Tarea 2

Ecuaciones en Derivadas Parciales

P1) $1 \leq p < \infty$, U acotado

P1.a) Propiedades de u^+, u^-:

Para verificar que $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ es necesario verificar que $u^+, u^- \in L^p(U)$ y que sus derivadas parciales existen en el sentido débil (osea, igualdades c.t.p) y pertenecen a $L^p(U)$. Empecemos:

P1.a.a) $u^+ \in L^p(U)$:

Sabemos que $u \in W^{1,p}(U)$, lo que implica $u \in L^p(U)$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u^+\|_{L^p(U)} &= \left(\int_U |u^+|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_U |\max(u,0)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_U |u|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^p(U)} < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí, usamos que el valor $|\max(u,0)|$ es siempre menor o igual a $|u|$, ya que $|u| \geq 0$, y que al estar en $L^p(U)$, entonces $\|u\|_{L^p(U)} < \infty$. Por lo tanto, $u^+ \in L^p(U)$.

P1.a.b) $u^- \in L^p(U)$:

De manera análoga, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u^-\|_{L^p(U)} &= \left(\int_U |u^-|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_U |\min(u,0)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_U |u|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^p(U)} < \infty \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto, $u^- \in L^p(U)$.

P1.a.c) Derivadas débiles de u^+, u^-:

Para esto, enunciaré el siguiente lema:

Lema 1.1.3.1 (Regla de la cadena débil): Sea $1 \leq p < \infty, U$ acotado. Si $u \in W^{1,p}(U)$ y $g \in C^1(R)$ acotada y con derivada acotada, entonces $g(u) \in W^{1,p}(U)$ y $D_i(g(u)) = g'(u) D_i u$ en el sentido débil.

Demostración: Primero, recordemos que para una función $u \in W^{1,p}(U)$, con U un abierto acotado y $p < \infty$ se tiene que existe una familia de funciones $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ tales que $u_m \underset{W^{1,p}(U)}{\to} u$. Por lo tanto, tenemos que en particular $u_m \underset{L^p(U)}{\to} u$ y en consecuencia, hay una subsucesión (que para evitar muchos subíndices, asumiremos igual a la sucesión completa), tal que $u_m \to u$ puntualmente salvo un conjunto de medida nula. La continuidad de g permite entonces asegurar que $g(u_m) \to g(u)$ puntualmente salvo un conjunto de medida nula. Notemos que si g además es acotada, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para obtener:

$$\begin{aligned} \int_U g(u) D_i \varphi \,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{m \to \infty} \int_U g(u_m) D_i \varphi \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{m \to \infty} -\int_U g'(u_m) D_i u_m \varphi \,\mathrm{d}\lambda \to \begin{matrix} \text{la IPP y la derivada} \\ \text{son en el sentido usual} \end{matrix} \\ &= -\int_U g'(u) D_i u \varphi \,\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{3}$$

La última igualdad la obtenemos por TCD utilizando la cota sobre g' y una cota sobre la subsucesión con convergencia puntual de $D_i u_m$ que obtenemos usando el TCD inverso, es decir, dado que $D_i u_m \underset{L^p(U)}{\to} D_i u$, entonces existe una subsucesión u_m que converge puntualmente c.t.p y una función $f \in L^p(U)$ que la domina. En este espacio de medida finita, $L^p \Rightarrow L^1$. Los términos de borde de la IPP no afectan pues φ es función test, luego 0 en los bordes.

Como esto es válido para cualquier función test $\varphi \in C_c^\infty(U)$, entonces $D_i(g(u)) = g'(u) D_i u$ en el sentido débil (c.t.p).

