UNIDAD 3

ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1 ECUACIONES DIFERENCIALES

Una **ecuación diferencial** es una ecuación cuya incógnita es una función y en la que aparecen algunas derivadas de esa función. Si la función que interviene tiene sólo una variable independiente, la ecuación es llamada ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.). Si la función tiene varias variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P.).

3.1.1 Definición, orden y grado

Definición:
Se dice que una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes, es una **ecuación diferencial (ED).**

Para referirse a las ecuaciones diferenciales, se clasifican a ellas por su **tipo, orden y grado.**

Clasificación por tipo: Si una ecuación solo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO).**

Ejemplos

$$\frac{dy}{dx}+3y=e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+5y=0 \quad , \quad \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x=y$$

Una ecuación con derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes es llamada **ecuación diferencial parcial (EDP).**

Ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

Clasificación por orden: El orden de una ecuación diferencial viene determinado por la derivada de orden más alto que aparece en dicha ecuación. En su forma más general una ecuación diferencial de orden n se puede escribir como $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales clasificadas por su tipo y orden se muestran en la siguiente tabla

	Ecuación	Tipo	orden
1)	$y'''+4y=2$	Ordinaria	3
2)	$\frac{d^2s}{dt^2}=-32$	Ordinaria	2
3)	$(y')^2-3y=e^x$	Ordinaria	1
4)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	Parcial	2

Clasificación según el grado: Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es de grado uno (lineal) si F es de grado uno en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de orden n es lineal cuando $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$

O bien,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (3.1)$$

En la sumatoria del lado izquierdo de la ecuación anterior se ve que las dos propiedades características de una EDO de grado uno (lineal) son:

i. La variable dependiente "y" y todas sus derivadas $y', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada termino en que interviene “y” es 1.

ii. Los coeficientes $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen solo de la variable independiente "x".

Las ecuaciones

a) $(y - x)dx + axdy = 0$,
b) $y'' - 2y' + y = 0$, y
c) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$, son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer, segundo y tercer orden y a la ves de grado 1 (lineales).

La primera ecuación, $(y - x)dx + axdy = 0$, por ejemplo, llevada a la forma (3.1), se tiene $axy' + y = x$; se ve claramente que es una ecuación de primer orden. La segunda y tercera ecuaciones, ya están en la forma (3.1) y son de segundo y tercer orden respectivamente. Las tres ecuaciones a), b) y c) cumplen las dos propiedades de linealidad (i) y (ii).

3.2 SOLUCIÓN GENERAL Y PARTICULAR DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Se llama **solución** de una Ecuación Diferencial Ordinaria a toda función de la forma $y = f(x)$ que satisface dicha ecuación diferencial. El proceso de encontrar la solución de una ecuación se denomina *integrar la ecuación*.

Ejemplo

Para la ecuación diferencial $y' - y = 0$, las funciones $y = ce^x$ son soluciones de ella para todo $c \in R$, como puede comprobase fácilmente.

$y = ce^x \ \wedge \ y' = ce^x$, entonces $y' - y = ce^x - ce^x = 0$

Se llama **solución general** de una ecuación diferencial al conjunto de todas las funciones que verifican dicha ecuación. En general, son familias n-paramétricas de curvas, siendo n el orden de la ecuación. Cuando existe alguna solución que no pertenece a dicha familia, entonces esta solución recibe el nombre de solución singular.

Se llama **solución particular** de la ecuación diferencial a cualquier función que la satisfaga. Puede obtenerse fijando el valor de las constantes en la familia de funciones solución de la ecuación.

Ejemplo

1. La solución general de la ecuación diferencial $y' - y = 0$ es $y = ce^x$, que es una familia de funciones dependientes de un solo parámetro. Una solución particular de dicha ecuación es $y = e^x$.
2. Comprobar que la familia $y = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{3}{2}}$ es solución de la ecuación $y' = y^{\frac{1}{3}}$.

Solución

Derivando $y = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{1}{2}}$. Sustituyendo en $y' = y^{\frac{1}{3}}$,

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si la condición inicial es por ejemplo, $y(0) = 2\sqrt{2}$, el valor de c para una solución particular de $y' = y^{\frac{1}{3}}$ se obtiene de la siguiente manera

Sustituyendo en $y = \left(\frac{2}{3}x + c\right)^{\frac{3}{2}}$ los valores de $x = 0$ y $y = 2\sqrt{2}$, se tiene

$$2\sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}(0) + c\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$2\sqrt{2} = (c)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = c^3 \Rightarrow c = 2$$

Así $y = \left(\frac{3}{2}x + 2\right)^{\frac{3}{2}}$ es una solución particular de $y' = y^{\frac{1}{3}}$.

