Auxiliar Final: Ecuaciones en Derivadas Parciales
Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares: B. Bórquez, V. Salinas, J. Trespalacios

El objetivo de este examen es probar, vía una formulación variacional adecuada, que las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias en tres dimensiones poseen una solución débil definida en un espacio de Sobolev adecuado.

El problema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio acotado, de frontera suave de clase C^1. Fijemos una fuerza externa $f = (f_1, f_2, f_3)$, con cada $f_i \in L^2(\Omega)$. Un campo de velocidades $u = u(x) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, y una presi´on escalar $p = p(x) \in \mathbb{R}$ satisfacen las ecuaciones (estacionarias, incompresible) de Navier-Stokes en Ω si se cumple que

$$\text{(NS)} \quad \begin{cases} -\Delta u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + f, & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

En las ecuaciones anteriores, el término $(u \cdot \nabla)u$ es un campo vectorial de componentes

$$[(u \cdot \nabla)u]_i = \Big(\sum_{j=1}^{3} u_j \partial_{x_j} \Big) u_i = \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_{x_j} u_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Asimismo, $\operatorname{div} u := \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} u_j$ es un escalar, siendo la condición $\operatorname{div} u = 0$ la que representa el carácter incompresible del fluido.

Antes de probar nuestro resultado principal, necesitamos ciertas definiciones. Dado un espacio vectorial X, la notación X^3 se refiere al espacio $X \times X \times X$, con la norma natural de X en cada una de sus tres coordenadas, a menos que indiquemos lo contrario. Definimos así los espacios vectoriales

$$V_0 := \{u \in C_0^\infty(\Omega)^3 \ : \ \operatorname{div} u = 0\}, \qquad \text{(sin topología)}$$

$$V := \text{ clausura de } V_0 \text{ con la norma de } H_0^1(\Omega)^3,$$

por lo que sobre V se puede utilizar la norma modificada (equivalente a la norma usual, gracias a la desigualdad de Poincaré)

$$\|u\|_V := [u, u]^{1/2}, \quad \text{con} \quad [u, v] := \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla v_j = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \partial_{x_i} u_j \, \partial_{x_i} v_j, \quad u, v \in V.$$

Asimismo, sea $(u, v) := \int_\Omega u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_i v_i$ el producto interno en $L^2(\Omega)^3$ usual.

Por último, una propiedad topológica importante que satisfacen las funciones en V es la siguiente:

Teorema 1 (de Rham). *Sea $g \in D'(\Omega)^3$. Entonces*

$$g = \nabla p, \ \text{con } p \in D'(\Omega) \iff \langle g, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V_0.$$

Mejor aún, si $\nabla p \in H^{-1}(\Omega)^3$ entonces $p \in L^2(\Omega)$.

Parte A. Preliminares.

1. Pruebe la primera implicancia $\implies$ del Teorema anterior.

   La conversa y la conclusión adicional del Teorema son de difícil demostración, y las asumiremos en lo que sigue.

2. Sea $\widetilde{V} := \{u \in H_0^1(\Omega)^3 \ : \ \operatorname{div} u = 0 \text{ en } L^2(\Omega)\}$. Pruebe que $V \subseteq \widetilde{V}$.

Supongamos ahora que $g \in \widetilde{V}^*$. Notemos que, gracias al Teorema de Hahn-Banach, g se puede extender de manera lineal y continua a todo $H_0^1(\Omega)^3$, definiendo así un elemento de $H^{-1}(\Omega)^3$.

3. Pruebe ahora que V es denso en $\widetilde{V}$. Concluya que $V = \widetilde{V}$ y que V es Hilbert separable.

   Indicación. Para probar que V es denso en $\widetilde{V}$, pruebe que todo elemento del dual de $\widetilde{V}$ que se anula en V, también se anula en $\widetilde{V}$.

