

**Departamento de Ingeniería en Matemática****MA4801-1 - Ecuaciones en Derivadas Parciales, Primavera 2024****Profesores:** Rayssa Caju y Claudio Muñoz**Auxiliares:** Benjamin Borquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

## Guía 5 - Introducción a los Espacios de Sobolev

**P1.** Pruebe que  $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$ .

**P2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Defina el espacio  $H^s(\partial\Omega)$  y pruebe que es Hilbert.

**P3.** Sea  $\Omega = (-1, 1)$  y considere la función

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-1, 0) \\ x, & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

Demuestre que  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , pero  $u$  no puede ser aproximada en este espacio por funciones de  $C^\infty(\Omega)$ .

**P4.** Sea  $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1)$  y considere la función

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 1, & \text{si } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Demuestre que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$ , pero  $u$  no puede ser aproximada en este espacio por funciones de  $C^1(\bar{\Omega})$ .

**P5.** Sea  $p > N$ . Demuestre que si  $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , entonces  $uv \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  y

$$\|uv\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

¿El resultado sigue siendo verdadero si  $p \leq N$ ?

**P6.** Suponga  $N = 1$  y  $u \in W^{1,p}((0, 1))$  para algún  $1 \leq p < \infty$ .

(a) Muestre que  $u$  es igual c.t.p. a una función absolutamente continua  $u' \in L^p((0, 1))$ ;

(b) Si  $1 < p < \infty$ , entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |u'|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{para c.t.p. } x, y \in [0, 1].$$

**P7.** Demuestre que una función  $u \in L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) no tiene traza en  $\partial\Omega$ . Más precisamente, demuestre que no existe un operador lineal acotado

$$T : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  siempre que  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$ .