

CAPÍTULO I

ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

1.1 PROPOSICIÓN

Proposición (o enunciado) es una afirmación verbal a la que puede asociarse un valor de verdad, es decir, puede ser verdadera o falsa, por ejemplo:

- Hace calor
- José estudia
- El es feliz
- Oruro es una ciudad con clima frío

Las proposiciones pueden ser simples como las de los ejemplos anteriores o compuestas, que se pueden unir a través de conectores (conectivas)

- José estudia y es feliz
- Hace calor o estoy muy abrigado
- Si llueve entonces me mojo

El álgebra proposicional es la representación del lenguaje usual tomando como elemento básico una representación matemática de las frases declarativas que definen las operaciones básicas del álgebra proposicional.

Para representar proposiciones se utilizarán letras: p, q, r, s, \dots . Las operaciones básicas son:

- | | |
|------------------------|--------------------|
| ➤ Negación | $\sim (\neg)$ |
| ➤ Conjunción. | \wedge |
| ➤ Disyunción | \vee |
| ➤ Disyunción exclusiva | $\underline{\vee}$ |
| ➤ Condicional | \rightarrow |
| ➤ Bicondicional | \leftrightarrow |
| ➤ Negación conjunta | \downarrow |

1.2 NEGACIÓN $\sim p$

Permite negar un enunciado o proposición, su tabla de verdad es falsa cuando p es verdadera y viceversa:

- No p
- No es verdad que p
- Es falso que p
- No es cierto que p

| p | $\sim p$ |
|-----|----------|
| V | F |
| F | V |

1.3 CONJUNCIÓN $p \wedge q$

Dos proposiciones pueden ser unidas con la conjunción, lo cual puede interpretarse como:

- p y q
- p pero q
- p sin embargo q
- p no obstante q
- p a pesar de q

| p | \wedge | q |
|-----|----------|-----|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | F |

La tabla de verdad de la conjunción es verdadera, solamente cuando los dos enunciados son verdaderos.

1.4 DISYUNCIÓN $p \vee q$

La disyunción permite unir dos proposiciones con el equivalente a la letra o

- p o q
- o p o q o ambas cosas
- como mínimo p o q

| p | \vee | q |
|-----|----------|-----|
| V | V | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

La tabla de verdad de la disyunción es falsa solamente cuando los dos enunciados son falsos.

1.5 DISYUNCIÓN EXCLUSIVA $p \vee\!\!\!\diagup\!\!\!\! q$

La disyunción exclusiva equivale a unir dos enunciados con un conector equivalente a p o q pero no ambos, su tabla de verdad es verdadera cuando un enunciado es verdadero y el otro falso o viceversa.

| p | $\vee\!\!\!\diagup\!\!\!\!$ | Q |
|-----|-----------------------------|-----|
| V | F | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

1.6 CONDICIONAL (IMPLICACIÓN) $p \rightarrow q$

Es una relación de causa a efecto

- p implica a q
- si p entonces q
- p es suficiente para q
- q es necesario para p
- q si p

| p | \rightarrow | q |
|-----|---------------|-----|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | V | F |

La tabla de verdad del condicional tiene valor falso cuando el primer enunciado es verdadero y el segundo falso.

1.7 BICONDICIONAL (DOBLE IMPLICACIÓN) $p \leftrightarrow q$

Se lee p si y sólo si q , su tabla de verdad exige que ambos enunciados sean verdaderos o ambos falsos para ser verdadera.

- p si y sólo si q
- p necesario y suficiente para q

| p | \leftrightarrow | q |
|-----|-------------------|-----|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

1.8 NEGACIÓN CONJUNTA $p \downarrow q$

Se lee ni p ni q y es verdadero cuando p es falso y q es falso

| p | \downarrow | q |
|-----|--------------|-----|
| V | F | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

1.9 TABLAS DE VERDAD DE PROPOSICIONES

Cuando se construye una tabla de verdad se puede clasificar la misma, si la última columna tiene todos los valores de verdad verdaderos, se trata de una **Tautología**, si son falsos es una **Contradicción** y, si los valores de verdad están combinados una **Contingencia**.

Para asignar los valores de verdad a una proposición que contiene dos enunciados p y q empiece por dar a p dos valores verdaderos y dos falsos e intercale entre verdadero y falso los de q . Si se tienen tres enunciados p , q , r asigne a p cuatro valores verdaderos y luego cuatro falsos, a q dos verdaderos, dos falsos, dos verdaderos y luego dos falsos, finalmente intercale los valores de verdad de r entre verdadero y falso. Siguiendo ésta lógica no existe ninguna dificultad para construir una tabla de verdad de n enunciados, respete el orden alfabético de las letras para empezar a asignar los valores de verdad correspondientes.