Si $u, v, w \in V_0$, se define la forma trilineal

$$b(u,v,w) := \int_\Omega [(u\cdot\nabla)v]\cdot w = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \partial_{x_i} v_j w_j \in \mathbb{R}.$$

4. Justifique por qué $V \hookrightarrow L^4(\Omega)^3$, y pruebe que si $u, v, w \in V$, entonces $b(u,v,w)$ está bien definida y se tiene la estimación de continuidad
$$|b(u,v,w)| \le C\|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V.$$
5. Muestre que, para toda $u, v, w \in V$,
$$\text{(Prop)} \qquad b(u,v,v) = 0, \quad b(u,v,w) = -b(u,w,v).$$

Parte B. Formulación débil y aproximaciones de Galerkin. Partamos con una

Definición 1. Diremos que $u \in V$ es solución débil de (NS) si se satisface que
$$\text{(NSV)} \quad [u,v] + b(u,u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in V.$$

El principal resultado que probaremos es el siguiente:

Teorema 2. *Para cada $f \in L^2(\Omega)^3$ existe una solución débil $u \in V$ de (NSV). Mejor aún, si $\|f\|_{L^2}$ es suficientemente pequeña, entonces tal solución es única.*

1. Suponga $f \in C(\overline{\Omega})$ dada, y $(u,p) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ solución clásica de (NS). Probar que para todo $v \in V_0$, y a fortiori para todo $v \in V$,
$$[u,v] + b(u,u,v) = (f,v).$$
   Es decir, u es solución débil. Explique en un par de lineas por qué la presión p "desaparece" de la formulación débil.

En lo que sigue, **suponga** $f \in L^2(\Omega)$.

2. Explicar por qué (NSV) no se puede resolver usando Lax-Milgram, mientras un problema con $b \equiv 0$ sí puede resolverse usando esta técnica (o Riesz).

Notemos en lo que sigue que, gracias a que V es Hilbert separable, posee una base ortonormal $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sean $n \ge 1$ y $\mathbb{V}_n := \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$ el subespacio vectorial de V de dimensión n generado por los n primeros elementos (w_i). Notar que $\mathbb{V}_n$ es Hilbert de dimensión finita, con el producto interno

$$[u,v], \quad u, v \in \mathbb{V}_n; \qquad \|u\|_{\mathbb{V}_n} := [u,u]^{1/2}.$$

Nuestro problema ahora es el siguiente:

Queremos encontrar una solución $u_n \in \mathbb{V}_n$ del problema finito-dimensional
$$\text{(NSn)} \quad [u_n, v] + b(u_n, u_n, v) = (f,v), \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_n.$$

Sea ahora $P_n(u) \in \mathbb{V}_n$ la única solución del problema no lineal en $u \in \mathbb{V}_n$
$$[P_n(u), v] = [u,v] + b(u,u,v) - (f,v), \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_n.$$

3. Explicar por qué $P_n(u)$ siempre está bien definida y es única.
4. Probar que la aplicación $u \mapsto P_n(u)$ es continua y que $[P_n(u), u] > 0$ para todo $u \in \mathbb{V}_n$ de norma suficientemente grande.

5. Probar que existe $u_n \in \mathbb{V}_n$ para el cual $P_n(u_n) = 0$. Concluya que (NSn) posee una solución $u_n \in \mathbb{V}_n$.

   Indicación: Defina el mapa $S_n(u) := -kP_n(u)/\|P_n(u)\|_{\mathbb{V}_n}$, con $u \in \overline{B}(0,k)$ bola cerrada en $\mathbb{V}_n$ de radio $k > 0$ a encontrar. Usando el Teorema de Punto Fijo de Brower, probar una contradicción si se asume que $P_n(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{V}_n$.

Parte C. Procedimiento de límite.

1. Usando (NSn), pruebe que $\|u_n\|_V \leq C\|f\|_{L^2}$. Concluya que existe $u \in V$ tal que, salvo una subsucesión,
$$\forall\, w \in V, \quad [u_n, w] \longrightarrow [u, w], \quad n \to +\infty.$$
2. Probar que si $n \to +\infty$, y módulo subsucesión,
$$b(u_n, u_n, v) \longrightarrow b(u, u, v), \quad \text{para toda } v \in V_0.$$
   Concluya que el mismo resultado se tiene para $v \in V$.

   Indicación: Use (Prop).
3. Concluya que u satisface (NSV), con $\|u\|_V \leq C\|f\|_{L^2}$. Esto prueba la primera parte del Teorema 2.
4. Probar que si $\|f\|_{L^2}$ es suficientemente pequeña, entonces la solución u de (NSV) es única. (En particular, la solución con $f \equiv 0$ es $u \equiv 0$.)

   Indicación: Podría testear el sistema no lineal que satisface la diferencia de dos soluciones contra una función test particular.