



Tarea 1 - Ondas Llamadas Fronteras

the bends

1) **Ecuación de ondas en una cuerda:** las perturbaciones o pequeños desplazamiento de una cuerda bajo tensión (ver figura) se describen por

$$\phi_{tt} = c^2 \phi_{xx}$$

$\phi(x, t)$ da cuenta de la perturbación en torno al equilibrio y c es la velocidad de propagación de las ondas.

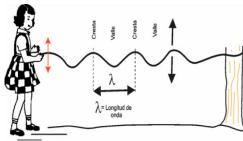


FIG. 1. Representación esquemática de Ondas en una cuerda.

1-a) A partir de un modelo de cuerdas, que puede ser continuo o discreto, derive la ecuación de ondas y determine la velocidad de propagación de la onda como función de la cuerda y comente el resultado.

1-b) Propone un método numérico para integrar esta ecuación, programme este método propuesto y analice sus resultados.

1-c) Calcule cuál es la primera corrección no lineal a la ecuación de ondas de la cuerda y simule esta ecuación. Comente como se modifica la dinámica con respecto al modelo lineal.

$$\Rightarrow \mu dx \cdot \partial_{tt} f = T (\partial_x f(x+dx) - \partial_x f(x))$$

$$\Rightarrow \partial_{tt} f = \frac{T}{\mu} \frac{\partial_x f(x+dx) - \partial_x f(x)}{dx}$$

aproximo
abso dx *aceleración*
en x.

y si tomo límite $dx \rightarrow 0$:

$$\partial_{tt} u = \frac{1}{c^2} \partial_{xx} f(x) \rightarrow \text{Ec. de Onda.}$$

b) Usaré un método de diferencias finitas explícito con las discretizaciones:

$$\partial_t^2 u = \frac{u_{x,t+1} - 2u_{x,t} + u_{x,t-1}}{(At)^2}$$

$$\partial_x^2 u = \frac{u_{x+1,t} - 2u_{x,t} + u_{x-1,t}}{(Ax)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{x,t+1} - 2u_{x,t} + u_{x,t-1}}{(At)^2} = \frac{u_{x+1,t} - 2u_{x,t} + u_{x-1,t}}{(Ax)^2}. \quad \text{Sea } s = \frac{At^2}{Ax^2}$$

$$u_{x,t+1} = 2u_{x,t} - u_{x,t-1} + s(u_{x+1,t} - 2u_{x,t} + u_{x-1,t})$$

$$= 2(1-s)u_{x,t} + s(u_{x+1,t} + u_{x-1,t}) - u_{x,t-1} \rightarrow \text{Método a programar.}$$

a) Consideraremos un trocito de cuerda chiquitita, sujeto a tensión T .
densidad de masa
 $m = \mu dx$

A la Newton:

$$\frac{\partial_x f(x+dx) - \partial_x f(x)}{dx} = \frac{\sin(\theta_R) - \sin(\theta_L)}{\cos(\theta_R) - \cos(\theta_L)}$$

$$F_x = T_L \cos(\theta_R) - T_R \cos(\theta_L)$$

$$F_y = T \sin(\theta_R) - T \sin(\theta_L) = T (\partial_x f(x+dx) \cos(\theta_R) - \partial_x f(x) \cos(\theta_L))$$

La aproximación de Vibra y Ondas es $\theta_R, \theta_L \ll 1$, luego nos quedamos solo con términos orden 1:

$$F_x \approx T - T = 0. \quad F_y \approx T (\partial_x f(x+h) - \partial_x f(x))$$

$$\Rightarrow \partial_{tt} f = \frac{T}{\mu} (\partial_x f(x+h) - \partial_x f(x))$$

$$dx$$

y si tomo límite $dx \rightarrow 0$:

$$\partial_{tt} u = \frac{1}{c^2} \partial_{xx} f(x) \rightarrow \text{Ec. de Onda.}$$