Nótese que el número de líneas de una tabla de verdad vendrá dado por el número dos elevado al número de enunciados de la tabla. Así por ejemplo, una proposición de cuatro enunciados tendrá $2^4 = 16$ filas

Construya la tabla de verdad de las siguientes proposiciones e indique si se trata de una tautología, contradicción o contingencia

Ejemplo 1

| $\sim(p \vee q)$ | \vee | $\sim p$ | \wedge | $\sim q$ |
|------------------|--------|----------|----------|----------|
| F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | F |
| V | F | F | V | V |

Es una contradicción

Ejemplo 2

| $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge \sim p)$ |
|---|
| V |
| V |
| V |
| V |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |
| F |

Es una contingencia

Ejemplo 3

| $\{(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim r \wedge s)\}$ | | | | | | | \underline{V} | $(\sim q \vee r)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|-----------------|-------------------|---|
| V | V | V | F | F | F | V | V | F | V |
| V | V | V | F | F | F | F | V | F | V |
| V | V | V | V | V | V | V | V | F | F |
| V | V | V | F | V | F | F | F | F | F |
| V | F | F | V | F | F | V | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F | V | V |
| V | F | F | F | V | V | V | V | V | F |
| V | F | F | V | V | F | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F | F | V | V | F | V |
| F | V | V | F | F | F | F | V | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | F | F | F | F | F |
| F | V | F | F | F | F | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | F | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V | V | F | V | F |
| F | V | F | F | V | F | F | V | V | F |

Es una contingencia

Ejemplo 4

| $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | V | F | V | F | F | F |
| V | F | F | V | F | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | V | F | V | F | F | F |
| F | V | F | V | F | V | V | V |
| F | V | F | V | F | V | F | F |

Es una tautología

Ejemplo 5

| $(r \vee q) \wedge \{(\sim p \vee s)\} \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim r)\}$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | F | V | F | F | V | V | V | F | V | F |
| V | F | V | F | F | F | F | V | F | V | F |
| F | V | V | V | F | V | V | V | F | V | V |
| F | V | V | F | F | F | F | V | F | V | V |
| V | V | F | F | F | V | V | F | V | F | F |
| V | V | F | V | F | F | F | V | V | F | F |
| F | F | F | F | F | V | V | V | V | V | V |
| F | F | F | F | F | F | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V | V | F | V | F |
| V | F | V | F | V | V | F | V | F | V | F |
| F | V | V | V | V | V | V | V | F | V | V |
| F | V | V | V | V | V | F | V | F | V | V |
| V | V | F | F | V | V | V | F | V | F | F |
| V | V | F | F | V | V | F | V | V | F | F |
| F | F | F | F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | F | F | F | V | V | F | V | V | V | V |

Es una contingencia

1.10 PARADOJAS LÓGICAS¹

Existen acertijos lógicos que permiten matizar el aprendizaje del álgebra de proposiciones, dando un contenido entretenido al tema. La mayor parte de los acertijos se origina en lo que se ha dado a llamar “la falacia del círculo vicioso”, que es “debida al hecho de despreciar el principio fundamental de que lo que se involucra al todo de una totalidad dada no puede ser parte de la totalidad” por ejemplo, el acertijo de Epiménides referente al cretense que dice que “todos los cretenses son mentirosos”. Otros ejemplos sencillos de esto son aquellas frases pontificiales, familiares en todo el mundo, que parecen tener mucho significado, pero que en realidad no tienen ninguno, tales como: “nunca digas nunca” o “toda regla tiene excepciones”. Entre otras paradojas interesantes estúdiese la siguiente:

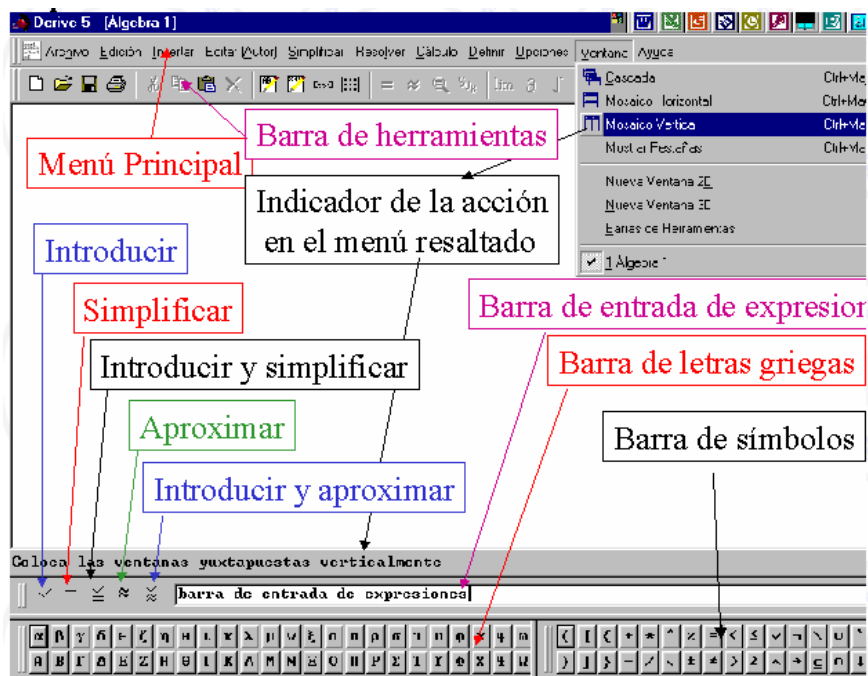
¹ Kasner Edgard y Newman James, LAS MATEMÁTICAS Y LA IMAGINACIÓN
Pub.Sociedad Matemática Mexicana 1967

La caza esta prohibida en el territorio de un príncipe, quien fuera sorprendido en este delito sería castigado con la muerte, el infractor debía formular una proposición, si era falsa se le ahorcaba y si era verdadera se le decapitaba. Un bribón, ducho en lógica se valió de esta prerrogativa diciendo: “Seré ahorcado”, si se le ahorcaba la proposición era verdadera y contradecía la Ley y si era decapitado entonces la proposición era falsa, lo cual también iba en contra de la Ley.

Invitamos al lector a debatir sobre el valor de verdad de la siguiente proposición: “El barbero de la aldea afeita a todos los hombres de la misma que no se afeitan a si mismos” (analice la situación del barbero)

1.11 APLICACIONES CON DERIVE

Derive es un formidable asistente matemático que permite realizar muchas operaciones en el campo de la matemática, una de ellas es la construcción de tablas de verdad, para ello el usuario deberá tener cierta familiaridad con el derive, la siguiente es la pantalla principal.



Ejemplo 6

Utilizando el asistente matemático Derive

Ingrese la siguiente expresión en la barra de entrada

TRUTH_TABLE (p, q, r, s, $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg r \wedge s)) \vee (\neg q \vee r)$)

Haciendo click en introducir y simplificar obtendrá

| p | q | r | s | $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg r \wedge s)) \vee (\neg q \vee r)$ |
|-------|-------|-------|-------|--|
| true | true | true | true | true |
| true | true | true | false | true |
| true | true | false | true | false |
| true | true | false | false | false |
| true | false | true | true | false |
| true | false | true | false | false |
| true | false | false | true | true |
| true | false | false | false | false |
| false | true | true | true | true |
| false | true | true | false | true |
| false | true | false | true | false |
| false | true | false | false | false |
| false | false | true | true | true |
| false | false | true | false | true |
| false | false | false | true | false |
| false | false | false | false | true |

Resultará muy útil a la formación del estudiante, familiarizarse con el uso del asistente matemático Derive, el mismo cuenta con aplicaciones matemáticas de todas las asignaturas que le corresponderá cursar a todo estudiante de ingeniería, por ello se recomienda tomarse un tiempo para trabajar con este asistente que no requiere mayores explicaciones que una clase introductoria para familiarizarse con la pantalla principal. Posteriormente, utilizando adecuadamente la ayuda se puede concretar fácilmente un autoaprendizaje.

El asistente matemático Derive permite construir tablas de verdad de una forma muy simple, para ello basta con que se introduzca en la barra de entrada de expresiones la proposición cuya tabla se desea encontrar. Los tres últimos ejemplos pueden resolverse del siguiente modo;

Ejemplo 7

Introduzca la siguiente expresión

TRUTH_TABLE(p,q,r,((p → q) ^ (q → r)) → (p → r))

Se simplificará a:

| p | q | r | (p → q) ^ (q → r) → (p → r) |
|-------|-------|-------|-----------------------------|
| true | true | true | true |
| true | true | false | true |
| true | false | true | true |
| true | false | false | true |
| false | true | true | true |
| false | true | false | true |
| false | false | true | true |
| false | false | false | true |

Ejemplo 8

Introduzca lo siguiente:

TRUTH_TABLE(p, q, r, s, (r ∨ q) ^ ((¬ p ∨ s) ↔ (q → ¬ r)))