Veamos que además es cierto que $g(u) \in L^p(U) \wedge g'(u) D_i u \in L^p(U)$:

$$\begin{gathered} \int_U |g(u)|^p \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_U g_{\max}^p \,\mathrm{d}\lambda = g_{\max}^p \mu(U) < \infty \\ \int_U |g'(u) D_i u|^p \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_U g_{\max}'^p |D_i u|^p \,\mathrm{d}\lambda = g_{\max}'^p \int_U |D_i u|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty \end{gathered} \tag{4}$$

Aquí aprovechamos que U es acotado, luego tiene medida de Lebesgue finita. Con esto, queda demostrado el lema. ■

Notemos que el F_ε propuesto cumple con las hipótesis del lema $\forall \varepsilon > 0$ (es continua y derivable por construcción, y podemos ver que $0 \leq F_\varepsilon'(x) =$

$\max\left\{0, \frac{z}{\sqrt{z^2+\varepsilon^2}}\right\} \leq 1$). Por lo tanto, invocando al lema, $\forall \varepsilon > 0, F_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(U)$. Nos falta ver que $\varepsilon \to 0 \Rightarrow F_\varepsilon(u) \underset{L^p(U)}{\to} u_+$:

$$\begin{aligned} \left\|F_\varepsilon(u) - u_+\right\|_{L^p(U)} &= \left\|\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\left(\sqrt{u^2+\varepsilon^2} - \varepsilon - u\right)\right\|_{L^p(U)} \\ &\leq \left\|\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\left(\sqrt{u^2+\varepsilon^2} - u\right)\right\|_{L^p(U)} + \left\|\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\varepsilon\right\|_{L^p(U)} \end{aligned} \tag{5}$$

Tenemos convergencia puntual monótona decreciente (c.t.p) para ambos términos cuando $\varepsilon \to 0$. Luego, por TCM obtenemos que $\left\|F_\varepsilon(u) - u_+\right\|_{L^p(U)} \to 0$.

Y por último, nos falta ver que $D_i F_\varepsilon(u) \underset{L^p(U)}{\to} \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}} D_i u$. Esto es directo pues ya vimos que $F_\varepsilon'(u) = \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}\right)$ que es una sucesión monótona creciente cuando $\varepsilon \to 0$, convergente a $1 \in L^p(u)$. Luego, por TCM, $\int_U |F_\varepsilon'(u) D_i u|^p \,\mathrm{d}\lambda \to \int_U \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}} |D_i u|^p \,\mathrm{d}\lambda$.

Con esto, $F_\varepsilon(u)$ converge con la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$ a u^+, que por completitud de los espacios de Sobolev debe ser miembro de ese mismo espacio. El límite además es único. Por lo tanto, $u^+ \in W^{1,p}(U)$, y su derivada débil corresponde a la que converge la derivada débil de $F_\varepsilon(u)$, es decir, es igual c.t.p a $D_i u^+$.

Ahora, para demostrar el resultado de u^-, notaremos primero que $u^- = (-u)^+$. Como el espacio de Sobolev es un espacio vectorial, $-u \in W^{1,p}(U)$. Por lo tanto, aplica el resultado recién demostrado, y obtenemos que $(-u)^+ \in W^{1,p}(U)$ y su derivada débil es $(D_i(-u))^+$ (c.t.p). Notemos que esto equivale a que $u^- \in W^{1,p}(U)$ y que su derivada débil sea $-D_i u$ cuando $-u > 0$, y 0 cuando $-u \leq 0$. Reorganizando las desigualdades, vemos que esto es equivalente al $D_i u^-$ definido en el enunciado.

P1.b) Aplicación a $|u|$:

Notemos que:

$$|u| = u^+ + u^- \tag{6}$$

El espacio de Sobolev es un espacio vectorial. Luego, por linealidad, podemos concluir (dado que acabamos de demostrar que $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$) que $|u| \in W^{1,p}(U)$ y que su derivada débil es $D_i|u| = D_i u^+ + D_i u^-$.

