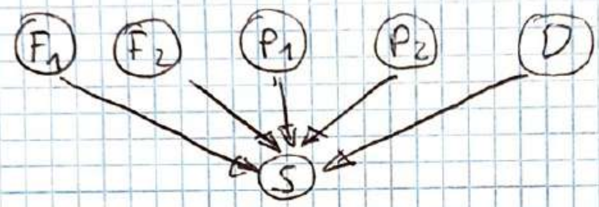
1 · Datos

- Red bayesiana para evaluar fiabilidad de un ordenador.
- Dos procesadores, dos ventiladores para los procesadores.
- Una fuente de alimentación y un disco duro.
- una variable para cada componente (indica si funciona o no)
- Solo hay enlaces de las variables al sistema.



- El sistema funciona si al menos un F va bien, al menos un P va bien y D va bien.
- $P(S \mid F_1, F_2, P_1, P_2, D)$

○ Escribe la función determinista para la distribución de probabilidad condicional de la variable S y obtén la representación como tabla de esta distribución condicional.

○ $P(S \mid F_1, F_2, P_1, P_2, D) \begin{cases} 1 & \text{si } (F_1 \text{ or } F_2) \text{ and } (P_1 \text{ or } P_2) \text{ and } D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

F_1 F_2 P_1 P_2 D

S

S = 0								
S = 1								
	P_1	$\sim P_1$	P_1	$\sim P_1$	P_1	$\sim P_1$	P_1	$\sim P_2$
	P_2	P_2	$\sim P_2$	$\sim P_2$	P_2	P_2	$\sim P_2$	$\sim P_2$
	F_1	F_1	F_1	F_1	$\sim F_1$	$\sim F_1$	$\sim F_1$	$\sim F_1$
	F_2	F_2	F_2	F_2				
	D	D	D	D				

F_1	F_2	P_1	P_2	D
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~			

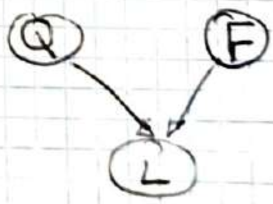
F_1	F_2	P_1	P_2	D
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
0	1	0	0	0

F_1	F_2	P_1	P_2	D
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1

5	4

2 • Datos

- Las variables son binarias
- Tabla de probabilidad para el potencial asociado a $P(L \mid Q, F)$ considerando el modelo Noisy-OR con



0.8 de que $Q \rightarrow L$
0.9 de que $F \rightarrow L$
$\lambda_0 = 0.0001$

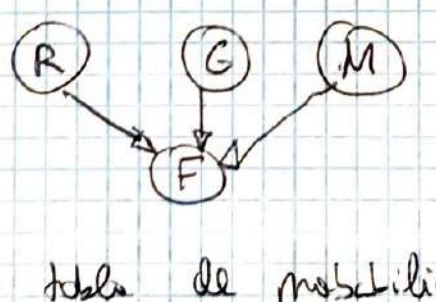
Q, F	L
0 0	0
0 1	0.9
1 0	0.8
1 1	0.98

- $P(L_1 \mid Q_1, F_0) = 0.8$
- $P(L_1 \mid Q_0, F_1) = 0.9$
- $P(L_0 \mid Q_1, F_1) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$
- $P(L_1 \mid Q_1, F_1) = 0.98$

$\circ\ P(L_0 \mid Q_1, F_1) = (1-\lambda_0)\cdot(1-0.8)\cdot(1-0.9)$
$= 0.9999 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.019998$

Q	F	L = 0	L = 1	
0	0	0.999	0.001	✓ $0{,}999 \times 0.1$ $1-(0.999 \times 0.2$
0	1	$0.999 \cdot 0.1$	~~0.9~~	$1-(\cancel{0{,}9 \cdot 0.001}) = 0.9991$ ✓
1	0	$0.999 \cdot 0.2$	0.8	$1-(0.8 \cdot 0{,}0001) =$ ✓
1	1	$0.999 \cdot 0.2 \cdot 0{,}1$	0.988	$1-(\cancel{0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0.0001})$ ✓
				$1-(0.9999 \times 0.1 \times 0.2$