Análisis de estabilidad:

$$u_{x,t} = A^t e^{ikx} \quad (A \in \mathbb{C}). \text{ La condición es que } |A^{At}| \leq 1$$

$$A^{At} e^{ikx} = 2(1-s)A^t e^{ikx} + sA^t(e^{ik(x+\Delta x)} + e^{ik(x-\Delta x)}) - A^{At} e^{ikx}$$
$$\Rightarrow A^{At} = 2(1-s) + 2s \cos(k\Delta x) - A^{At}$$

$$\alpha := A^{At}$$

$$\alpha^2 + 2((s-1) - s \cos(k\Delta x))\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2(1-s(1-\cos(k\Delta x)))\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2(1-s(1-(\cos^2(\frac{k\Delta x}{2}) - \sin^2(\frac{k\Delta x}{2}))))\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\left(1 - 2s \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)\alpha + 1 = 0$$

para todos som de la forma $\alpha \pm i\text{un real}$

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \text{Si } |\alpha| > 1, \text{ existe solución a con } |\alpha| > 1.$$

el otro caso más interesante.

$$\alpha = \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$|\alpha|^2 = \alpha^2 + 1 - \alpha^2 = 1 \rightarrow \text{estable}$$

Luego para estabilidad debe cumplirse $|\alpha| \leq 1$.

$$\Rightarrow \left|1 - 2s \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (\Leftrightarrow s \leq 1)$$

positivo por def.

Pero no es que el error se acerque en el tiempo (estabilidad de la mejor) sino que solamente no crece en el tiempo.

Otra curiosidad: Relación de dispersión numérica:

$$\text{Usamos el ansatz } u_{x,t} = e^{i(kx+wt)}$$

Así:

$$e^{i(kx+w(t+\Delta t))} = 2(1-s)e^{i(kx+wt)} + s(e^{i(k(x+\Delta x)+wt)} + e^{i(k(x-\Delta x)+wt)}) - e^{i(kx+w(t-\Delta t))}$$

$$\Rightarrow e^{iw\Delta t} + e^{-iw\Delta t} = 2(1-s) + s(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})$$

$$\Rightarrow 2 \cos(w\Delta t) = 2(1-s) + 2s \cos(k\Delta x)$$

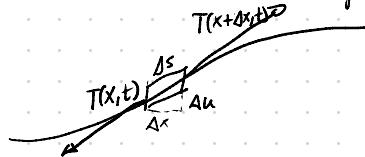
$$\Rightarrow \cos(w\Delta t) = 1 + s(\cos(k\Delta x) - 1)$$

$$\text{Si } s=1, \text{ entonces } \cos(w\Delta t) = \cos(k\Delta x) \Rightarrow w\Delta t = k\Delta x \Rightarrow w = k$$

para hacer esto para representar en II, que para N¹ el zig-zag, plus s<1 > Δt-Δx

la relación de dispersión exacta o recuperación.

c) Necesito una derivación más rigurosa pues con la anterior llegaba a un círculo.



$$m = \rho \Delta s = \rho (\Delta x^2 + \Delta u^2)^{1/2}$$

$$F_y = T(x+\Delta x, t) \cdot \sin(\theta(x+\Delta x, t)) - T(x, t) \sin(\theta(x, t))$$

$$F_x = T(x+\Delta x, t) \cos(\theta(x+\Delta x, t)) - T(x, t) \cos(\theta(x, t))$$

$$\tan(\theta(x, t)) = \partial_x u(x, t)$$

$$\Rightarrow F_y = T(x+\Delta x, t) \frac{\partial_x u(x+\Delta x, t)}{\sqrt{1+(\partial_x u(x+\Delta x, t))^2}} - T(x, t) \frac{\partial_x u(x, t)}{\sqrt{1+(\partial_x u(x, t))^2}}$$

$$F_x = T(x+\Delta x, t) \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x u(x+\Delta x, t))^2}} - T(x, t) \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x u(x, t))^2}}$$

$$\text{Impongo } F_x = 0 \Rightarrow \partial_x (T(x, t) (1 + (\partial_x u)^2)^{-1/2}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Newton en } y: \quad \rho (1 + (\partial_x u)^2)^{1/2} \partial_t^2 u &= \partial_x (T(x, t) (\partial_x u) (1 + (\partial_x u)^2)^{-1/2}) \\ &= (\cancel{\partial_x T(x, t)} \cancel{(1 + (\partial_x u)^2)^{-1/2}}) \partial_x u \\ &\quad + T(x, t) (1 + (\partial_x u)^2)^{-1/2} \partial_x^2 u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho \partial_t^2 u = T(x, t) (1 + (\partial_x u)^2)^{-1} \partial_x^2 u$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 u = C^2(x, t) (1 - (\partial_x u)^2 + \dots) \partial_x^2 u$$

