Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Mecánica Estadística de no Equilibrio
Tarea 6 — Entrega 2 de mayo de 2025

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Teoría de perturbaciones NO singular. Estudie el problema del movimiento del kink visto en clase, pero aplicando el método de perturbaciones estándar. Es decir, en el que hay una sola escala de tiempo. Muestre que en este caso se obtiene una divergencia secular. Ojo, este problema es muy corto, no se compliquen innecesariamente.

[P2] Descomposición spinodal de campos conservados. [Sección 8.7.3 del libro de Chaikin y Lubensky.]

En el caso de un campo conservado (por ejemplo, concetración en una mezcla binaria), la dinámica se describe con el modelo B. Es usual hacer un cambio de variables lineal en el parámetro de orden ϕ, de manera que la energía libre se escribe como

$$F[\phi] = \int d^3r \left[f(\phi) + \frac{c}{2}(\nabla\phi)^2 \right]$$

con

$$f(\phi) = \frac{r}{2}\left(\phi^2 - 2\phi\phi_0\right) + u\phi\left(\phi^3 - 4\phi_0^3\right)$$

y $r = a(T - T_c)$. Los parámetros a, c y u se consideran independientes de T, como es usual en la teoría de Landau. La ventaja del cambio de variables hecho es que la energía libre tiene un punto de equilibrio en ϕ_0, independiente de T.

(a) Grafique f para distintas temperaturas. Muestre que existe una temperatura spinodal $T_{sp} < T_c$ para la cual el mínimo en ϕ_0 se vuelve un punto de inflexión.

(b) Considere la dinámica cerca de la temperatura spinodal. Suponga una perturbación sinusoidal del campo (note que una perturbación sinusoidal no cambia la masa total, por lo que es legítimo suponer que los parámetros antes fijados no cambian)

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 + \phi_1(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Calcule la tasa de decaimiento de las perturbaciones: Λ_k. Muestre que si $T > T_{sp}$ las perturbaciones son estables ($\Lambda_k < 0$).

(c) Grafique Λ_k para $T < T_{sp}$. Interprete el resultado.

[P3] Nemáticos activos. Lea y comente el artículo *Active nematics* de A. Doostmohammadi, J. Ignés-Mullol, J.M. Yeomans y F. Sagués, Nature Communications **9**, 3246 (2018). Miren el video que está como material suplementario.

[P4] * Dinámica por interacción de un kink-antikink.** Considere un sistema descrito por el modelo A (parámetro de orden no conservado) con la energía libre de Ginzburg–Landau. El sistema se inicializa con un par kink-antikink ubicados en x_1 y x_2, separados a una gran distancia $L = x_2 - x_1$. Se busca encontrar cómo se mueven estos kinks para aniquilarse. Para eso vamos a aplicar una teoría de perturbaciones singular.

(a) Lo primero es identificar un parámetro pequeño ϵ, de manera que si $\epsilon = 0$ se tenga una solución sin interacción de los kinks. Para eso se usa la solución propuesta en la tarea anterior y se reemplaza en la ecuación de Ginzburg–Landau. Se puede verificar que todos los términos se anulan, salvo unos pocos que tienen que ver con la interacción entre los kinks (y que dieron lugar a la energía de interacción de la tarea anterior). Póngale un ϵ a esos términos. Con esto se logra que si $\epsilon = 0$ la función que propusieron en la tarea anterior sería la solución de la ecuación. No lo es, pero por poco.

(b) Ahora proceda con la teoría de perturbaciones singular, introduciendo dos escalas temporales y proponiendo una serie perturbativa en la solución.

(c) Calcule cómo se mueven los defectos.