Aplicaciones de los Espacios de Sobolev a EDP

Del capítulo 6 del Evans

Ecuaciones Elípticas:

Definición 0.1: Una ecuación elíptica es aquella que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{en} \quad U \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \partial U \end{aligned} \tag{1}$$

Donde el dominio U es un abierto acotado subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Aquí, el operador L puede ser o bien de forma de divergencia:

$$L = \partial_j a_{ij} \partial_i + b_i \partial_i + c \tag{2}$$

O bien de forma no-divergencia:

$$L = -a_{ij} \partial_i \partial_j + b_i \partial_i + c \tag{3}$$

Aquí, los coeficientes a_{ij}, b_i, c son en general funciones.

Obs: Si el coeficiente de mayor orden (a_{ij}) son funciones C^1 entonces un operador dado en forma de divergencia puede ser reescrito en forma no-divergencia y vice-versa. Sin embargo existen beneficios tangibles a escribir el operador de distintas maneras.

Definición 0.2 (Uniforme elipticidad.): Decimos que L es *uniformemente elíptico* si hay una constante θ tal que se cumpla c.t.p que:

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi^2| \tag{4}$$

Definición 0.3 (Formulación Débil): Inspirados en lo bello que puede ser la integración por partes, definimos la siguiente forma bilineal, que actúa sobre elementos de $H_0^1(U)$:

$$B[u,v] := \int_U a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j v) + b_i(\partial_i u)v + cuv \,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Decimos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil de la EDP si para cualquier $v \in H_0^1(U)$:

$$B[u,v] = (f,v) \tag{6}$$

Donde el RHS denota el producto interno de $L^2(U)$. Esta formulación la ecuación se puede extender un poquito más si consideramos que f es un elemento del espacio dual de $H_0^1(U)$. Osea, $\langle f,v\rangle = \int_U f^0 v \,\mathrm{d}x + f^i \partial_i v \,\mathrm{d}x$.

Teorema 0.1 (Lax-Milgram): Asumiendo que B es una forma bilineal para la cual existen constantes α, β tal que:

$$\begin{gathered} |B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|b\| \\ \beta \|u\|^2 \leq B[u,u] \end{gathered} \tag{7}$$

Y asumiendo que f es un elemento del dual de H, entonces la ecuación a estudiar (en su forma general) efectivamente *tiene solución única*.

Estimaciones de Energía

La forma bilinear B definida anteriormente efectivamente cumple las condiciones de Lax-Milgram. Esto lo podemos sacar con métodos energéticos:

Teorema 0.2 (Estimaciones de Energía): Efectivamente, existen constantes α, β no nulas, positivas, y γ positiva (quizás nula) tal que:

$$\begin{gathered} |B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|u\|_{H_0^1(U)} \\ \beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \end{gathered} \tag{8}$$