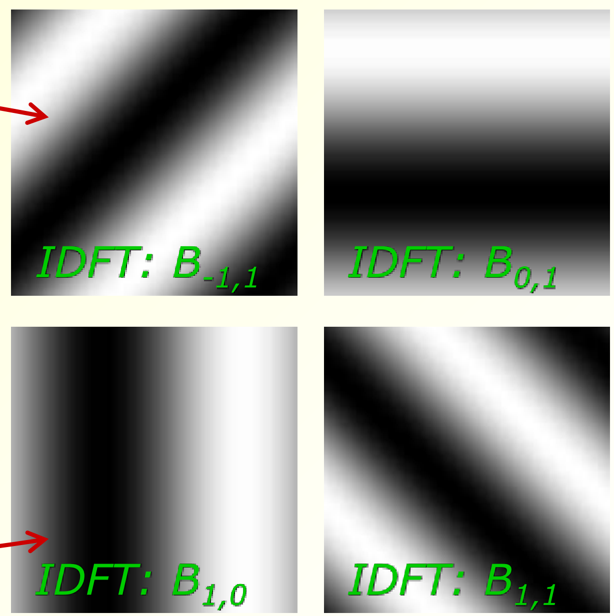
Interpretación visual de la DFT



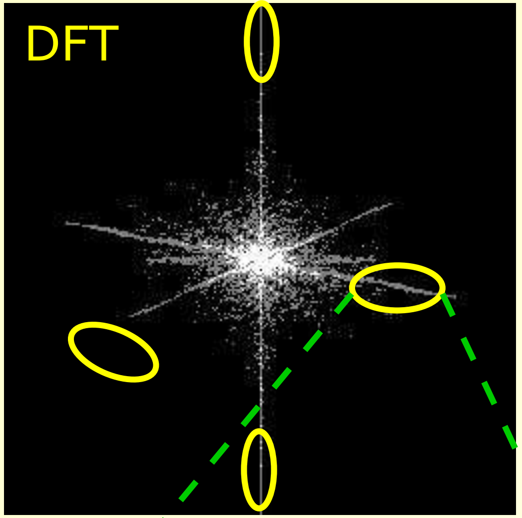


Frecuencias bajas: permiten representar zonas con poca variación de los niveles de gris.