A primer orden no lineal:

$$\partial_t^2 u = C^2(x, t) (1 - (\partial_x u)^2) \partial_x^2 u$$

2) Estabilidad lineal y robustez: considere el siguiente sistema dinámico

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(x^2 + y^2) \\ \gamma xy + \delta y^2 \end{pmatrix}$$

Muestre que la solución cero es estable, para esto encuentre el cambio de variable que transforma a este sistema en un sistema lineal.

Vamos a prender la maquineta:

Primer paso: Ver la clase de nuevo.

Segundo paso: Ver las notas de nuevo.

Okey, entonces:

Supongamos que tendré un cambio de variable $(x, y) = \varepsilon(u, v) + \varepsilon^2 \tilde{f}^{(2)}(u, v) + \varepsilon^3 \tilde{F}^{(3)}(u, v) + \dots$

$$= \varepsilon(u, v) + \sum_{i \geq 2} \tilde{f}^{(i)}(u, v) \varepsilon^i$$

Aquí $\tilde{f}^{(i)}$ son funciones incógnitas de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \sum_{i \geq 2} \tilde{f}^{(i)}(u, v) \varepsilon^i$$

$$\Rightarrow \partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \sum_{i \geq 2} \partial_t \tilde{f}^{(i)}(u, v) \varepsilon^i = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(x^2 + y^2) \\ \gamma xy + \delta y^2 \end{pmatrix}$$

→ orden mínimo 2 en E , pues $x = \varepsilon u + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^i f_i^{(i)}(u, v)$
 (y lo mismo vale para y)

Orden ε $\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, el sistema lineal.

Orden ε^2 : Intentaré hacerlo para este orden de la manera que sea más fácil extender a ordenes > 2.

$$\partial_t \tilde{f}^{(2)}(u, v) = \beta \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ uv + \delta v^2 \end{pmatrix} + A \tilde{f}^{(2)}(u, v)$$

$$(\partial_t - A) \tilde{f}^{(2)}(u, v) = \begin{pmatrix} \beta(u^2 + v^2) \\ uv + \delta v^2 \end{pmatrix}$$

Tomemos $\tilde{f}^{(2)}$ una función vectorial de orden 2 general:

$$\tilde{f}^{(2)} = \sum_{i=0}^2 \begin{bmatrix} a_i & u^i v^{2-i} \\ b_i & u^{i-1} v^{2-i} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^2 \begin{bmatrix} \vec{c}_i & u^i v^{2-i} \\ \vec{d}_i & u^{i-1} v^{2-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_t \tilde{f}^{(2)} = \nabla f^{(2)} \partial_t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=0}^2 \vec{c}_i v^{2-i} u^{i-1} ; \sum_{i=0}^2 \vec{d}_i u^{i-1} v^{2-i} \right] A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

La matriz construida por columnas

Me encantaría llegar a algo tipo Matriz $\times \tilde{f}^{(2)}$ porque así puedo llegar e invertir dops.
 Pero no lo veo así... Háganmela a la antigua por ahora:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 a_i i u^{i-1} v^{2-i} & \sum_{i=0}^2 a_i i u^{i-1} v^{2-i-1} \\ \sum_{i=0}^2 b_i i u^{i-1} v^{2-i} & \sum_{i=0}^2 b_i i u^{i-1} v^{2-i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^z \begin{bmatrix} a_{ii} u^{i-1} v^{z-i} & a_{ii} u^{i-1} v^{z-i} \\ b_{ii} u^{i-1} v^{z-i} & b_{ii} u^{i-1} v^{z-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^z \begin{bmatrix} -a_{ii} u^i v^{z-i} - 2a_{ii} u^{i-1} v^{z-i} \\ -b_{ii} u^i v^{z-i} - 2b_{ii} u^{i-1} v^{z-i} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^z \begin{bmatrix} a_i(-i-2(z-i)) u^i v^{z-i} \\ b_i(-i-2(z-i)) u^i v^{z-i} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^z \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} (-i-2(z-i)) u^i v^{z-i}$$

