Departamento de Ingeniería en Matemática
MA4801-1 - Ecuaciones en Derivadas Parciales, Primavera 2024
Profesores: Rayssa Caju y Claudio Muñoz
Auxiliares: Benjamin Borquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

Guia 4 - Ecuación de la Onda

P1. Supón que para alguna función de atenuación $\alpha = \alpha(r)$ y una función de retardo $\beta = \beta(r) \geq 0$, existen, para todos los perfiles ϕ, soluciones de la ecuación de onda en $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}$ de la forma

$$u(x,t) = \alpha(r)\phi(t - \beta(r)).$$

Aquí $r = |x|$ y asumimos $\beta(0) = 0$. Muestra que esto es posible solo si $n = 1$ o 3, y calcula la forma de las funciones α y β. (T. Morley, SIAM Review 27 (1985), 69-71)

P2. Sea u la densidad de partículas que se mueven hacia la derecha con velocidad uno a lo largo de la recta real y sea v la densidad de partículas que se mueven hacia la izquierda con velocidad uno. Si a una tasa $d > 0$ las partículas que se mueven hacia la derecha se convierten aleatoriamente en partículas que se mueven hacia la izquierda, y viceversa, tenemos el siguiente sistema de EDP

$$\begin{cases} u_t + u_x = d(v - u) \\ v_t - v_x = d(u - v). \end{cases}$$

Demuestre que tanto $w := u$ como $w := v$ resuelven la *telegraph equation*

$$w_{tt} + 2dw_t - w_{xx} = 0.$$

P3. (Equipartición de energía) Sea u la solución del problema de valores iniciales para la ecuación de onda en una dimensión:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Supongamos que g, h tienen soporte compacto. La energía cinética es $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx$ y la energía potencial es $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx$. Demuestra

(a) $k(t) + p(t)$ es constante en t,

(b) $k(t) = p(t)$ para todos los tiempos t suficientemente grandes.

P4. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 & \text{en } |x| > R, \text{ para } R > 0. \end{cases}$$

1. Demuestra la identidad diferencial: $2v\left(v_{tt} - v_{xx}\right) = 2\left(v_x^2 - v_t^2\right) + \left(v^2\right)_{tt} - 2\left(vv_x\right)_x$, donde $v \equiv v(x,t)$ es una función suave.
2. Usa la identidad anterior y el principio de equipartición de energía para probar que $\int_{\mathbb{R}} u^2\,dx = c_1 t + c_2$, $t > R$, donde c_1 y c_2 son constantes.