Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
14 de Noviembre de 2024

Auxiliar 11

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Sea $d \geq 3$. Considere el espacio de funciones radiales

$$H_r^1(\mathbb{R}^d) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) : u(x) = u(|x|) \quad \text{ctp}\}.$$

a) Sea $(u_n)_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ una sucesión acotada en $H_r^1(\mathbb{R}^d)$. Suponga que

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} u_n(x) = 0 \quad \text{uniformemente en} \quad n.$$

Demuestre que existe una subsucesión (u_{n_k}) y $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

para cualquier $p \in \left(2, \frac{2d}{d-2}\right)$.

b) Demuestre que existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_r^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$|u(x)| \leq \frac{|c|}{|x|^{\frac{d-1}{2}}}||u||_{H^1(\mathbb{R}^d)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

c) Pruebe que la inyección.

$$H_r^1(\mathbb{R}^d) \subset\subset L^p(\mathbb{R}^d)$$

se cumple para cualquier $p \in \left(2, \frac{2d}{d-2}\right)$.

P2. Sea $d \geq 3$. Pruebe que existe $C > 0$ tal que para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$

$$||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1+2/d} \leq C||u||_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{2/d}||Du||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

P3. Propuesto.

a) Considere Ω abierto acotado en $\mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega$ de clase C^1. Sea $1 \leq p < \infty$, $k \geq 1$ y $\beta \in \mathbb{N}^d$ tal que $|\beta| \leq k - 1$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε tal que

$$||D^\beta u||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon||u||_{W^{k,p}(\Omega)} + C_\varepsilon||u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

b) Sea Ω un abierto acotado y $1 \leq\leq p < d$. Muestre que $W^{1,p}(\Omega)$ NO se inyecta de manera compacta en $L^{p^*}(\Omega)$, donde $p^* = \frac{2d}{d-2}$.

Resumen: Teorema 1 (Teorema de Rellich-Kondrachov). Sea Ω un subconjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega$ de clase C^1. *Si* $k > l$ y $\frac{1}{p} - \frac{k}{d} < \frac{1}{q} - \frac{l}{d}$
entonces

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$$

donde la inyecciónn es compacta.