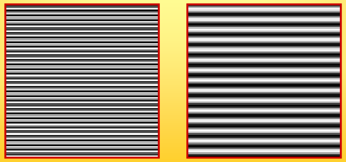


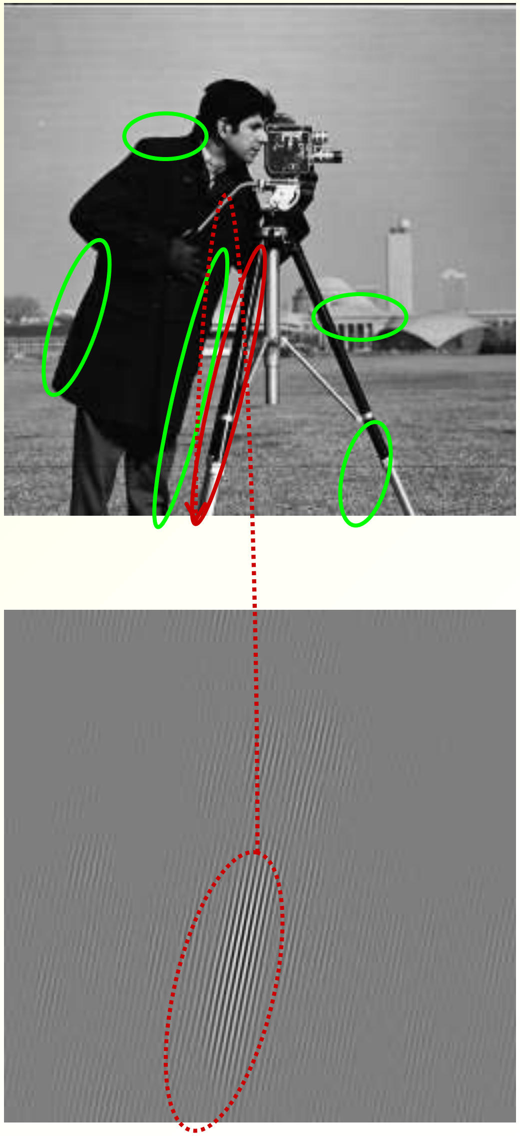


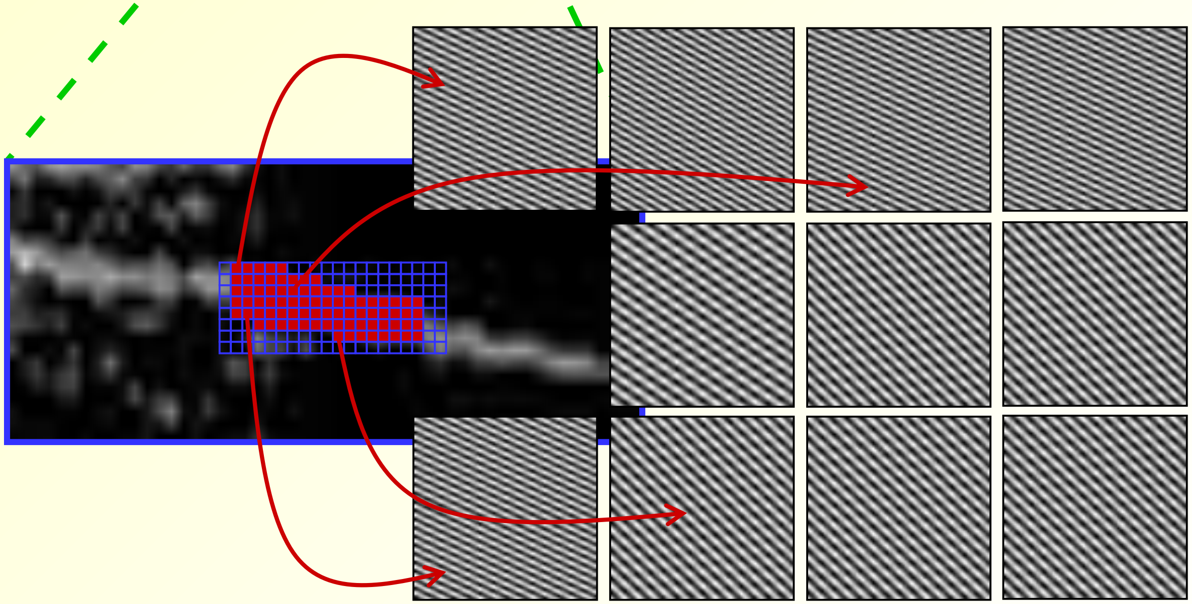
Interpretación visual de la DFT



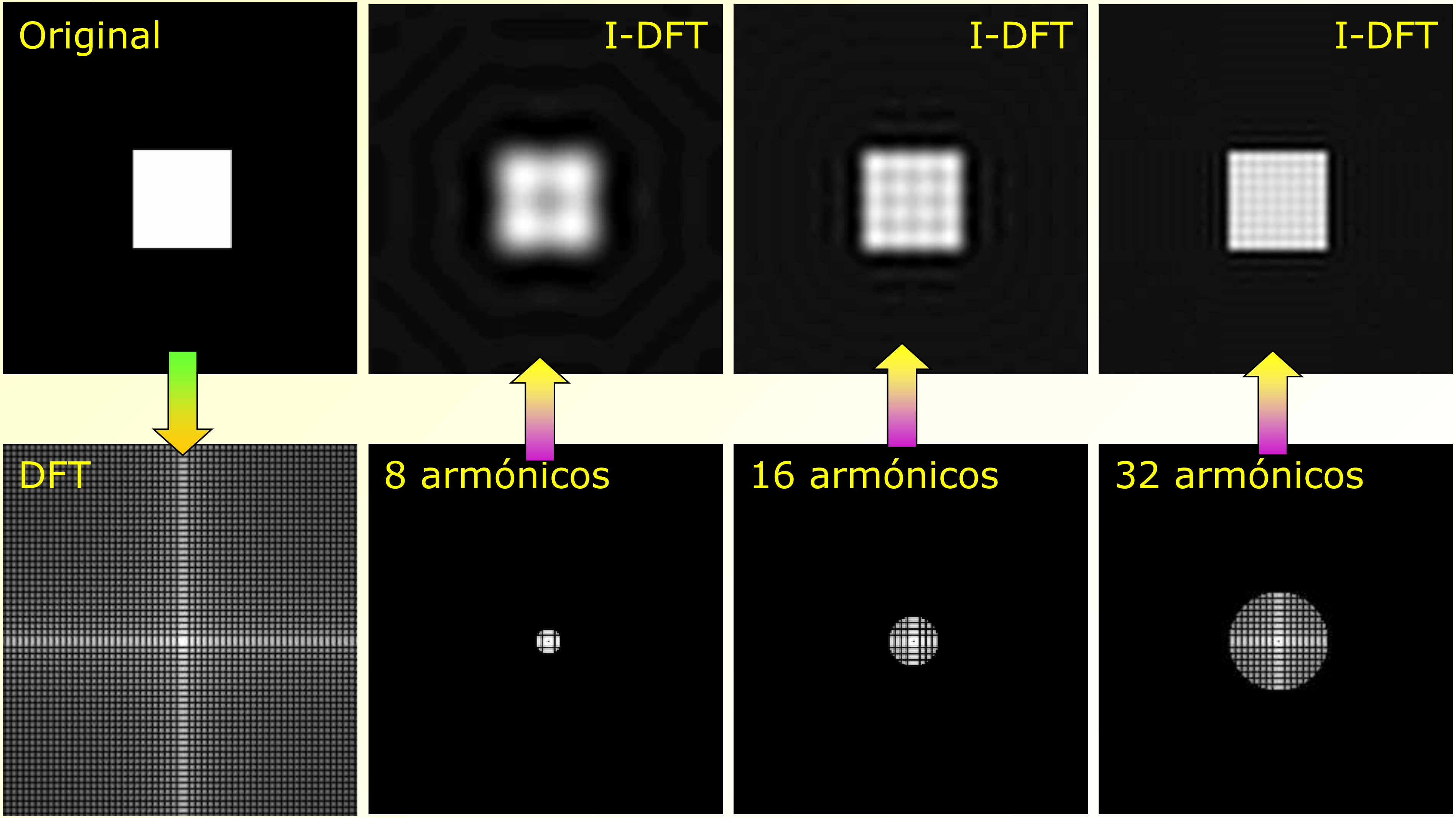
Frecuencias altas: permiten representar variaciones rápidas de los niveles de gris.



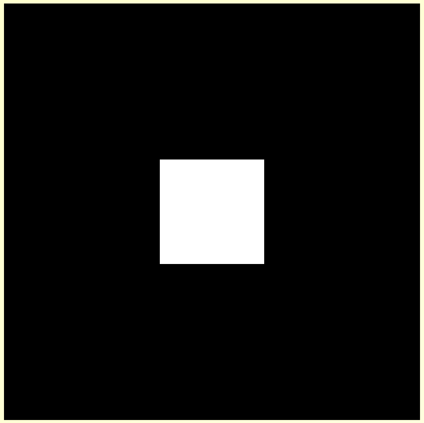
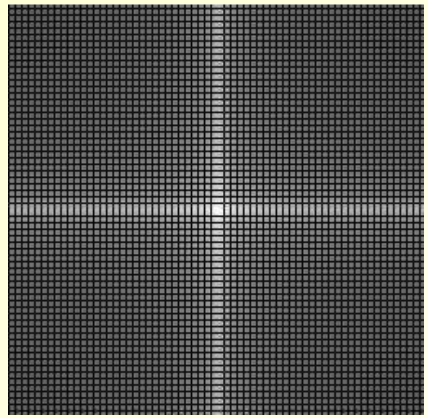
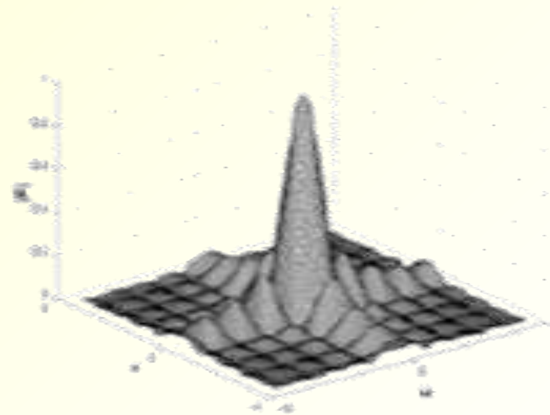




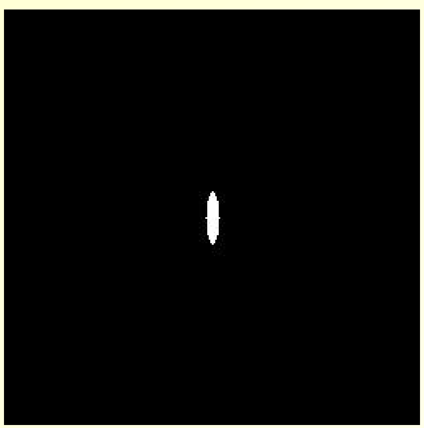
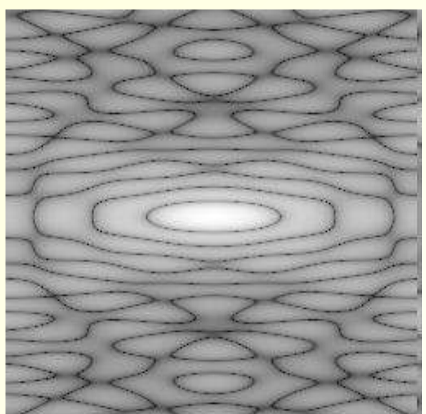
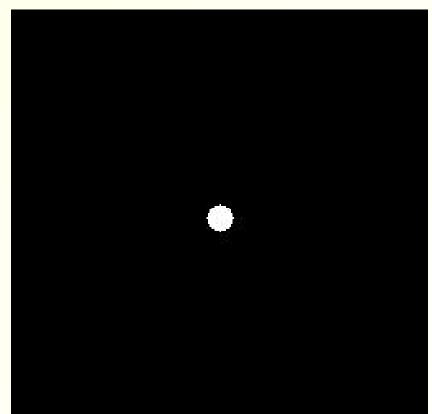
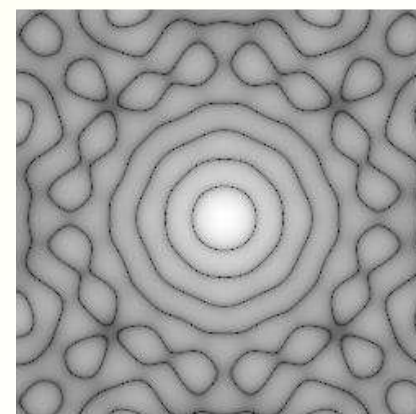
Ejemplo


