Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
10 de Octubre de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. *a*) Demostrar que si $\Delta u = 0$ en Ω y si $u = \partial u/\partial \nu = 0$ en $U \subset \partial\Omega$ abierto suave, entonces $u \equiv 0$.

b) **[Propuesto]** Demostrar que los ceros de una función armónica nunca son aislados.

c) **[Propuesto]** Decimos que $v \in C^2(\bar{\Omega})$ es subarmónica si:

$$-\Delta v \leq 0 \quad \Omega$$

Siga el siguiente esquema:

1) Demostrar que si v subarmónica, para toda $B(x,r) \subset \Omega$:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v dy$$

2) Entonces, en dicho caso se tiene $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$.
3) Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suave y convexa. Asuma que u armónica y $v = \phi(u)$. Demuestre que v es subarmónica.
4) Demuestre $v = |Du|^2$ es subarmónica, cuando u es armónica.

P2. Use la fórmula de Poisson para la bola para probar que si u es armónica positiva en $B(0,r)$ entonces:

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0)$$

P3. La Transformada de Kelvin de $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$Ku(x) = \bar{u}(x) := u(\bar{x})|\bar{x}|^{n-2} = u(x/|x|^2)|x|^{2-n} \quad x \neq 0$$

donde $\bar{x} = x/|x|^2$. Demuestre que si u armónica, entonces Ku también lo es.