CONTROL 1 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES 2015

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROFS. AUXS. ROBERTO BOBADILLA, MARTÍN RÍOS, Y NICOLÁS TORRES.
TIEMPO: 3 HRS.

Pregunta 1. Considere, para $t > 0$, el problema en S',

$$\text{(Sch)} \begin{cases} i\partial_t u + \Delta_x u = 0, \quad u(t) := u(t,\cdot) \in S'(\mathbb{R}^d), \\ u(t=0) = \delta_0. \end{cases}$$

1. Suponiendo que para cada $t > 0$, $u(t) \in S'(\mathbb{R}^d)$ y $\partial_t u(t) \in S'(\mathbb{R}^d)$, muestre que $\mathcal{F}(\partial_t u(t)) = \partial_t \hat{u}(t)$ en S'. *Indicación.* La derivada en tiempo $\partial_t u$ se entiende como límite (si existe) $\partial_t u(t) := \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ en S'.
2. Si ahora sólo $u(t) \in S'(\mathbb{R}^d)$, encuentre la solución del problema (Sch) y verifique que efectivamente está en $S'(\mathbb{R}^d)$. ¿Es la solución única en $S'(\mathbb{R}^d)$?
3. ¿A qué espacios $H^s(\mathbb{R}^d)$ pertenece la solución $u(t)$, $t > 0$? Compare con el mismo resultado para el dato inicial δ_0. ¿Hay mejora en la regularidad de la solución?
4. ¿Es $u(t)$, $t > 0$, función?

Pregunta 2

1. Suponga $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ es tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que $|\mathcal{F}(T)(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|^2)^{-N}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Probar que $T \in D(\mathbb{R}^d)$. ¿Es la recíproca cierta?
2. *a*) Encontrar $c_0, \alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $E(x) := c_0|x|^\alpha$ es solución fundamental del Laplaciano en $\mathbb{R}$, es decir, $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y es tal que
$$-\partial_x^2 E = \delta_0 \ \text{ en } D'(\mathbb{R}).$$
   b) Sea $K := [-4, 4]$ en $\mathbb{R}$. Construya f suficientemente explícita, continua en $\mathbb{R}$ y con soporte contenido en K, para la cual
$$\delta_0 = -\partial_x^2 f,$$
   en el sentido de las distribuciones. *Indicación:* Puede serle útil mostrar primero que, para determinar completamente la distribución δ_0, basta tomar funciones test $\phi \in D(-2, 2)$.

Pregunta 3. Sean $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector de velocidad, y sea $f = f(t, x; v)$ solución de la ecuación de transporte "relativista"

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \cdot \nabla_x f = 0, \qquad f(t=0, x; v) = f_0(x).$$

Aquí el dato inicial $f_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^3_x)$ es dado y se asume C^1 a soporte compacto y además nonegativo.

1. Muestre que existe una única solución $f = f(t, x; v)$ de este problema, de clase $C^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v)$, y además $f(t, x; v) \geq 0$. ¿Cuál es la rapidez máxima a la que se traslada la solución?
2. Muestre que todas las normas L^p_x ($1 \leq p \leq \infty$) de f son conservadas, es decir,
$$\|f(t, \cdot; v)\|_{L^p_x} = \|f_0\|_{L^p_x}.$$
3. Se define ahora, para $(t, x) \in \mathbb{R}^4$, la densidad de espacio $\rho(t, x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3_v} f(t, x; v)dv$. Muestre que para cada $t > 0$ suficientemente grande, $\rho(t, \cdot)$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^3_x)$ y tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^3$.
4. Pruebe la estimación de dispersión siguiente: existe $C > 0$ tal que
$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty_x} \leq \frac{C}{t^3}, \quad \forall\, t \text{ suficientemente grande.}$$