Original
I-DFT
I-DFT
I-DFT
DFT
8 armónicos
16 armónicos
32 armónicos

Ejemplo

Original DFT

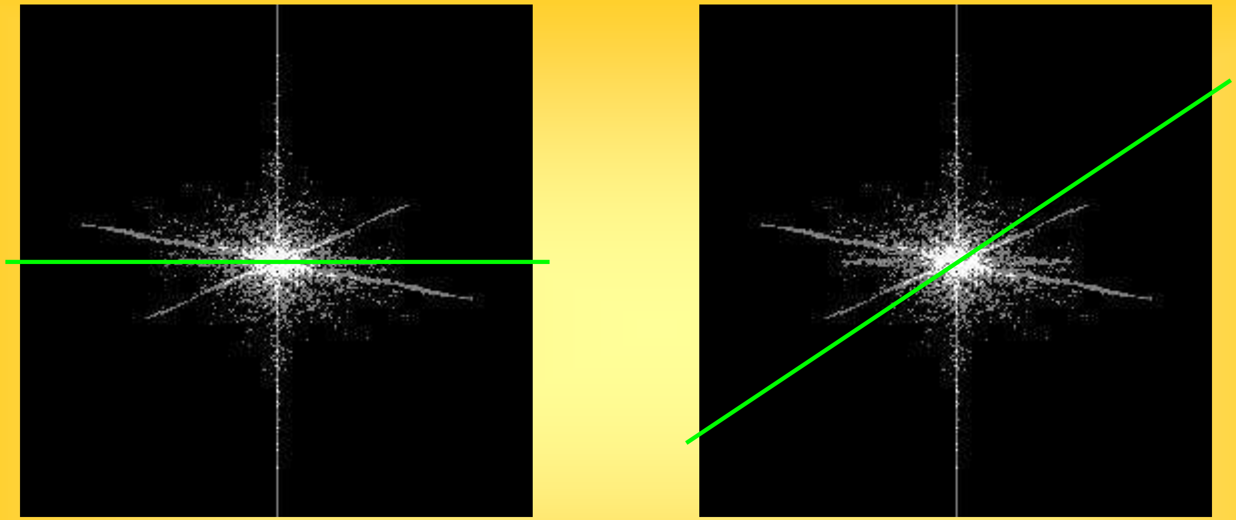





Original DFT Original DFT

Cuando la imagen que vamos a transformar es real (sus coeficientes):

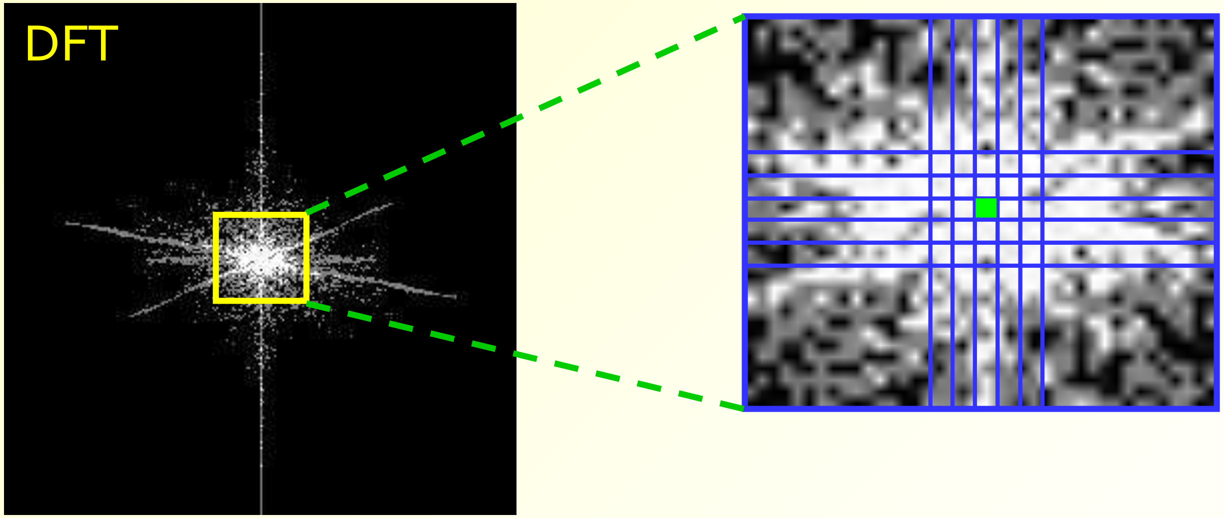
- La DFT es una imagen compleja.
- La DFT es simétrica (propiedad de simetría conjugada).

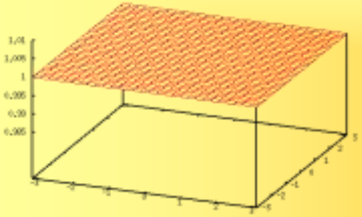
$$F(u,v) = F^{*}(-u,-v) \qquad |F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$



Existe simetría respecto de cualquier eje que pase por (0,0).

El coeficiente **DC** (*valor central*) de la DFT coincide con el **nivel medio de gris** de la imagen.