• La fiebre puede estar causada por tener un resfriado, por tener gripe o por tener la malaria. Supongamos que R, G, M causan fiebre de forma independiente, y que la probabilidad condicionada de fiebre dadas las causas puede expresarse ~~como~~ con un modelo Noisy-OR. Un resfriado causa una fiebre con una probabilidad de 0.4, gripe → resfriado con 0,8 y malaria → 0,9. Supongamos una probabilidad residual de fiebre de 0.005.



$\lambda_1 = 0{,}005$

- Obtener tabla de probabilidades

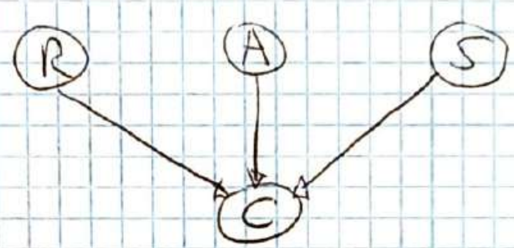
- Tenemos que $P(C) = \alpha(C)$
- ~~Hay un total de 5 multiplicaciones y~~

$\underline{2^2 + 2^3}$

o

— o —

(4) Datos



cáncer pulmón = C
exposición gas radón = R
exposición abesto = A
fumador habitual = S
modelo Noisy-OR

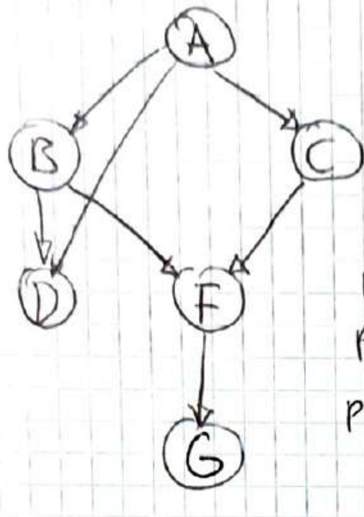
$P(C|R) = 0.8$
$P(C|A) = 0.7$
$P(C|S) = 0.4$
$\lambda_0 = 0.005$
variables binarias

- Obtén la tabla para la distribución de probabilidad condicional de padecer C dadas las posibles causas generada por un modelo Noisy-OR. No hace falta calcular el resultado de cada probabilidad.

R	A	S	C_0	C_1
0	0	0	$1-\lambda_0$	~~0,0~~ λ_0
0	0	1	$(1-\lambda_0)\cdot(1-P(C\|S))$	$\lambda_0 \cdot P(C\|S)$
0	1	0	$(1-\lambda_0)(1-P(C\|A))$	$\lambda_0 \cdot P(C\|A)$
0	1	1	$(1-\lambda_0)(1-P(C\|A))(1-P(C\|S))$	$\lambda_0 P(C\|A) P(C\|S)$
1	0	0	$(1-\lambda_0)(1-P(C\|R))$	$\lambda_0 P(C\|R)$
1	0	1	$(1-\lambda_0)(1-P(C\|R))(1-P(C\|S))$	$\lambda_0 P(C\|R) P(C\|S)$
1	1	0	~~$(1-\lambda_0) P(C\|R) P(C\|A)$~~ $(1-\lambda_0)(1-P(C\|R))(1-P(C\|A))$	$\lambda_0 P(C\|R) P(C\|A)$
1	1	1	$(1-\lambda_0)(1-P(C\|R))(1-P(C\|A))(1-P(C\|S))$	