$$= \sum_{i=0}^z \vec{c}_i u^i v^{z-i} (i-4)$$

Luego, $(A_t - A) f^{[z]} = \sum_{i=0}^z \vec{c}_i u^i v^{z-i} (i-4) - \sum_{i=0}^z A \vec{c}_i u^i v^{z-i} = \begin{pmatrix} \beta u^{z+2} \\ r u v + s v^2 \end{pmatrix}$

El RHS siempre lo podré escribir como $\beta \sum_{i=0}^z \vec{d}_i u^i v^{z-i}$, ya que sólo van a ser multiplicaciones y sumas de términos de esa forma. Naturalmente, esto vale cuando nos estamos restringiendo orden por orden.

Igualando cada coeficiente para cada $u^i v^{z-i}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d_i \\ e_i \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_i (i-4) - A \vec{c}_i = \vec{d}_i$$

$$\Rightarrow a_{ii}(i-4) + a_{ii} = d_i$$

$$b_{ii}(i-4) + 2b_{ii} = e_i$$

$$\Rightarrow a_{ii} = d_i / (i-3)$$

$$b_{ii} = e_i / (i-2) \rightarrow \text{Me preocupa ese } z. \text{ Creo que en este caso no salvo que no hay } e_i \text{ para } v^2.$$

Los d_i y e_i siempre los voy a saber del orden anterior. Es llegar y meterlos a la fórmula:

$$\text{En este orden: } d_0 = d_2 = \beta, e_0 = s, e_1 = r, \text{ el resto } 0.$$

$$\text{Luego: } a_0 = -\frac{1}{3}\beta, a_1 = 0, a_2 = -\beta \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ b_0 = -\frac{1}{2}s, b_1 = -r, b_2 = 0 \end{array} \right\} \text{Me definen } f^{[z]}.$$

Este procedimiento es muy análogo para los otros ordenes

Orden general (n):

$$\begin{aligned} a_i^{(n)} &= \frac{d_i^{(n)}}{(i-2n-1)} \\ b_i^{(n)} &= e_i^{(n)}/(i-2n-2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Una vez que escriba el RTTS bien, puedo llegar a} \\ \text{despejar.} \end{array} \right\}$$

Esto me define un cambio de variable que me permite vincular la estabilidad NO lineal con la lineal. En este caso el lineal es $\tilde{a}_t(v) = A(v)$, los autovalores de A tienen ambas parte real negativa. Luego la instabilidad del 0 para este sistema se preserva ante no linearidades.

3) Ondas de sonido: A partir de las ecuaciones de la gas dinámica derive la ecuación de onda del sonido y caracterice la velocidad del sonido es $c^2 = \partial P / \partial \rho$ si donde P es la presión y ρ es la densidad.

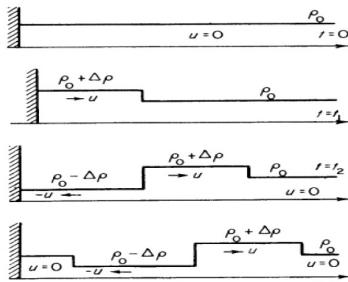


FIG. 2. Piston móvil al interior de un tubo.

Muestre que cuando un pistón se mueve rápidamente al interior de un tubo puede generar ondas tipo frentes ver figura. Para caracterizar estas ondas utilice las realciones de Rankine-Hugoniot.

La primera approx es considerar que las desviaciones con respecto a los valores en equilibrio tanto de la presión como de la densidad son pequeños. (denoto P y ρ las respect. desviaciones):

$$P = \rho + \rho'(\rho_0) = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$$

es una cte.

Ahora, veámos una relación entre la densidad y el cambio de volumen debido al flujo. Pensemos en una descripción Lagrangeana del flujo:

$$x = \Gamma(x_0, t) = x_0 + (\underbrace{x - x_0}_{D}) = x_0 + D(x_0, t)$$

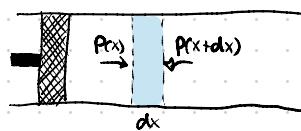
Introduciremos el D porque lo podemos considerar chiquito.

$$\text{Ahora por conservación de masa: } \rho_0 \Delta x_0 = (\rho_0 + \rho) \left[\Gamma(x, t) \right]_{x=x_0}^{x_0 + \Delta x_0}$$

Passo al $\lim \Delta x_0 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= (\rho_0 + \rho) \partial_x \Gamma \\ &= (\rho_0 + \rho) \partial x_0 (x_0 + D) \\ &= (\rho_0 + \rho) (1 + \partial_{x_0} D) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{1}{1 + \partial_{x_0} D} = \rho_0 + \rho$$



a) Seguiremos el argumento de Feynman.

Este es, tengo 3 factos:

1) El gas se mueve y en consecuencia cambia la densidad. (Conservación de masa)

2) La presión depende de la densidad:

$$P = P(\rho(x, t))$$

3) Gradiéntes de presión generan movimiento del gas. (Newton)

$$\Rightarrow P_0(1 - \partial_x D) = P_0 + p$$

$$\Rightarrow p = -P_0 \partial_x D$$

Finalmente, por Newton: $P_0 \partial_t^2 \Gamma = -\partial_x P$

Derivo de nuevo: $\partial_x P_0 \partial_t^2 \Gamma = -\partial_x^2 P$

$$\Rightarrow P_0 \partial_t^2 \partial_x \Gamma = -\partial_x^2 P$$

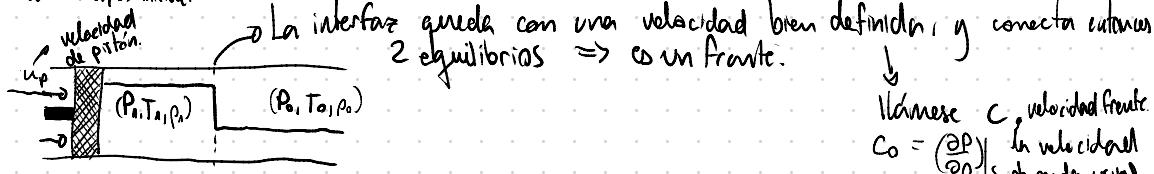
$$\Rightarrow \partial_t^2 P = \partial_x^2 P$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\partial P / \partial p)} \partial_t^2 P = \partial_x^2 P$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 P = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_S \partial_x^2 P \rightarrow \text{ec. de onda con } c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_S.$$

Ahora a par Rankine Hugoniot.

Notemos que si un pistón se mueve rápidamente los cambios de presión no serán pequeños, habrá una zona tal que las relaciones termodinámicas llevan a otro equilibrio (P_1, T_1, P_0) distinto (P_0, T_0, P_0) inicial.



Las relaciones de R-H son:

$$1) \text{ Conservación de masa: } \frac{P_1}{P_0} = \frac{c}{c - u_p}$$

$$2) \text{ Ley de Newton: } P_1 - P_0 = \rho_0 c u_p$$

$$3) \text{ Relación trabajo-energía: } P_1 u_p = \frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + \rho_0 c (E_1 - E_0)$$

Notemos que para un gas ideal $E \propto T$, es decir, $E = \alpha T$

$$\text{Por ley de los gases ideales } \frac{P}{\rho} \propto T \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \beta T \quad (4)$$