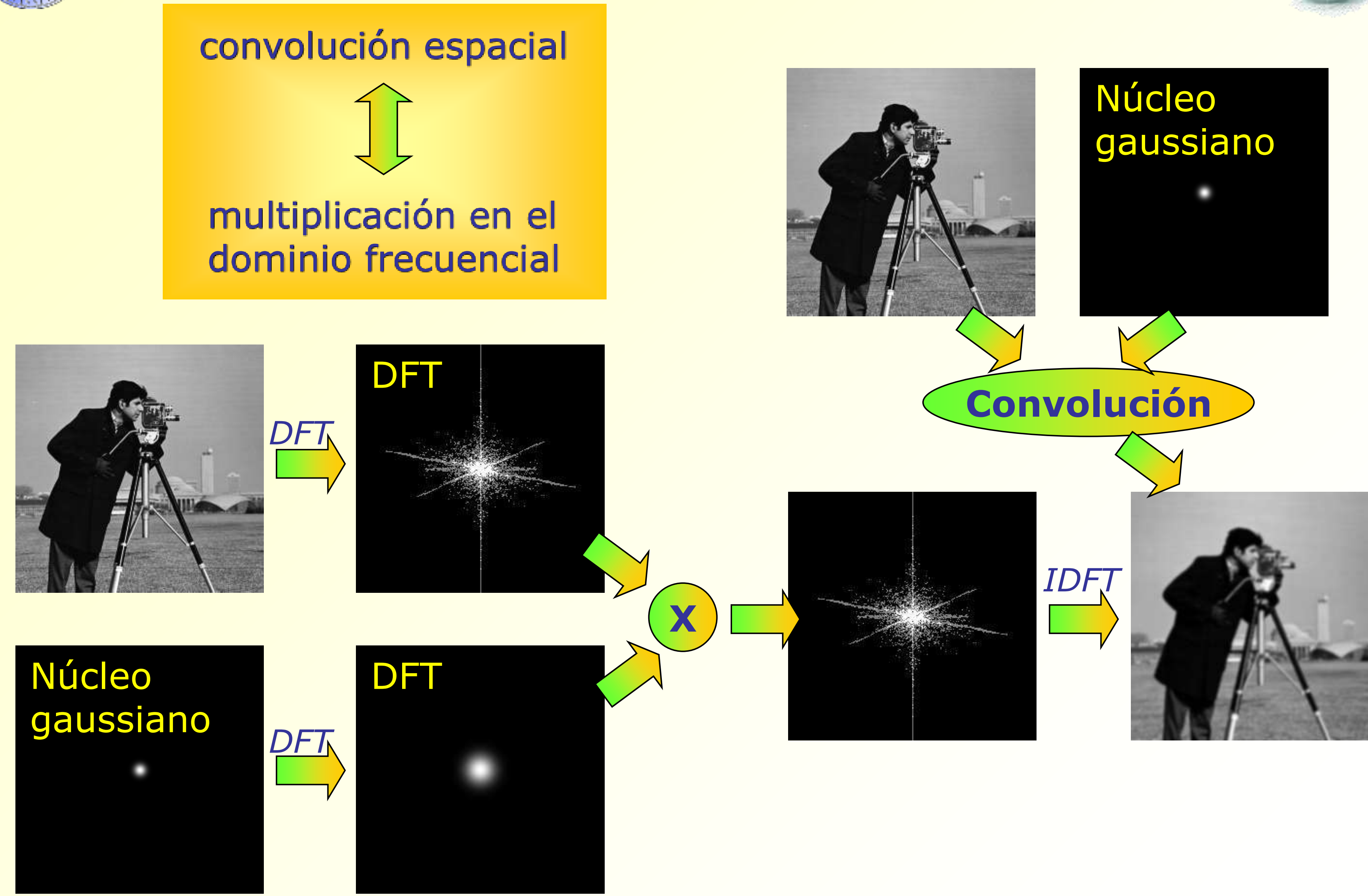


$$B(x,y,0,0)=1$$

$$F(0,0)=\frac{1}{\sqrt{NM}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)*B(x,y,0,0)$$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{NM}}F(0,0)$$

Algunas propiedades



El cálculo de la DFT es costoso: $O(N^4)$

Existe un algoritmo: $O((N*Log_2(N))^2)$

Fast Fourier Transform (FFT)

FFTW (http://www.fftw.org) : Software libre para calcular DFT. *Implementa la FFT de manera muy eficiente.*

Filtrado Frecuencial

¿Qué es una transformada?

La transformada de Fourier

Filtros en el dominio frecuencial

Los filtros en el dominio frecuencial permiten atenuar o realzar ciertos grupos de frecuencias:

- Filtros paso bajo. Atenuan las altas frecuencias.
- Filtros paso alto. Atenuan las bajas frecuencias.
- Filtros paso banda. Atenúan ciertas bandas de frecuencia.

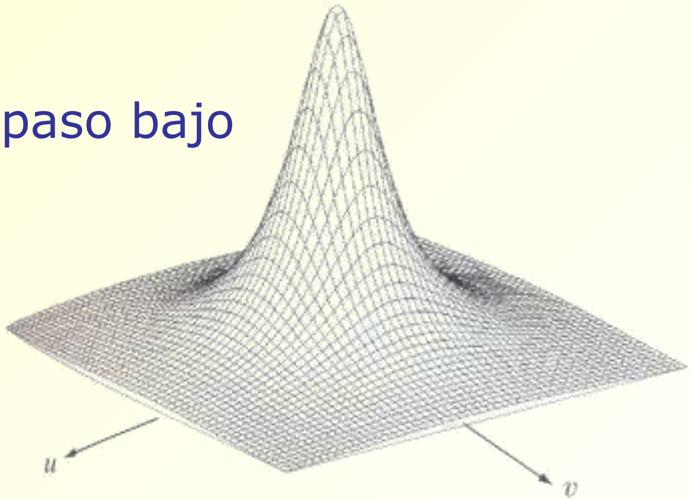
En el dominio frecuencial, el filtrado consiste en una multiplicación de la función por el filtro punto a punto.

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{DFT}} \left.\begin{matrix} F(u,v) \\ \times \\ H(u,v) \end{matrix}\right\} \rightarrow R(u,v) \xrightarrow{\text{DFT}^{-1}} r(x,y)$$

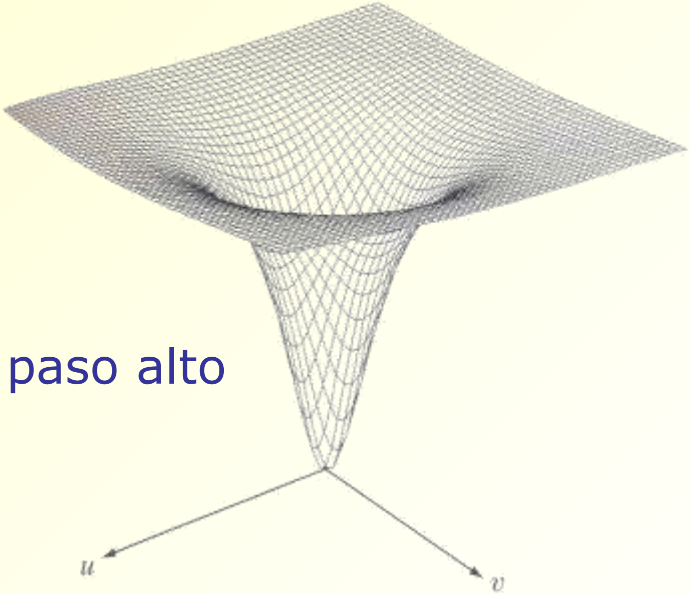
… y además, es equivalente a la convolución:

$$f(x,y) \otimes h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

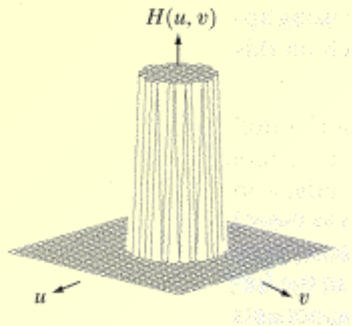
Filtro paso bajo

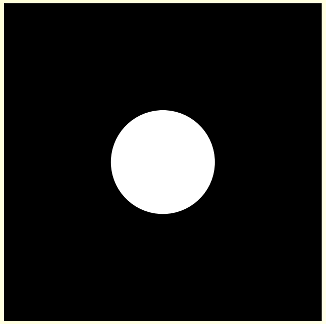


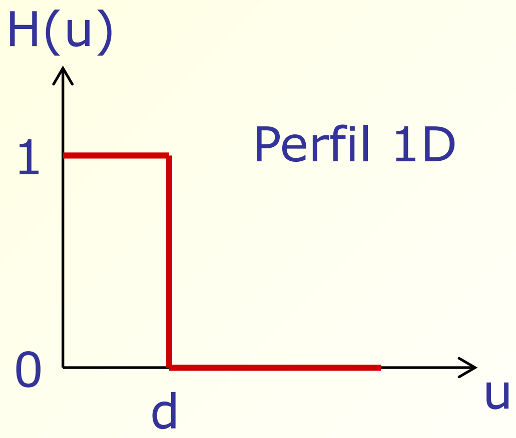
Filtro paso alto



Filtro ideal paso bajo







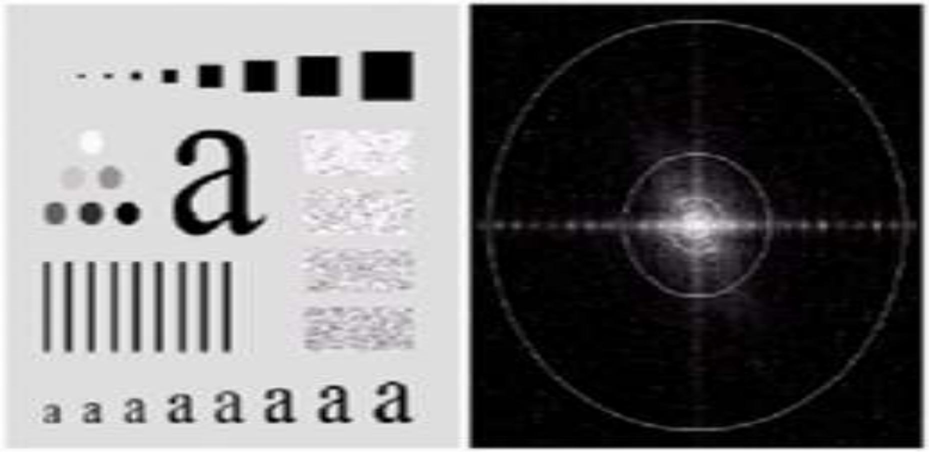
d = frecuencia de corte

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & si \quad \sqrt{u^2+v^2}\le d\\ 0 & si \quad \sqrt{u^2+v^2}> d\end{cases}$$

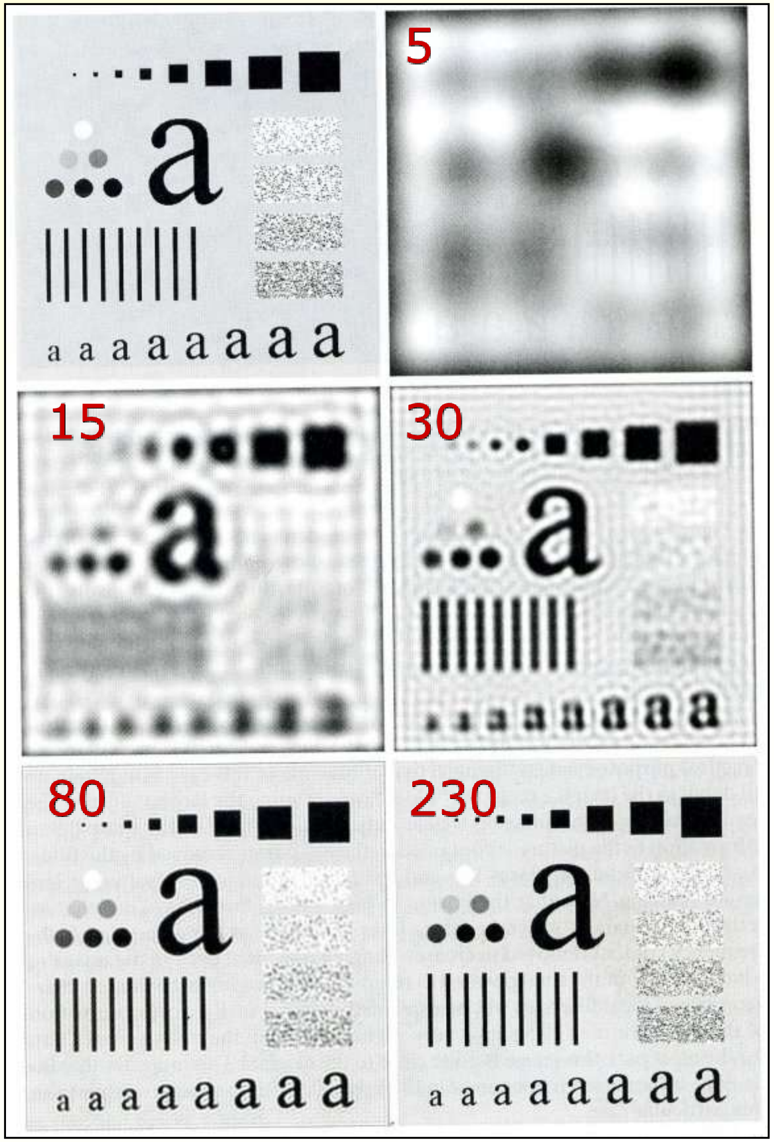
Las frecuencias interiores al círculo se dejan intactas.

Las frecuencias de la zona externa al círculo se anulan.

Filtro ideal paso bajo



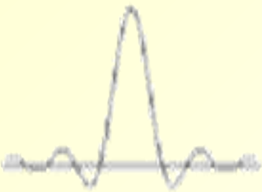
Original DFT

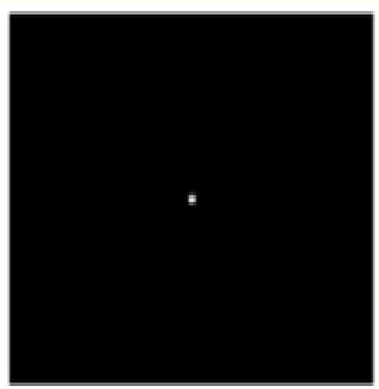


Círculos concéntricos

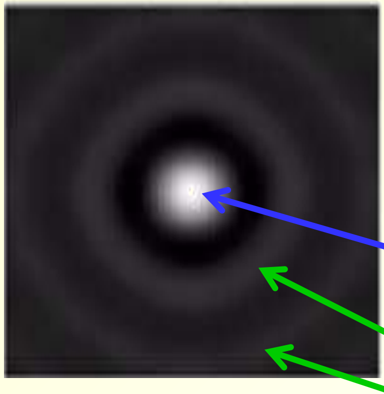
Radio	*%espectro*
5	92.0 %
15	94.6 %
30	96.4 %
80	98.0 %
230	99.5 %

¿Por qué se produce el efecto de anillado (ringing)?





