Modelos gráficos probabilísticos

Ejercicios de trabajo, parte 2

Curso 2024-2025

---

1. Tema 3

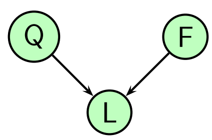
1. Se quiere construir una red bayesiana para evaluar la fiabilidad de un ordenador. El ordenador, entre otros componentes, dispone de dos procesadores, y dos ventiladores que refrigeran a los procesadores. Dispone de una fuente de alimentación y de un disco duro. En la red bayesiana tendremos una variable por cada uno de estos componentes que indica si tal componente está funcionando correctamente o no:

   - F1: Indica si el primer ventilador funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).
   - F2: Indica si el segundo ventilador funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).
   - P1: Indica si el primer procesador funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).
   - P2: Indica si el primer procesador funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).
   - D: Indica si el disco duro funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).
   - S: Indica si el sistema (ordenador) en su conjunto funciona correctamente o no (valores *true* o *false*).

   Supongamos que la red bayesiana tiene un nodo por cada una de las anteriores variables y que los únicos enlaces son los que hay desde las variables F1, F2, P1, P2 y D hacia la variable S. O sea S tiene como padres a todas las demás variables. Supongamos que el sistema funciona correctamente cuando funciona al menos uno de los ventiladores, funciona al menos uno de los procesadores y funciona el disco duro. Supondremos por tanto que la distribución de probabilidad para la variable S se puede dar con una función determinística de los padres: $P(S|F1, F2, P1, P2, D)$.

   Escribe la **función determinista** para la distribución de probabilidad condicional de la variable S y obtén la representación como tabla de esta distribución condicional.

2. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos (variables binarias).



   Escribe la tabla de probabilidad que se obtendría para el potencial asociado a la distribución $P(L|Q, F)$ si consideramos que viene definido con un **modelo noisy-or** en el que tenemos los siguientes parámetros: probabilidad 0.8 de que Q cause L, probabilidad 0.9 de que F cause L y una probabilidad residual de $\lambda_0 = 0.0001$. Los números de la tabla de probabilidad pueden dejarse indicados como el producto de los números necesarios en cada caso.

3. La fiebre (F) puede estar causada por tener un resfriado (R), por tener gripe (G) o bien por tener la malaria (M). Supongamos que R, G y M causan fiebre (F) de forma independiente, y que la probabilidad condicionada de fiebre dadas las causas puede expresarse con un **modelo noisy-or**. Un resfriado causa fiebre con probabilidad 0.4; la gripe causa fiebre con probabilidad 0.8 y la malaria causa fiebre con probabilidad 0.9. Suponemos además que la fiebre puede estar causada por otras causas con probabilidad 0.005.

   Todas las variables tienen dos estados posibles; supongamos que los estados con subíndice 1 indican valor positivo o propiedad presente, y los estados con subíndice 0 valor negativo o propiedad ausente. Por ejemplo, los estados de F son f_0 (no tener fiebre) y f_1 (sí tener fiebre).

   Obten la tabla para la distribución de probabilidad condicional de tener fiebre dadas las posibles causas, generada por el anterior *modelo noisy-or*. No es necesario calcular el resultado de la expresión usada para obtener cada probabilidad.

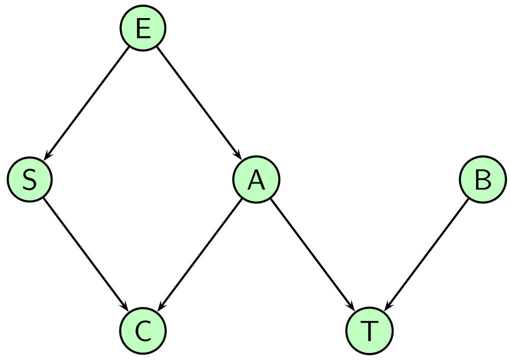
4. En una determinada zona industrial se han determinado las principales causas de cáncer de pulmón (C) en los habitantes de esa zona. El cáncer de pulmón puede estar causado por la exposición a gas radón (R), por la exposición al asbesto (A) o bien por ser fumador habitual (S). Supongamos que R, A y S causan cáncer de pulmón (C) de forma independiente, y que la probabilidad condicionada de padecer cáncer de pulmón dadas las causas puede expresarse con un **modelo noisy-or**. La exposición a gas radón (R) causa cáncer de pulmón con probabilidad 0.8; la exposición al asbesto (A) causa cáncer de pulmón con probabilidad 0.7 y el ser fumador habitual causa cáncer de pulmón con probabilidad 0.4. Suponemos además que el cáncer de pulmón puede estar causado por otras causas con probabilidad 0.005.

