Cálculo:

1. **Teorema Gauss-Green:** $\int_U u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\nu^i\,\mathrm{d}S \quad (i = 1,...,n)$ o equivalentemente, $\int_U \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U}\boldsymbol{u}\cdot\nu\,\mathrm{d}S$
2. **Integración por partes:** $\int_U u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} uv\nu^i\,\mathrm{d}S \quad (i = 1,...,n)$
3. **Formulas de Green:** $\int_U \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$, $\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S$, $\int_U Dv\cdot Du\,\mathrm{d}x = -\int_U u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U}\frac{\partial v}{\partial \nu}u\,\mathrm{d}S$
4. **Coordenadas polares:** $\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\left(\int_{\partial B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r$, $\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\int_{B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f\,\mathrm{d}S$
5. **Fórmula de coarea:** $\int_{\mathbb{R}^n} f|Du|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\{u=r\}} f\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r$
6. **Mollifiers:** Sean $\{\rho_\varepsilon\}$ mollifiers, $f^\varepsilon \coloneqq \rho_\varepsilon * f$ cumple:
   - $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$
   - $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ c.t.p
   - Si $f \in C(U)$, entonces $f^\varepsilon \to f$ uniforme en compactos
   - Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(U)} f$
7. **Volúmenes de esferas:** $\alpha(n)$:= Volumen de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. Luego $|\partial B(0,r)| = n\alpha(n)r^{n-1}$ y $|B(0,r)| = \alpha(n)r^n$.

Funciones Test y Distribuciones:

1. **Topología para $C^\infty(\Omega)$ (τ_o):** Es la topología formada por las seminormas: $P_N(f) = \sup_{x\in\mathbb{K}_n}\max_{|\alpha|\leq N}|\partial^\alpha f(x)|$
2. **Espacios $D_k(\Omega)$ y $D(\Omega)$** Para un compacto K fijo definimos $D_k(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp}(f) \subseteq K\}$ con la topología $\tau_k \coloneqq \tau_0|_k$. Esta está generada por las **normas**:

$$\|f\|_N \coloneqq \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\leq N}} |\partial^\alpha f|$$

   Para definir la topología τ en $C_c^\infty(\Omega)$, se construye la siguiente base de vecindades del 0:

$$\beta \coloneqq \left\{\tilde{V} \text{ convexo, balanceado en } C^\infty(\Omega) \text{ tales que } \tilde{V}\cap D_K(\Omega) \in D_K(\Omega) \text{ para todo compacto } K\right\}$$

   Con esto, se denota espacio de funciones test a $D(\Omega) \coloneqq (C_c^\infty(\Omega), \tau)$.
3. **Convergencia de tests** Si (f_n) es sucesión de Cauchy en $D(\Omega)$, existe K tal que $(f_n) \subseteq D_{K(\Omega)}$ y además $|f_n - f_m|_N \to 0$ para todo N fijo

   Si $f_n \to 0$ en $D(\Omega)$ entonces existe K tal que $(f_n) \subseteq D_{K(\Omega)}$ y $\partial^\alpha f_n \to 0$ uniforme en K para todo multi índice α
4. **Caracterización del dual** Se llama espacio de distribuciones a $D'(\Omega)$. Sea $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal, LSSE:
   - $T \in D'(\Omega)$
   - Para cada compacto K, existen $N(K) \geq 0$ y $C(K) > 0$ tal que $|\langle T, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_N$

   Si existe N que no depende del compacto, se dice que el menor de ellos es el orden de T.
5. **Derivada en distribuciones** $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle \coloneqq (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$
6. Sea $T : D(\Omega) \to Y$ lineal. Entonces: T es continuo $\Leftrightarrow$ T es acotado $\Leftrightarrow$ $\forall\phi_n \to 0$ en $D(\Omega)$ $\Leftrightarrow$ $T\phi_n \to 0$ en Y $\Leftrightarrow$ $T|_{D_k(\Omega)}$ es continuo para todo K.
7. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, definimos $\langle fT, \phi\rangle \coloneqq \langle T, f\phi\rangle$
8. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \phi\rangle$ existe para toda ϕ test, Definimos: $\langle T, \phi\rangle \coloneqq \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \phi\rangle$, entonces $T \in D'(\Omega)$ y $\partial^\alpha T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} \partial^\alpha T$
9. **Anulación en distribuciones:** Si w es abierto en Ω, decimos que T se anula en w si $\forall\varphi \in D(w), \langle T, \varphi\rangle = 0$