Filtro ideal



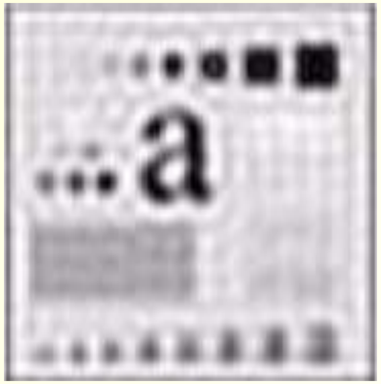
DFT del filtro

$$f(x,y) \otimes h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

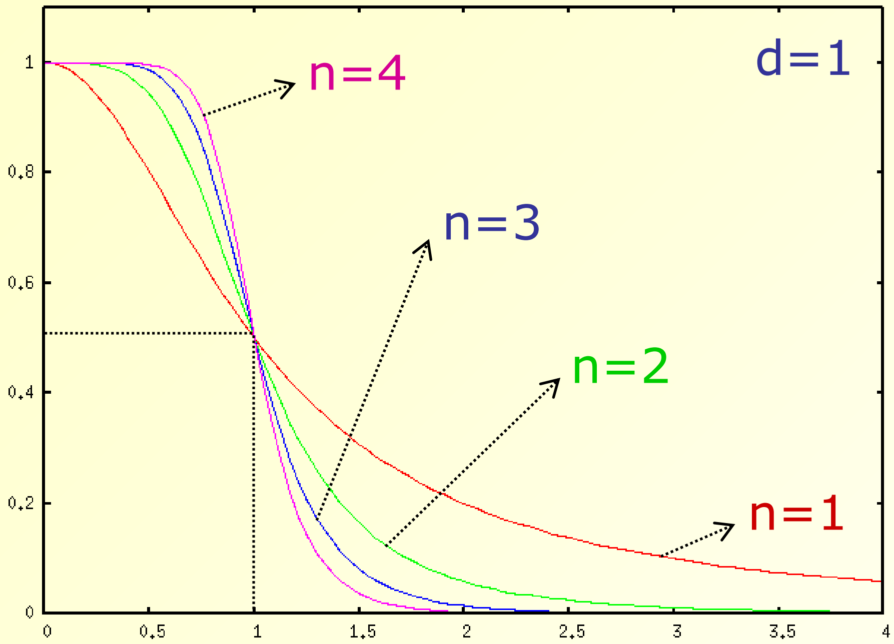
Al convolucionar en el dominio espacial:

Produce suavizado

Producen anillado



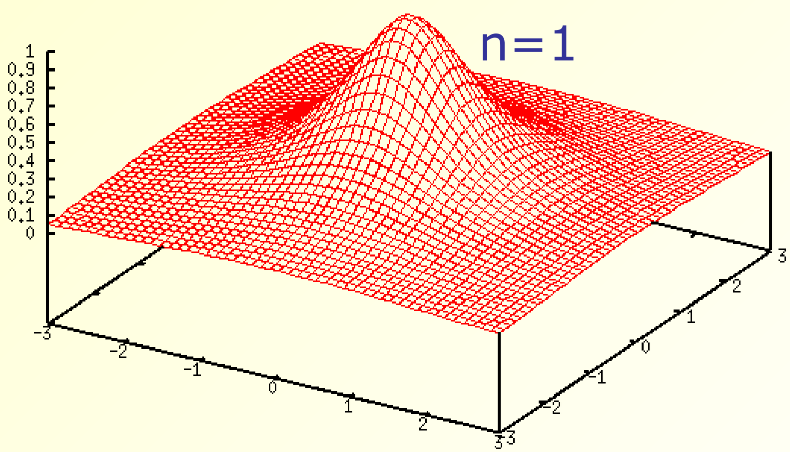
Filtro de Butterworth (paso bajo)

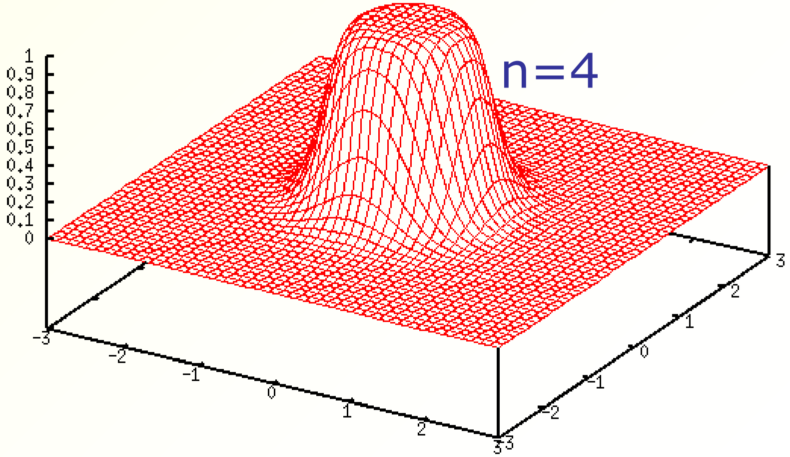


$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{d} \right)^{2n}}$$

La caída es suave.

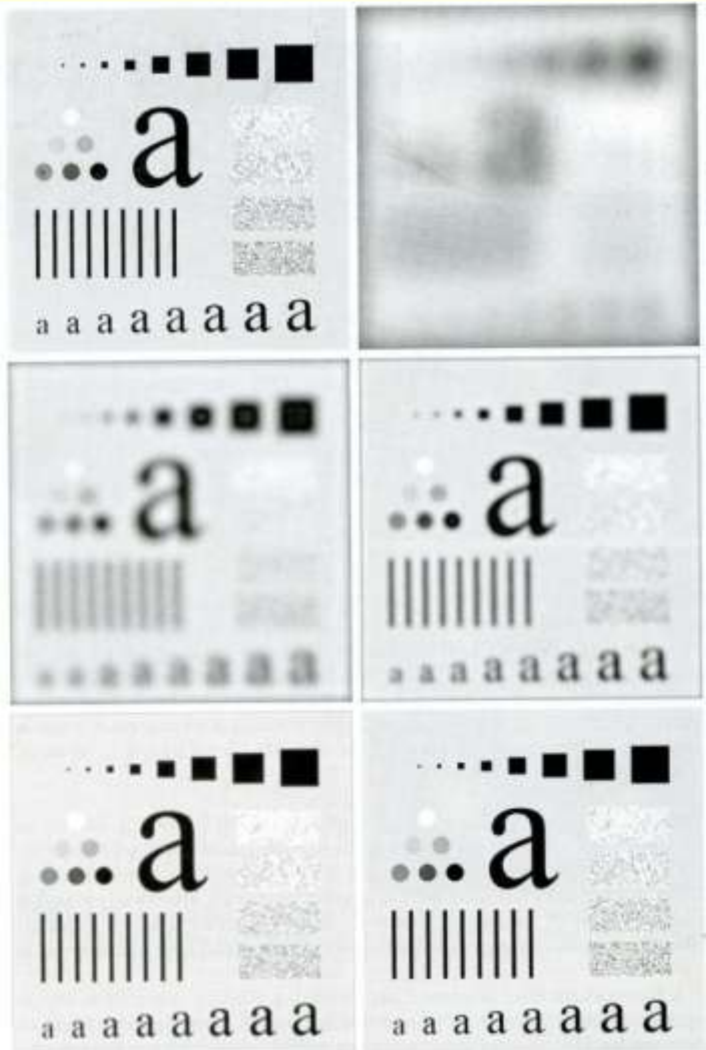
Se reduce el efecto de anillado si n es pequeño.





