Departamento de Ingeniería en Matemática
MA4801-1 - Ecuaciones en Derivadas Parciales, Primavera 2024
Profesores: Rayssa Caju y Claudio Muñoz
Auxiliares: Benjamin Borquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

Guia 2 - Ecuación de Laplace

P1. Decimos que $v \in C^2(\bar{\Omega})$ es *subarmónica* si

$$\Delta v \geq 0 \quad \text{en } U$$

(a) Prueba que para v subarmónica se cumple

$$v(x) \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} v\, dy \qquad \text{para todo } B(x,r) \subset U$$

(b) Prueba que, por lo tanto, $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.

(c) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave y convexa. Supón que u es armónica y $v := \phi(u)$. Prueba que v es subarmónica.

(d) Prueba que $v := |Du|^2$ es subarmónica, siempre que u sea armónica.
Rmk: Decimos que v es superarmónica si $\Delta v \leq 0$. Qué se puede concluir en ese caso?

P2. Deduza a partir de la fórmula integral de Poisson la siguiente versión de la desigualdad de Harnack: Sea u una función armónica no negativa en $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $x \in B_R(0)$, se cumple que

$$\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2} \frac{R-|x|}{R+|x|} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \left(\frac{R}{R-|x|}\right)^{n-2} \frac{R+|x|}{R-|x|} u(0).$$

P3. Prueba que, si $\Delta u = 0$ en Ω y $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ en una porción abierta y suave de $\partial\Omega$, entonces $u \equiv 0$.

P4. Prueba que los ceros de una función armónica nunca son aislados (isolated).

P5. Encuentre la función de Green para el anillo $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < r < |x - x_0| < R\}$ y úsela para encontrar la solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = \begin{cases} g_1 & \text{si } |x - x_0| = r \\ g_2 & \text{si } |x - x_0| = R \end{cases} \end{cases} \quad \text{en } A$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas.

P6. (Transformada de Kelvin para la ecuación de Laplace) La *transformada de Kelvin* $\mathcal{K}u = \bar{u}$ de una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

$$\bar{u}(x) := u(\bar{x})|\bar{x}|^{n-2} = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)|x|^{2-n} \quad (x \neq 0)$$

donde $\bar{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Muestra que si u es armónica, entonces $\bar{u}$ también lo es. (Hint: Primero muestra que $D_x\bar{x}\,(D_x\bar{x})^T = |\bar{x}|^4 I$. La transformación $x \to \bar{x}$ es conforme, es decir, preserva ángulos.)