Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
22 de Agosto de 2024

Auxiliar 1

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. *a*) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ continua de soporte compacto, con Ω abierto no vacío. Demuestre que existe $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ polinomios tal que:

$$\psi p_j \xrightarrow[j\to\infty]{||\cdot||_\infty} f$$

b) Sean $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ tales que:

- $\forall j \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^n} f_j = 1$
- $\forall r > 0, \lim_{j\to\infty} \int_{||x||>r} f_j = 0$

Demuestre que $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \delta_0$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

P2. Para $n \geq 3$, sean $F, F^\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definidas por:

$$F(x) = \frac{|x|^{2-n}}{\omega_n(2-n)} \qquad\qquad F^\varepsilon(x) = \frac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{\omega_n(2-n)}$$

donde $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ es el volumen de la esfera unitaria.

a) Demuestre que $\Delta F^\varepsilon = \varepsilon^{-n} g(x/\varepsilon)$. Donde:

$$g(x) := \frac{n}{\omega_n}(|x|^2+1)^{-(n+2)/2}$$

b) Demuestre que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = 1$$

c) Demuestre:

$$\Delta F = \delta$$

d) Para $\varphi \in \mathscr{D}$, probar que $f = F * \varphi$ satisface $\Delta f = \varphi$.

e) [**Propuesto**] Para $n = 2$, demostrar (c) y (d) dadas:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\log(|x|) \qquad\qquad F^\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\log(|x|^2+\varepsilon^2)$$

Lema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = a$ y $f_t(x) = t^{-n} f(x/t)$. Entonces, $f_t \xrightarrow[t\to 0]{} a\delta$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.