→ Llámese α

$$\Rightarrow E = \alpha \beta \frac{P}{\rho}$$

$$3) \Rightarrow P_1 u_p = \frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + \rho_0 c r \left(\frac{P_1}{P_0} - \frac{P_0}{\rho_0} \right)$$

$$\Rightarrow (\rho_0 c u_p + P_0) u_p = \frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + \rho_0 c \gamma \left(\frac{\rho_0 c u_p + P_0}{P_1} - \frac{P_0}{\rho_0} \right)$$

$$\rho_0 c u_p^2 + P_0 u_p = \frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + c \gamma \left(\frac{\rho_0 c u_p + P_0}{c} \cdot (c - u_p) - P_0 \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + P_0 u_p = \gamma (\rho_0 c u_p + P_0)(c - u_p) - c \gamma P_0$$

$$\frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + P_0 u_p = T \rho_0 u_p c^2 + \gamma P_0 c - \gamma \rho_0 c u_p^2 - \gamma P_0 u_p - c \gamma P_0$$

Es una cuadrática (media fea) para c , tal que puedo calcular c en función de las variables en reposo y la velocidad del pistón.

Sacando c , directamente tendré expresiones para $\frac{P_1}{P_0} = \frac{c}{c - u_p}$ y para $P_1 = \rho_0 c u_p + P_0$.

Teniendo P_1 y P_0 , por 4) obtengo T_1 , y por ende E_1 . Es decir, ya tengo fijas las variables (P_1, P_0, E_1, T_1) y c . Sólo no las escribo pues es una cuadrática fea y rápidamente me van a aparecer como mil términos.

4) Propagación de frentes con inercia: considere la siguiente generalización del modelo de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov

$$\partial_{tt}u = r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) - \mu \partial_t u + \partial_{xx}u,$$

1. Desde el punto de la dinámica de población como usted interpretaría el término extra.
2. Muestre que escogiendo apropiadamente los parámetros uno puede obtener el modelo de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov.
3. Muestre que el sistema tiene frentes del tipo FKPP y caracterice su rapidez.
4. En el límite de gran μ , que forma tienen los frentes.
5. En límite de pequeño μ , como se modifican los frentes.

Entonces basta interpretar \ddot{u} en la ecuación

$$\ddot{u} = \mu^2 \left(r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \dot{u} \right)$$

Desde la dinámica de poblaciones, me imagino que este término, que gobierna que tan rápido se ajusta (\dot{u}, u) al modelo logístico, da cuenta de una especie de tiempo de respuesta de la población a cambios de los parámetros ambientales r y K . Por ejemplo, digamos que de un día al otro, la capacidad de carga de un ambiente que contiene a una población disminuye drásticamente. Los individuos (especialmente mientras más complejos sean, imaginemos que hablamos de humanos) no se darían cuenta inmediatamente, más bien, inmediatamente después del cambio uno pensaría que \dot{u} , la tasa de crecimiento, se mantendría igual, y de manera suave en los momentos después del cambio de K , la población empezaría a sentir el efecto. Mientras más grande sea el cambio ΔK , más rápidamente esperaría el ajuste a la nueva evolución (\dot{u}, u) , y también me gustaría poder parametrizar esta sensibilidad al tiempo de reacción de la población. Ambos efectos se logran con el término \ddot{u}/μ^2 .

Esto en el sentido de que el cambio sería más notorio, no que la llegada al nuevo equilibrio sería más veloz.

TL:DR: Da cuenta de la sensibilidad de la población a cambios en los parámetros r y K , y la no-instantaneidad de estos.

2) Escrita de la forma: $\frac{1}{\mu^2} \partial_t^2 u = r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) - \partial_t u + \partial_{xx}u$, notemos que si $\mu^2 \rightarrow \infty$ entonces la ec se reduce a $\partial_t u = r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) + \partial_{xx}u$, el FKPP normal.