   Todas las variables tienen dos estados posibles; supongamos que los estados con subíndice 1 indican valor positivo o propiedad presente, y los estados con subíndice 0 valor negativo o propiedad ausente. Por ejemplo, los estados de C son c_0 (no padecer cáncer de pulmón) y c_1 (sí padecer cáncer de pulmón).

   Obtén la tabla para la distribución de probabilidad condicional de padecer cáncer de pulmón (C) dadas las posibles causas, generada por el anterior *modelo noisy-or*. No es necesario calcular el resultado de la expresión usada para obtener cada probabilidad.

2. Tema 4

5. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos ($A(a_0, a_1)$, $B(b_0, b_1)$ $C(c_0, c_1)$, ...).



Supongamos que tenemos los siguientes valores de probabilidad:

- $P(b_1) = 0.1$
- $P(e_1) = 0.2$
- $P(s_1|e_0) = 0.3$ y $P(s_1|e_1) = 0.8$
- $P(a_1|e_0) = 0.015$ y $P(a_1|e_1) = 0.0001$
- $P(c_1|s_0, a_0) = 0.01$, $P(c_1|s_0, a_1) = 0.1$, $P(c_1|s_1, a_0) = 0.1$, $P(c_1|s_1, a_1) = 0.2$
- $P(t_1|a_0, b_0) = 0.01$, $P(t_1|a_0, b_1) = 0.02$, $P(t_1|a_1, b_0) = 0.02$ y $P(t_1|a_1, b_1) = 0.04$

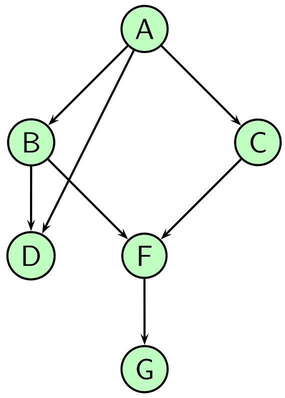
a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad.

b) Suponiendo que usamos el **algoritmo de inferencia de eliminación de variables**, realiza la combinación de aquellos potenciales necesarios para poder eliminar la variable E. En el potencial resultante, realiza la marginalización para eliminar la variable E.

c) Supongamos que queremos obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable C considerando que no tenemos ninguna observación en las demás variables. Suponiendo que las variables se eliminan siguiendo el orden $\{T, B, A, S, E\}$, detalla paso a paso los cálculos (combinación y marginalización de potenciales) que se realizan. No hace falta mostrar el contenido (los números) de los potenciales que se van obteniendo, solo las operaciones realizadas con potenciales, especificando las variables de cada potencial obtenido.

Indica el número de multiplicaciones y de sumas de números que es necesario realizar en total.

6. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos ($A(a_0, a_1)$, $B(b_0, b_1)$ $C(c_0, c_1)$, ...).



Supongamos que tenemos los siguientes valores de probabilidad:

- $P(a_1) = 0.5$
- $P(b_1|a_0) = 0.8$, $P(b_1|a_1) = 0.4$
- $P(c_1|a_0) = 0.1$, $P(c_1|a_1) = 0.4$
- $P(d_1|a_0, b_0) = 0.9$, $P(d_1|a_0, b_1) = 0.6$, $P(d_1|a_1, b_0) = 0.5$ y $P(d_1|a_1, b_1) = 0.3$
- $P(f_1|b_0, c_0) = 0.1$, $P(f_1|b_0, c_1) = 0.9$, $P(f_1|b_1, c_0) = 0.8$ y $P(f_1|b_1, c_1) = 0.95$
- $P(g_1|f_0) = 0.1$, $P(g_1|f_1) = 1.0$