Filtro de Butterworth (paso bajo)

Ejemplo de filtrado con Butterworth de orden 2 en todos los casos (n=2).



Original

d=5

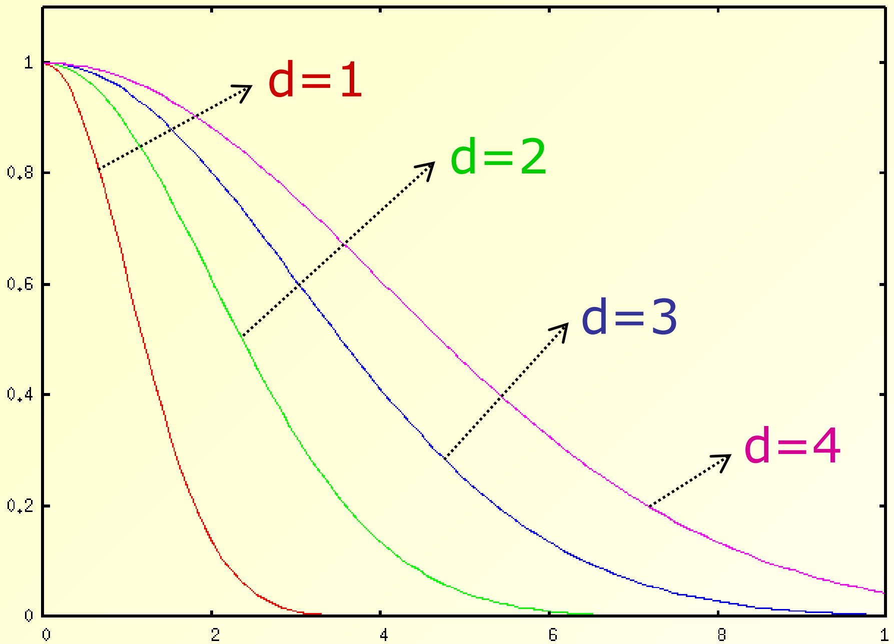
d=15

d=30

d=80

d=230

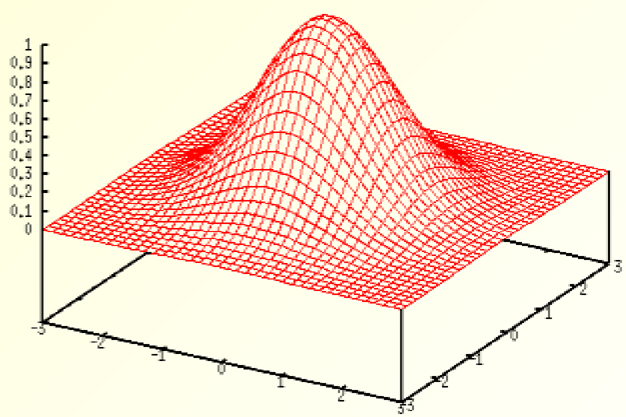
Filtro gaussiano (paso bajo)

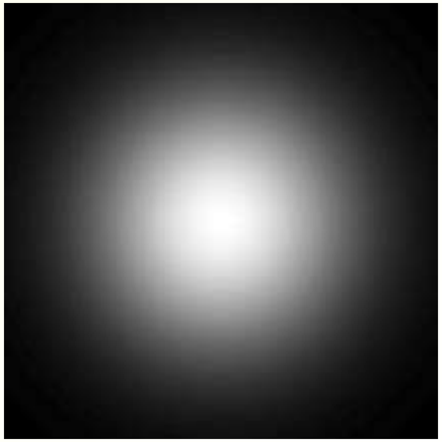


$$H(u,v) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2d^2}}$$

La caída es suave.

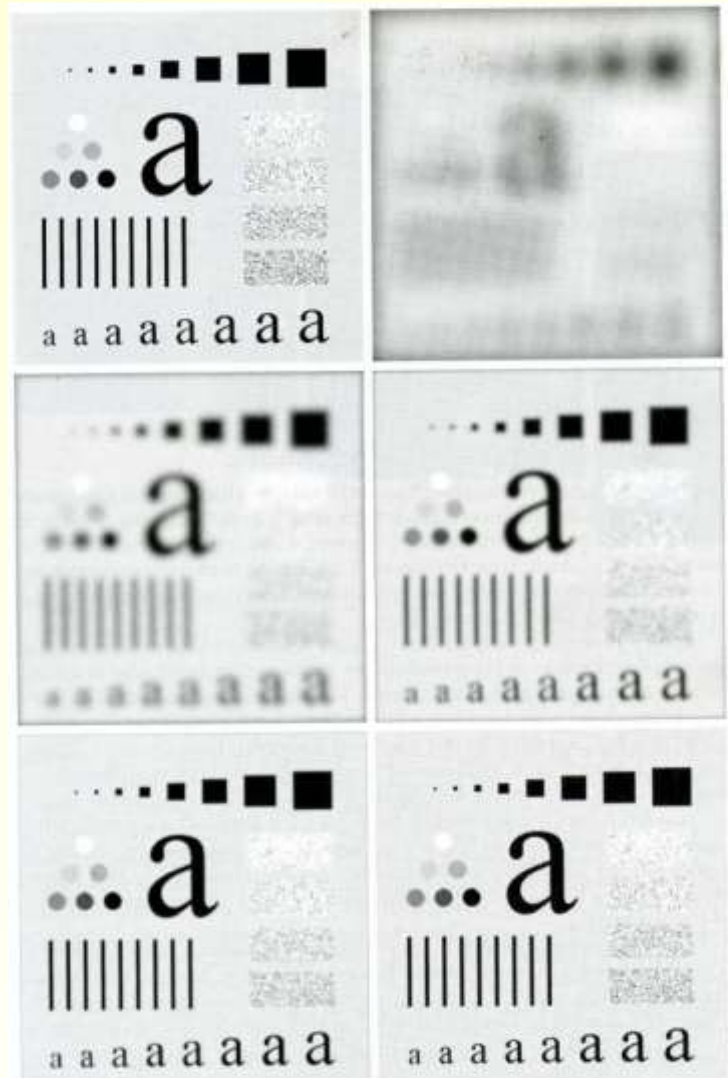
Elimina el efecto de anillado.





