Cálculo:

1. **Teorema Gauss-Green:**
   - $\int_U u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\nu^i\,\mathrm{d}S \quad (i=1,...,n)$
   - $\int_U \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} \boldsymbol{u}\cdot\nu\,\mathrm{d}S$
2. **Integración por partes:** $\int_U u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} uv\nu^i\,\mathrm{d}S \quad (i=1,...,n)$
3. **Formulas de Green:**
   - $\int_U \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$
   - $\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S$
   - $\int_U Dv\cdot Du\,\mathrm{d}x = -\int_U u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U}\frac{\partial v}{\partial \nu}u\,\mathrm{d}S$
4. **Coordenadas polares:**
   - $\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\left(\int_{\partial B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r$
   - $\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\int_{B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}S$
5. **Fórmula de coarea:** $\int_{\mathbb{R}^n} f|Du|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\{u=r\}} f\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r$
6. **Mollifiers:** Sean $\{\rho_\varepsilon\}$ mollifiers, $f^\varepsilon := \rho_\varepsilon * f$ cumple:
   - $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$
   - $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ c.t.p
   - Si $f\in C(U)$, entonces $f^\varepsilon \to f$ uniforme en compactos
   - Si $1\le p<\infty$ y $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(U)} f$
7. **Volúmenes de esferas:** sea $\alpha(n)$ el volumen de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$.

$$|\partial B(0,r)| = n\alpha(n)r^{n-1}$$
$$|B(0,r)| = \alpha(n)r^n$$

Funciones Test y Distribuciones:

1. **Topología para $C^\infty(\Omega)$ (τ_o):** Es la topología formada por las seminormas: $P_N(f) = \sup_{x\in\mathbb{K}_n}\max_{|\alpha|\le N}|\partial^\alpha f(x)|$
2. **Espacios $D_k(\Omega)$ y $D(\Omega)$** Para un compacto K fijo definimos $D_k(\Omega) = \{f\in C^\infty(\Omega)\mid \mathrm{Supp}(f)\subseteq K\}$ con la topología $\tau_k := \tau_0|_k$. Esta está generada por las **normas**:

$$\|f\|_N := \sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\le N}}|\partial^\alpha f|$$

   Para definir la topología τ en $C_c^\infty(\Omega)$, se construye la siguiente base de vecindades del 0:

$$\beta := \left\{\tilde{V}\text{ convexo, balanceado en } C^\infty(\Omega)\text{ tales que }\tilde{V}\cap D_K(\Omega)\in D_K(\Omega)\text{ para todo compacto }K\right\}$$

   Con esto, se denota espacio de funciones test a $D(\Omega) := (C_c^\infty(\Omega),\tau)$.
3. **Convergencia de tests** Si (f_n) es sucesión de Cauchy en $D(\Omega)$, existe K tal que $(f_n)\subseteq D_{K(\Omega)}$ y además $|f_n - f_m|_N \to 0$ para todo N fijo

   Si $f_n\to 0$ en $D(\Omega)$ entonces existe K tal que $(f_n)\subseteq D_{K(\Omega)}$ y $\partial^\alpha f_n\to 0$ uniforme en K para todo multi índice α
4. **Caracterización del dual** Se llama espacio de distribuciones a $D'(\Omega)$. Sea $T: C_c^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}$ lineal, LSSE:
   - $T\in D'(\Omega)$
   - Para cada compacto K, existen $N(K)\ge 0$ y $C(K)>0$ tal que

$$|\langle T,\phi\rangle| \leq C\|\phi\|_N$$

Si existe N que no depende del compacto, se dice que el menor de ellos es el orden de T.

5. **Derivada en distribuciones** $\langle D^\alpha T,\varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$
6. Sea $\boldsymbol{T : D(\Omega) \to Y}$ **lineal**, son equivalentes:
   - T es continuo
   - T es acotado
   - $\forall\phi_n \to 0$ en $D(\Omega)$, $T\phi_n \to 0$ en Y.
   - $T|_{D_k(\Omega)}$ es continuo para todo K
7. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, definimos $\langle fT,\phi\rangle := \langle T, f\phi\rangle$
8. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\phi\rangle$ existe para toda ϕ test, Definimos: $\langle T,\phi\rangle := \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\phi\rangle$, entonces $T \in D'(\Omega)$ y $\partial^\alpha T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} \partial^\alpha T$