10. **Soporte de una distribución:** Definimos el soporte de una distribución T como el **complemento** de $A_T := \bigcup_{\substack{w \text{ abierto} \\ T \text{ se anula en } w}} w$
11. **Distribucion de soporte compacto:** $\mathcal{E}'(\Omega)$ son las distribuciones de soporte compacto.
12. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene soporte $\{x_0\}$ entonces existen $N \in \mathbb{N}$, $(C_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ tales que. $T = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}$
13. Si $\operatorname{Supp} T = K$ compacto en Ω, entonces $\forall V \subseteq \Omega$ abierto $V \subset K$, existen funciones continuas $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ tales que $T = \sum_{|\alpha| \leq N} D_x^\alpha f_\alpha$
14. **Convolución de distribuciones:** Si $T_1 \in D'(\Omega), T_2 \in \mathcal{E}'$, se define $T_1 * T_2 \in D'(\Omega)$ como $\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \left\langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y) \rangle_y \right\rangle_x$
15. **Propiedades de la convolución de distribuciones:**
    - Si $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, entonces $T_1 * T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$
    - $\partial^\alpha (T_1 * T_2) = \partial^\alpha T_1 * T_2 = T_1 * \partial^\alpha T_2$
    - Si $T \in D'(\Omega)$, entonces $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$
    - Si $T_1 \in S', T_2 \in \mathcal{E}'$ entonces: $\mathcal{F}(T_1 * T_2) = (2\pi)^{d/2} \underbrace{\widehat{T_1}}_{\in S'} \underbrace{\widehat{T_2}}_{\in C^\infty}$

Transformada de Fourier:

1. **Definición**: Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, \mathrm{d}x$
2. Propiedades para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:
    - $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
    - $\left[(\tau_y f)\right]^\wedge(\xi) = e^{i 2\pi \xi y} \hat{f}(\xi)$
    - $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal invertible, $S = (T^*)^{-1}$, entonces $[f \circ T]^\wedge = \frac{1}{|\det(T)|} \hat{f} \circ S$
    - $[f * g]^\wedge = \hat{f} \hat{g}$
    - α multiíndice: $x^\alpha f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C^k$, y $D^\alpha \hat{f} = \left[(-2\pi i x)^{|\alpha|} f\right]^\wedge$
    - $f \in C^k$ tal que $\forall |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in L^1$ entonces $\forall |\alpha| \leq k-1, [D^\alpha f]^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$
3. **Clase de Schwarz:** $S(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \text{ multiíndices}, \left| x^\alpha D^\beta f \right| < \infty \right\}$
    - Prop: $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de la clase de Schwarz.
    - $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$
4. **Fórmula de Parseval:** Para $f, g \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) \, \mathrm{d}x$
5. **Inversión de Fourier:** Para $f, \hat{f} \in L^1$, $f = \left(\hat{f}\right)^\vee := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} e^{2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x$ c.t.p.
6. **Plancherel**: Podemos extender la transformada a $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ y $\mathcal{F}_{L^2} : L^2 \to L^2$.
7. **Dist. Temperadas**: Llamamos al dual $S'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de dist. temperadas.
8. **Fourier en S'**: Para $T \in S'$, $\hat{T}$ se define por su acción $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$. La transformada es una operación continua en S'.

Ecuación de Laplace:

1. **Ecuación de Poisson:** Las ecuaciones $\Delta u = 0$ y $-\Delta u = f$ se llaman ecuaciones de Laplace y Poisson respectivamente. Se busca resolver para $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ con U abierto en $\mathbb{R}^n$. Las soluciones C^2 a Laplace se llaman armónicas.
2. **Solución fundamental:** La función

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi \log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \, |x|^{2-n} & n > 2 \end{cases}$$

   definida en $\mathbb{R}^n / \{0\}$ es la solución fundamental a la ecuación de Laplace.
3. **Solución a Poisson:** Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $u(x) := \Phi * f = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es solución de $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$