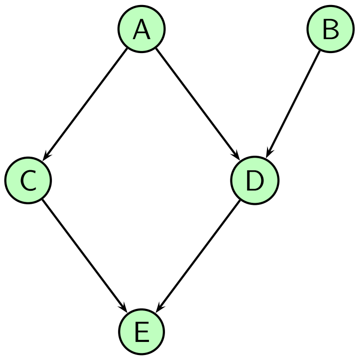
a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad.

b) Suponiendo que usamos el **algoritmo de inferencia de eliminación de variables**, calcula la tabla de probabilidad que se obtiene como resultado de combinar aquellos potenciales necesarios para poder eliminar la variable F. Usando el potencial resultante, calcula la tabla de probabilidad que se obtiene con la operación de marginalización al eliminar la variable F.

c) Supongamos que queremos obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable B considerando que no tenemos ninguna observación en las demás variables. Suponiendo que las variables se eliminan siguiendo el orden $\{G, F, D, C, A\}$, detalla paso a paso los cálculos (combinación y marginalización de potenciales) que se realizan. No hace falta mostrar el contenido (los números) de los potenciales que se van obteniendo, solo las operaciones de combinación y marginalización realizadas con potenciales, especificando las variables de los potenciales que se combinan o marginalizan y las variables del potencial obtenido como resultado.

   Indica el número de multiplicaciones y de sumas de números que es necesario realizar en total en el proceso completo para obtener la distribución a posteriori de la variable B.

7. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos ($A(a_0, a_1)$, $B(b_0, b_1)$ $C(c_0, c_1)$, ...).



a) Usando un algoritmo de borrado de variables, obtener un **árbol de grupos** para la anterior red bayesiana aplicando los órdenes siguientes.

   1) $\{E, D, A, B, C\}$
   2) $\{E, D, C, A, B\}$.

b) En los dos casos anteriores, una vez construido el árbol de grupos, indica qué potenciales iniciales de la red bayesiana se asignan a cada grupo y cómo se obtendría el potencial de cada grupo a partir de ellos.

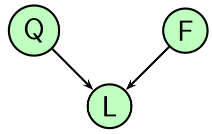
c) Supongamos que usamos el algoritmo de inferencia de **Shafer-Shenoy**, el árbol de grupos obtenido en el apartado 7*a*1 y que no tenemos ninguna variable observada.

   1) Dibuja el árbol de grupos con separadores incluidos.
   2) Indica cómo se calcularían los mensajes de los separadores del árbol de grupos.
   3) Indica cómo se calcularía la probabilidad a posteriori (probabilidad condicionada) para la variable E

d) Supongamos de nuevo que usamos el algoritmo de inferencia de Shafer-Shenoy, el árbol de grupos obtenido en el apartado 7*a*1, pero ahora tenemos observada la variable E.

   1) Indica cómo se calcularían los mensajes de los separadores del árbol de grupos.
   2) Indica cómo se calcularía la probabilidad a posteriori (probabilidad condicionada) para la variable A

8. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos (variables binarias).



Y supongamos que tenemos los siguientes valores de probabilidad:

- $P(q) = 0.7$
- $P(f) = 0.6$
- $P(l|q, f) = 0.98$ y $P(l|q, \overline{f}) = 0.8$
- $P(l|\overline{q}, f) = 0.9$ y $P(l|\overline{q}, \overline{f}) = 0.0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado negado ($\overline{e}$) y luego el estado sin negar (e) para cada una de las variables en cada tabla.

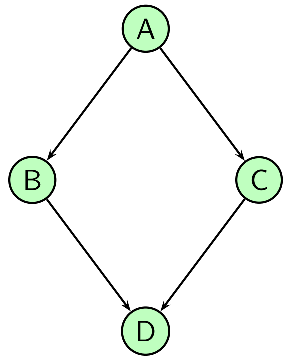
b) Queremos aplicar el **algoritmo de muestreo lógico** (*logic sampling*) para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable L considerando que tenemos observada la variable Q con el valor $Q = q$. Muestreamos las variables de la red siguiendo el orden Q, F y L. Indica si al generar los siguientes números aleatorios con una distribución uniforme para obtener realizaciones de las variables $\{Q, F, L\}$ se acepta o rechaza la realización correspondiente, e indica cual es la realización obtenida si esta es aceptada:

1) Se generan los siguientes números de una distribución uniforme: $\{0.1, 0.7, 0.6\}$.
2) Se generan los siguientes números de una distribución uniforme: $\{0.5, 0.8, 0.3\}$.

c) Supongamos que aplicando el algoritmo del paso anterior (**algoritmo de muestreo lógico**) hemos obtenido las siguientes realizaciones (tras descartar las realizaciones rechazadas). Obtén la distribución de probabilidad a posteriori para L dada la evidencia $Q = q$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

Realización
q, l, f
$q, l, \overline{f}$
$q, \overline{l}, f$
$q, l, \overline{f}$
q, l, f
$q, l, \overline{f}$
q, l, f
$q, l, \overline{f}$
q, l, f
$q, \overline{l}, f$

9. Supongamos la siguiente red bayesiana donde todas las variables tienen dos casos ($A(a_0, a_1)$, $B(b_0, b_1)$, $\ldots$).



Supongamos que tenemos los siguientes valores de probabilidad:

- $P(a_1) = 0.7$
- $P(b_1|a_1) = 0.4$ y $P(b_1|a_0) = 0.5$
- $P(c_1|a_1) = 0.6$ y $P(c_1|a_0) = 0.9$
- $P(d_1|b_1, c_1) = 0.98$ y $P(d_1|b_1, c_0) = 0.8$
- $P(d_1|b_0, c_1) = 0.9$ y $P(d_1|b_0, c_0) = 0.0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado con subíndice 0 y luego el estado con subíndice 1 para cada una de las variables en cada tabla.

b) Supongamos que aplicamos el **algoritmo de muestreo lógico** (*logic sampling*) para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable D considerando que tenemos observada la variable B con el valor $B = b_1$. Muestreamos las variables de la red siguiendo el orden A, B, C y D.

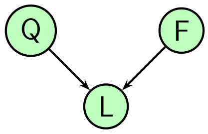
Indica si al generar los siguientes números aleatorios con una distribución uniforme para obtener realizaciones de las variables $\{A, B, C, D\}$ se acepta o rechaza la realización correspondiente, e indica cual es la realización obtenida si esta es aceptada:

1) Se generan los siguientes números de una distribución uniforme: $\{0.1, 0.7, 0.6, 0.01\}$.
2) Se generan los siguientes números de una distribución uniforme: $\{0.2, 0.4, 0.1, 0.9\}$.

c) Supongamos que aplicando el algoritmo del paso anterior (**algoritmo de muestreo lógico**) hemos obtenido las siguientes realizaciones (tras descartar las realizaciones rechazadas). Obtén la distribución de probabilidad a posteriori para D dada la evidencia $B = b_1$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

Realización
a_0, b_1, c_0, d_1
a_1, b_1, c_1, d_1
a_1, b_1, c_1, d_1
a_0, b_1, c_0, d_1
a_0, b_1, c_1, d_1
a_0, b_1, c_1, d_0
a_1, b_1, c_0, d_1
a_0, b_1, c_1, d_1
a_1, b_1, c_1, d_1
a_1, b_1, c_0, d_1

10. Supongamos la red bayesiana del ejercicio 8.



Y supongamos las mismas distribuciones de probabilidad:

- $P(q) = 0.7$
- $P(f) = 0.6$
- $P(l|q, f) = 0.98$ y $P(l|q, \overline{f}) = 0.8$
- $P(l|\overline{q}, f) = 0.9$ y $P(l|\overline{q}, \overline{f}) = 0.0$

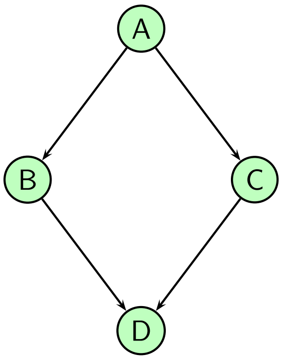
a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado negado ($\overline{e}$) y luego el estado sin negar (e) para cada una de las variables en cada tabla.

b) Supongamos que aplicamos el **algoritmo de ponderación por verosimilitud** (también conocido como *de muestreo por importancia*) para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable F considerando que tenemos observada la variable L con el valor $L = l$. Muestreamos las variables de la red siguiendo el orden Q, F y L. Al hacerlo se obtienen las siguientes realizaciones:

Realización
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
$\overline{q}, f, l$
$q, \overline{f}, l$
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
$\overline{q}, f, l$
q, f, l

Debe obtener el peso asociado a cada realización y calcular la probabilidad a posteriori para F dada la evidencia $L = l$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

11. Supongamos la red bayesiana del ejercicio 9.



Y supongamos las mismas distribuciones de probabilidad:

- $P(a_1) = 0.7$
- $P(b_1|a_1) = 0.4$ y $P(b_1|a_0) = 0.5$
- $P(c_1|a_1) = 0.6$ y $P(c_1|a_0) = 0.9$
- $P(d_1|b_1, c_1) = 0.98$ y $P(d_1|b_1, c_0) = 0.8$
- $P(d_1|b_0, c_1) = 0.9$ y $P(d_1|b_0, c_0) = 0.0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado con subíndice 0 y luego el estado con subíndice 1 para cada una de las variables en cada tabla.

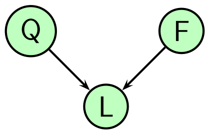
b) Supongamos que aplicamos el **algoritmo de ponderación por verosimilitud** (también conocido como *de muestreo por importancia*) para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable A considerando que tenemos observada la variable A con el valor $A = a_1$ y la variable C con el valor $C = c_0$. Muestreamos las variables de la red siguiendo el orden A, B, C y D. Al hacerlo se obtienen las siguientes realizaciones:

Realización
a_1, b_0, c_0, d_0
a_1, b_1, c_0, d_1
a_1, b_1, c_0, d_0
a_1, b_0, c_0, d_0
a_1, b_1, c_0, d_1
a_1, b_1, c_0, d_0
a_1, b_0, c_0, d_0
a_1, b_1, c_0, d_1
a_1, b_1, c_0, d_0
a_1, b_1, c_0, d_1

Debe obtener el peso asociado a cada realización y calcular la probabilidad a posteriori para D dada la evidencia $A = a_1$ y $C = c_0$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

c) Justifica si usando el algoritmo de muestreo por verosimilitud en el caso anterior, podríamos haber obtenido la realización a_1, b_0, c_0, d_1.

12. Supongamos la red bayesiana del ejercicio 8.



Y supongamos las mismas distribuciones de probabilidad:

- $P(q) = 0.7$
- $P(f) = 0.6$
- $P(l|q, f) = 0.98$ y $P(l|q, \overline{f}) = 0.8$
- $P(l|\overline{q}, f) = 0.9$ y $P(l|\overline{q}, \overline{f}) = 0.0$

a) Escribe las tablas de probabilidad para los potenciales asociados a todas las distribuciones de probabilidad, de forma que siempre aparezca primero el estado negado ($\overline{e}$) y luego el estado sin negar (e) para cada una de las variables en cada tabla.

b) Supongamos que aplicamos el **algoritmo de muestreo de Markov** para obtener la distribución de probabilidad a posteriori para la variable F considerando que tenemos observada la variable L con el valor $L = l$. Muestreamos las variables no evidenciales siguiendo el orden Q, F. Supongamos que como configuración inicial para estas variables se ha obtenido la realización q, f, l.

1) A partir de la realización inicial, obtener la distribución para simular la variable Q. Supongamos que al usar tal distribución se obtiene el valor $Q = \overline{q}$.
2) Obtener ahora la distribución para simular la variable F. Supongamos que al usar tal distribución se obtiene el valor $F = \overline{f}$. Con este paso, se ha completado una realización.
3) Indica cual es la realización obtenida.
4) Suponiendo que tras 10 iteraciones, se obtienen las siguientes realizaciones, calcular la probabilidad a posteriori para F dada la evidencia $L = l$, que proporciona tal conjunto de realizaciones.

Realización
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
$\overline{q}, f, l$
$q, \overline{f}, l$
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
q, f, l
$\overline{q}, \overline{f}, l$
$\overline{q}, f, l$
q, f, l