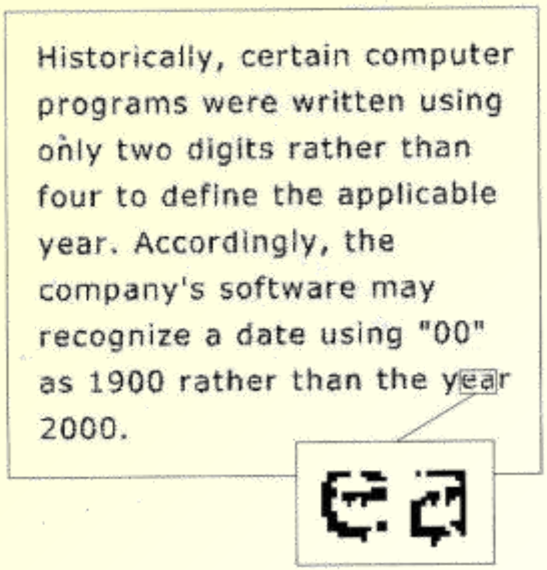
Filtro gaussiano (paso bajo)

Ejemplo de filtrado gaussiano.

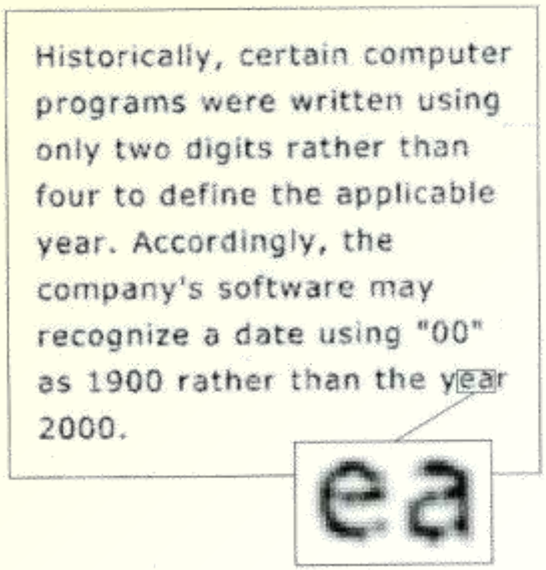


Ejemplo filtro paso bajo

Original



Filtrada paso-bajo



En la imagen original las letras están desconectadas. Esto dificultará posibles aplicaciones de reconocimiento de letras.

Filtro ideal paso alto

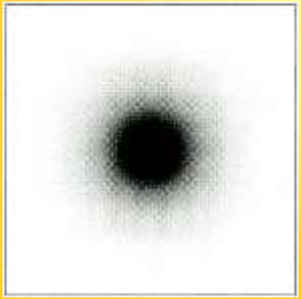
$$H(u,v)=\begin{cases}0 & si \quad \sqrt{u^2+v^2}\le d \\ 1 & si \quad \sqrt{u^2+v^2}> d\end{cases}$$

Las frecuencias interiores al círculo se anulan.

Las frecuencias de la zona externa al círculo se dejan intactas.

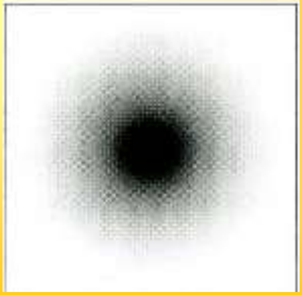
Filtro Butterworth paso alto

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{d}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^{2n}}$$

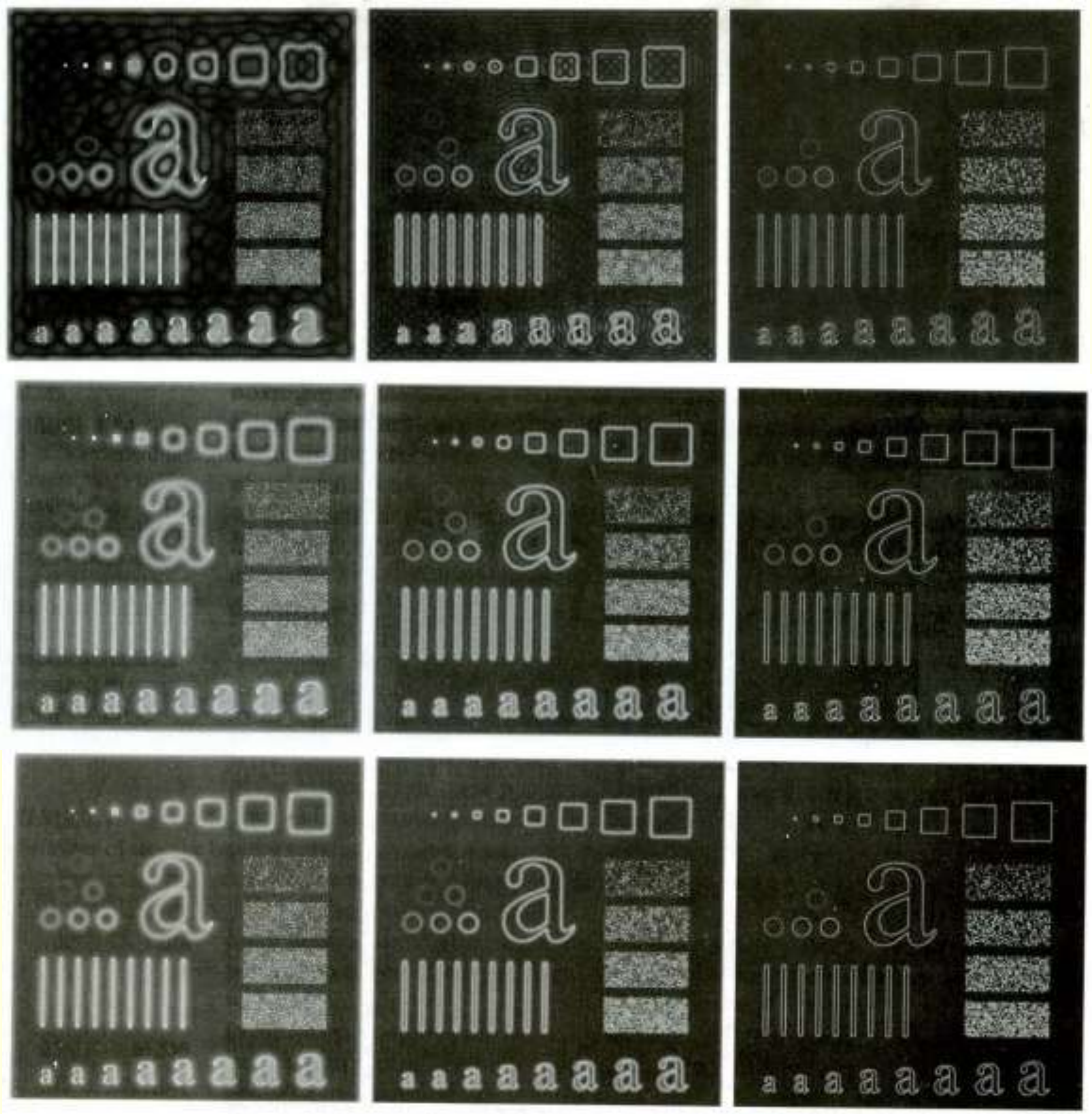


Filtro gaussiano paso alto

$$H(u,v)=1-e^{-\frac{x^2+y^2}{2d^2}}$$



Filtros paso alto



Filtro ideal con d=15, d=30, d=80

Filtro butterworth (n=2) y d=15, d=30, d=80

Filtro gaussiano con d=15, d=30, d=80