Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA-56B Ecuaciones en Derivadas Parciales
Guía N°2
12 de mayo de 2008

Prof.: Manuel del Pino.
Aux.: Pablo Figueroa.

Problema 1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq +\infty$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

b) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $i = 1, \ldots, N$ se tiene

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}}, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

c) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo abierto $U \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \operatorname{dist}(U, \Omega^c)$ se tiene

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(U)} \leq C|h|,$$

donde $\tau_h u$ esta dada por $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

Además, se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en *b*) y *c*).

Problema 2.

a) Sea f una función continua en el intervalo $[0, a]$. Demuestre que

$$\int_0^a \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(s)\, ds \right|^2 dx \leq C \int_0^a |f(x)|^2\, dx,$$

donde C es una constante independiente de f.

b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1. Demuestre la **Desigualdad de Hardy**: Existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H_0(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega \left| \frac{u(x)}{d(x)} \right|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx,$$

donde

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x-y| \mid y \in \partial\Omega\}.$$

Problema 3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < +\infty$. Probar que $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ y $F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Si $F(0) = 0$ entonces Ω puede ser no acotado.

Problema 4. Sea $1 < p < +\infty$ y Ω acotado

a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_+, u_- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \nabla u_- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\} \end{cases}.$$

Sugerencia: $u_+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2) - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\nabla u = 0$ c.t.p. en $\{u = 0\}$.

Problema 5. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfaciendo $\nabla u = 0$ c.t.p. en Ω. Demuestre que u es constante c.t.p. en Ω.

Problema 6. Dé una caracterización en términos de trazas del espacio $W_0^{2,p}(\Omega)$ en el caso en que Ω es acotado y suave.

Problema 7.

a) Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Obviamente $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Demuestre que u no posee derivada débil con respecto a x. *Indicación*: Encuentre la derivada de u con respecto a x en el sentido de las distribuciones.

b) Sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Definimos

$$u(x, y) = \begin{cases} M(x, y) & \text{si } x < r(y) \\ N(x, y) & \text{si } x \geq r(y) \end{cases}.$$

Dé condiciones para M, N y r para que u sea derivable con respecto a x en el sentido débil.

Problema 8. En este problema se quiere demostrar que las inclusiones de Sobolev son óptimas. Lo haremos en dos casos. Suponemos que Ω es un dominio de $\mathbb{R}^N$ y que tiene frontera de clase C^1.

a) Sea $p < n$. Muestre que existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \notin L^q(\Omega)$ con $q > np/(n-p)$. *Indicación*: Suponga que $0 \in \Omega$ y considere una función u tal que $u(x) = |x|^\lambda$ si $x \in B(0, R) \subset \Omega$ y elija λ adecuado.

b) Sea $kp < n$. Muestre que $W^{k,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^q(\Omega)$ si $q > np/(n - kp)$.

c) Sea $p = n > 1$. Muestre que $W^{1,p}(\Omega)$ no está contenido en $L^\infty(\Omega)$. *Indicación*: Considere la función u dada por $u(x) = \log\left(\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)\right)$ si $x \in B(0, R) \subset \Omega$.

Problema 9.

a) Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera de clase C^1. Sea $u \in H^1(\Omega)$ y definamos $\bar{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como $\bar{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ y $\bar{u}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Pruebe que si $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

Problema 10. Mostrar que una función u es débilmente diferenciable en un dominio Ω si y sólo si es débilmente diferenciable en una vecindad de cada punto en Ω.

Problema 11. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ con $0 \in \Omega$. Muestre que la función u dada por $u(x) = |x|^{-\alpha}$ es débilmente diferenciable hasta el orden k si $k + \alpha < n$. ¿Bajo que condiciones se tiene $u \in W^{k,p}(\Omega)$?

Problema 12. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega$ de clase C^1.

a) Demuestre que existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que para toda $u \in C^1(\bar{\Omega})$ se tiene

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \, \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Demuestre que el operador traza $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es compacto.