P1.c) Aplicación a Du:

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} \|Du\|^2 &= Du \cdot Du \\ &= D(u^+ - u^-) \cdot D(u^+ - u^-) \to \text{ por definición de } u^+, u^- \\ &= Du^+ \cdot Du^+ + Du^- \cdot Du^- - Du^+ \cdot Du^- - Du^- \cdot Du^+ \to \begin{array}{c}\text{por linealidad de} \\ \text{la derivada débil}\end{array} \end{aligned} \tag{7}$$

Por como se definen Du^+, Du^- vemos que en el conjunto $\{u = 0\}$ ambas toman el valor 0 c.t.p. Luego, reemplazando obtenemos que:

$$\|Du\|^2 = 0 \text{ c.t.p en } \{\mathrm{u} = 0\} \tag{8}$$

Con esto, hemos demostrado que $Du = 0$ c.t.p en $\{u = 0\}$.

P2) Conjuntos Estrellados

P2.a) Sobre u_λ:

Sea φ una función test cualquiera sobre $\lambda^{-1}U$. Tenemos que:

$$\int_{\lambda^{-1}U} u_\lambda(x) D^\alpha_{x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\lambda^{-1}U} u(\lambda x) D^\alpha_{x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Haciendo un cambio de variable $y = \lambda x \in U$, y usando la regla de la cadena usual (clásica) sobre $\varphi \in C_c^\infty(\lambda^{-1}U)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \int_U u(y) D^\alpha_x \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n} \\
&= \int_U u(y)\lambda^{|\alpha|}\left(D^\alpha_y\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)\frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n} \to \begin{array}{c}\text{Regla de la cadena multivariada:}\\ \text{Cada derivada sólo me bota un}\\ \text{lambda afuera.}\end{array} \\
&= \lambda^{|\alpha|}\cdot\frac{1}{\lambda^n}\int_U u(y) D^\alpha_y\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y \\
&= \lambda^{|\alpha|}\cdot\frac{1}{\lambda^n}\cdot(-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha_y u(y)\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y \to \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \in C_c^\infty(U) \Rightarrow \begin{array}{c}\text{Puedo usar la def}\\ \text{de derivada débil}\end{array} \\
&= \lambda^{|\alpha|}\cdot\frac{1}{\lambda^n}\cdot(-1)^{|\alpha|}\int_{\lambda^{-1}U} D^\alpha_y u(y)|_{y=\lambda x}\;\varphi(x)(\lambda^n\,\mathrm{d}x) \to \begin{array}{c}\text{Otro cambio de variable clásico.}\\ \text{No hemos hecho nada fuera de CVV.}\end{array} \\
&= \lambda^{|\alpha|}\cdot(-1)^{|\alpha|}\int_{\lambda^{-1}U}\left(D^\alpha_y u\right)_\lambda(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{10}$$

Donde en el último paso nos damos cuenta que evaluar las derivadas en λx es justo lo que hace la notación de subíndice. Con esto, tenemos que la derivada débil $D^\alpha_x u_\lambda(x) = \lambda^{|\alpha|}[D^\alpha_x u]_\lambda(x)$

> *Obs (Pequeña sutileza)*: Pude hacer la integración por partes gracias a que el soporte de $\varphi(\frac{\cdot}{\lambda})$ es un compacto *contenido en U* gracias a este ser conjunto estrellado (es $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \lambda^{-1}U$ multiplicado por lambda). Además, gracias a la regla de la cadena usual, $\varphi(\frac{\cdot}{\lambda})$ sigue siendo suave. Luego, es una función test sobre U. Esto permite aplicar la definición de la derivada débil de u, que sabemos existe pues $u \in W^{k,p}(U)$, y $|\alpha| \leq k$.

> *Obs (Sutileza de la sutileza)*: Ojo que U estrellado implica $\lambda^{-1}U$ estrellado. Esto se sigue de multiplicar la contención de la definición por λ^{-1} (las inclusiones se mantienen). Luego, sí es cierto que $\lambda \operatorname{supp}(\varphi) \subset U$.