4. **Fórmula de la media:** La función u es armónica ssi para toda bola $B(x,r) \subseteq U$ se cumple

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y$$

5. **Principios del máximo:** Sea U acotado y $u \in C^2(U) \cap C^0\left(\overline{U}\right)$ solución de $-\Delta u = 0$ en U. Entonces:
   - $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$
   - Además, si U es conexo y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$, entonces u es constante en U

   Se deduce un principio del mínimo, ya que $-u$ es armónica también.
6. **Unicidad:** Si $g \in C^0(\partial U), f \in C^0(U)$ entonces a lo mas existe una solución $u \in C^2(U) \cap C^0\left(\overline{U}\right)$ de $-\Delta u = f$ en U y $u = g$ en ∂U
7. **Regularidad:** Si $u \in C^0(U)$ satisface la fórmula de la media para toda bola, entonces $u \in C^\infty$ (mas aún es analítica)
8. **Estimaciones en derivadas:** Si u es armónica en U, entonces

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \quad (|\alpha| = k; B(x_0,r) \subseteq U)$$

9. **Liouville:** Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada, entonces u es constante.
10. **Representación:** Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n), n \geq 3$. Entonces cualquier solución acotada de $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$ es de la forma $u = \Phi * f + c$ con $c \in \mathbb{R}$.
11. **Desigualdad de Harnack:** Para cada abierto conexo $V \subset\subset U$, existe $C(V) > 0$ tal que $\sup_V u \leq C \inf_V u$, $\forall u$ armónica no negativa. En concreto, para $x, y \in V$ se cumple $\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$.
12. **Función de Green:** Queremos obtener una formula de representación para

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

   Para ello, para un x fijo buscamos la función corrector como la solución a

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x = 0 & \text{en } U \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{en } \partial U \end{cases}$$

   Con esto definimos la función de Green para la región U

$$G(x,y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y) \quad (x \neq y)$$

13. **Representación usando Green:** Si u resuelve el IVP anterior, entonces

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\,\mathrm{d}S(y) + \int_U f(y) G(x,y)\,\mathrm{d}y$$

14. **Simetría de Green:** Para todo par $x, y \in U$ distintos, $G(x,y) = G(y,x)$
15. **Green para el semiespacio positivo ($\mathbb{R}_+^n$):** $\tilde{x} := (x_1, x_2, ..., -x_n)$, entonces $G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x})$ para $x, y \in \mathbb{R}_+^n$. Por lo que la solución es

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n}\,\mathrm{d}y$$

16. **Green para la bola unitaria:** Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}$, luego $G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$, con lo que la solución es:

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n}\,\mathrm{d}S(y)$$

17. **Solución para $B(0,r)$:** Se define

$$u_r(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \,\mathrm{d}S(y)$$

Entonces u_r es armónica en $B(0,r)$ y $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_0(0,r)}} u_r(x) = g(x_0)$ para $x_0 \in \partial B(0,r)$

Ecuación de Calor:

1. **Ecuación del calor:** Se llama ecuación del calor a la ecuación $u_t - \Delta u = f$
2. **Solución fundamental del calor:**

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

   Para $t > 0$ fijo se cumple $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) \,\mathrm{d}x = 1$
3. **Solución al problema con condición inicial:**

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Phi(x-y,t) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \,\mathrm{d}y$$

   soluciona el problema $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$, $u = g$ en $\mathbb{R}^n_+ \times \{t = 0\}$
4. **Solución al caso no homogeneo:** La solución al problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

   está dada por $u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s$
5. **Cilindro parabólico:** Dado un abierto Ω acotado y T un tiempo fijo, se define el cilindro parabólico como $U_T := U \times (0,T]$ y la frontera parabólica como $\Gamma_T = \overline{U}_T - U_T$
6. **Bola de calor:** Dados $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ se define

$$E(x,t,r) := \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\right\}$$

7. **Fórmula de la media:** Si $u \in C^2_1(U_T)$ soluciona calor, entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s$$

