Mecánica Estadística de no Equilibrio
Tarea 4 — Entrega 10 de abril de 2025

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Susceptibilidad magnética en teoría de Landau. Considere la energía libre de Landau

$$F(T,B,M) = F_0 + a(T-T_c)M^2 + F_4 M^4 - F_3 BM$$

con F_0, a, F_4 y F_3 constantes positivas.

Usando un método perturbativo, calcule la magnetización M para campos B pequeños en el caso de $T > T_c$. Con esto, calcule la suceptibilidad

$$\chi = \lim_{B\to 0} \frac{\partial M}{\partial B}$$

Comente el comportamiento cuando T se aproxima a la temperatura crítica.

[P2] Curva espinodal en teoría de Landau. La curva espinodal en el espacio de fase T-B es la que delimita la zona donde hay soluciones metaestables, es decir, que existen dos mínimos de la energía.

Esta curva se puede obtener de la condición de que un mínimo desaparece, lo que ocurre cuando se fusiona con el máximo de energía libre. Es decir, se determina por la condición de ser un punto de inflexión:

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial M^2} = 0$$

Obtenga la curva y grafíquela en el espacio de fase T-B. Use la energía libre del P1.

[P3] Metaestabilidad. Usando la energía libre del Landau se busca estudiar la vida de los estados metaestables. Escogiendo valores numéricos adecuados de los parámetros, la energía libre queda

$$F(B,M) = -\frac{M^2}{2} + \frac{M^4}{4} - BM$$

donde impusimos que la temperatura es menor que la crítica. Usando el resultado del P2, gráficamente o por otro método, determine el máximo valor de B para que haya dos mínimos.

Considere ahora la dinámica de Langevin para M

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial M} + \sqrt{2k_B T}\,\xi(t)$$

Podemos tomar unidades tal que $k_B = 1$ (es decir, T se mide en unidades de energía).

Con el método numérico revisado en la tarea anterior, resuelva numéricamente la evolución de M en el tiempo, usando como condición inicial que está en el mínimo metaestable de la energía libre. Use un par de valores de B menores que el valor máximo determinado previamente. Investigue el efecto del valor de T.

[P4] * Función respuesta con varios grados de libertad.** Considere un sistema con varios grados de libertad que siguen la dinámica linealizada que viene de una energía libre

$$\dot{\psi}_i = -\lambda \sum_k F_{ik}\psi_k + \xi_i(t) + f_i(t)$$

donde los ruidos son blancos, con correlaciones

$$\langle \xi_i(t)\xi_k(s)\rangle = 2k_B T\lambda\delta_{ik}\delta(t-s)$$

y $f_i(t)$ son fuerzas externas.

Si $f_i(t) = f_i e^{i\omega t}$, se define la función respuesta $\tilde{\chi}_{ik}(\omega)$ tal que mide la respuesta de los parámetros de orden a forzamientos periódicos,

$$\langle \psi_i(t)\rangle = \tilde{\chi}_{ik}(\omega) f_k e^{i\omega t}$$

Por otro lado, se define la función correlación $C_{ik}(t)$ como

$$C_{ik}(t) = \langle \psi_i(t)\psi_k(0)\rangle_0$$

donde el subíndice 0 indica que se calcula en ausencia de fuerzas externas. Se define su transformada de Fourier–Laplace

$$\tilde{C}_{ik}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} C_{ik}(t)\,dt$$

Se pide demostrar que estas matrices cumplen

$$\tilde{C}(\omega) = k_B T\tilde{\chi}(\omega)F$$