Luego de introducir y simplificar obtendrá la siguiente tabla:

| p | q | r | s | (r ∨ q) ^ (¬ p ∨ s ↔ q → ¬ r) |
|-------|-------|-------|-------|-------------------------------|
| true | true | true | true | false |
| true | true | true | false | false |
| true | true | false | true | true |
| true | true | false | false | false |
| true | false | true | true | true |
| true | false | true | false | false |
| true | false | false | true | false |
| true | false | false | false | false |
| false | true | true | true | false |
| false | true | true | false | false |
| false | true | false | true | true |
| false | true | false | false | true |
| false | false | true | true | true |
| false | false | true | false | true |
| false | false | false | true | false |
| false | false | false | false | false |

1.12 LEYES DEL ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Las proposiciones, bajo la ley de equivalencia lógica (\equiv), cumplen las siguientes leyes:

1.12.1 LEYES DE IDEMPOTENCIA

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

1.12.2 LEYES ASOCIATIVAS

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

1.12.3 LEYES CONMUTATIVAS

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

1.12.4 LEYES DE IDENTIDAD

$$p \vee f \equiv p \quad ; \quad p \vee v \equiv v \quad ; \quad p \wedge v \equiv p \quad ; \quad p \wedge f \equiv f$$

1.12.5 LEYES DE COMPLEMENTACIÓN

$$p \vee \sim p \equiv v \quad ; \quad \sim \sim p \equiv p \quad ; \quad p \wedge \sim p \equiv f$$

$$\sim v \equiv f \quad ; \quad \sim f \equiv v$$

1.12.6 LEYES DE MORGAN

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \qquad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

1.12.7 LEYES DISTRIBUTIVAS

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

1.12.8 LEYES DE ABSORCIÓN

$$p \vee (p \wedge q) = p$$

$$p \wedge (p \vee q) = p$$

1.12.9 DEFINICIÓN DE CONDICIONAL Y BICONDICIONAL

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

1.13 ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Ejemplo 9

Mediante las leyes del álgebra de proposiciones y sin utilizar la ley de absorción, simplificar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (p \vee q) \wedge (\sim p \vee f) \\
 & (p \vee q) \wedge (\sim p \vee f) && \text{Identidad} \\
 & \equiv (p \vee q) \wedge \sim p && \text{Conmutativa} \\
 & \equiv \sim p \wedge (p \vee q) && \text{Distributiva} \\
 & \equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && \text{Complementación} \\
 & \equiv f \vee (\sim p \wedge q) && \text{Identidad} \\
 & \equiv \sim p \wedge q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & p \vee [(p \wedge q) \vee f] && \text{Identidad} \\
 & \equiv p \vee (p \wedge q) && \text{Identidad} \\
 & \equiv (p \wedge v) \vee (p \wedge q) && \text{Distributiva} \\
 & \equiv (p \wedge (v \vee q)) && \text{Identidad} \\
 & \equiv p \wedge v && \text{Identidad} \\
 & \equiv p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & p \wedge [(p \vee q) \wedge v] && \text{Identidad} \\
 & \equiv p \wedge (p \vee q) && \text{Identidad} \\
 & \equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q) && \text{Distributiva} \\
 & \equiv (p \vee (f \wedge q)) && \text{Identidad} \\
 & \equiv p \vee f && \text{Identidad} \\
 & \equiv p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & [(q \rightarrow \sim p) \wedge q] \rightarrow \sim(p \wedge q) \\
 & = [(\sim q \vee \sim p) \wedge q] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{Def. condicional, De Morgan} \\
 & = [q \wedge (\sim q \vee \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{Conmutativa} \\
 & = [(q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{Distributiva} \\
 & = [(F) \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{Complementación}
 \end{aligned}$$

| | |
|--|------------------------------|
| $= [q \wedge \sim p] \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ | Identidad |
| $= \sim(q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee \sim q)$ | Def. Condicional |
| $= (\sim q \vee p) \vee (\sim p \vee \sim q)$ | De Morgan |
| $= \sim q \vee p \vee \sim p \vee \sim q$ | Idempotencia complementación |
| $= V$ | |

Ejemplo 10

Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} \text{Si } a^{-1} = \frac{1}{a} & \text{entonces} & x^{2^2} = x^{2+2} \\ V & \rightarrow & V \\ & V & \end{array}$$

Como el primer enunciado es verdadero, el segundo también, y el conector es el condicional deducimos que el enunciado es verdadero

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} \sqrt[3]{-8} = -2 & \text{y} & \sqrt{-9} = -3 \\ V & \wedge & F \\ & F & \end{array}$$

En este caso el primer enunciado es verdadero y el segundo falso, el conector es la conjunción, por tanto, el enunciado es falso

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} x^0 = 0 & \text{o} & x^{1-1} = 1 \\ F & \vee & V \\ & V & \end{array}$$

Ahora el primer enunciado es falso y el segundo verdadero, el conector en la disyunción, por tanto, el enunciado es verdadero.

