Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
14 de Octubre de 2024

Auxiliar 9

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Sea U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que existe una constante C dependiendo solo de U, tal que

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f| \right) \tag{1}$$

Siempre que u sea una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad U \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{2}$$

P2. Transformación Cole-Hopf. El objetivo de este ejercicio es usar la solucion de la ecuacion de calor para resolver la ecuación de Burgers viscosa dada por:

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + uu_x = 0 & \text{en} \qquad \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en} \qquad \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

Para ello se propone lo siguiente: primero note que (no lo pruebe) si se define:

$$w(t,x) := \int_{-\infty}^{x} u(y,t)dy \quad \text{y} \quad h(x) := \int_{-\infty}^{x} g(y)dy \tag{4}$$

entonces la función w satisface la siguiente ecuación

$$\begin{cases} w_t - aw_{xx} + \frac{1}{2}w_x^2 = 0 & en \qquad \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w = h & en \qquad \mathbb{R} \times \{t = 0.\} \end{cases} \tag{5}$$

a) Asumiendo que w es una solución suave de (5), considere el siguiente ansatz:

$$v = \phi(w), \qquad \text{con} \qquad \phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{una función suave.}$$

Determine la función ϕ de modo que la función $v(t,x)$ sea solución de una ecuación de calor.

b) Usando el resultado anterior, cmuestre la forma explicita para la solución $w(t,x)$.

c) Finalmente describa explícitamente la solución de la ecuación (3).

P3. Encontrar la función de Green para el Disco $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y usela para encontrar la solucion de

$$\begin{cases} \Delta u = F & \text{en} \qquad D \\ u = f & \text{cuando} \qquad x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

donde $F \in C^2(D)$ y f es una función continua.