Ahora veamos que $u_\lambda \in W^{k,p}(\lambda^{-1}U)$. Primero verifiquemos que $u_\lambda \in L^p(\lambda^{-1}U)$:

$$
\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_{L^p(\lambda^{-1}U)} &= \left(\int_{\lambda^{-1}U} |u_\lambda(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\lambda^{-1}U} |u(\lambda x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_U |u(y)|^p \frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n}\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^p(U)} < \infty
\end{aligned} \tag{11}
$$

De igual manera, vemos que la derivada débil está en $L^p(\lambda^{-1}U)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\lambda^{-1}U} |D_x^\alpha u_\lambda(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\lambda^{-1}U} \left|\lambda^{|\alpha|} \left[D_y^\alpha u(y)\right]_{\lambda x}\right|^p \mathrm{d}x \\
&= \lambda^{|\alpha|} \int_U \left|\left[D_y^\alpha u\right](y)\right|^p \frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n} \to \text{ Cambio de variable usual} \\
&= \lambda^{|\alpha|-n} \int_U \left|D_y^\alpha u(y)\right|^p \mathrm{d}y < \infty
\end{aligned} \tag{12}
$$

Con esto, confirmamos que $u_\lambda \in W^{k,p}(\lambda^{-1}U)$.

P2.b) Límite $\lambda \to 1$:

$$
\begin{aligned}
\|D^\alpha u_\lambda - D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p &= \left\|\lambda^{|\alpha|}(D^\alpha u)_\lambda - D^\alpha u\right\|_{L^p(U)} \\
&= \int_U \left|\lambda^{|\alpha|}(D_x^\alpha u)_\lambda - D_x^\alpha u\right|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_U \left|\lambda^{|\alpha|}(D_x^\alpha u)(\lambda x) - D_x^\alpha u(x)\right|^p \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{13}
$$

Hummmmmm no está tan fácil… Separemos los términos:

$$
\begin{aligned}
&= \int_U \left|\lambda^{|\alpha|}(D_x^\alpha u)(\lambda x) - (D_x^\alpha u)(\lambda x) + D_x^\alpha u(\lambda x) - D_x^\alpha u(x)\right|^p \mathrm{d}x \\
&\leq \int_U \left|\left(\lambda^{|\alpha|} - 1\right)(D_x^\alpha u)(\lambda x)\right|^p + |D_x^\alpha u(\lambda x) - D_x^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{14}
$$

El primer término ya lo tengo casi listo. El otro término creo que se debe poder hacer con teoría de la medida nomás, pero para sacarme algunos cachos de encima, utilizaré teoremas de aproximación. Tenemos que como las funciones test son densas en $L^p(U)$ (resultado que se sigue de Hahn-Banach) entonces existe una sucesión g_m de funciones test que convergen con $\|\cdot\|_{L^p(U)}$ a $(D^\alpha u) \in L^p(U)$. Ahora, tomamos una subsucesión tal que convergen puntualmente c.t.p (y además están dominadas por una función en $L^p(U)$), que renombro g_m. De esta manera planeo usar el teorema de convergencia dominada para el segundo término:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 1}\int_U |D_x^\alpha u(\lambda x) - D_x^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{\lambda\to 1}\int_U \left|D_x^\alpha u(\lambda x) - g_m(\lambda x) + g_m(\lambda x) - g_{m(x)} + g_m(x) - D_x^\alpha u(x)\right|^p \mathrm{d}x \\
&\leq \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{\lambda\to 1}\int_U |D_x^\alpha u(\lambda x) - g_m(\lambda x)|^p + |g_m(x) - g_m(\lambda x)|^p + |g_m(x) - D_x^\alpha u(x)|\,\mathrm{d}x\right] \quad (15) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{\lambda\to 1}\int_U |D_x^\alpha u(\lambda x) - g_m(\lambda x)|^p \,\mathrm{d}x \to \begin{array}{c}\text{Para todo m, por TCD el término}\\ \text{del medio se muere.}\end{array}\right. \\
&\qquad \left. + \lim_{\lambda\to 1}\int_U |g_m(x) - D_x^\alpha u(x)|\,\mathrm{d}x = 0\right]
\end{aligned}
$$

