Departamento de Ingeniería en Matemática
MA4801-1 - Ecuaciones en Derivadas Parciales, Primavera 2024
Profesores: Rayssa Caju y Claudio Muñoz
Auxiliares: Benjamin Borquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

Guia 1 - Introdución a distribuciones

P1. (Convergencia de funciones test) Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \phi \neq 0$, y $0 \notin \operatorname{supp} \phi$. Decida cuando la sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge a 0 en $C_0^\infty(\mathbf{R})$:

(i) $\phi_j(x) = j^{-1}\phi(x-j)$.
(ii) $\phi_j(x) = j^{-p}\phi(jx)$. Aqui p es un número intero positivo fijo.
(iii) $\phi_j(x) = e^{-j}\phi(jx)$.

En cada uno de estos casos, verifica que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{Z}_+$, la secuencia $\left(\phi_j^{(k)}(x)\right)_{j\in\mathbf{N}}$ converge a 0, y además, que en el caso (i) la convergencia es incluso uniforme en $\mathbb{R}$.

P2. (Ejemplos de Distribuciones) Verifica que u, v y w a continuación son distribuciones en $\mathbb{R}^2$:

(i) $u(\phi) = \partial^\alpha\phi(x)$, donde α es el multiíndice $(1,1)$ y x es el punto $(1,1)$.
(ii) $v(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t,0)\,dt$.
(iii) $w(\phi) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{\|x\|^2}\phi(x)\,dx$.

P3. (Rotación) Sea

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

una rotación en el plano por un ángulo θ. Define $\langle f\circ R_\theta, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\circ R_{-\theta}\rangle$. Demuestra que esto es consistente con la definición de $f\circ R_\theta$ para funciones. Si $\langle f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,0)\,dx$, ¿cuál es $f\circ R_{\pi/2}$?

P4. Se dice que f es radial si $f\circ R_\theta = f$ para todo θ. ¿Es δ_0 radial? Demuestra que $\langle f_R,\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle f\circ R_\theta,\varphi\rangle\,d\theta$ define una distribución radial. Demuestra que f es radial si y solo si $f = f_R$.

P5. En $\mathbb{R}^2$ defina $\langle f,\varphi\rangle = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y)dxdy$. Compute $\partial^2 f/\partial x\partial y$.

P6. Demuestra que cada función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^1\right)$ se puede escribir como $\varphi = \psi' + c\varphi_0$, donde φ_0 es una función de prueba fija (con $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx \neq 0$), $\psi \in \mathcal{D}$ y c es una constante. (Sugerencia: Elige $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}(\varphi(t) - c\varphi_0(t))\,dt$ para la elección apropiada de c). Usa esto para probar: Si f es una distribución en $\mathbb{R}$ que satisface $f' = 0$, entonces f es una constante.

P7. (Representación distribucional de saltos). Sea f continuamente diferenciable excepto en los puntos $x_1,\ldots,x_m$ donde posée discontinuidades de salto, y que su derivada puntual $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (definida de forma clásica excepto en $x_1,\ldots,x_m$) está en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Muestre que existe la derivada distribucional de f y es dada por

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \sum_{i=1}^{m}\left[f\left(x_i^+\right) - f\left(x_i^-\right)\right]\delta_{x_i}$$

P8. (Distribuciones temperadas). Considere la clase de Schwartz

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : \rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| < \infty \text{ para cualesquiera } \alpha,\beta \text{ multi-índices },\right\}$$

su dual $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, y denote $\|f\|_{l,j} = \sum_{|\alpha|\le l,|\beta|\le j}\rho_{\alpha,\beta}(f)$ para $f\in\mathcal{S}$.

(i) Sea T un funcional lineal definido sobre $\mathcal{S}$. Muestre que T es continuo si y solo si existe una constante $C>0$ y $l,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que $|\langle T,\varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{l,j}$ para toda $\varphi\in\mathcal{S}$.
(ii) Dado $T\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, verifique que la restricción de T a $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ es una distribución.