

Equivalencias de Sobolev

P1 - Guía Manuel del Pino - EDP

Enunciado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Pruebe las siguientes equivalencias:

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, N$ se tiene que para toda función test:

$$\left| \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \quad (1)$$

Donde p^* es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

3. Existe una constante $C > 0$ tal que para todo abierto $U \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \text{dist}(U, \Omega^c)$ se tiene:

$$\|\tau_h u - u\|_{(L^p(U) \leq C|h|} \quad (2)$$

Donde $\tau_h u(x) = u(x + h)$.

Además, se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en 2. y 3.

Demostración:

1 \Rightarrow 2

La primera implicancia se sigue de la definición de derivada débil de u , y el hecho de que su norma $L^p(\Omega)$ es finita, ambas propiedades que vienen de $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Es decir:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \right| &= \left| \int_{\Omega} u \varphi_{x_i} \, dx \right| \\ &= \left| - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi \, dx \right| \\ &\leq \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí identificamos $C = \left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ que al ser suma de términos positivos y $x^{\frac{1}{p}}$ monótona, cumple con que $C \geq \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$. Luego:

$$\left| \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \quad (4)$$

2 \Rightarrow 1 (Recuerdo de Funcional)

Esta implicancia sale **muy** rápido si recordamos el teorema de representación de Riesz:

Teorema 0.1 (Representación de Riesz): Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $f \in (L^p(\Omega))^*$. Entonces existe un único $v \in L^{p^*}(\Omega)$ tal que $f(\varphi) = \int_{\Omega} v \varphi \, dx$ para todo $\varphi \in L^p(\Omega)$. Además, $\|f\| = \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)}$.

Observando que la hipótesis es que el funcional lineal definido por $\langle F, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi_{x_i} \, dx$ es continuo en un subespacio denso de $L^{p^*}(\Omega)$, que además cumple $1 \leq p^* < \infty$, entonces podemos extender mediante el teorema de Hahn-Banach a un elemento del dual que coincide para las $C_c^\infty(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ (Recordemos que Hahn Banach es aplicable en funcionales sobre subespacios vectoriales continuos, pues la seminorma la podemos tomar efectivamente como la norma. Esto nos da continuidad para el funcional extendido, y si es un denso, entonces podemos obtener los otros valores tomando límites convenientes). Aplicamos Riesz, y obtenemos la definición de la derivada débil además con su norma ahí definida (la última frase del enunciado).

Quién implica 3 a ver...

Para demostrar 3) trabajemos un poco a lo que debieramos llegar para saber si se nos ilumina un poco el camino:

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^p(U)}^p &= \int_U |\tau_h u - u|^p \, dx \\ &= \int_U |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \end{aligned} \tag{5}$$

Mis instintos de física me gritan que use Taylor, pero el tema es que no estamos sacando derivadas en sí. Pero bueno, algo podría salir si meto la definición y capaz ahí puedo acotar inteligentemente.

$$\begin{aligned} \int_U |u(x+h) - u(x)|^p \, dx &= \int_U \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right|^p |h|^p \, dx \\ &= |h|^p \int_U \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right|^p \, dx \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora quedaría acotar esa integral. Ok veamos si esto iba bien en el brezis. Okey no, el cambio de variable que puedo usar tal que esto sea más sencillo utiliza 2 cosas:

1. Asumir que $u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, luego extenderemos el resultado a $L^p(\Omega)$.

2. Definimos una derivada para la traslación. Para esto primero hay que parametrizar cuanto uno se traslada. Esto escrito en simple es definirse:

$$\begin{aligned}\nu : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \nu(t) &= u(x + th)\end{aligned}\tag{7}$$

Notemos que esto está bien definido pues $x + th$ en Ω gracias a la restricción sobre h . Además como suponemos $u \in C^\infty(\Omega)$, podemos llegar y aplicar derivadas y todo. La idea entonces es usar el TFC.

$$\begin{aligned}|u(x + h) - u(x)|^p &= \left| \int_0^1 \nu'(t) dt \right|^p \\ &= \left| \int_0^1 \nabla u(x + th) \cdot h dt \right|^p \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \|\nabla u(x + th)\|^p dt\end{aligned}\tag{8}$$

Con lo que nuestro objeto de interés quedaría:

$$\|u(x + h) - u(x)\|_{L^p(U)}^p \leq |h|^p \int_U \int_0^1 \|\nabla u(x + th)\|^p dt dx\tag{9}$$

