Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
20 de Noviembre de 2024

Auxiliar 12

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Una función $u \in H_0^2(U)$ es una solución débil del problema de valores de frontera para la ecuación biarmónica

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & en \quad U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial U \end{cases} \tag{1}$$

siempre que

$$\int_U \Delta u \Delta v dx = \int_U f v dx$$

para todo $v \in H_0^2(U)$. Dado $f \in L^2(U)$, pruebe que existe una única solución débil de (1).

P2. (Caracterizácíón de $W^{1,\infty}$). Sea U un conjunto abierto y acotado, con ∂U de clase C^1. Entonces $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz continua si y sólo si $u \in W^{1,\infty}$.

P3. (Caracterizácíón de H^{-1}).

a) Asuma $f \in H^{-1}$. Entonces existen funciones $f^0, f^1, ..., f^n \in L^2(U)$ tal que

$$\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx \quad v \in H_0^1 \tag{2}$$

b) Además,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \text{ínf}\left\{ \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{1/2} : f \quad \text{satisface} \quad (2) \quad \text{para} \quad f^0, f^1, ..., f^n \in L^2(U) \right\}.$$

c) En particular, tenemos

$$(v, u)_{L^2(U)} = \langle v, u\rangle$$

para todo $u \in H_0^1(U)$, $v \in L^2(U) \subset H^{-1}(U)$.