8. **Principio del máximo:** Si $u \in C^2_1(U_T) \cap C\left(\overline{U}_T\right)$ soluciona calor, entonces $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$. Y si U es conexo y existe $(x_0,t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{U}_T} u$ entonces u es constante en $\overline{U}_{t_0}$
9. **Unicidad:** Si $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$, entonces existe a lo mas una solución del calor no homogeneo con condición inicial.
10. **Principio del máximo para problema de Cauchy:** Si $u \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ resuelve $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ con condición inicial $u = g$ y es tal que $u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}$ para $A, a > 0$, entonces $\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$
11. **Unicidad para el PC:** Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, se cumple que el problema de Cauchy tiene a lo mas una solución.
12. **Suavidad:** Si $u \in C^2_1(U_T)$ resuelve calor, entonces $u \in C^\infty(U_T)$
13. **Estimadores para las derivadas:** Para cada par de enteros k, l existe $C_{k,l}$ tal que

$$\max_{C(x,t,r/2)} \left|D^k_t D^l_x u\right| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t,r))}$$

Ecuación de Onda:

1. Fórmula de D'Alambert ($U = \mathbb{R}^n$): $u(x;r,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y$
2. Medias Esféricas: $U(r,t;x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,\mathrm{d}y$, $U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0$ s.a. $U = G, U = H$ en $\mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}$
3. Fórmula de Kirchhoff: $u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y)$, válida sólo para $n = 3$.
4. Fórmula de Poisson 2D: $u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{tg(y)+t^2h(y)+tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}S(y)$
5. Fórmulas de Poisson 3D: $u(x,t) = \partial_t\left(t\fint_{\partial B(x,t)} g\,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{2r}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y)$
6. Solución homogénea general n impar:
$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,\mathrm{d}S\right) + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,\mathrm{d}S\right)\right],$$
$$\gamma_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)$$
7. Solución homogénea general n par:
$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y\right) + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y\right)\right],$$
$$\gamma_n = 2\cdot 4\cdot 6\cdots n$$
8. Solución no-homogénea: $u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,\mathrm{d}s$, donde para $t \geq s$, $u_{tt}(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0$, s.a. $u(\cdot;s) = 0, u_t(\cdot;s) = f(\cdot,s)$ en $t = s$ La solución general se obtiene sumando homogénea + inhomogenea
9. Energía: $E(t) = \frac{1}{2}\int_U(u_t^2 + |Du|^2)\,\mathrm{d}x$. $\dot{E} = \int_U u_t(u_{tt} - \Delta u)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} u_t Du\cdot\nu\,\mathrm{d}S$

Espacios de Sobolev:

1. **Derivada débil:** $v = D^\alpha u \Leftrightarrow \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega uD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x$
2. $W^{k,p}(\Omega) \coloneqq \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall|\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ existe en el sentido Débil}\}$
3. $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \coloneqq \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Con esta norma, $W^{k,p}(\Omega)$ es Banach. $H^k(\Omega) \coloneqq W^{k,2}(\Omega)$ además es Hilbert.
4. Equivalente en $\mathbb{R}^n$: $H^s(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{u \in S' \mid (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$ con norma $\|u\|_{H^s} \coloneqq \left\|(1+|\xi|^2)^{\{\frac{s}{2}\}}\hat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$
5. $W_0^{k,p}(\Omega) \coloneqq \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ con respecto a $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.
6. **Teoremas de densidad (p finito):**
   - $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W_{\mathrm{loc}}^{k,p}(\Omega)$ (sin supuestos extras sobre Ω).
   - Si además Ω es acotado: $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.
   - Si Ω es acotado y borde C^1: $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.
7. **Teorema de Extensión:**
   - Ω es acotado y borde $C^1 \Rightarrow \exists E : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ lineal continuo tal que $Eu = u$ en Ω (c.t.p), y Eu tiene soporte en un abierto V acotado en $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset\subset V$.
8. **Traza:** Ω acotado $\wedge\, \partial\Omega \in C^1 \Rightarrow \exists T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ lineal continuo tal que $\forall u \in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap W^{1,p}(\Omega), Tu = u|_{\partial\Omega}$. Además, $Tu = 0 \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
9. **Desigualdades de Sobolev:**
   - **Caso $1 \leq p < n$:** Definimos $p^* = \frac{np}{n-p}$
     - (Gagliardo-Niremberg-Sobolev) **En $\mathbb{R}^n$:** $\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
     - Ω **acotado y frontera suave:** $1 \leq p < n \Rightarrow \exists C > 0$ tal que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
     - (Poincaré) Ω **acotado:** $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall q \in [1,p^*], \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$

