Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
26 de Septiembre de 2024

Auxiliar 5

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. *a)* 1) Escriba las ecuaciones características de la EDP:

$$u_t + b \cdot Du = f(x,t) \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$.

2) Use la EDO característica para resolver la EDP anterior con la siguiente condición inicial:

$$u = g \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

b) Resuelva los siguientes problemas usando método de las características:

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} & = & 2u \\ u(x_1, 1) & = & g(x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} & = & 3u \\ u(x_1, x_2, 0) & = & g(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u u_{x_1} + u_{x_2} & = & 1 \\ u(x_1, x_1) & = & \frac{1}{2} x_1 \end{cases}$$

P2. Demuestre el siguiente resultado:

Teorema. Si u es solución débil de (P) tal que es discontinua a lo largo de la curva $\xi(t)$, pero es suave en ambos lados de ella, entonces debe satisfacer Rankine-Hugoniot a lo largo de la curva de discontinuidad. Es decir:

$$\frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = \xi^{'}(t)$$

donde u^- y u^+ son los límites por izquierda y derecha de la curva de u respectivamente.

P3. *a)* Considere el problema de valor inicial para la ecuación de Burgers:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x & = & 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u & = & g & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre una solución de manera explícita. Haga además un bosquejo de las curvas características asociadas al problema.

b) Resuelva nuevamente, pero esta vez para la condición inicial $g = \mathbb{1}_{[0,\infty)}$.

P4. Demuestre que para $n \geq 3$:

$$u(0) = \fint_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f dx$$

dado:

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f & B(0,r) \\ u & = & g & \partial B(0,r) \end{cases}$$

Recuerdo

- **Leyes de conservación escalar**
En general estamos interesados en estudiar el problema de valores iniciales para leyes de conservación escalar en una dimensión, estos son de la forma:

$$\text{(P)} \begin{cases} u_t + f(u)_x & = & 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u & = & g & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dadas, y $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es desconocida.

Definición. Decimos que $u \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es una solución integral de (P) si:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv_t + f(u)v_x dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} gvdx \mid_{t=0} = 0$$

para toda $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ suave de soporte compacto.

Definición. Supongamos nuevamente que tenemos una solución integral u que no es continua en todo su dominio. Supongamos además que en algún punto de una curva C de discontinuidad u tiene límites distintos por izquierda y por derecha u_l y u_r, y que las dos características (izquierda y derecha) intersectan a C en este punto. Decimos que u satisface la condición de entropía si:

$$f^{'}(u_l) > \sigma > f^{'}(u_r)$$

A una curva de discontinuidad para u que cumple Rankine-Hugoniot y entropía se le llama choque.