Mucho mejor, ahora puedo aplicar el límite $m \to \infty$, que me mata el segundo término, y me queda que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\lim_{\lambda\to 1}\int_U |D_x^\alpha u(\lambda x) - g_m(\lambda x)|^p \,\mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty}\lim_{\lambda\to 1}\int_{\lambda U} |D_x^\alpha u(y) - g_m(y)|^p \frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n} \\
&\leq \lim_{m\to\infty}\lim_{\lambda\to 1}\lambda^{-n}\int_U |D_x^\alpha u(y) - g_m(y)|^p \,\mathrm{d}y = 0 \to \text{pues } \lambda U \subset U \quad (16) \\
&= \lim_{m\to\infty}\|D^\alpha u - g_m\|_{L^p(U)}^p = 0
\end{aligned}
$$

Ahora que ganamos con el término más difícil, veamos el otro:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 1}\int_U \left|(\lambda^{|\alpha|} - 1)(D_x^\alpha u)(\lambda x)\right|^p \mathrm{d}x \leq \lim_{\lambda\to 1}\int_U \left|\lambda^{|\alpha|} - 1\right|^p |D_x^\alpha u(y)|^p \frac{\mathrm{d}y}{\lambda^n} \propto \lim_{\lambda\to 1}\frac{\left|\lambda^{|\alpha|} - 1\right|}{\lambda^n} \quad (17) \\
= 0
\end{aligned}
$$

Con esto, finalmente sí concluimos lo pedido.

P2.c) Conclusión:

Se me tiene que ocurrir una familia regularizadora que se parezca a u_λ. Bueno, la idea que se me ocurre es tomar funciones que sean suaves en un abierto que contenga a $\overline{U}$ (como $\lambda^{-1}U$), y tirar un límite diagonal con el $\lambda \to 1$.

Concretamente, tenemos que dado $u \in W^{k,p}(U)$ podemos encontrar una sucesión de funciones $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ que aproxima u. Luego, consideremos una segunda sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ monótona creciente a 1. La idea será mostrar que la sucesión en $C^\infty\left(\overline{U}\right)$ que aproxime a u será $\lim_{n\to\infty} (g_n)_{\lambda_n}|_{\overline{U}}$, que denominaré más concisamente u_n.

Observemos que esto está bien definido pues al ser U estrellado (y por tanto todo conjunto $\alpha U, \alpha > 0$ también), entonces $\overline{U} \subset \lambda^{-1}U, \forall \lambda \in (0,1)$. Esto se sigue de que $\lambda^{-1}U$ es estrellado, y aplicar la definición de esto sobre $U = \lambda(\lambda^{-1}U)$ con $\lambda \in (0,1)$. Por composición, $(g_n)_\lambda$ es $C^\infty(\lambda^{-1}U)$, luego efectivamente $\overline{U}$ está contenido en su dominio, y por tanto la restricción está bien hecha.

Ahora, veamos que efectivamente converge a u.

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(U)} &= \left\|u_n - u_{\lambda_n} + u_{\lambda_n} - u\right\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \left\|u_n - u_{\lambda_n}\right\|_{W^{k,p}(U)} + \left\|u_{\lambda_n} - u\right\|_{W^{k,p}(U)} \end{aligned} \tag{18}$$

El término de la derecha se hace 0 al tender n a infinito por la parte anterior. Sobrevive ese término de la izquierda más raro. Para esto, bastaría que $\forall |\alpha| \leq k$, $D^\alpha u_n \underset{L^p(U)}{\to} D^\alpha u_{\lambda_n}$:

$$\begin{aligned} & D^\alpha u_{\lambda_n} = \lambda_n^{|\alpha|} (D^\alpha u)_{\lambda_n} \wedge D^\alpha u_n = \lambda_n^{|\alpha|} (D^\alpha g_n)_{\lambda_n} \\ \Rightarrow & \int_U \left|D^\alpha u_n - D^\alpha u_{\lambda_n}\right|^p \mathrm{d}x = \lambda_n^{|\alpha|} \int_U \left|(D^\alpha g_n)_{\lambda_n} - (D^\alpha u)_{\lambda_n}\right|^p \mathrm{d}x \\ & = \lambda_n^{|\alpha|} \int_{\lambda_n U} \left|(D^\alpha g_n)_{\lambda_n} - (D^\alpha u)_{\lambda_n}\right|^p \frac{\mathrm{d}y}{\lambda_n^N} \to \text{ N es la dim.} \\ & = \lambda_n^{|\alpha - N|} \int_U \left|(D^\alpha g_n)_{\lambda_n} - (D^\alpha u)_{\lambda_n}\right|^p \mathrm{d}y \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned} \tag{19}$$

