

Cálculo:

- Teorema Gauss-Green:** $\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} uv^i dS$ ($i = 1, \dots, n$) o equivalentemente, $\int_U \nabla \cdot u dx = \int_{\partial U} u \cdot \nu dS$
- Integración por partes:** $\int_U u_{x_i} v dx = - \int_U uv_{x_i} dx + \int_{\partial U} uvv^i dS$ ($i = 1, \dots, n$)
- Formulas de Green:** $\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$, $\int_U (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial U} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) dS$, $\int_U Dv \cdot Du dx = - \int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS$
- Coordenadas polares:** $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr$, $\frac{d}{dr} \left(\int_{B(x_0, r)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0, r)} f dS$
- Fórmula de coarea:** $\int_{\mathbb{R}^n} f |Du| dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{\{u=r\}} f dS \right) dr$
- Mollifiers:** Sean $\{\rho_\varepsilon\}$ mollifiers, $f^\varepsilon := \rho_\varepsilon * f$ cumple:
 - $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$
 - $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ c.t.p
 - Si $f \in C(U)$, entonces $f^\varepsilon \rightarrow f$ uniforme en compactos
 - Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p_{loc}(U)$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(U)} f$
- Volúmenes de esferas:** $\alpha(n) :=$ Volumen de la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Luego $|\partial B(0, r)| = n\alpha(n)r^{n-1}$ y $|B(0, r)| = \alpha(n)r^n$.

Funciones Test y Distribuciones:

- Topología para $C^\infty(\Omega)$ (τ_o):** Es la topología formada por las seminormas: $P_N(f) = \sup_{x \in \mathbb{K}_n} \max_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha f(x)|$
- Espacios $D_k(\Omega)$ y $D(\Omega)$** Para un compacto K fijo definimos $D_k(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{Supp}(f) \subseteq K\}$ con la topología $\tau_k := \tau_o|_k$. Esta está generada por las normas:

$$\|f\|_N := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq N}} |\partial^\alpha f|$$

Para definir la topología τ en $C_c^\infty(\Omega)$, se construye la siguiente base de vecindades del 0:

$$\beta := \{\tilde{V} \text{ convexo, balanceado en } C^\infty(\Omega) \text{ tales que } \tilde{V} \cap D_K(\Omega) \in D_K(\Omega) \text{ para todo compacto } K\}$$

Con esto, se denota espacio de funciones test a $D(\Omega) := (C_c^\infty(\Omega), \tau)$.

- Convergencia de tests** Si (f_n) es sucesión de Cauchy en $D(\Omega)$, existe K tal que $(f_n) \subseteq D_K(\Omega)$ y además $|f_n - f_m|_N \rightarrow 0$ para todo N fijo

Si $f_n \rightarrow 0$ en $D(\Omega)$ entonces existe K tal que $(f_n) \subseteq D_K(\Omega)$ y $\partial^\alpha f_n \rightarrow 0$ uniforme en K para todo multi índice α

- Caracterización del dual** Se llama espacio de distribuciones a $D'(\Omega)$. Sea $T: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, LSSE:
 - $T \in D'(\Omega)$
 - Para cada compacto K , existen $N(K) \geq 0$ y $C(K) > 0$ tal que $|\langle T, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_N$

Si existe N que no depende del compacto, se dice que el menor de ellos es el orden de T .

- Derivada en distribuciones** $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$
- Sea $T: D(\Omega) \rightarrow Y$ lineal. Entonces: T es continuo $\Leftrightarrow T$ es acotado $\Leftrightarrow \forall \phi_n \rightarrow 0$ en $D(\Omega) \Leftrightarrow T\phi_n \rightarrow 0$ en $Y \Leftrightarrow T|_{D_K(\Omega)}$ es continuo para todo K .
- Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, definimos $\langle fT, \phi \rangle := \langle T, f\phi \rangle$
- Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle$ existe para toda ϕ test, Definimos: $\langle T, \phi \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle$, entonces $T \in D'(\Omega)$ y $\partial^\alpha T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} \partial^\alpha T$
- Anulación en distribuciones:** Si w es abierto en Ω , decimos que T se anula en w si $\forall \varphi \in D(w), \langle T, \varphi \rangle = 0$

10. **Soporte de una distribución:** Definimos el soporte de una distribución T como el **complemento** de $A_T := \bigcup_{\substack{w \text{ abierto} \\ T \text{ se anula en } w}} w$
11. **Distribución de soporte compacto:** $\mathcal{E}'(\Omega)$ son las distribuciones de soporte compacto.
12. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene soporte $\{x_0\}$ entonces existen $N \in \mathbb{N}$, $(C_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ tales que.