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} (x+y)^2 \neq x^2 + y^2 & \text{si y sólo si} & \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \\ V & \leftrightarrow & V \end{array}$$

El primer enunciado es verdadero y el segundo verdadero, el conector es el bicondicional, en consecuencia el enunciado es verdadero.

Ejemplo 11

Conociendo que p, q, r, s son proposiciones verdaderas determine el valor de verdad de:

$$(p \rightarrow q) \vee [(\Box r \downarrow s) \wedge \Box p]$$

$$(V \rightarrow V) \vee [(\Box V \downarrow V) \wedge \Box V]$$

$$(V) \vee F \wedge F$$

$$V \vee F$$

$$V$$

Si p, q son verdaderas y r, s, t falsas, hallar el valor de verdad de:

$$(\Box r \underline{\vee} q) \leftrightarrow s \wedge [(\Box t \rightarrow q) \downarrow (p \vee \Box s)]$$

$$(\Box F \underline{\vee} V) \leftrightarrow F \wedge [(\Box F \rightarrow V) \downarrow (V \vee \Box F)]$$

$$(F) \leftrightarrow F \wedge [(V) \downarrow (V)]$$

$$V \wedge F$$

$$F$$

1.14 ENUNCIADOS CONDICIONALES Y VARIACIONES

El condicional $p \rightarrow q$ tiene las siguientes proposiciones derivadas de ella

- Converso o recíproco $q \rightarrow p$
- Inverso o contrario $\sim p \rightarrow \sim q$
- Contrapositivo o contrarecíproco $\sim q \rightarrow \sim p$

Cuyas tablas de verdad son las siguientes:

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\sim p \rightarrow \sim q$ | $\sim q \rightarrow \sim p$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | F |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |

Nótese que el enunciado condicional $p \rightarrow q$ y su contrapositivo $\sim q \rightarrow \sim p$ son lógicamente equivalentes, de la misma manera el converso $q \rightarrow p$ y el inverso $\sim p \rightarrow \sim q$ son también lógicamente equivalentes.

Ejemplo 12

Sea el enunciado condicional “Si estudio matemáticas aprobaré la materia” escriba en forma simbólica y literal el condicional, converso, inverso contrapositivo.

Sea p “estudio matemáticas”
 q “aprobaré la materia”

Condicional
 $p \rightarrow q$ “Si estudio matemáticas aprobaré la materia”

Converso
 $q \rightarrow p$ “Si apruebo la materia entonces estudié matemáticas”

Inverso
 $\sim p \rightarrow \sim q$ “Si no estudio matemáticas, entonces no aprobaré la materia”

Contrapositivo
 $\sim q \rightarrow \sim p$ “Si no apruebo la materia, entonces no estudié matemáticas”

Ejemplo 13

Sea el enunciado condicional “Si me caso muy joven, seré infeliz”, escriba en forma simbólica y literal el condicional, converso, inverso y contrapositivo.

Sea p “me caso muy joven”
 q “seré infeliz”

Condicional
 $p \rightarrow q$ “Si me caso muy joven, seré infeliz”

Converso
 $q \rightarrow p$ “Si soy infeliz entonces me casé muy joven”

Inverso
 $\sim p \rightarrow \sim q$ “Si no me caso muy joven entonces seré feliz”

Contrapositivo
 $\sim q \rightarrow \sim p$ “Si soy feliz entonces no me casé muy joven”

1.15 ARGUMENTOS E IMPLICACIÓN LÓGICA

Argumento (razonamiento deductivo válido) es una afirmación de que un conjunto dado de proposiciones

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ denominadas premisas, producen como consecuencia lógica otra proposición Q llamada conclusión, se representa por:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$$

Un argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$ es válido si la conclusión es verdadera cuando todas las premisas son verdaderas; de otra manera es falso.

Un argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$ es válido si y sólo si la proposición $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ es una tautología.

Ejemplo 14

Determine la validez del siguiente argumento

P_1 : Estudio o voy a la fiesta

P_2 : Si estudio aprobaré el examen

P_3 : Fui a la fiesta

.....

