Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
22 de Octubre de 2024

Tarea 2

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Asuma $1 \leq p \leq \infty$ y U acotado.

a) Demuestre que $u \in W^{1,p}(U)$ entonces $u^+ := \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(U)$ y $u^- := -\min\{u, 0\} \in W^{1,p}(U)$. Más aún:

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{c.t.p en } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{c.t.p en } \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p en } \{u \geq 0\}, \\ -Du & \text{c.t.p en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Hint: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$.

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{en } \{z \geq 0\}, \\ 0 & \text{en } \{z < 0\}. \end{cases}$$

b) Utilice lo anterior para demostrar que $|u| \in W^{1,p}(U)$.

c) Pruebe que $Du = 0$ c.t.p en el conjunto que $\{u = 0\}$.

P2. Un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se dira estrellado con respecto al origen si

$$\forall \lambda \in [0, 1) \text{ se cumple que } \lambda\overline{\Omega} \subset \Omega$$

El objetivo de este problema es demostrar que en tal caso $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$,para $k \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$.

a) Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Para $\lambda \in (0, 1)$, se define $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$. Demuestre que $\forall |\alpha| \leq k$, se cumple que $D^\alpha(u_\lambda) = \lambda^{|\alpha|}(D^\alpha u)_\lambda$ y concluya que $u_\lambda \in W^{k,p}(\lambda^{-1}\Omega)$.

b) Demuestre que $\forall |\alpha| \leq k$ se tiene que $\|D^\alpha u - D^\alpha(u_\lambda)\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ cuando $\lambda \to 1$.

c) Utilizando una familia regularizadora $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$, concluya el resultado.

P3. *a*) Sea $s \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$, tal que $s > \frac{1}{2}n + k$. Use transformada de Fourier para probar que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset B^k(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n); \lim_{|x| \to \infty} |D^\alpha u(x)| = 0, \quad |\alpha| \leq k\} \tag{1}$$

con inyección continua.

b) Muestre que, para cada $n \geq 3$ existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

c) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y $1 \leq p < \infty$. Demuestre que todo subconjunto de un espacio métrico separable es separable. Con esto, demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es separable.

d) Sea $1 \leq p < N$ y considere la secuencia de funciones $u_n : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u_n(x) := \begin{cases} n^{N/(p-1)}(1 - n||x||) & ||x|| < 1/n \\ 0 & ||x|| \geq 1/n \end{cases}$$

Demuestre que $\{u_n\}$ es acotada en $W^{1,p}(B(0,1))$, pero no admite ninguna subsucesión fuertemente convergente en $L^{p^*}(B(0,1))$.