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}$$
13. Si $\text{Supp } T = K$ compacto en Ω , entonces $\forall V \subseteq \Omega$ abierto $V \subset K$, existen funciones continuas $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ tales que $T = \sum_{|\alpha| \leq N} D^\alpha f_\alpha$
14. **Convolución de distribuciones:** Si $T_1 \in D'(\Omega)$, $T_2 \in \mathcal{E}'$, se define $T_1 * T_2 \in D'(\Omega)$ como $\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \left\langle T_1(x), \left\langle T_2(y), \varphi(x+y) \right\rangle_y \right\rangle_x$
15. **Propiedades de la convolución de distribuciones:**
- Si $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, entonces $T_1 * T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$
 - $\partial^\alpha (T_1 * T_2) = \partial^\alpha T_1 * T_2 = T_1 * \partial^\alpha T_2$
 - Si $T \in D'(\Omega)$, entonces $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$
 - Si $T_1 \in S'$, $T_2 \in \mathcal{E}'$ entonces: $\mathcal{F}(T_1 * T_2) = (2\pi)^{d/2} \underbrace{\widehat{T_1}}_{\in S'} \underbrace{\widehat{T_2}}_{\in C^\infty}$

Transformada de Fourier:

- Definición:** Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$
- Propiedades para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:**
 - $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
 - $[(\tau_y f)]^\wedge(\xi) = e^{i2\pi \xi y} \hat{f}(\xi)$
 - $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal invertible, $S = (T^*)^{-1}$, entonces $[f \circ T]^\wedge = \frac{1}{|\det(T)|} \hat{f} \circ S$
 - $[f * g]^\wedge = \hat{f} \hat{g}$
 - α multiíndice: $x^\alpha f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C^k$, y $D^\alpha \hat{f} = [(-2\pi i x)^{|\alpha|} f]^\wedge$
 - $f \in C^k$ tal que $\forall |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in L^1$ entonces $\forall |\alpha| \leq k-1, [D^\alpha f]^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$
- Clase de Schwarz:** $S(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \text{ multiíndices}, |x^\alpha D^\beta f| < \infty\}$
 - Prop: \mathcal{F} es un isomorfismo de la clase de Schwarz.
 - $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$
- Fórmula de Parseval:** Para $f, g \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx$
- Inversión de Fourier:** Para $f, \hat{f} \in L^1$, $f = (\hat{\hat{f}})^\vee := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} e^{2\pi i x \cdot \xi} dx$ c.t.p.
- Plancherel:** Podemos extender la transformada a $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ y $\mathcal{F}_{L^2}: L^2 \rightarrow L^2$.
- Dist. Temperadas:** Llamamos al dual $S'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de dist. temperadas.
- Fourier en S' :** Para $T \in S'$, \hat{T} se define por su acción $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$. La transformada es una operación continua en S' .

Ecuación de Laplace:

- Ecuación de Poisson:** Las ecuaciones $\Delta u = 0$ y $-\Delta u = f$ se llaman ecuaciones de Laplace y Poisson respectivamente. Se busca resolver para $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ con U abierto en \mathbb{R}^n . Las soluciones C^2 a Laplace se llaman armónicas.
- Solución fundamental:** La función

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi \log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} & n > 2 \end{cases}$$

definida en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es la solución fundamental a la ecuación de Laplace.

- Solución a Poisson:** Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $u(x) := \Phi * f = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es solución de $-\Delta u = f$ en \mathbb{R}^n

4. **Fórmula de la media:** La función u es armónica ssi para toda bola $B(x, r) \subseteq U$ se cumple

$$u(x) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

5. **Principios del máximo:** Sea U acotado y $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ solución de $-\Delta u = 0$ en U . Entonces:

- $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$
- Además, si U es conexo y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$, entonces u es constante en U

Se deduce un principio del mínimo, ya que $-u$ es armónica también.

6. **Unicidad:** Si $g \in C^0(\partial U)$, $f \in C^0(U)$ entonces a lo mas existe una solución $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ de $-\Delta u = f$ en U y $u = g$ en ∂U
7. **Regularidad:** Si $u \in C^0(U)$ satisface la fórmula de la media para toda bola, entonces $u \in C^\infty$ (mas aún es analítica)
8. **Estimaciones en derivadas:** Si u es armónica en U , entonces

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \quad (|\alpha| = k; B(x_0, r) \subseteq U)$$

9. **Liouville:** Si $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica y acotada, entonces u es constante.
10. **Representación:** Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Entonces cualquier solución acotada de $-\Delta u = f$ en \mathbb{R}^n es de la forma $u = \Phi * f + c$ con $c \in \mathbb{R}$.
11. **Desigualdad de Harnack:** Para cada abierto conexo $V \subset\subset U$, existe $C(V) > 0$ tal que $\sup_V u \leq C \inf_V u$, $\forall u$ armónica no negativa. En concreto, para $x, y \in V$ se cumple $\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$.
12. **Función de Green:** Queremos obtener una formula de representación para

