Problema de Neumann

P3 - Guía 6 - EDP

Enunciado

Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es conexo. Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil del problema de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2}$$

Suponiendo $f \in L^2(\Omega)$. Pruebe que el problema tiene una solución débil *ssi*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

Ideas informales

Lo que nos dicen las condiciones de Von Neumann es que no hay crecimiento en los bordes de la región Ω. Por otro lado, la ecuación de Poisson es típica de cosas donde tenemo «fuentes» de campo, nos dice que el gradiente de u tiene como «fuente» la distribución f. En el caso de electrodinámica, la ley de Gauss es un ejemplo, como formulación equivalente de la ecuación de Poisson para el potencial. También Ahora cómo ayuda esto a Huachipato, no lo tengo muy claro. Sigamos el tip de la Jessica, y empecemos a hacer integraciones por partes con una función test.

Buscando la forma bilineal

Supongamos $v \in H^1(\Omega)$ cualquiera. Probemos la solución de manera débil. Aquí tendríamos que:

$$-\int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Ahora la gracia es integrar por partes:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v \boldsymbol{\nabla} u \cdot \nu \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Hagamos entonces lo que nos piden.

$\Rrightarrow$ Suponer que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$