Q : Reprobé el examen

Sea p estudio; q voy a la fiesta; r aprobé el examen

Estudio o voy a la fiesta

$p \vee q$

Si estudio aprobaré el examen

$p \rightarrow r$

Fui a la fiesta

q

Reprobé el examen

$\sim r$

| $(p \vee q)$ | $(p \rightarrow r)$ | q | \vdash | $\sim r$ |
|--------------|---------------------|-----|----------|----------|
| V | V | V | | F |
| V | F | V | | V |
| V | V | V | | F |
| V | F | F | | V |
| F | V | V | | F |
| F | V | F | | V |
| F | V | V | | F |
| F | V | F | | V |

Solamente en la primera fila las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, por tanto, el argumento no es válido.

También es posible determinar la validez del argumento construyendo la siguiente tabla de verdad:

| $\{[(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r)] \wedge (p \wedge r)\} \rightarrow \sim q$ | | | | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | F |
| V | V | V | F | V | F | F | F | V | F | F | V |
| V | F | F | F | F | F | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | F | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | F | F | F | F | V | F | F | F | V | V |
| F | V | F | F | F | F | F | F | F | F | F | V |

También es posible determinar la validez del argumento construyendo la tabla de verdad:

Como la tabla de verdad no es una tautología el argumento no es válido.

1.16 MODUS PONENS

$$p, p \rightarrow q \vdash q$$

| p | $;$ | $p \rightarrow q$ | \vdash | q |
|-----|-----|-------------------|----------|-----|
| V | | V | | V |
| V | | F | | F |
| F | | V | | V |
| F | | V | | F |

| p | \wedge | $p \rightarrow q$ | \rightarrow | q |
|-----|----------|-------------------|---------------|-----|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | F | V | V | V |
| F | F | V | V | F |

Observe el razonamiento deductivo válido

1.17 MODUS TOLLENS

$$(p \rightarrow q); \sim q \vdash \sim p$$

| $p \rightarrow q$ | $;$ | $\sim q$ | \vdash | $\sim p$ |
|-------------------|-----|----------|----------|----------|
| V | | F | | F |
| F | | V | | F |
| V | | F | | V |
| V | | V | | V |

| $p \rightarrow q$ | \wedge | $\sim q$ | \rightarrow | $\sim q$ |
|-------------------|----------|----------|---------------|----------|
| V | F | F | V | F |
| F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| V | V | V | V | V |

Observe el razonamiento deductivo válido

1.18 CIRCUITOS LÓGICOS

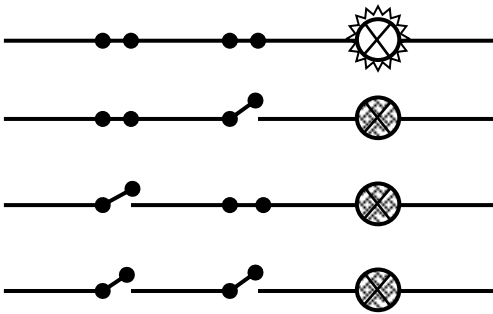
Todas las proposiciones mostradas anteriormente, pueden ser traducidas a

un circuito lógico, el cual muestra a través de una lámpara encendida o apagada la condición de verdadero o falso respectivamente.

Cuando un circuito lógico requiere el uso de un mismo enunciado se establece que si p es verdadero (interruptor cerrado), entonces $\sim p$ (interruptor abierto) es falso y viceversa.

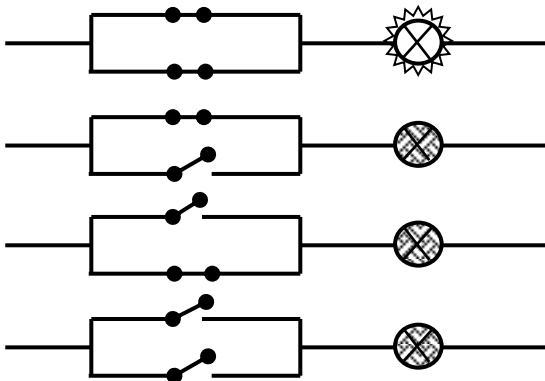
Todos los circuitos lógicos utilizan interruptores en serie para la conjunción y en paralelo para la disyunción, las demás conectivas se reducen a estos operadores para construir sus circuitos lógicos.