$\lambda_0 \cdot P(C|R) \cdot P(C|S) \cdot P(C|A)$

6



$P(a_1) = 0,5$

$P(b_1|a_0) = 0,8$, $P(b_1|a_1) = 0,4$

$P(c_1|a_0) = 0,1$, $P(c_1|a_1) = 0,4$

$P(d_1|a_0,b_0) = 0,9$, $P(d_1|a_0,b_1) = 0,6$

$P(d_1|a_1,b_0) = 0,5$, $P(d_1|a_1,b_1) = 0,3$

$P(f_1|b_0,c_0) = 0,1$, $P(f_1|b_0,c_1) = 0,9$

$P(f_1|b_1,c_0) = 0,8$, $P(f_1|b_1,c_1) = 0,95$

$P(g_1|f_0) = 0,1$, $P(g_1|f_1) = 1$

a) Escribe las tablas de probabilidad de los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad

~~P(A)~~	~~A~~
~~0,5~~	~~0~~
~~0,5~~	

~~P(B)~~	~~A~~
~~0~~	~~0~~
	~~1~~

$\boxed{\begin{matrix} A_0 = 0,5 \\ A_1 = 0,5 \end{matrix}}$ P(A)

~~B_0~~	~~B_1~~	~~A~~
		~~0~~
		~~1~~
		~~0~~
		~~1~~

P(A)	A
0,5	0
0,5	1

A	B	P(B|A)
0	0	0,2
0	1	0,8
1	0	0,6
1	1	0,4

A	C	P(C|A)
0	0	0,9
0	1	0,1
1	0	0,6
1	1	0,4

~~G~~	~~F~~	~~P(G|F)~~
~~0~~	~~0~~	~~0,9~~
~~0~~	~~1~~	~~0,9~~
~~1~~	~~0~~	~~0,1~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~

A	B	D	P(D|A,B)
0	0	0	0,1
0	0	1	0,9
0	1	0	0,4
0	1	1	0,6
1	0	0	0,5
1	0	1	0,5
1	1	0	0,7
1	1	1	0,3

B	C	F	P(F|B,C)
0	0	0	0,9
0	0	1	0,1
0	1	0	0,1
0	1	1	0,9
1	0	0	0,2
1	0	1	0,8
1	1	0	0,05
1	1	1	0,95

G	F	P(G|F)
0	0	0,9
0	1	0
1	0	0,1
1	1	1

b) Suponiendo el algoritmo de inferencia de eliminación ~~de~~ de variables, calcula la tabla de probabilidad que se obtiene como resultado de combinar aquellos potenciales necesarios para poder eliminar la variable F. Usando el potencial resultante, calcula la tabla de probabilidad que se obtiene con la operación de marginalización al eliminar la variable F.

∘ participan en F: $P(G|F), P(F|B,C)$

$$\phi(F,B,C,G) = P(G|F) \cdot P(F|B,C)$$

F	B	C	G	$\phi(F,B,C,G)$
0	0	0	0	0,81
0	0	0	1	0,09
0	0	1	0	0,09
0	0	1	1	0,01
0	1	0	0	0,18
0	1	0	1	0,02
0	1	1	0	0,045
0	1	1	1	0,005
1	0	0	0	~~0,09~~ 0
1	0	0	1	0,1
1	0	1	0	~~0,10~~ 0
1	0	1	1	0,8
1	1	0	0	~~0,80~~ 0
1	1	0	1	0,05
1	1	1	0	~~0,45~~ 0
1	1	1	1	0,3

$$\phi(B,C,G) = \sum_F \phi(F,B,C,G)$$

B	C	G	$\phi(B,C,G)$
0	0	0	0,81
0	0	1	0,19
0	1	0	0,09
0	1	1	0,81
1	0	0	0,18
1	0	1	0,07
1	1	0	0,045
1	1	1	0,305

//

c) Supongamos que queremos obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable B considerando que no tenemos ninguna observación en las variables. Supón que las variables se eliminan en el orden {G, F, D, C, A}, detalla paso a paso los cálculos (combinación y marginalización)

...

Indica el número de multiplicaciones y de sumas que es necesario realizar en total en el proceso completo para obtener la distribución a posteriori de la variable B.

