CONTROL 2 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES PRIMAVERA 2019

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROFS. AUXS. MARÍA E. MARTÍNEZ, Y CHRISTOPHER MAULÉN.
TIEMPO: 4 HRS.

Pregunta 1 (2 ptos. c/u)

(a) Muestre que la energía y el momentum de ondas en dimensión d,

$$E[u,\partial_t u](t) := \frac{1}{2}\int \left(|\nabla u|^2 + (\partial_t u)^2\right)(t,x)dx$$

y

$$\vec{M}[u,\partial_t u](t) := \int \partial_t u(t,x)\nabla u(t,x)dx$$

se conservan en el tiempo, si $(u,\partial_t u) \in C(\mathbb{R};(H^1\times L^2)(\mathbb{R}^d))$. Justifique adecuadamente sus cálculos.

(b) Muestre que la ecuación para $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+1}$

$$\Delta u = \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$$

está mal puesta para cualquier par de datos $u(t=0) = u_0$, $\partial_t u(t=0) = u_1$ en la clase de Schwartz.

(c) Muestre que la solución de ondas 3D con datos iniciales $g \equiv 0$, $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\nabla h \in (L^1(\mathbb{R}^d))^d$ satisface

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \leq \frac{C}{t}\left(\|h\|_{L^1_x} + \|\nabla h\|_{L^1_x}\right), \quad t \geq 1.$$

Indicación: Recuerde que para $z \in \partial B(0,1)$, $z\cdot z = 1$. Utilice una cut-off bien escogida para evitar el origen, y use Teorema de la divergencia.

Pregunta 2. La ecuación de Born-Infeld en $\mathbb{R}^{1+1}$. En esta pregunta estudiaremos la EDP de ondas cuasilineal siguiente

$$\textbf{(BI)} \qquad (1-(\partial_t u)^2)\partial_x^2 u + 2\partial_x u\,\partial_t u\,\partial_{tx}^2 u - (1+(\partial_x u)^2)\partial_t^2 u = 0, \qquad (t,x)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Aquí, $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$ es una campo escalar. Esta ecuación fue originalmente derivada por Born e Infeld en 1934 (en el caso tres dimensional) para describir Electrodinámica no lineal, una generalización de las ecuaciones estándar de Maxwell.

(a) (1 pto.) Sea $\phi = \phi(s)$ un perfil de clase $C^2(\mathbb{R})$. Muestre que

$$u_\pm(t,x) := \phi(x \pm t)$$

son ambas soluciones de (BI), tal como en ondas 1D.

El propósito de esta pregunta es mostrar que esencialmente, todas las soluciones pequeñas y suficientemente suaves de (BI) **decaen al interior del cono de luz** $|x| \leq |t|$, al menos bajo una sucesión de tiempos que tienden a infinito. Sea $(u, \partial_t u)$ una solución de (BI) en la clase $(H^2 \times H^1)(\mathbb{R})$, y tal que

$$\text{(S)} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(u,\partial_t u)(t)\|_{H^2\times H^1} < \varepsilon,$$

para cierto ε suficientemente pequeño. Sean también $\lambda(t) := \frac{t}{\log^2 t}$ ($t \geq 2$), y $\varphi = \tanh$, de modo que $\varphi' = \operatorname{sech}^2$.

(b) (1 pto.) Definamos (aquí, $\int = \int_{\mathbb{R}} dx$)

$$\mathcal{J}(t) \ := \ -\int \varphi\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)\frac{\partial_t u\, \partial_x u}{1+(\partial_x u)^2}. \tag{0.1}$$

Muestre que $\mathcal{J}(t)$ está bien definida y $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathcal{J}(t)| \leq C\varepsilon^2$.

(c) (2 ptos.) Muestre que, para cada $t > 2$, $\mathcal{J}(t)$ es diferenciable en tiempo y que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}(t) = \frac{1}{2\lambda(t)}\int \varphi'\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)\left(\frac{(\partial_x u)^2+(\partial_t u)^2}{1+(\partial_x u)^2}\right) + \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\varphi'\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)\frac{\partial_t u\,\partial_x u}{1+(\partial_x u)^2}.$$

Indicación: Suponga $(u, \partial_t u)$ suaves primeramente (Schwartz), luego justifique por qué el resultado es cierto si $(u, \partial_t u)$ satisfacen sólo (S).

(d) (1 pto.) Muestre ahora que si $t > 2$,

$$\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\varphi'\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)\frac{\partial_t u\,\partial_x u}{1+(\partial_x u)^2} \leq \frac{C\varepsilon^2}{t\log^2 t} + \frac{1}{8\lambda(t)}\int \varphi'\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)(\partial_x u)^2.$$

Concluya que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}(t) \geq \frac{1}{8\lambda(t)}\int \varphi'\Big(\frac{x}{\lambda(t)}\Big)((\partial_x u)^2+(\partial_t u)^2) - \frac{C\varepsilon^2}{t\log^2 t}.$$

(e) (1 pto.) Muestre finalmente que existe una sucesión de tiempos $t_n \to +\infty$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(u,\partial_t u)(t_n)\|_{(\dot H^1\times L^2)(-\lambda(t_n),\lambda(t_n))} = 0.$$

Explique por qué este resultado no contradice la parte (a).