1.18.1 CONJUNCIÓN



| p | \wedge | q |
|-----|----------|-----|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | F |

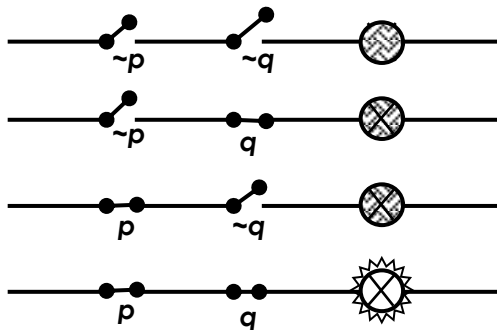
1.18.2 DISYUNCIÓN



| P | \vee | q |
|-----|--------|-----|
| V | V | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

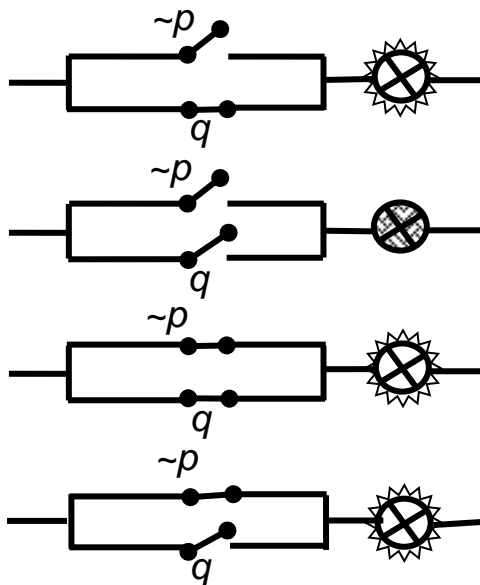
| P | \downarrow | q |
|-----|--------------|-----|
|-----|--------------|-----|

1.18.3 NEGACIÓN CONJUNTA



| | | |
|----------|----------|----------|
| V | F | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |
| $\sim p$ | \wedge | $\sim q$ |
| F | F | F |
| F | F | V |
| V | F | F |
| V | V | V |

1.18.4 CONDICIONAL O IMPLICACIÓN $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$

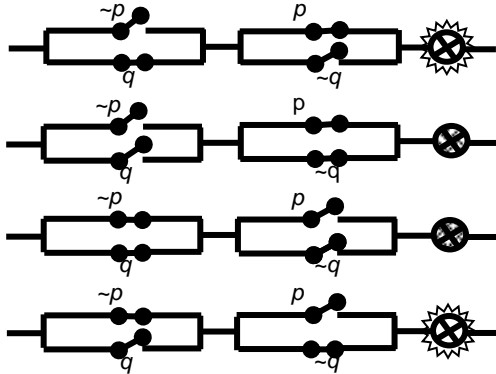


| | | |
|----------|---------------|---|
| $\sim p$ | V | q |
| F | V | V |
| F | F | F |
| V | V | V |
| V | V | F |
| p | \rightarrow | q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | V | F |

1.18.5 BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACIÓN

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$$

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q \wedge \sim q \vee p$$



| P | \leftrightarrow | q |
|---|-------------------|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

1.18.6 DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O DIFERENCIA SIMÉTRICA

$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow \sim (p \leftrightarrow q)$$

$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow \sim ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow \sim (p \rightarrow q) \vee \sim (q \rightarrow p)$$

$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

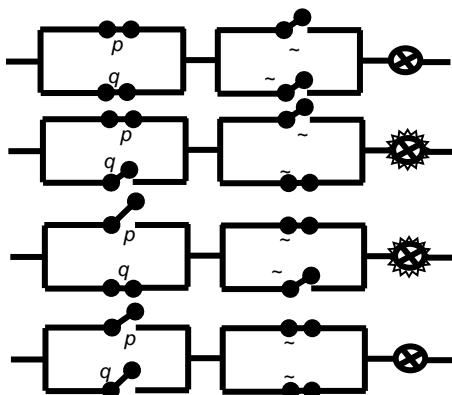
$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

$$(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

| | | |
|---|--------------------|---|
| p | $\underline{\vee}$ | q |
|---|--------------------|---|

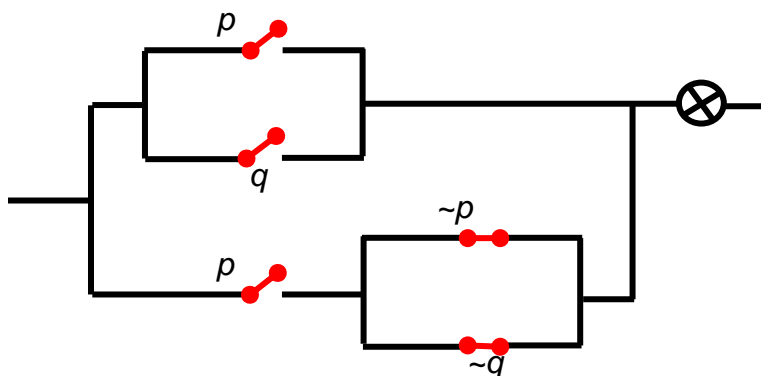
$$p \sqcup q \leftrightarrow p \vee q \wedge \neg p \vee \neg q$$

| | | |
|---|---|---|
| V | F | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |



Ejemplo 16

Si se tiene el siguiente circuito lógico



- Determinar la proposición correspondiente
- Simplificar y obtener la proposición resultante más simple del mismo

a) $(p \vee q) \wedge p \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$$(p \vee q) \vee (p \wedge (\neg p \vee \neg q))$$

$$(p \vee q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q) \vee (f) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee \neg q)$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee v)$$

$$p \vee (q \wedge v)$$

$$p \vee q$$

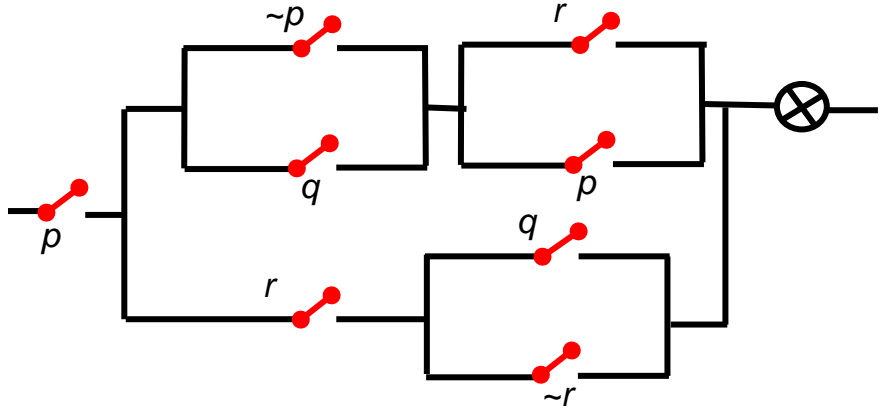
La tabla de verdad correspondiente al circuito es:

| $(p$ | \vee | $q)$ | \vee | $(p$ | \wedge | $(\sim p$ | \vee | $\sim q)$ |
|------|--------|------|--------|------|----------|-----------|--------|-----------|
| V | V | V | V | V | F | F | F | F |
| V | V | F | V | V | V | F | V | V |
| F | V | V | V | F | F | V | V | F |
| F | F | F | F | F | F | V | V | V |

Puede observarse que las columnas de $(p \vee q)$ y el resultado final de la tabla son idénticas confirmando la reducción efectuada

Ejemplo 17

En el siguiente circuito lógico



La proposición equivalente será:

$$p \wedge [(\neg p \vee q) \wedge (r \vee p) \vee r \wedge (q \vee \neg r)]$$

Efectuando las reducciones se tiene:

$$\begin{aligned} &= p \wedge [((\neg p \vee q) \wedge r) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r)] \\ &= p \wedge [((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \vee (r \wedge q) \vee (F)] \\ &= p \wedge [((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee (F) \vee (q \wedge p) \vee r \wedge q] \\ &= p \wedge (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p) \\ &= (p \wedge \neg p) \wedge (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge p) \\ &= F \wedge (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee V \\ &= (F \wedge (p \wedge r)) \vee ((p \wedge q) \vee V) \\ &= F \vee (p \wedge q) \\ &= p \vee q \end{aligned}$$

La tabla de verdad es:

| p | V | $[((\sim p$ | V | $q)$ | \wedge | $(r$ | V | $p))$ | V | $(r$ | \wedge | $(q$ | V | $\sim r))]$ |
|----------|----------|-------------|-----|------|----------|------|-----|-------|----------|------|----------|------|-----|-------------|
| V | V | F | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | F |
| V | V | F | V | V | V | F | V | V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F | V | V | V | F | V | F | F | F | F |
| V | F | F | F | F | F | F | V | V | F | F | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V | F | V | V | V | V | V | F |
| F | F | V | V | V | F | F | F | F | V | F | F | V | V | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V | F | F | V | F | F | F | F |
| F | F | V | V | F | F | F | F | F | F | F | F | F | V | V |

Que es equivalente a la tabla de verdad de

| p | \wedge | q |
|-----|----------|-----|
| V | V | V |
| V | V | V |
| V | F | F |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | V |
| F | F | F |
| F | F | F |

Y verifica la reducción efectuada