La función $y = 0$ es también solución de ella y no pertenece a la familia dada, por lo que constituye una solución singular de la ecuación.

Ejemplo (para el lector):
Comprobar que $y = x^3 + c_1x^2 + c_2$ es una solución de $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 3x = 0$. Obtenga la solución particular si

a) $y = 1$ cuando $x = 1$ y,
b) $y = 5$ cuando $x = 2$.

3.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales (ED) son expresiones matemáticas que establecen relaciones entre variables independientes, dependientes y las derivadas de ésta última. Las ED tienen diversas clasificaciones, una de ellas indica que este tipo de ecuaciones pueden ser: **Ordinarias y Parciales**

En este material solo se abordarán las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), las cuales se caracterizan por poseer en su estructura, derivadas ordinarias de la variable dependiente.

Resolver una EDO, consiste en aplicar un conjunto de técnicas que permitan obtener, a partir de una ecuación diferencial, una expresión matemática que no presente derivadas; sino que exhiba una relación entre las variables mencionadas. Existen muchos métodos para resolver EDO, sin embargo, en el presente material solo se abordarán algunos.

3.3.1 Ecuaciones con variables separables

Son ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = M(x)N(y)$, las cuales se puede resolver desarrollando los siguientes pasos:

- **Separar las variables.** Esto significa que los términos relativos a la variable dependiente queden a un lado de la igualdad y en el otro los que representan a la variable independiente. Por tanto $\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx$
- **Integrar** ambos miembros de la igualdad aplicando los métodos de integración.

Ejemplo1. Resolver la ecuación $y' = 2x\sqrt{y-1}$

$$y' = 2x\sqrt{y-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-1)^{1/2}$$
$$(y-1)^{-1/2}dy = 2xdx$$
$$\int (y-1)^{-1/2}dy = \int 2xdx$$
$$2(y-1)^{1/2} = x^2 + c$$

$$\left[2(y-1)^{1/2}\right]^2 = (x^2+c)^2$$
$$4(y-1) = (x^2+c)^2$$
$$y-1 = \frac{(x^2+c)^2}{4}$$
$$y = \frac{(x^2+c)^2}{4} + 1$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy^2}{4y+yx^2}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2+y^2)}{y(4+x^2)}$$
$$\frac{y}{(2+y^2)}dy = \frac{x}{(4+x^2)}dx$$
$$\int \frac{y}{2+y^2}dy = \int \frac{x}{4+x^2}dx$$
$$u = 2+y^2 \Rightarrow du = 2ydy$$
$$\frac{du}{2} = ydy$$
$$m = 4+x^2 \Rightarrow dm = 2xdx$$
$$\frac{dm}{2} = xdx$$

$$\int \frac{1}{2u}du = \int \frac{1}{2m}dm$$
$$\frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|m| + c$$
$$\frac{1}{2}\ln|2+y^2| = \frac{1}{2}\ln|4+x^2| + c$$
$$\ln|2+y^2| = \ln|4+x^2| + c$$
$$\ln(2+y^2) = \ln(4+x^2) + c$$
$$e^{\ln(2+y^2)} = e^{\ln(4+x^2)+c}$$
$$e^{\ln(2+y^2)} = e^{\ln(4+x^2)}e^{c}$$
$$(2+y^2) = (4+x^2)c$$
$$y^2 + 2 = c(4+x^2)$$

Ejemplo 3. Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, encontrar

a) Una solución general

b) Una solucion particular si $y = 3$ cuando $x = 1$

Solución general

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c$$
$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c}$$
$$|y| = e^{\ln|x|}e^{c}$$
$$y = cx$$

Solución particular

$$y = cx$$
$$3 = c(1)$$
$$c = 3$$

por tanto,

$$y = 3x$$

3.3.2. Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, las cuales se puede resolver mediante el siguiente conjunto de pasos, que será llamado de aquí en adelante ALGORITMO HOMOGÉNEO.

