Departamento de Ingeniería en Matemática
MA4801-1 - Ecuaciones en Derivadas Parciales, Primavera 2024
Profesores: Rayssa Caju y Claudio Muñoz
Auxiliares: Benjamin Borquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

Guia 6 - Espacios de Sobolev y aplicaciones a EDP

P1. Muestre que la inmersión $W^{1,p}(B(0,1)) \hookrightarrow L^{p^*}(B(0,1))$ no es compacta.

P2. Sean $N \geq 3$ y $V \in C\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ tal que $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$. Considere el subespacio de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ definido por:

$$E := \left\{ u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \, dx < \infty \right\},$$

dotado de la norma:

$$\|u\|_E := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

(a) Muestre que $E \hookrightarrow H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$;

(b) Muestre que la inmersión $E \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ es compacta para todo $2 \leq p < 2^*$.

P3. Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es conexo. Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil del problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{si } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Suponga que $f \in L^2(\Omega)$. Pruebe que (2) tiene una solución débil ssi

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = 0.$$

P4. Explique cómo definir $u \in H^1(\Omega)$ como una solución débil de la ecuación de Poisson con condiciones de borde de Robin:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y discuta la existencia y unicidad de una solución dada para un $f \in L^2(\Omega)$.