Ahora estamos casi listos para relacionar el lado derecho con la norma de ∇u en $L^p(\Omega)$ (entonces nos damos cuenta que conviene usar la hipótesis (1)). Para hacer eso necesitamos volver a $\nabla u(y)$ en vez del $x + th$ que definimos antes. Para eso, el Brezis usa Fubini. ¿Por qué podemos usar Fubini? Pues por hipótesis de continuidad la integral sobre t es finita para todo x , y también por hipótesis de $U \subset\subset \Omega$ (que nos dice U acotado y contenido en un compacto dentro del dominio), $\|\nabla u(x + th)\|^p$ alcanza un máximo que lo define el hecho de que $\|\nabla u\|^p$ es continua sobre el cerrado y acotado $\overline{U} + th \subset \Omega$. Al estar U contenido en un compacto, entonces tiene medida finita. Por esto, ambas integrales necesarias para Fubini son finitas, y podemos aplicar.

$$\int_U \int_0^1 \|\nabla u(x + th)\|^p dt dx = \int_0^1 \int_U \|\nabla u(x + th)\|^p dx dt\tag{10}$$

Ahora esa cochinada de adentro podemos hacerle un cambio de variable. Sea $y = x + th$. Luego:

$$\int_0^1 \int_U \|\nabla u(x + th)\|^p dx dt = \int_0^1 \int_{U+th} \|\nabla u(y)\|^p dy dt\tag{11}$$

Recordemos que un supuesto sobre $\|h\|$ es que es menor que la distancia de U al complemento de Ω . Esto nos permite decir que $U + th \subset \Omega$ para todo t . Luego, podemos acotar la integral por la norma de ∇u en

$L^p(\Omega)$, y así quitamos la dependencia de t , por lo que esa integral evalúa 1 nomás. Así, finalmente obtenemos lo pedido:

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p(U)}^p \leq |h|^p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \quad (12)$$

Ahora, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sabemos que existe una sucesión de funciones $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n, \nabla u_n$ convergen en norma L^p a $u, \nabla u$. Luego, podemos aplicar el resultado a u_n y luego tomar límites para obtener el resultado para u . Además, la constante C que se pide es $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

La última.

Dan puras ganas de dividir y tirar un límite ahí. Como eso es más fácil trabajar en funciones test démosle a eso. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} u(x) \frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} dx \quad (13)$$

Ahora hay algo que me gustaría hacer, que es argumentar que puedo sacar el límite para afuera. Esto es porque en verdad el gradiente está acotado para φ . Vale decir, $\varphi(x + te_i) - \varphi(x) = \int_0^t \partial_s \varphi(x + se_i) \cdot e_i ds$. Lo de adentro es una derivada de una continua soporte compacto, entonces está acotado por algo (que no depende de t). Entonces al integrar sale un t . Luego la pseudo derivada está acotada y podemos aplicar TCD. El límite lo saco para afuera:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} u(x) \frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} u(x) \varphi(x + te_i) dx - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega + te_i} u(y - te_i) \varphi(y) dy - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (14)$$

Puedo simplemente integrar sobre Ω . ¿Por qué? Debido a que φ tiene soporte compacto contenido en Ω , luego el interior de ese soporte es un compacto compactamente contenido en Ω . A partir de algún t , la distancia entonces de este abierto contenido en Ω al complemento de Ω va a ser más grande que t . Luego, la intersección del soporte con $\Omega + te_i$ va a ser la misma que la intersección con Ω en sí. Entonces puedo rejuntar las integrales y recupero una definición de derivada parcial, ahora para u . Aplico valor absoluto a la cadena de igualdades que he armado:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx \right| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} (u(x - te_i) - u(x)) \varphi(x) dx \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left| \int_{\Omega} (u(x - te_i) - u(x)) \varphi(x) dx \right| \end{aligned} \quad (15)$$

Nuevamente, uso el truco que integrar sobre el interior del soporte de φ es lo mismo que integrar sobre Ω , al conjunto de integración lo llamo $U \subset\subset \Omega$. Luego aplico Hölder:

$$\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|u(x - te_i) - u(x)\|_{L^p(U)} \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \quad (16)$$

Pero por la hipótesis, existe una constante C que me permite decir que (para $t < 1$ que lo puedo asumir spg):

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} |te_i| \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &= |e_i| \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \end{aligned} \quad (17)$$

Que es lo que queríamos demostrar. ■

Obs: El Brezis para demostrar esto en un momento utiliza que toda función en $W^{1,p}$ es aproximable por suaves soporte compacto en vez de suaves integrables nomás, pero el costo de su teorema más fuerte de aproximación es que la convergencia de los gradientes sólo se tiene en abiertos compactamente contenidos en el dominio. Quizás sea un teorema útil, pero la demostración es media complicada y no me acordaría en el examen de cómo es.