El grado de homogeneidad de una ED viene dado por el exponente de la letra k. Para determinar si una función es o no homogénea, se debe aplicar el criterio de homogeneidad, dado por:

Una función $F(x,y)$ es homogénea si y solo si $F(kx,ky) = k^n F(x,y)$

Pasos del algoritmo homogéneo

- **Aplicar el criterio de homogeneidad.** Para ello basta con
  - ✓ Denotar el coeficiente de dx como $M(x,y)$ y el coeficiente de dy como $N(x,y)$
  - ✓ Verificar si son homogéneas, aplicando las siguientes igualdades

    1. $M(kx,ky) = k^n M(x,y)$
    2. $N(kx,ky) = k^n N(x,y)$

Nota: Para 1 y 2, los exponentes deben ser iguales y tanto $M(x,y)$ como $N(x,y)$, *no quedan afectados del factor k.* Luego,

- ✓ Hacer el cambio de variable $y = ux$ (I)
- ✓ Derivar (I), obteniéndose $dy = udx + xdu$ (II)
- ✓ Sustituir las expresiones (I) y (II) en la ecuación diferencial dada
- ✓ Aplicar propiedad distributiva y agrupar términos semejantes.
- ✓ Aplicar el método de **Variables Separables.**

Ejemplo 1. Determinar si $f(x,y) = x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}$ es o no homogénea. Indicar su grado de homogeneidad.

Solución

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + 2(kx)(ky) - \frac{(ky)^3}{kx}$$

$$f(kx,ky) = k^2x^2 + 2k^2xy - \frac{k^3y^3}{kx}$$

$$f(kx,ky) = k^2x^2 + 2k^2xy - k^2\frac{y^3}{x}$$

$$f(kx,ky) = k^2\left(x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}\right)$$

Obsérvese que la expresión entre paréntesis representa a $f(x,y)$, cumpliéndose la igualdad planteada en el criterio de homogeneidad, por tanto, la función dada **es Homogénea y de grado 2.**

Ejemplo 2. Resolver la Ecuación Diferencial $(x+y)dx = xdy$

Si se quiere utilizar variables separables, puede verificarse que no es posible hacerlo directamente. Debe utilizarse primeramente el algoritmo homogéneo para convertirla en variables separables.

- $M(x,y) = x + y \Rightarrow M(kx,ky) = kx + ky = k(x+y) = kM(x,y)$
- $N(x,y) = x \Rightarrow N(kx,ky) = kx = kN(x,y)$, por tanto, la ecuación es homogénea de grado 1

La ecuación puede expresarse así $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$; tomando $y = ux \Longrightarrow u = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dx}{dx} + x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Entonces

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x+ux}{x}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x(1+u)}{x}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + u$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 + u - u$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$u = lnx + C$$

$$\frac{y}{x} = lnx + C$$

$$y = x(lnx + C)$$

Ejemplo 3. Resolver la Ecuación Diferencial $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$

Solución

Debe utilizarse primeramente el algoritmo homogéneo para convertirla en variables separables.

- $M(x,y) = y^2 + yx \Rightarrow M(kx,ky) = (ky)^2 + kykx = k^2y^2 + k^2xy = k^2(y^2 + yx) = k^2M(x,y)$

- $N(x,y) = x^2 \Rightarrow N(kx,ky) = (kx)^2 = k^2x^2 = k^2N(x,y)$, por tanto, la ecuación es homogénea de grado 2

La ecuacion puede expresarse asi $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2}$

Sea $y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

Igualando

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{y^2 + yx}{x^2}$

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{(ux)^2 + uxx}{x^2}$

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2x^2 + ux^2}{x^2}$

$u + x\frac{du}{dx} = u^2 + u$

$x\frac{du}{dx} = u^2$

$\frac{1}{u^2}du = \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{u^2}du = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = \ln|x| + c$

$-\frac{1}{u} = \ln|x| + c$

$-\frac{x}{y} = \ln|x| + c$

$y = -\frac{x}{\ln|x| + c}$

Ejemplo 4. Resolver la Ecuación Diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, encontrar

a) Una solución general
b) Una solución particular si $y = 3$ cuando $x = 1$

Solución

Debe utilizarse primeramente el algoritmo homogéneo para convertirla en variables separables.