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Para ello, para un x fijo buscamos la función corrector como la solución a

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x = 0 & \text{en } U \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Con esto definimos la función de Green para la región U

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y) \quad (x \neq y)$$

13. **Representación usando Green:** Si u resuelve el IVP anterior, entonces

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_U f(y) G(x, y) dy$$

14. **Simetría de Green:** Para todo par $x, y \in U$ distintos, $G(x, y) = G(y, x)$
15. **Green para el semiespacio positivo (\mathbb{R}_+^n):** $\tilde{x} := (x_1, x_2, \dots, -x_n)$, entonces $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x})$ para $x, y \in \mathbb{R}_+^n$. Por lo que la solución es

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy$$

16. **Green para la bola unitaria:** Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}$, luego $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$, con lo que la solución es:

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y)$$

17. **Solución para $B(0, r)$:** Se define

$$u_r(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y)$$

Entonces u_r es armónica en $B(0,r)$ y $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_0(0,r)}} u_r(x) = g(x_0)$ para $x_0 \in \partial B(0,r)$

Ecuación de Calor:

1. **Ecuación del calor:** Se llama ecuación del calor a la ecuación $u_t - \Delta u = f$
2. **Solución fundamental del calor:**

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Para $t > 0$ fijo se cumple $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$

3. **Solución al problema con condición inicial:**

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \Phi(x - y, t) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

soluciona el problema $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}_+^n \times (0, \infty)$, $u = g$ en $\mathbb{R}_+^n \times \{t = 0\}$

4. **Solución al caso no homogéneo:** La solución al problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

está dada por $u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$

5. **Cilindro parabólico:** Dado un abierto Ω acotado y T un tiempo fijo, se define el cilindro parabólico como $U_T := U \times (0, T]$ y la frontera parabólica como $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$
6. **Bola de calor:** Dados $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ se define

$$E(x, t, r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

7. **Fórmula de la media:** Si $u \in C_1^2(U_T)$ soluciona calor, entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x, t, r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

8. **Principio del máximo:** Si $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ soluciona calor, entonces $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$. Y si U es conexo y existe $(x_0, t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$ entonces u es constante en $\overline{U_{t_0}}$
9. **Unicidad:** Si $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$, entonces existe a lo mas una solución del calor no homogéneo con condición inicial.
10. **Principio del máximo para problema de Cauchy:** Si $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ resuelve $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ con condición inicial $u = g$ y es tal que $u(x, t) \leq A e^{a|x|^2}$ para $A, a > 0$, entonces $\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$
11. **Unicidad para el PC:** Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, se cumple que el problema de Cauchy tiene a lo mas una solución.
12. **Suavidad:** Si $u \in C_1^2(U_T)$ resuelve calor, entonces $u \in C^\infty(U_T)$
13. **Estimadores para las derivadas:** Para cada par de enteros k, l existe $C_{k,l}$ tal que

$$\max_{C(x, t, r/2)} |D_t^k D_x^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x, t, r))}$$

Ecuación de Onda:

1. Fórmula de D'Alembert ($U = \mathbb{R}^n$): $u(x; r, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$
2. Medias Esféricas: $U(r, t; x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dy$, $U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0$ s.a. $U = G, U = H$ en $\mathbb{R}_+ \times \{t=0\}$
3. Fórmula de Kirchhoff: $u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x) dS(y) = \partial_t \left(t \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h dS$, válida sólo para $n=3$.
4. Fórmula de Poisson 2D: $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dS(y)$.
5. Solución homogénea general n impar:

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\partial_t \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial B(x, t)} h dS \right) \right],$$

$$\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)$$

6. Solución homogénea general n par:

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\partial_t \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \right) + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \right) \right],$$

$$\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n$$

7. Solución no-homogénea: $u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds$, donde para $t \geq s$, $u_{tt}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0$, s.a. $u(\cdot; s) = 0$, $u_t(\cdot; s) = f(\cdot, s)$ en $t = s$. La solución general se obtiene sumando homogénea + inhomogénea
8. Energía: $E(t) = \frac{1}{2} \int_U (u_t^2 + |Du|^2) dx$. $\dot{E} = \int_U u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial U} u_t Du \cdot \nu dS$

Espacios de Sobolev:

1. Derivada débil: $v = D^\alpha u \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx$
2. $W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ existe en el sentido Débil}\}$
3. $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Con esta norma, $W^{k,p}(\Omega)$ es Banach. $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ además es Hilbert.
4. Equivalente en \mathbb{R}^n : $H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S' \mid (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$ con norma $\|u\|_{H^s} := \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$
5. $W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ con respecto a $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.
6. Teoremas de densidad (p finito):
 - $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ (sin supuestos extras sobre Ω).
 - Si además Ω es acotado: $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.
 - Si Ω es acotado y borde C^1 : $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.
7. Teorema de Extensión:
 - Ω es acotado y borde $C^1 \Rightarrow \exists E: W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ lineal continuo tal que $Eu = u$ en Ω (c.t.p), y Eu tiene soporte en un abierto V acotado en \mathbb{R}^n , $\Omega \subset \subset V$.
8. Traza: Ω acotado $\wedge \partial\Omega \in C^1 \Rightarrow \exists T: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ lineal continuo tal que $\forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Además, $Tu = 0 \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
9. Desigualdades de Sobolev:
 - Caso $1 \leq p < n$: Definimos $p^* = \frac{np}{n-p}$
 - (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) En \mathbb{R}^n : $\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
 - Ω acotado y frontera suave: $1 \leq p < n \Rightarrow \exists C > 0$ tal que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
 - (Poincaré) Ω acotado: $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$, $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$
 - Caso $n < p \leq \infty$: Aquí, las sobolev son Hölder continuas (identificable con continuas).

• Espacio de Hölder:

$$u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in U \\ (x \neq y)}} \left\{ \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\gamma} \right\}$$

• (Morrissey) $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^n), \gamma := 1 - \frac{n}{p}, \|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

• (Morrissey 2) Si Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1 : $\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ donde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ y $u^* = u$ c.t.p. Esto permite identificar u sobolev con funciones continuas.

10. **Inclusiones compactas** (Rellich-Kondrachov): Si Ω acotado y $\partial\Omega$ es C^1 , $W^{1,p}(\Omega)$ es compactamente embebido en $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$. Es decir, toda sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ tiene subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$.

11. **Desigualdad Poincaré - Weintenger**: Si Ω acotado, $\partial\Omega$ es C^1 , y $1 \leq p < \infty$ entonces $\exists C > 0$ tal que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u - f_\Omega u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$

Aplicaciones a EDP:

1. **Operador Diferencial**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ acotado y borde C^1 , $A(x) = (a_{ij}(x)), b(x) = (b_j(x))$, y $c(x)$ tales que $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, definimos los operadores diferenciales en forma: (notación: índices repetidos \Rightarrow sumar el índice de 1 a d)

• **De divergencia**: $Lu = -\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + b_j(x)\partial_j u + c(x)u$

• **General**: $Lu = -a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + b_j(x)\partial_j u + c(x)u$

obs: Estas formas son equivalentes si $a_{ij} \in C^1(\Omega)$

2. **Elipticidad**: $A(x) = (a_{ij}(x))$ se dice **uniformemente elíptico (acotado)** si $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \langle \xi, A\xi \rangle \geq (\leq) C_0 \langle \xi, \xi \rangle$. Habitualmente se trabaja con A simétrica.

3. **Formulación Variacional**: u se dirá **solución débil** del problema $Lu = f$ si $\forall v$ en un espacio adecuado (ej: $u \in H^1(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$) $B[u, v] = \langle f, v \rangle$, donde B es una forma bilineal obtenida al integrar por partes el problema original, y f es promovido a un elemento del dual del espacio de v . Los detalles dependen del problema y las condiciones de borde en particular.

4. **Lax-Milgram**: Sean $u, v \in H$, con H un hilbert. El problema $B[u, v] = \langle f, v \rangle$ tiene **solución única** si existen $\alpha, \beta > 0$ tal que:

• B continua: $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$

• B coerciva: $\beta(u, u) \leq B[u, u]$

5. **Teorema de Representación de Riesz**: A veces B además es simétrica. En este caso es más simple definir $((u, v)) := B[u, v]$, mostrar que es nuevo producto interno, y así el teorema de representación de Riesz nos garantiza existencia de solución.

6. **Alternativa de Fredholm**: Sea el problema primal con L op diferencial de divergencia: $Lu = f, u|_{\partial\Omega} = 0$. El operador adjunto de L se puede escribir como $L^*v = -\partial_i(a_{ij}\partial_j v) - b_i\partial_i v + (c - (\partial_i b_i))v$. La forma bilineal adjunta se define $B^*[u, v] := B[v, u]$. El problema débil adjunto consiste en encontrar $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\forall u \in H_0^1(\Omega), B^*[v, u] = (f, u)$. Con esto, **sólo una** de las siguientes es cierta:

1. Existe solución débil única del problema primal para cualquier

$$f \in L^2(\Omega).$$

2. Existe una solución débil no nula del problema homogéneo $Lu = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$. En este caso, la dimension de $\text{Ker}(L)$ es igual a la de $\text{Ker}(L^*)$ y finita.

3. Existe solución débil única del problema primal ssi $f \in \text{Ker}(L^*)^\perp$