$T = \{P(A), P(B|A), P(C|A), P(D|A,B), P(F|B,C), P(G|F)\}$

- Seleccionamos G
- Calculamos

$$s(F) = \sum_F P(G|F)$$

$T = \{P(A), P(B|A), P(C|A), P(D|A,B), P(F|B,C), \cancel{P(G|F)}\ s(F)\}$

- Seleccionamos F.
- Calculamos

$$z(B,C) = \sum_F s(F) \cdot P(F|B,C)$$

$T = \{P(A), P(B|A), P(C|A), P(D|A,B), z(B,C)\}$

- Seleccionamos D
- Calculamos

$$q(A,B) = \sum_D P(D|A,B)$$

$T = \{P(A), P(B|A), P(C|A), q(A,B), z(B,C)\}$

- Seleccionamos C
- Calculamos

$$g(B,A) = \sum_C z(B,C) \cdot P(C|A)$$

$T = \{P(A), P(B|A), g(B,A), q(A,B)\}$

- Calculamos A

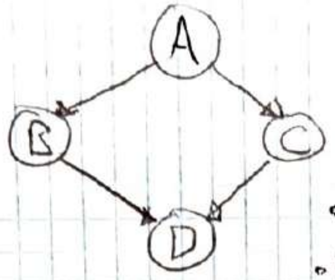
$$U(B) = \sum_A P(A) \cdot P(B|A) \cdot g(B,A) \cdot q(A,B)$$

- $U(B) = P(B)$ //

- Las sumas totales son 2^N, donde N son el número de variables de ~~entrada~~ salida y las multiplicaciones son 2^M donde M es el número de variables de entrada.

- Sumas = $2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^1 = 16$
- Multiplicaciones = $2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^2 = 32$

9) Supongamos la siguiente red bayesiana, donde todas sus variables son binarias



- $P(a_1) = 0,7$
- $P(b_1|a_1) = 0,4$ $\quad P(b_1|a_0) = 0,5$
- $P(c_1|a_1) = 0,6$ $\quad P(c_1|a_0) = 0,9$
- $P(d_1|b_1,c_1) = 0,98$ $\quad P(d_1|b_1,c_0) = 0,8$
- $P(d_1|b_0,c_1) = 0,9$ $\quad P(d_1|b_0,c_0) = 0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca el estado con subíndice 0 y luego el estado con subíndice 1 para cada una de las variables en la tabla.

A	P(A)
0	0,3
1	0,7

B	A	P(B|A)
0	0	0,5
0	1	0,6
1	0	0,5
1	1	0,4

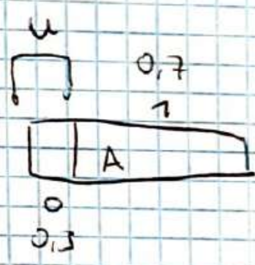
C	A	P(C|A)
0	0	0,1
0	1	0,4
1	0	0,9
1	1	0,6

D	B	C	P(D|C,B)
0	0	0	1
0	0	1	0,1
0	1	0	0,2
0	1	1	0,02
1	0	0	0
1	0	1	0,9
1	1	0	0,8
1	1	1	0,98

b) Supongamos que aplicamos el algoritmo de muestreo lógico para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable D considerando que tenemos observada la variable B con el valor $B = b_1$. Muestreamos las variables de la red siguiendo el orden A, B, C y D. Indica si al generar los siguientes números aleatorios con una distribución uniforme para obtener realizaciones de las variables {A, B, C, D} se acepta o rechaza la realización correspondiente, e indica cuál es la realización obtenida si esta es aceptada:

a) {0.1, 0.7, 0.6, 0.01} b) {0.2, 0.4, 0.1, 0.9}

a) ~~Como 0.1 < 0.5, entonces A = 0~~
~~Como 0.7 > 0.6, entonces B =~~



- Como u = 0.1 cae en el intervalo de entonces A = 0.
- Como u = 0.7 cae en el intervalo de B = 0, entonces se rechaza, ya que B = 1 según la observación

b)
- Como $0.2 < 0.3 \rightarrow A = 0$
- Como $A = 0$ y $0.4 == 0.4 \rightarrow B = 1$
- Como ~~B~~ $A = 0$ y $0.1 == 0.1 \rightarrow C = 0$
- Como $B = 1$ y $C = 0$ y $0.9 > 0.2 \rightarrow D = 1$

La realización obtenida es $X = \{0, 1, 0, 1\}$ y es aceptada ya que la observación de $B = 1$ se cumple.

