MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2023
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Matías V. Vera, S. Adrián Arellano

Laboratorio #1

Uso de `Python` - `BOCOP`

Fecha de entrega: 8 de Septiembre

Descripción: El objetivo de este primer laboratorio es aprender a utilizar algunas librerías de `Python` junto con las herramientas *open-source* `pyplane` y `BOCOP`.

Esta tarea es individual. Consultas se realizan vía el foro de U-cursos.

Parte A. Uso de `Python`

Ejercicio 1 (Ecuaciones diferenciales ordinarias) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - xy \\ \dot{y} = y + \log(y) \end{cases}$$

con condición inicial $(x_0, y_0) = (-5, 1)$, queremos describir su comportamiento para $t \in [0, 3]$.

a) Encuentre la solución general del sistema (sin considerar la condición inicial), use `dsolve` de `sympy`. Utilice la fórmula obtenida para graficar la solución del sistema en el intervalo $[0, 3]$ (ahora sí considerando la condición inicial).

b) Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 3]$ mediante `solve_ivp` de `scipy`. Grafique las soluciones.

c) Utilice el applet `pyplane` (disponible en https://github.com/TUD-RST/pyplane) para dibujar los diagramas de fase del sistema para al menos 10 distintas condiciones iniciales. En particular muestre el mismo punto inicial utilizado antes.

d) Compare los resultados de los tres métodos y escriba sus conclusiones.

Ejercicio 2 (Sistemas Dinámicos Controlados) Considere el sistema de control en $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, 0)$. Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ en `Python` mediante `solve_ivp` para los siguientes controles de lazo abierto (*open loop*):

$$u(t) = 0; \quad u(t) = 1; \quad u(t) = -\cos(t); \quad u(t) = t^2.$$

Grafique las trayectorias.

Ejercicio 3 (Optimización lineal) Resuelva con `Python` el siguiente problema de programación lineal (PL). Utilice para ello `linprog` de `scipy` y explore los distintos métodos disponibles.

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} & f(x,y,z) := -3x + y - 11z \\ & \begin{array}{lllll} -x & +y & -7z & = 13 & \\ 3x & -y & +2z & \leq 0 & \qquad x,y,z \geq 0 \\ 2x & & +4z & \leq 3 & \\ 2x & -4y & +z & \leq 3 & \end{array} \\ \text{sa.} & \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Optimización no lineal) Una compañía fabrica cajas (paralelepípedos rectangulares) para transporte. Se requiere fabricar la caja con el mayor volumen posible, tal que la suma de todas sus aristas no superen los $500cm$ y cuya base no tenga menos de $3000cm^2$ de superficie. Escriba un modelo matemático para este problema y resuélvalo utilizando el comando `minimize` de `scipy`.

Ejercicio 5 Encuentre los puntos de intersección (x, y) de las siguientes cónicas:

- $(x-4)^2 + 3y^2 = 20$,
- $x + 8(y+1)^2 = 10$.

Haga lo anterior de las siguientes formas:

a) Utilizando el comando `fsolve` de `scipy`.

b) Mediante el comando `solve` de `sympy`.

Finalmente grafique y comente sobre los resultados.

Parte B. Uso de `BOCOP`

`BOCOP` es un programa *open-source* diseñado para resolver problemas de control óptimo tipo Mayer a tiempo final fijo o libre y con restricciones de control y estado. Para instalar el solver de control óptimo `BOCOP` ver el archivo "bocop.pdf". Encontrará un manual más detallado en www.bocop.org. `BOCOP` puede resolver problemas de la forma siguiente

$$(\mathrm{M}) \begin{cases} \displaystyle\min_{u(\cdot)} \; J(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) & (Criterio) \\ \quad \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Dinamica) \\ \quad \Phi_l \leq \Phi(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) \leq \Phi_u & (Condicion\ de\ borde) \\ \quad y_l \leq y(t) \leq y_u \quad u_l \leq u(t) \leq u_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Cotas) \\ \quad g_l \leq g(y(t), u(t)) \leq g_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Restricciones\ mixtas) \end{cases}$$

donde $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ el control. En particular, note que la función objetivo solo depende del tiempo inicial y final y de los estados iniciales y finales.

Ejercicio 6 Consideremos en este ejercicio el problema de Goddard, que modela el ascenso de un cohete a través de la atmósfera, y restringimos el estudio a trayectorias verticales (monodimensionales). Las variables de estado son la altitud r, la velocidad v y la masa m del cohete durante el vuelo. El cohete está sujeto a fuerzas de gravedad, aerodinámica y del motor. El tiempo final es libre, y el objetivo es alcanzar una cierta altitud con un consumo mínimo de combustible, es decir con masa final máxima. El control es la fuerza u del motor del cohete.

El problema de control óptimo es el siguiente:

$$(G)\begin{cases} \max\limits_{u(\cdot)} \; m(t_f) & & \\ \quad \dot{r} = v & & r(0) = 1 \\ \quad \dot{v} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{m}(T_{max}u - D(r,v)) & & v(0) = 0 \\ \text{sa.} \; \dot{m} = -bu & & m(0) = 2 \\ \quad D(r,v) \leq C & & r(t_f) = 1.02 \\ \quad u(t) \in [0, 1.5] & \forall t \in [0, t_f] & \end{cases}$$

y la fuerza aerodinámica es $D(r,v) = Av^2 e^{-k(r-r_0)}$.

Este problema ya está programado (con parámetros distintos) y es uno de los ejemplos que viene con `BOCOP`, el cual se puede encontrar en la carpeta 'examples/goddard'. Los valores de las constantes T_{max}, A, k, r_0, b, C están programados en el problema de `BOCOP`, **no los modifique**.

1. Escriba este problema en la forma (M) e identifique las funciones J, f, Φ y g y las cotas Φ_l, Φ_u, g_l, g_u, y_l, y_u, u_l y u_u.

2. Haga las modificaciones necesarias para resolver el problema de alcanzar la misma altitud pero con $m(0) \in \{0.5, 0.1, 2.7\}$. Entregue los gráficos de la solución y el control óptimo.

3. Considerando (G) original, ahora queremos que el cohete llegue a la altitud deseada con cierta velocidad para asegurarnos que no retornará a la tierra, en particular $v(t_f) = 0{,}1$. Haga las modificaciones necesarias para resolver este nuevo problema. Entregue los gráficos de la solución y el control óptimo.

4. Estamos dispuestos a sacrificar un poco de combustible, a costa de llegar con muchas más velocidad a la altura deseada. Modifique la función objetivo por una de la forma $m(t_f) + v(t_f)/5.2$. Resuelva nuevamente (G) solo con este cambio y muestre la dinámica.

Ejercicio 7 Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$(B)\begin{cases} \min\limits_{u(\cdot)} \displaystyle\int_0^{t_f} x(t) + y(t)\; dt & & \\ \quad \ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{t} + u(t) & x(0) = 1 & \dot{x}(0) = 1 \\ \text{sa.} \; \ddot{y}(t) = \dot{x}(t) + u(t) & y(0) = 1 & \dot{y}(0) = 1 \\ \quad u(t) \in [0, 0.5] & \forall t \in [0, t_f] & \dot{y}(t_f) \geq 1.2 \end{cases}$$

con $t_f = 1$.

Se recomienda revisar un problema levemente similar que ya está programado y es uno de los ejemplos que viene con `BOCOP`, el cual se puede encontrar en la carpeta "examples/robbins".

1. Primeramente identifique el sistema que modela este problema y luego introduzca una nueva variable de estado z tal que $z(t_f) = x(t) + y(t)\; dt$. ¿Cuál es la dinámica y la condición inicial de z?

2. Usando esta variable adicional, escriba un problema de Mayer (M) que sea equivalente al problema (B). Identifique las funciones J, f, Φ y g.

3. Resuelva el problema (B). Grafique los resultados encontrados.

4. Considere ahora que en la función objetivo se quiere reemplazar el termino $y(t)$ por $Y = \int_0^t y(s)\, ds$, con $Y(0) = 0$. Resuelva el problema y entregue sus gráficos.