- **Caso $n < p \leq \infty$**: Aquí, las sobolev son *Hölder continuas* (identificable con continuas).
  - Espacio de Hölder:
  $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in U \\ (x \neq y)}} \left\{ \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\gamma} \right\}$
  - (Morrisey) $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^n), \gamma := 1 - \frac{n}{p}, \|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$
  - (Morrisey 2) Si **Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1**: $\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ donde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ y $u^* = u$ c.t.p. Esto permite identificar u sobolev con funciones continuas.

10. **Inclusiones compactas** (Rellich-Kondrachov): Si Ω acotado y $\partial\Omega$ es C^1, $W^{1,p}(\Omega)$ es compactamente embebido en $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$. Es decir, toda sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ tiene subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$.
11. **Desigualdad Poincaré - Weintenger**: Si Ω acotado, $\partial\Omega$ es C^1, y $1 \leq p < \infty$ entonces $\exists C > 0$ tal que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \left\|u - \fint_\Omega u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$

Aplicaciones a EDP:

1. **Operador Diferencial**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ acotado y borde C^1, $A(x) = (a_{ij}(x)), b(x) = (b_j(x))$, y $c(x)$ tales que $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, definimos los operadores diferenciales en forma: *(notación: índices repetidos $\Rightarrow$ sumar el índice de 1 a d)*
   - **De divergencia**: $Lu = -\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + b_j(x)\partial_j u + c(x)u$
   - **General**: $Lu = -a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + b_j(x)\partial_j u + c(x)u$

   obs: Estas formas son equivalentes si $a_{ij} \in C^1(\Omega)$
2. **Elipticidad**: $A(x) = (a_{ij}(x))$ se dice **uniformemente elíptico (acotado)** si $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \langle \xi, A\xi \rangle \geq (\leq)\, C_0 \langle \xi, \xi \rangle$. Habitualmente se trabaja con A simétrica.
3. **Formulación Variacional**: u se dirá *solución débil* del problema $Lu = f$ si $\forall v$ en un espacio adecuado (ej: $u \in H^1(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$) $B[u,v] = \langle f, v \rangle$, donde B es una forma bilineal obtenida al integrar por partes el problema original, y f es promovido a un elemento del dual del espacio de v. Los detalles dependen del problema y las condiciones de borde en particular.
4. **Lax-Milgram**: Sean $u, v \in H$, con H un hilbert. El problema $\boldsymbol{B[u,v] = \langle f, v \rangle}$ **tiene solución única** si existen $\alpha, \beta > 0$ tal que:
   - B continua: $|B[u,v]| \leq \alpha\|u\|\|v\|$
   - B coerciva: $\beta(u,u) \leq B[u,u]$
5. **Teorema de Representación de Riesz**: A veces B además es simétrica. En este caso es más simple definir $((u,v)) := B[u,v]$, mostrar que es nuevo producto interno, y así el teorema de representación de Riesz nos garantiza existencia de solución.
6. **Alternativa de Fredholm**: Sea el problema primal con L op diferencial de divergencia: $Lu = f, u|_{\partial\Omega} = 0$. El operador adjunto de L se puede escribir como $L^* v = -\partial_i(a_{ij}\partial_j v) - b_i\partial_i v + (c - (\partial_i b_i))v$. La forma bilineal adjunta se define $B^*[u,v] := B[v,u]$. El problema débil adjunto consiste en encontrar $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\forall u \in H_0^1(\Omega), B^*[v,u] = (f,u)$. Con esto, **sólo una** de las siguientes es cierta:
   1. Existe solución débil única del problema primal para cualquier $f \in L^2(\Omega)$.
   2. Existe una solución débil no nula del problema homogéneo $Lu = u$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. En este caso, la dimension de $\operatorname{Ker}(L)$ es igual a la de $\operatorname{Ker}(L^*)$ y finita.
   3. Existe solución débil única del problema primal ssi $f \in \operatorname{Ker}(L^*)^\perp$