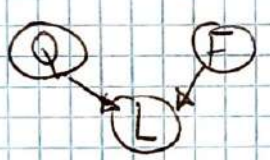
c) Supongamos que aplicando el algoritmo del paso anterior hemos obtenido las siguientes realizaciones. Obtén la distribución de probabilidad a posteriori para D dada la evidencia $B = b_1$, que proporciona los siguientes realizaciones.

A	B	C	D
0	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
0	1	1	0
1	1	0	1
0	1	1	1
1	1	1	1
1	1	0	1

D	B	P(D|B)
0	0	~
0	1	0,1
1	0	~
1	1	0,9

---

(10) Supongamos la siguiente red bayesiana



- $P(Q) = 0,7$
- $P(F) = 0,6$
- $P(L \mid Q, F) = 0,98$
- $P(L \mid Q, \overline{F}) = 0,8$
- $P(L \mid \overline{Q}, F) = 0,9$
- $P(L \mid \overline{Q}\,\overline{F}) = 0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado negado y luego el estado sin negar para cada una de las variables.

$\overline{Q}$	Q
0,3	0,7

$\overline{F}$	F
0,4	0,6

~~$\overline{L}$ L $\overline{Q}\,\overline{F}$ $\overline{Q}$ F Q $\overline{F}$ Q F~~

~~L $\overline{L}$ Q F Q $\overline{F}$ $\overline{Q}$ F~~

$\overline{L}$	L	
1	0	$\overline{Q}\,\overline{F}$
0,1	0,9	$\overline{Q}$ F
0,2	0,8	Q $\overline{F}$
0,02	0,98	Q F

h) Supongamos el algoritmo de ponderación por similitud. Úsalo para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable F considerando que se observa $L = l$. Se muestrean las variables de la red siguiendo el orden Q, F, L.

Al hacerlo se obtienen las realizaciones:

Q	F	L
q	f	l
$\bar{q}$	$\bar{f}$	l
$\bar{q}$	f	l
q	$\bar{f}$	l
q	f	l
$\bar{q}$	$\bar{f}$	l
q	f	l
$\bar{q}$	$\bar{f}$	l
$\bar{q}$	f	l
q	f	l

• Se debe obtener el peso asociado a cada realización y calcular la probabilidad a posteriori para F dada la evidencia $L = l$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

• $S(q,f,l) = \cancel{P(l|Q,f)}\ P(l|q,f) = 0,9$

• $S(\bar{q},\bar{f},l) = P(l|\bar{q},\bar{f}) = 0,2$

• $S(\bar{q},f,l) = P(l|\bar{q},f) = 0,2$

• $S(q,\bar{f},l) = 0,1$ / $\cancel{S(}$

• $W_F = 0,98 \cdot 4 + 0,9 \cdot 2 + 0,8 \cdot 1 = 6,52$

$\bar{F}$ F $\bar{L}$ L

~~$W_{Total} = 0,98 \cdot 4 + 0,9 \cdot 2$~~

• $W_{Total} = 0,98 \cdot 4 + 0,9 \cdot 2 + 0,8 \cdot 1 = 6,52$

• $W_F = 0,98 \cdot 4 + 0,9 \cdot 2 = 5,72$

$P(F|L) = \cancel{5,7}\ \cancel{6,52}\ \frac{5,72}{6,52} = 0,88$

$P(\bar{F}|L) = 0,12$