¡No se diga más! Encontramos entonces la sucesión regular que converge a u. (Supongo que a eso se refiere con la familia regularizadora, eso no me quedó claro). Luego, concluimos que $C^\infty\left(\overline{U}\right)$ es denso en $W^{k,p}(U)$.

P3) Items varios

Aviso a quien corrija: El sueño me está matando así que no voy a poder limpiar mucho estas soluciones de las cosas que fui escribiendo mientras intentaba que salgan las cosas. ¡Lo siento!

P3.a) ¿Fourier sirve post control 1?

¿Aquí me falta una norma sobre B^k para poder mostrar continuidad no? Quizás lo natural sería usar la suma de las normas infinito de las derivadas, ya que no necesariamente son integrables sus miembros. Creo que esa es la más decentemente aplicable, pero no sé si lo hace un espacio completo. ¿Esperaría que sí? Lo otro es que esté puro leseando a ver, esque se me fueron algunas de las propiedades de Fourier. Bueno por ahora apliquemosle a la matraca. Lo que si recuerdo es que $\forall |\alpha| \leq s$. Shorthand: $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\cdot\|$, $\|\cdot\|_h := \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$

$$
\begin{aligned}
\|D^\alpha u\|_1 &= \left\|\widehat{D^\alpha u}\right\|_1 \\
&= (2\pi)^{|\alpha|}\|\xi^\alpha \hat{u}\| \rightarrow \text{ ojo aquí que es con multiíndice el xi} \\
&= C\|\xi^\alpha \hat{u}\| \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}| \,\mathrm{d}\xi \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha||\hat{u}| \cdot \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}|^2 \,\mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi^\alpha|^2}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \,\mathrm{d}\xi \rightarrow \text{ Desigualdad de Hölder}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Ya no les voy a mentir estoy intentando seguir el Folland. Para tomarme un atajo usaré un facto que tiene: La norma $\|u\|_h$ es equivalente a la norma $\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\right\|$. Uff no la verdad es que no logro ver cómo nada de esto me ayudaría a que la cosa sea continua por ejemplo. Me ganó este ejercicio lamento admitir ¿puntitos por el intento?

P3.b) Cotas cotas cotas

Vimos en clase que para en el caso particular de $\mathbb{R}^n$, $H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$. Luego, puedo usar aproximación por funciones test. Tomemos una sucesión aproximante u_m. Observemos entonces que para todo m va a haber una bola abierta que contenga a su soporte. Usaré el siguiente teorema del Evans:

Teorema 3.2.1 (Desigualdad de Hardy): Dado $n \geq 3$, $r > 0$ y $u \in H^1(B(0,r))$. Entonces:

$$
\int_{B(0,r)} \frac{|u|^2}{\|x\|^2} \,\mathrm{d}x \leq C\left(\int_{B(0,r)} |Du|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{r^2}\int_{B(0,r)} u^2 \,\mathrm{d}x\right) \tag{21}
$$

Demostración: Dado el uso que le quiero dar, me bastará demostrarlo para funciones C_0^∞. A matraquear, con u test:

$$
\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} \frac{u^2}{\|x\|^2} \,\mathrm{d}x &= \int_{B(0,r)} u^2 \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|^3} \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{B(0,r)} u^2 \frac{x}{\|x\|} \cdot D\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{B(0,r)} 2uDu \cdot \frac{x}{\|x\|^2} + (n-1)\frac{u^2}{x^2} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Juntamos los términos:

$$
(2-n)\int_{B(0,r)} \frac{u^2}{\|x\|^2} \,\mathrm{d}x = 2\int_{B(0,r)} uDu \cdot \frac{x}{\|x\|^2} \,\mathrm{d}x \leq 2\|(\|Du\|)\|_2^2 \left\|u\frac{x}{\|x\|^2}\right\|_2^2 \tag{23}
$$

Donde concluimos:

$$\int_{B(0,r)} \frac{u^2}{\|x\|^2} \, \mathrm{d}x \leq C \left(\int_{B(0,r)} |Du|^2 \, \mathrm{d}x \right) \tag{24}$$

Para u función test que es lo que me interesa. ■

Entonces, tenemos que la desigualdad se cumple para cada u_m. Trivialmente, podemos extender los dominios de integración a todo $\mathbb{R}^n$ pues en virtud de la compacidad del soporte de u_m estamos sólo sumando 0. Ahora a ambos lados de la desigualdad calculemos los límites $m \to \infty$. Inmediatamente el RHS converge a $C \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 \, \mathrm{d}x$ dado a que u_m aproxima a u en el espacio de Sobolev. Falta sólo justificar el LHS:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_m^2}{\|x\|^2} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \to \infty} u_m^2 \frac{x}{\|x\|^2} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{\|x\|^2} \, \mathrm{d}x \tag{25}$$

Donde usé el TCD sobre una subsucesión de u_m (que renombro igual) que converge puntualmente c.t.p a u y está dominada por una función en L^2. Con esto, concluimos que la desigualdad de Hardy se cumple para $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

No me da para más items estoy rip ¡Lo siento!

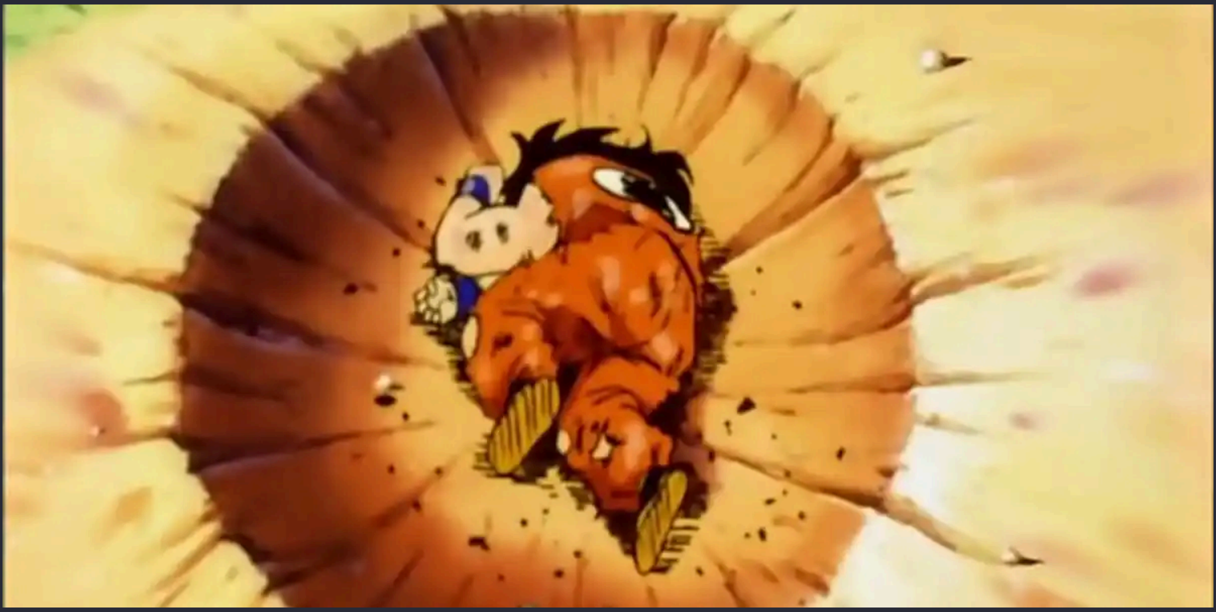

Figura 1: Yo, muricido por tarea 2 P3 EDP.