- $M(x,y) = y^2 + x^2 \Rightarrow M(kx,ky) = (ky)^2 + (kx)^2 = k^2y^2 + k^2x^2 = k^2(y^2 + x^2) = k^2M(x,y)$
- $N(x,y) = xy \Rightarrow N(kx,ky) = kxky = k^2(xy) = k^2N(x,y)$, por tanto, la ecuación es homogénea de grado 2

Solución general

La ecuacion puede expresarse asi $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 + x^2}{xy}$

Sea $y = ux \Rightarrow u = \dfrac{y}{x}$

$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

Igualando

$u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{y^2 + x^2}{xy}$

$u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{(ux)^2 + x^2}{xux}$

$u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2x^2 + x^2}{ux^2}$

$u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2 + 1}{u}$

$u + x\dfrac{du}{dx} = u + \dfrac{1}{u}$

$x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u}$

$udu = \dfrac{1}{x}dx$

$\int udu = \int \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow \dfrac{1}{2}u^2 = \ln|x| + c$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + c$

$\dfrac{y^2}{x^2} = 2(\ln|x| + c)$

$y^2 = 2x^2(\ln|x| + c)$

Solución particular

$y^2 = 2x^2(\ln|x| + c)$

$3^2 = 2(1)^2(\ln(1) + c)$

$9 = 2c \Rightarrow c = \dfrac{9}{2}$, por tanto, la solución particular es $y^2 = 2x^2\left(\ln|x| + \dfrac{9}{2}\right)$

3.3.3. Ecuaciones exactas

Son ecuaciones (ED) de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas que verifican la siguiente igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{(III)}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse mediante el siguiente conjunto de pasos, que será llamado de aquí en adelante **ALGORITMO EXACTO.**

- ✓ Denotar el coeficiente de dx como $M(x,y)$ y el coeficiente de dy como $N(x,y)$

Verificar que se cumple (III)

- ✓ Hallar una función auxiliar F. Para ello debe integrarse a $M(x,y)$ con respecto a x . Así $F = \int M(x,y)\,dx$
- ✓ Derivar parcialmente a F con respecto a "y" e igualar este resultado con $N(x,y)$, es decir $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

- ✓ Despejar el factor $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ y calcular $f(y)$ integrando la expresión obtenida en el despeje.
- ✓ Sustituir $f(y)$ en la expresión obtenida anteriormente para F, y realizar las operaciones algebraicas que aparezcan para construir una respuesta lo más simplificada posible.

Ejemplo 1. Dada la ecuación diferencial $(2xy+3)dx+(x^2-1)dy=0.$

a)Verificar que la ED es exacta.

b) Encontrar la solución general de la ED

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) Si } M(x,y)=2xy+3 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(2xy+3)}{\partial y}=2x \\ &\quad\text{Si } \mathrm{N}(x,y)=x^2-1 \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-1)}{\partial x}=2x \end{aligned}\right\} \text{Por tanto, es una ED exacta}$$

b) La solución gereral de la ED es de la forma $F(x,y)=c$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)dx \\ &= \int (2xy+3)dx \\ F(x,y) &= x^2y+3x+f(y) \end{aligned}$$

Derivando parcialmente $F(x,y)$ con respecto a y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2y+3x+f(y)\right)}{\partial y}=x^2+f'(y)$$

Pero setiene que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y),$ entonces, $x^2+f'(y)=x^2-1$

De ahí se sigue que

$$\begin{aligned} f'(y) &= -1 \\ \int f'(y) &= -\int dy \\ f(y) &= -y \end{aligned}$$

La solución general es $F(x,y)=c,$ o sea,

$$x^2y+3x-y=c$$

Despejando "y", se tiene

$$x^2y+3y-y=c$$
$$x^2y-y=c-3x$$
$$y(x^2-1)=c-3x$$
$$y=\frac{c-3x}{x^2-1},\ \text{esta es la solució general de la ED}$$

Ejemplo 2. Dada la ecuación diferencial $(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy=0.$

a)Verificar que la ED es exacta.

b) Encontrar la solución general de la ED

c) Encuentre una solución particular si $y=2$ cuando $x=1$

$$\left.\begin{aligned}&\text{a) Si } M(x,y)=3x^2-y\Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(3x^2-y)}{\partial y}=-1\\ &\text{Si N}(x,y)=3y^2-x\Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(3y^2-x)}{\partial x}=-1\end{aligned}\right\}\ \text{Por tanto, es una ED exacta}$$

b) La solución gereral de la ED es de la forma $F(x,y)=c$

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx$$
$$=\int(3x^2-y)dx$$
$$F(x,y)=x^3-yx+f(y)$$

Derivando parcialmente $F(x,y)$ con respecto a y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^3-yx+f(y)\right)}{\partial y}=-x+f'(y)$$

Pero setiene que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$, entonces, $-x+f'(y)=3y^2-x$

De ahí se sigue que

$$f'(y)=3y^2$$
$$\int f'(y)=3\int y^2dy$$
$$f(y)=y^3$$

La solución general es $F(x,y)=c$, o sea,

$$x^3-yx+y^3=c,\ \text{esta es la solución genral de la ED}$$

c) Si $y=2$ cuando $x=1$, se tiene

$$x^3 - yx + y^3 = c$$
$$1^3 - (2)(1) + 2^3 = c$$
$$7 = c$$

Entonces, la solución particular es $x^3 - yx + y^3 = 7$

3.3.4 Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial es **lineal** si presenta la forma $\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)}$, y tienen por solución:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad (4)$$

Ejemplo 1

Encontrar la solución de $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = -\frac{2}{x^2}$

Solución

Se tiene que la ED presenta la forma de una lineal, con

- $P(x) = -\frac{4}{x}$ y
- $Q(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$
$$y(x) = e^{-\int -\frac{4}{x}dx}\left(c + \int -\frac{2}{x^2}e^{\int -\frac{4}{x}dx}dx\right)$$
$$= e^{4\int \frac{1}{x}dx}\left(c - 2\int x^{-2}e^{-4\int \frac{1}{x}dx}dx\right)$$
$$= e^{4\ln|x|}\left(c - 2\int x^{-2}e^{-4\ln|x|}dx\right)$$
$$= \left(e^{\ln|x|}\right)^4\left(c - 2\int x^{-2}\left(e^{\ln|x|}\right)^{-4}dx\right)$$
$$= x^4\left(c - 2\int x^{-2}x^{-4}dx\right)$$
$$= x^4\left(c - 2\int x^{-6}dx\right)$$
$$= x^4\left(c - 2\frac{x^{-5}}{-5}\right)$$
$$y(x) = x^4\left(c + \frac{2}{5x^5}\right)$$
$$y(x) = cx^4 + \frac{2x^4}{5x^5}$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución $y' + 2xy = 2x$

Solución

Se tiene que la ED presenta la forma de una lineal, con

- $P(x) = 2x$ y
- $Q(x) = 2x$

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

$$y(x)=e^{-\int 2xdx}\left(c+\int 2xe^{\int 2xdx}dx\right)$$

$$=e^{-2\int xdx}\left(c+2\int xe^{2\int xdx}dx\right)$$

$$=e^{-x^2}\left(c+2\int xe^{x^2}dx\right);\text{ hacer un cambio de variable, } u=x^2$$

$$=e^{-x^2}\left(c+e^{x^2}\right)$$

$$y(x)=\ 1+ce^{-x^2}$$

Ejemplo 2

Dada la ecuación $x^3y'+2y=e^{\frac{1}{x^2}}$. Encuentre

a) La solución general y
b) Una solución particular si $y(1)=e$

Solución

Se tiene que la ED presenta la forma de una lineal, con $P(x)=\dfrac{2}{x^3}$ y $Q(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}$

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

$$y(x)=e^{-\int\frac{2}{x^3}dx}\left(c+\int\left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\right)e^{\int\frac{2}{x^3}dx}dx\right)$$

$$y(x)=e^{-2\int x^{-3}dx}\left(c+\int\left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\right)e^{2\int x^{-3}dx}dx\right)$$

$$y(x)=e^{-2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)}\left(c+\int\left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\right)e^{2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)}dx\right)$$

$$y(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\left(c+\int\left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}dx\right)$$

$$y(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\left(c+\int x^{-3}dx\right)$$

$$y(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\left(c+\frac{x^{-2}}{-2}\right)$$

$$y(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\left(c-\frac{1}{2x^2}\right)$$

b) Si $y = e$ cuando $x = 1$, se tiene

$$y(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(c - \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$e = e^{\frac{1}{1^2}}\left(c - \frac{1}{2(1)^2}\right)$$

$$e = e\left(c - \frac{1}{2}\right)$$

$$1 = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Entonces, la solución particular es $y(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)$