3) $\partial_t^2 u = \mu^2 \left(r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) - \partial_t u + \partial_{xx}u \right)$. Las soluciones tipo frentes son cosas $u(x-vt)$

$$\partial_t = -v \partial_x, \quad \partial_t^2 = v^2 \partial_x^2, \quad \partial_{xx} = \partial_x^2$$

Antes de cualquier cosa haremos el cambio de variable $t \rightarrow \mu z$

$$\Rightarrow \partial_t = \frac{1}{\mu} \partial_z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu^2} \partial_z^2 u = r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) - \partial_z u + \partial_x^2 u$$

$$\Rightarrow \partial_z^2 u = \mu^2 \left(r \left(u - \frac{u^2}{K} \right) - \partial_z u + \partial_x^2 u \right)$$

1) Facto no desde la dinámica de poblaciones:

- $\partial_z^2 u$ permite estados lejanos a cumplir FKPP, que al evolucionar decen en la variedad central FKPP.
- No tiene derivadas espaciales, luego debe ser interpretable como algo intrínseco a la dinámica de una población (sin tomar en cuenta el espacio).

$$\Rightarrow v^2 \partial_z^2 u = \mu^2 \left(r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) + v \partial_z u + \partial_z^2 u \right)$$

$$\Rightarrow (v^2 - \mu^2) u'' = \mu^2 \left(r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) + v u' \right)$$

$$\left(\frac{v^2}{\mu^2} - 1 \right) u'' = r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) + v u'$$

Suponemos que es un frente "pulled", voy a hacer análisis lineal en torno a 0 (pues en el sistema \mathbf{A} , si 0 es una solución inestable, basta ver que lo es para FKPP visual)

$$\left(\frac{v^2}{\mu^2} - 1 \right) u'' - v u' - r u = 0$$

\Rightarrow Si $v^2 + 4r \left(\frac{v^2}{\mu^2} - 1 \right) < 0$, hay soluciones oscilatorias en torno al 0, lo cual contradice la dinámica de poblaciones.

$$\Rightarrow v_{\min} \text{ cumple } \frac{v_{\min}^2}{\mu^2} + 4r \frac{v_{\min}^2}{\mu^2} - 4r = 0$$

$$\Rightarrow v_{\min} = \frac{4r}{1 + 4r/\mu^2} \Rightarrow v_{\min} = 2 \sqrt{\frac{r}{1 + 4r/\mu^2}}.$$

Respecto a FKPP visual, es una velocidad menor, salvo $\mu^2 \rightarrow \infty$ donde recuperamos la velocidad visual $2\sqrt{r}$.

4) Tienen forma de frente FKPP visual, ya que en el límite gran μ recuperamos la ec. FKPP visual. Sacándola del apartado esto es:

$$N(z) = \frac{K}{1 + K e^{rz/v}} - \frac{D}{v^2} \frac{r K^2 e^{rz/v}}{(1 + K e^{rz/v})^2} \ln \left[\frac{r K^2 e^{rz/v}}{(1 + K e^{rz/v})^2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{D^2}{v^4} \right)$$

Quizás esta pregunta va a un límite un poco más moderado:

$$\left(\frac{v^2}{\mu^2} - 1 \right) u'' = r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) + v u' \rightarrow \text{Hagamos un límite inteligente.}$$

$$z = v\phi \quad \partial_z = \frac{1}{v} \partial_\phi \quad u'' = \mu^2 \left(r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - u' \right)$$

$$\Rightarrow (v^2 - \mu^2) u'' = -r u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - u'.$$

Límite gran $\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu^2} \ll 1$. Se justifica una expansión a distintos ordenes de $\epsilon = \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{v^2} \right)$

Bueno aquí es verdad que se recupera el procedimiento visto en clases

$$\Rightarrow u_0(z) = \frac{K}{1 + K e^{rz/v}}, \text{ Idem para otros órdenes.}$$

Notemos que para el caso de $v = v_{\min}$, $v^2 - \mu^2 = \frac{1}{4r}$. \Rightarrow La forma del frente para v_{\min} no debería cambiar con el valor de μ .

5) Para entender qué pasa en este caso haré el diagrama de fase:

Primero los puntos de eq. O y \vec{K} , Estudiamos su estabilidad lineal:

En torno a O

$$(v^2 - \mu^2) u'' = -r u v (1 - \frac{u}{\mu}) - u'$$

$$(v^2 - \mu^2) \lambda^2 + \lambda + r = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4r(v^2 - \mu^2)}}{2(v^2 - \mu^2)}$$

Como $v > v_{\min}$, $\text{Im}(\lambda) = 0$. Por otro lado notemos que si $v^2 < \mu^2$, es decir, $v > \mu$, entonces

Punto silla.