Transformada de Fourier:

Ecuación de Laplace:

Ecuación de Calor:

Ecuación de Onda:

1. **Fórmula de D'Alambert ($U = \mathbb{R}$):** $u(x;r,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y$
2. **Medias Esféricas:** $U(r,t;x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,\mathrm{d}y$, $U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0$ s.a. $U = G, U = H$ en $\mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}$
3. **Fórmula de Kirchhoff:** $u(x,t) = ⨍_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y)$, válida sólo para $n = 3$.
4. **Fórmula de Poisson 2D:** $u(x,t) = \frac{1}{2}⨍_{B(x,t)} \frac{tg(y)+t^2h(y)+tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}S(y)$
5. **Fórmulas de Poisson 3D:** $u(x,t) = \partial_t\left(t⨍_{\partial B(x,t)} g\,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{2r}⨍_{\partial B(x,t)} h(y)\,\mathrm{d}S(y)$ $= ⨍_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y)$
6. **Solución homogénea general $\boldsymbol{n}$ impar:**
$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} g\,\mathrm{d}S\right) + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} h\,\mathrm{d}S\right)\right],$$
$$\gamma_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)$$
7. **Solución homogénea general $\boldsymbol{n}$ par:**
$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n⨍_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y\right) + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n⨍_{B(x,t)}\frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y\right)\right],$$
$$\gamma_n = 2\cdot 4\cdot 6\cdots n$$
8. **Solución no-homogénea:** $u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,\mathrm{d}s$, donde para $t \geq s$, $u_{tt}(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0$, s.a. $u(\cdot;s) = 0, u_t(\cdot;s) = f(\cdot,s)$ en $t = s$ La solución general se obtiene sumando homogénea + inhomogenea
9. **Energía:** $E(t) = \frac{1}{2}\int_U (u_t^2 + |Du|^2)\,\mathrm{d}x$. $\dot{E} = \int_U u_t(u_{tt} - \Delta u)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} u_t Du\cdot\nu\,\mathrm{d}S$

Espacios de Sobolev: ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto)

1. **Derivada débil:** $v = D^\alpha u \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \,\mathrm{d}x$
2. $W^{k,p}(\Omega) \coloneqq \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ existe en el sentido Débil}\}$
3. $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \coloneqq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Con esta norma, $W^{k,p}(\Omega)$ es Banach. $H^k(\Omega) \coloneqq W^{k,2}(\Omega)$ además es Hilbert.
4. $W_0^{k,p}(\Omega) \coloneqq \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ con respecto a $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.
5. **Teoremas de densidad (p finito):**
   - $C^\infty(\Omega)$ es denso en $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ (sin supuestos extras sobre Ω).

   Si además Ω es acotado:
   - $C^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.

   Si Ω es acotado y borde C^1:
   - $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.
6. **Teorema de Extensión:**
   - Ω es acotado y borde C^1 $\Rightarrow$ $\exists E : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ lineal continuo tal que $Eu = u$ en Ω (c.t.p), y Eu tiene soporte en un abierto V acotado en $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset\subset V$.
7. **Traza:** Ω acotado $\wedge\, \partial\Omega \in C^1 \Rightarrow \exists T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ lineal continuo tal que $\forall u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{1,p}(\Omega), Tu = u|_{\partial\Omega}$. Además, $Tu = 0 \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
8. **Desigualdades de Sobolev:**
   - **Caso $1 \leq p < n$:** Definimos $p^* = \frac{np}{n-p}$
     - **En $\mathbb{R}^n$:** $\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
     - Ω **acotado y frontera suave:** $1 \leq p < n \Rightarrow \exists C > 0$ tal que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
     - Ω **acotado:** $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall q \in [1, p^*], \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$
   - **Caso $n < p \leq \infty$:** Aquí, las sobolev son *Hölder continuas* (osea identificable con continuas).
     - **Holder:** $u \in C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \Leftrightarrow \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \coloneqq \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y\in U \\ (x\neq y)}} \left\{\frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\gamma}\right\}$
     - $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^n), \gamma \coloneqq 1 - \frac{n}{p}, \|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$
     - Si **Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1:**

       $\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ donde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ y $u^* = u$ c.t.p.

Aplicaciones a EDP: