Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
11 de Octubre de 2024

Auxiliar 7

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. **[Propuesto]** Sea $U^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\ x_n > 0\}$ la semibola abierta. Suponga que $u \in C^2(\overline{U^+})$ es armónica en U^+, con $u = 0$ en $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$. Defina:

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & x_n \geq 0 \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

para $x \in U = B(0,1)$.

a) Demuestre que $v \in C^2(U)$ y que v armónica en U.

b) Ahora suponga solo que $u \in C^2(U^+) \cap C(\overline{U^+})$. Pruebe que v es armónica en U.

P2. Demuestre que la función de Green G es simétrica. Es decir que para todo $x, y \in \Omega$ distintos:

$$G(x,y) = G(y,x)$$

P3. Demuestre que si $g \in C(\partial B(0,r))$ y u se define por:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y) \quad x \in B(0,r)$$

entonces cumple:

a) $u \in C^\infty(B(0,r))$,

b) $\Delta u = 0$ en $B(0,r)$,

c) $\lim_{B(0,r) \ni x \to x_0} u(x) = g(x_0)$ para cada $x_0 \in \partial B(0,r)$.