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2(\mu^2 - v^2)} \pm \text{algo}^{\epsilon R}$$

Se vuelve inestable. Notemos que $\frac{v_{\min}}{\mu} = \sqrt{\frac{4r}{\mu^2 + 4r}} < 1$, para lo que al menos hay un rango de no preocupación (v_{\min}, μ) de no

Ahora, para $u = K + \Delta u$

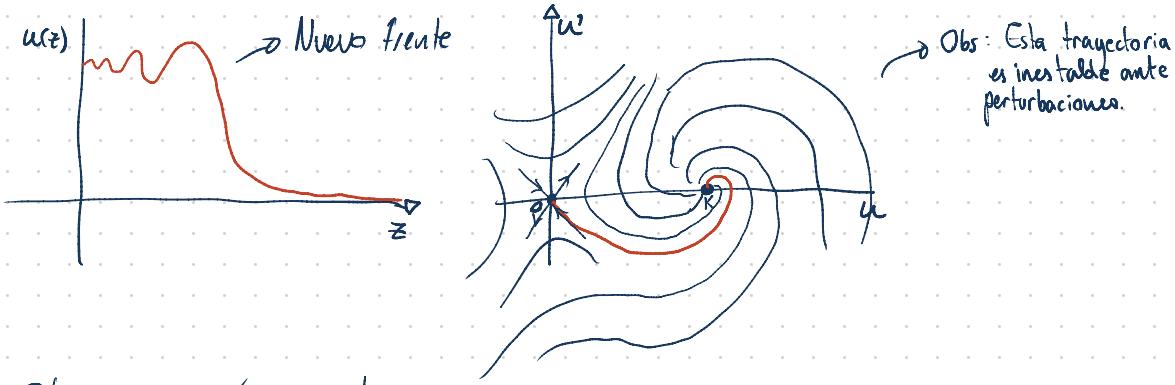
$$\begin{aligned} (v^2 - \mu^2) \Delta u'' &= -r(K + \Delta u)\left(1 - \frac{(K + \Delta u)}{\mu}\right) - \Delta u' \\ &= -r(K + \Delta u)(-\frac{\Delta u}{K}) - \Delta u' \\ &\approx r \Delta u - \Delta u' \end{aligned}$$

$$(v^2 - \mu^2) \lambda^2 + \lambda - r = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4r(v^2 - \mu^2)^2}}{2(v^2 - \mu^2)}$$

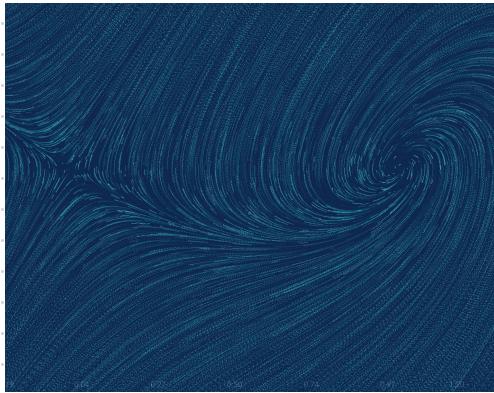
Gracias nuevamente a las restricciones sobre v ($v \in [v_{\min}, \mu]$) tenemos que: $\lambda_+ > 0$, y que nuevamente si $v > \mu$, abre la puerta a soluciones espirales ($4r(\mu^2 - v^2) > 1$) y pasa de ser punto silla a punto completamente instable. (2 autovalores con parte real positiva).

En fin, lo que puedo decir es:

- 1) El efecto es nulo para $v = v_{\min}$.
- 2) Hay un rango donde la forma de los frentes es cualitativamente similar ($v \in [v_{\min}, \mu]$)
- 3) Para $v > \mu$, el punto O se vuelve punto silla y K espiral repelente.
⇒ Hay una heteroclinia que los une tipo:



Esto se ve numéricamente en la app Field Play.



Y esta es una integración de la solución y su trayectoria en el espacio de fases:

