CEAR

CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

SAPIENTIA ÆDIFICAT

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Circuitos Elétricos II

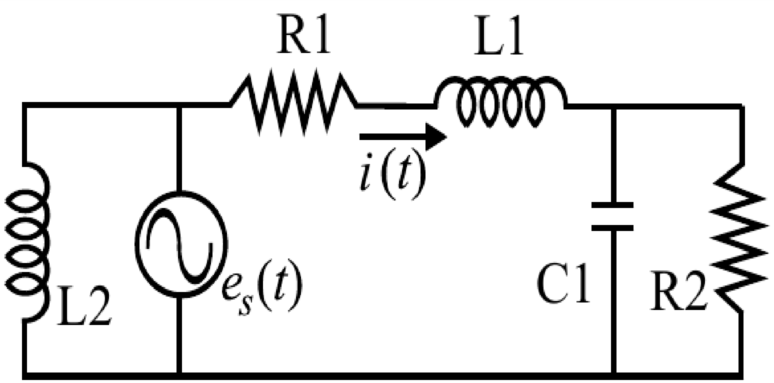
Aula 00

Métodos Gerais de Análise de Redes

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Rede física composta da associação de elementos a parâmetros concentrados: **resistores, indutores, capacitores, indutores acoplados, transformadores ideais, fontes dependentes, fontes independentes, etc**

Exemplo



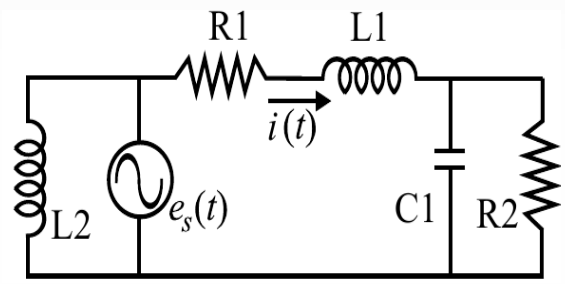
1) Cada elemento componente da rede define uma função que relaciona **tensão x corrente** em seus terminais

2) As **LKC** ou **LKT** relacionam as correntes ou tensões, respectivamente, dos elementos da rede de acordo como estão conectados (Dois dos métodos são: **Método dos Nós** e **Método das Malhas**.)

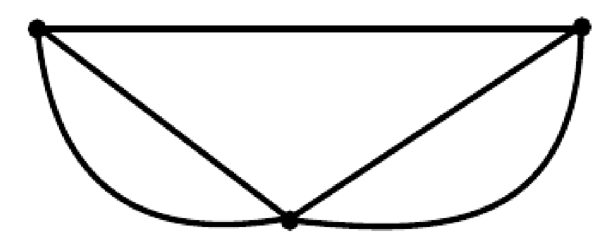
3) De 1 e 2 obtém-se um conjunto de equações linearmente independentes

Grafos

Observe que a **LKT** ou **LKC** independe da característica de cada componente. A aplicação das **LKT** ou **LKC** depende apenas da forma como os elementos estão conectados entre si



GRAFO

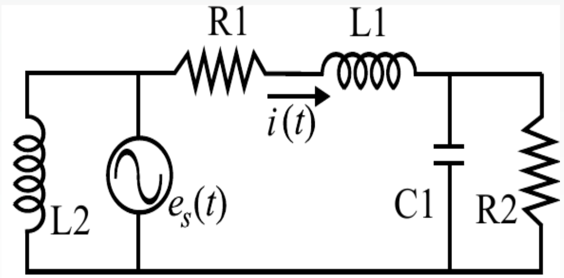


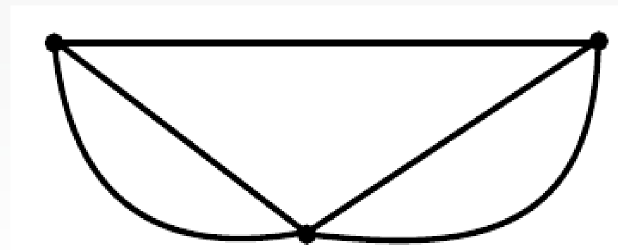
Se representarmos cada elemento por um segmento de linha **(ramos ou arcos)**

A conexão entre os elementos representaremos por pontos, os quais são chamados de **Nós**

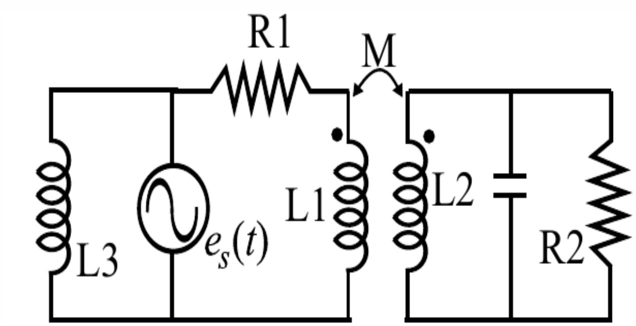
As **LKT** e **LKC** não fazem referência a característica do elemento que forma cada **ramo**

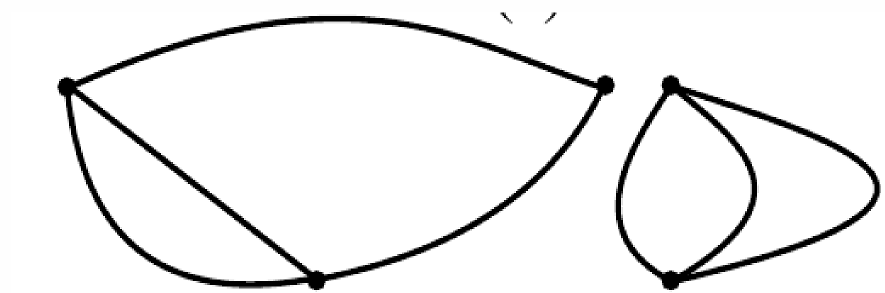
Grafos





Grafo com uma única parte



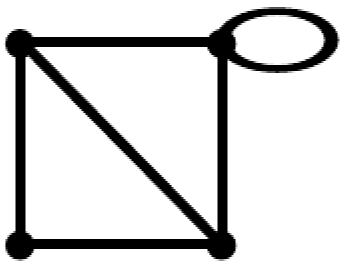


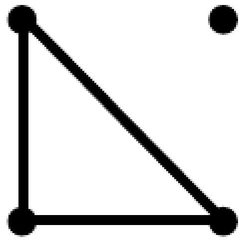
Grafo com duas partes separadas

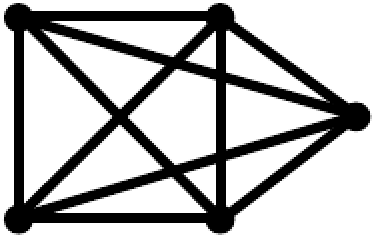
Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Matematicamente é um conjunto de **NÓS** e um conjunto de **RAMOS** com cada ramo terminando em um nó.

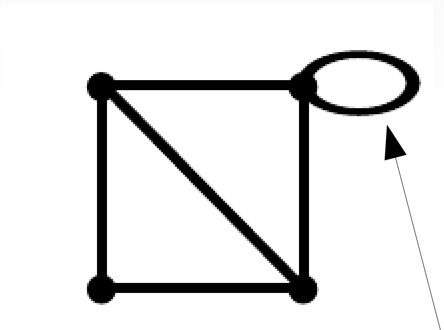


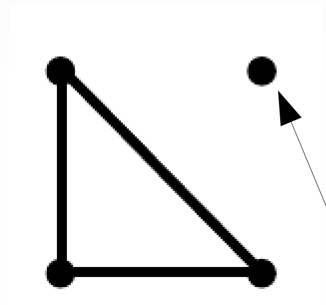


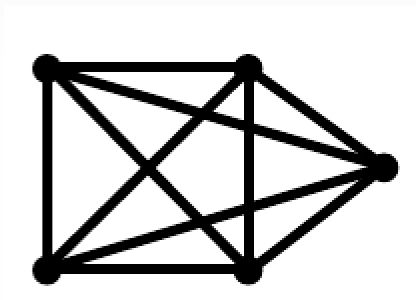


Grafos

Matematicamente é um conjunto de **NÓS** e um conjunto de **RAMOS** com cada ramo terminando em um nó.







Ramo que começa e termina no mesmo nó: Não ocorre com grafos de redes

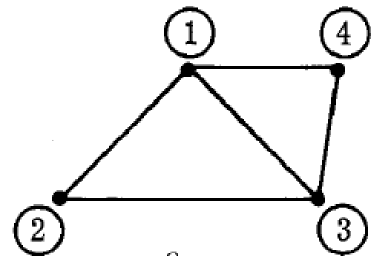
Nó isolado: Também não ocorre em circuitos

Um grafo formado por um único nó é chamado de **grafo degenerado**

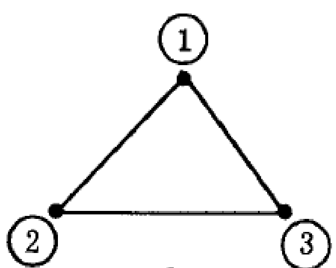
Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

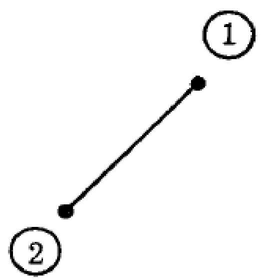
Subgrafo: Um grafo **G1** é subgrafo de **G** se todos os nós e ramos de **G1** são nós e ramos de **G**



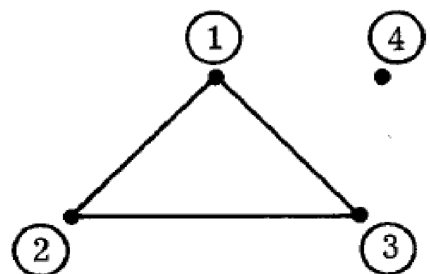
$\mathcal{G}$



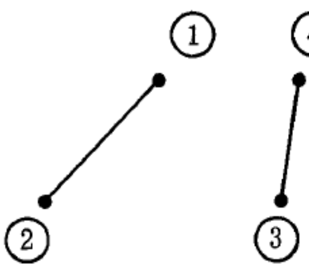
$\mathcal{G}_1$



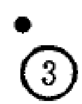
$\mathcal{G}_3$



$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{G}_4$



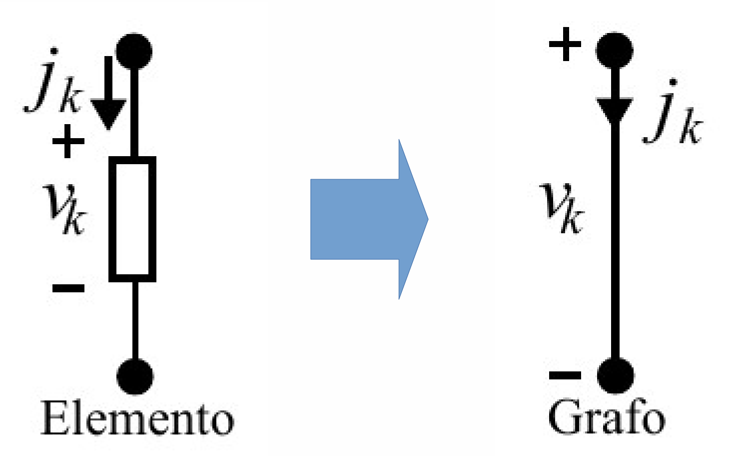
$\mathcal{G}_5$

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Grafo orientado: Para aplicarmos as **LKT** e **LKT** numa rede necessitamos associar sentidos de referência às correntes e tensões nos elementos (ramos). Ao consideramos estes sentidos de referência no grafo da rede obtemos um **grafo orientado**

Iremos orientar o grafo numa convenção passiva para todos os elementos: corrente “entra” pelo terminal positivo da tensão

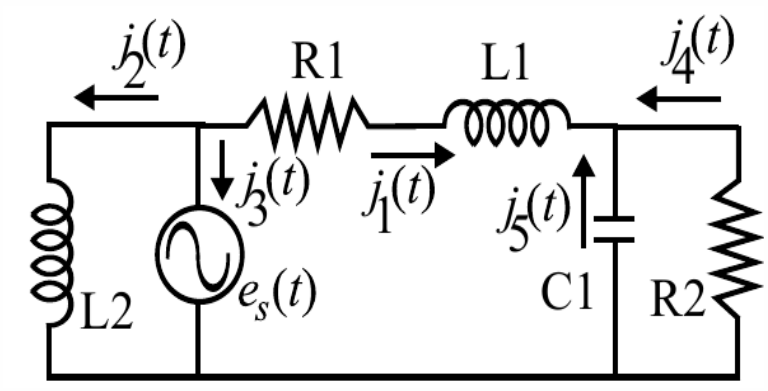


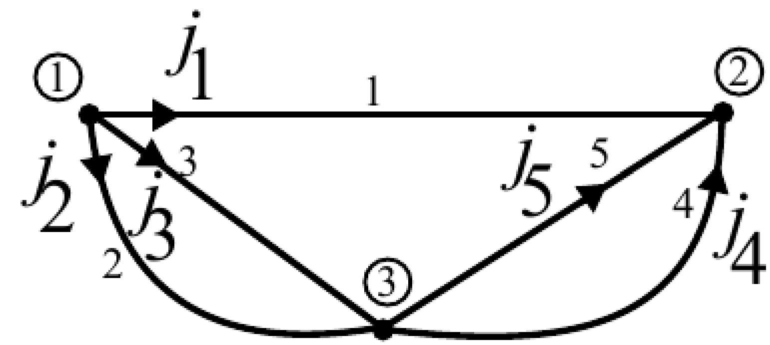
CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Grafos

1) Numeramos cada ramos da rede

2)Associamos sentidos de referência para tensão e corrente nos arcos (convenção passiva)





Em sendo convenção passiva, o sentido da tensão pode ser omitido, e o sentido da corrente define ambos

Grafos

Observe que **ramo 1** é incidente com os **nós** 1 e 2. O **ramo** 3 é incidente com os **nós** 1 e 3. E assim por diante.

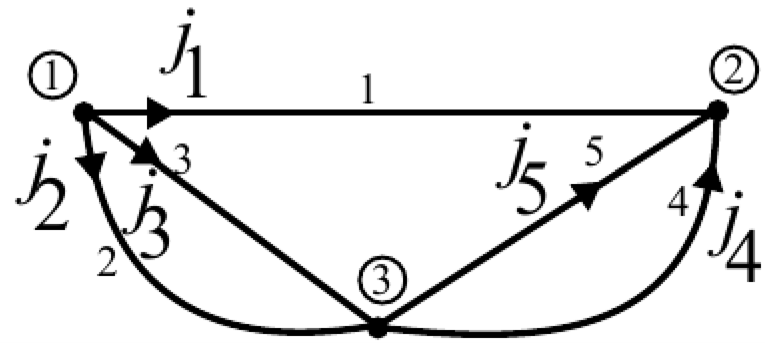
Dos sentidos associados para corrente, dizemos que o **ramo** 1 sai do **nó** 1 e chega ao **nó** 2. O **ramo** 2 sai do **nó** 1 e chega ao **nó** 3**.** E assim por diante.

Usando os conceito de incidência podemos representar **um grafo orientado** contendo ***n_t*** **nós** e **b** ramos através de uma matriz de ordem $n_t \times b$ denominada de

<u>Matriz Incidência Ramo-Nó</u>

Cada elemento da matriz definido por

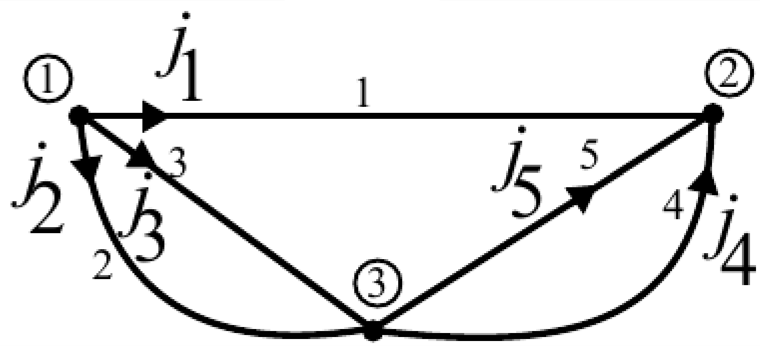
$$a_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{Se o arco “k” sai do nó “i”} \\ -1 & \text{Se o arco “k” entra no nó “i”} \\ 0 & \text{Se o arco “k” não incide com o nó “i”} \end{cases}$$



Grafos

$$a_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{Se o arco “k” sai do nó “i”} \\ -1 & \text{Se o arco “k” entra no nó “i”} \\ 0 & \text{Se o arco “k” não incide com o nó “i”} \end{cases}$$

$$n_t \times b$$

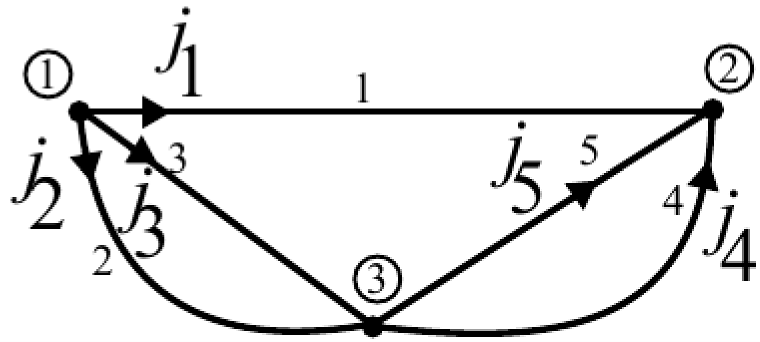


Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$a_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{Se o arco “k” sai do nó “i”} \\ -1 & \text{Se o arco “k” entra no nó “i”} \\ 0 & \text{Se o arco “k” não incide com o nó “i”} \end{cases}$$

$$n_t \times b$$



$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

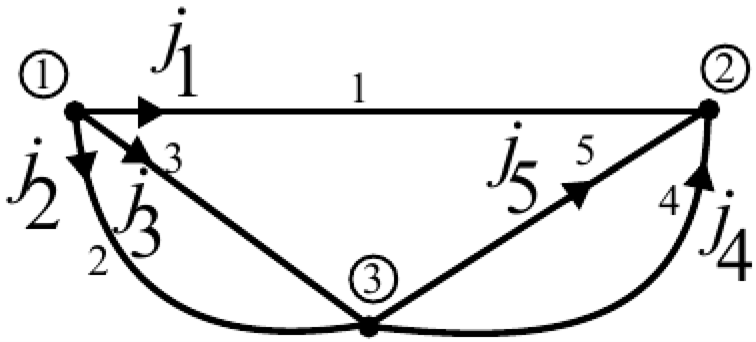
- Todas as informações do grafo orientado estão presentes na matriz incidência

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$a_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{Se o arco “k” sai do nó “i”} \\ -1 & \text{Se o arco “k” entra no nó “i”} \\ 0 & \text{Se o arco “k” não incide com o nó “i”} \end{cases}$$

$$n_t \times b$$



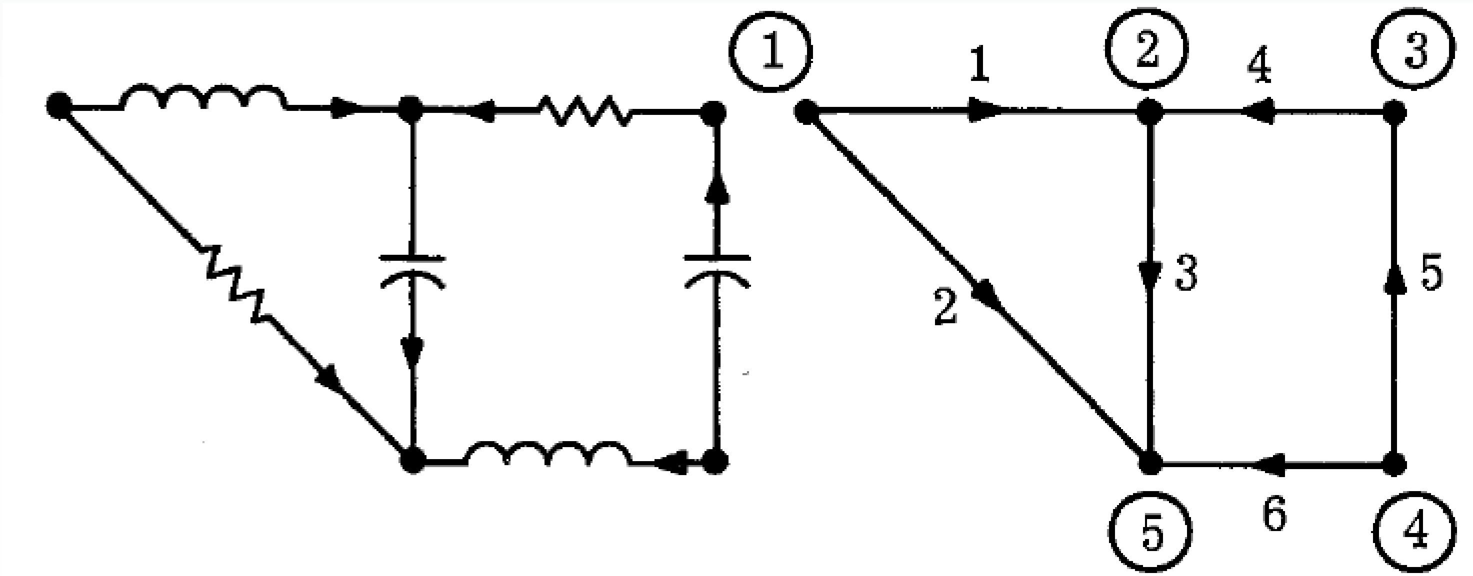
$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cada ramo começa e termina em um nó, então cada coluna da matriz possui dois elementos não nulos, um deles sendo “1” e o outro “-1” (**Se isto não ocorrer a matriz não é uma matriz incidência de um grafo orientado**)

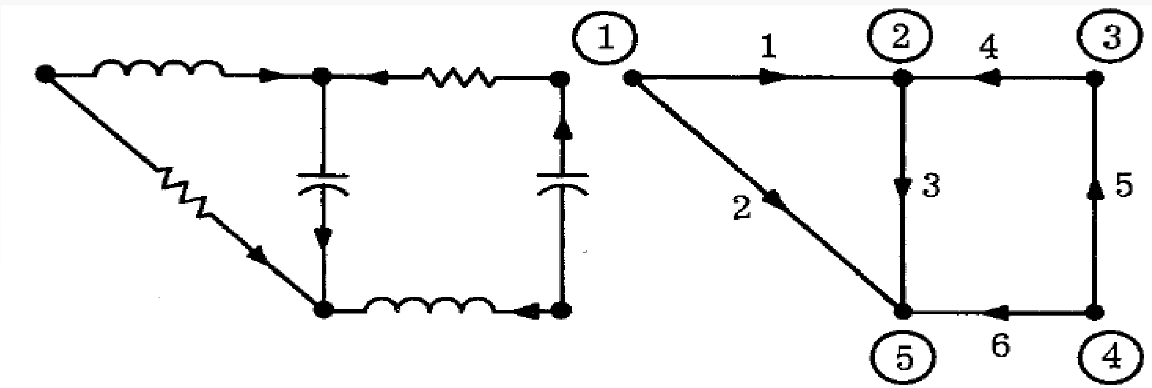
Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Encontre a matriz incidência ramo-nó dos grafos relativos às redes a seguir



Grafos



$$
\begin{array}{c c}
 & b \text{ branches} \\
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
n_t \text{ nodes} \;
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
& \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Dentre as matrizes abaixo identifique as que são matrizes de incidência ramo-nó de grafos orientados de circuitos! Desenhe os grafos!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

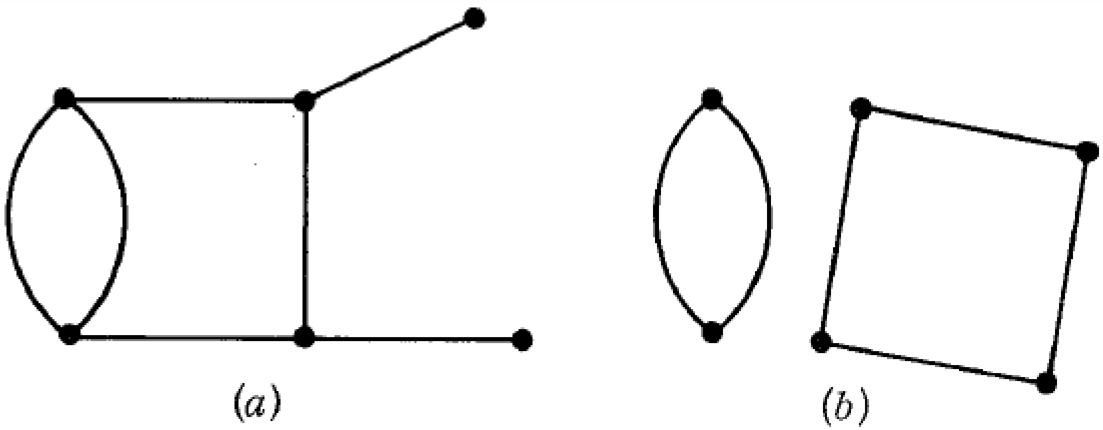
$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Grafo Conexo e Grafo Não Conexo

Um grafo que não possui partes separadas é **conexo**. Um grafo **não conexo** é aquele com partes separadas



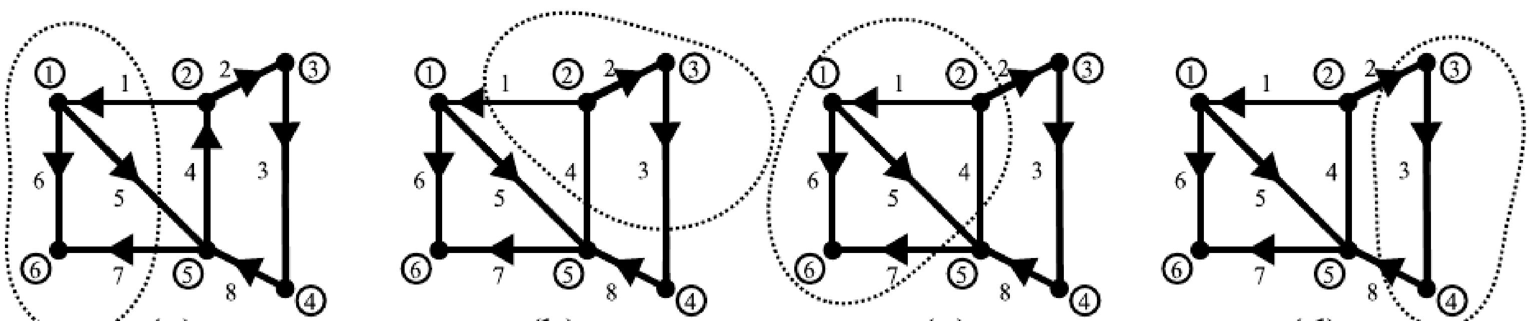
Ao menos duas partes separadas

(a) Connected graph; (b) unconnected graph.

Grafos

Conjuntos de Corte

Um conjunto de corte de um grafo conexo é um conjunto de arcos do grafo tal que sua remoção resulta em um grafo não conexo com exatamente duas partes separadas; e a não remoção de qualquer um destes arcos mantém o grafo conexo.



(a) (b) (c) (d)

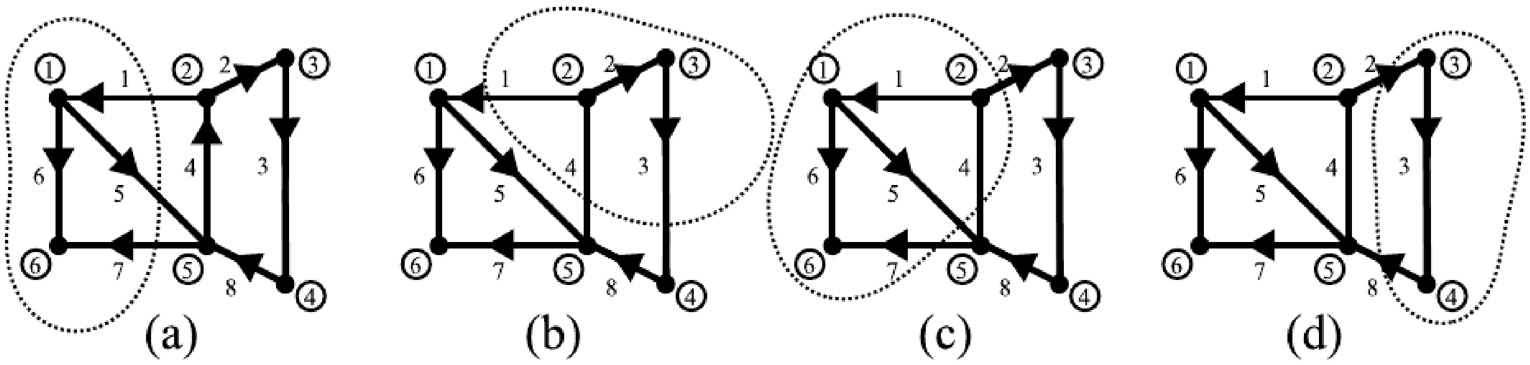
$\{1, 5, 7\}$ $\{1, 4, 3\}$ $\{2, 4, 5, 7\}$ $\{2, 8\}$

Grafos

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte

Um conjunto de corte de um grafo conexo é um conjunto de arcos do grafo tal que sua remoção resulta em um grafo não conexo com exatamente duas partes separadas; e a não remoção de qualquer um destes arcos mantém o grafo conexo.



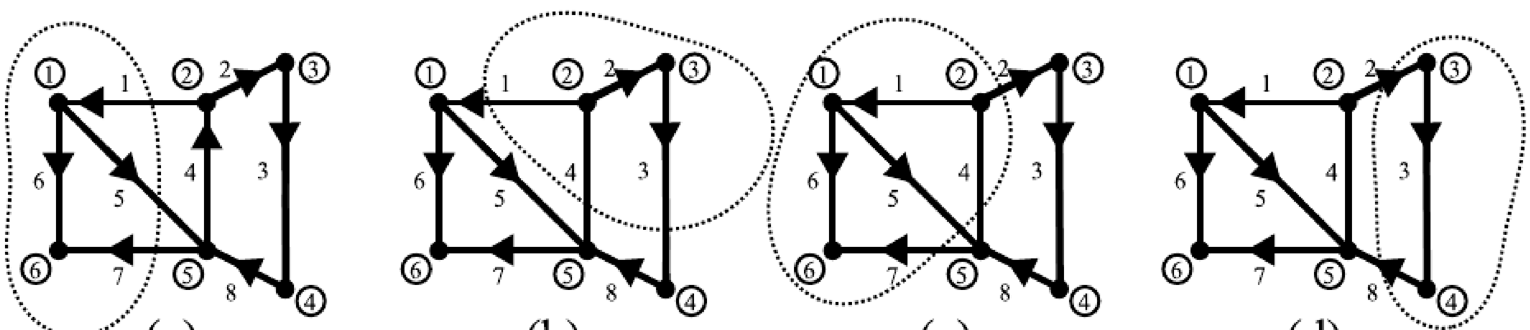
$\{1, 4, 5, 7\}$ Não é conjunto de corte

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte

Intuitivamente, podemos dividir uma rede qualquer em duas partes separadas usando uma superfície fechada (**superfície Gaussiana** em referência à lei de gauss na qual o fluxo elétrico saindo de uma superfície fechada é igual a carga elétrica dentro da superfície), de tal sorte que um conjunto de nós fica dentro da superfície e outro fora. Os arcos que cruzam a superfície Gaussiana formam um conjunto de corte.



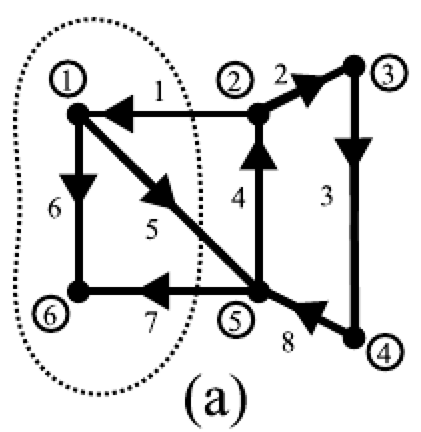
(a) (b) (c) (d)

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte e LKC

Aplicando-se LKC aos nós dentro da superfície Gaussiana



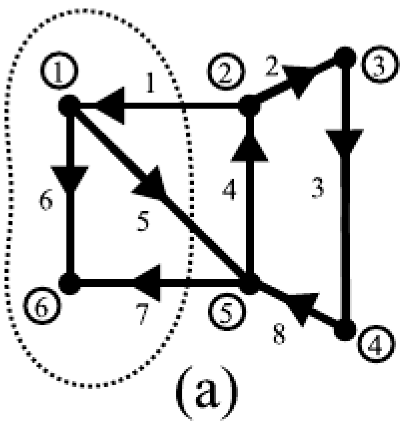
nós "1" e "6"

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte e LKC

Aplicando-se LKC aos nós dentro da superfície Gaussiana



nós "1" e "6"

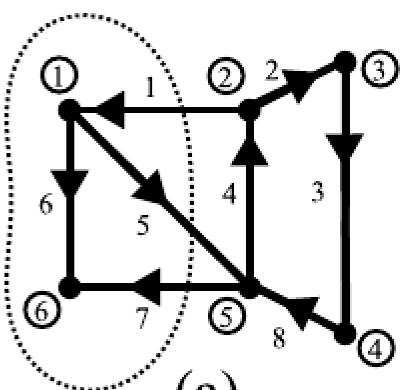
$$-j_1 + j_5 + j_6 = 0$$

$$-j_6 - j_7 = 0$$

Grafos

Conjuntos de Corte e LKC

Aplicando-se LKC aos nós dentro da superfície Gaussiana



(a)

nós "1" e "6"

$$-j_1 + j_5 + j_6 = 0$$

$$-j_6 - j_7 = 0 \quad +$$

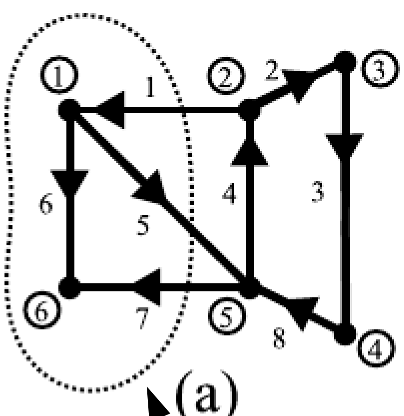
$$\{-j_1 + j_5 + j_6\} + \{-j_6 - j_7\} = 0$$

$$-j_1 + j_5 - j_7 = 0$$

Grafos

Conjuntos de Corte e LKC

Aplicando-se LKC aos nós dentro da superfície Gaussiana



nós "1" e "6"

$$-j_1 + j_5 + j_6 = 0$$

$$-j_6 - j_7 = 0 \quad +$$

$$\{-j_1 + j_5 + j_6\} + \{-j_6 - j_7\} = 0$$

$$\boxed{-j_1 + j_5 - j_7 = 0}$$

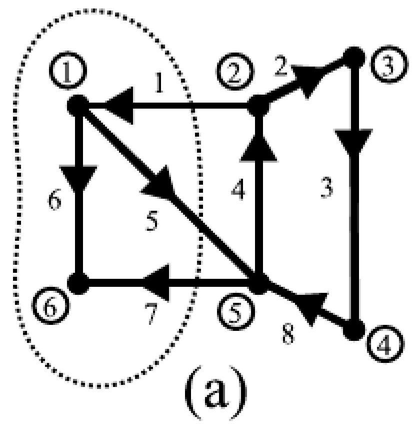
LKC se mantém no conjunto de corte

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte e LKC

Aplicando-se LKC aos nós dentro da superfície Gaussiana



Qualquer superfície Gaussiana é um Grande Nó para o qual se mantém a LKC

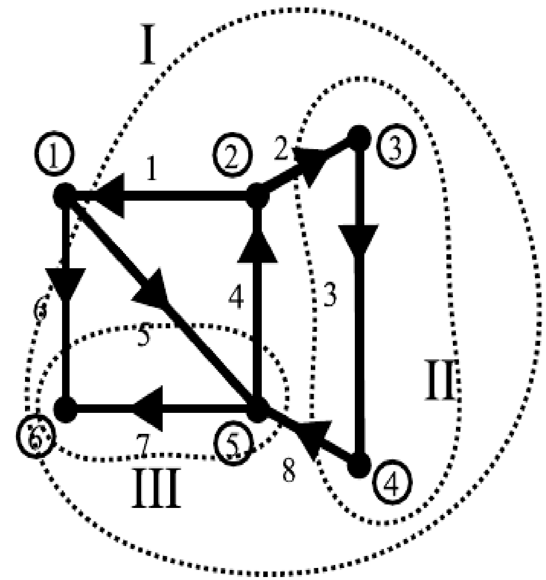
Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conjuntos de Corte e LKC

LKC aplicadas a II e III são L.I.

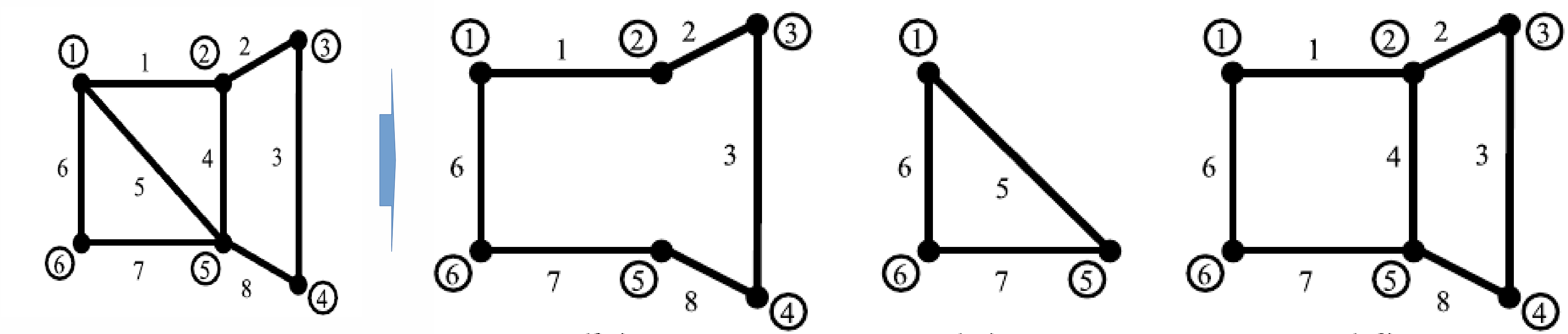
LKC aplicadas a I é L.D. de II e III



Grafos

Caso especial de subgrafo: Laço

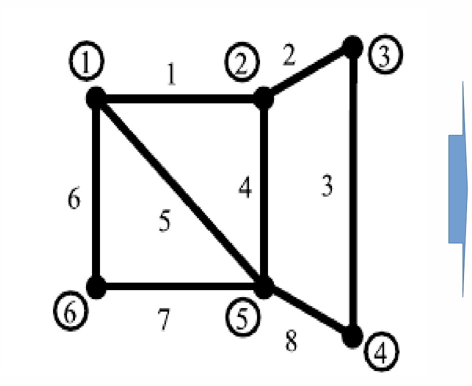
Um laço é qualquer subgrafo conexo, no qual cada nó possui exatamente a incidência de dois ramos. Ou seja, é um percurso fechado que passa por cada nó uma única vez.

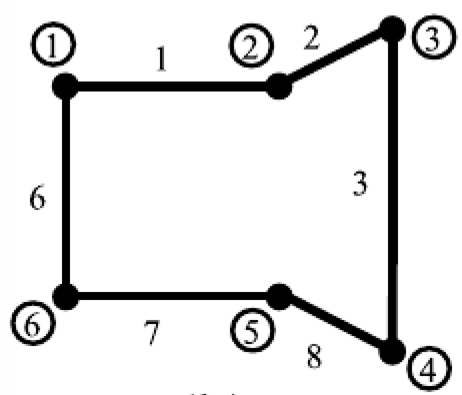


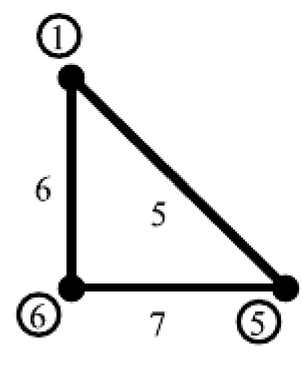
Grafos

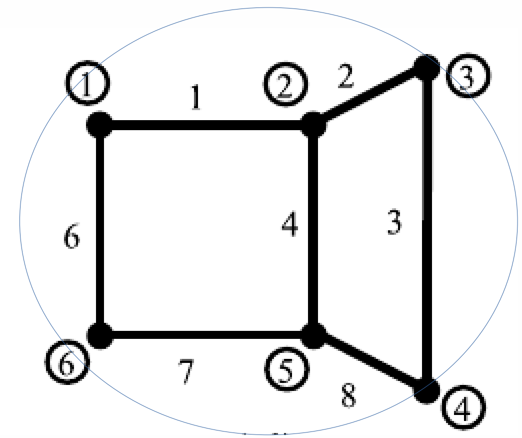
Caso especial de subgrafo: Laço

Um laço é qualquer subgrafo conexo, no qual cada nó possui exatamente a incidência de dois ramos. Ou seja, é um percurso fechado que passa por cada nó uma única vez.









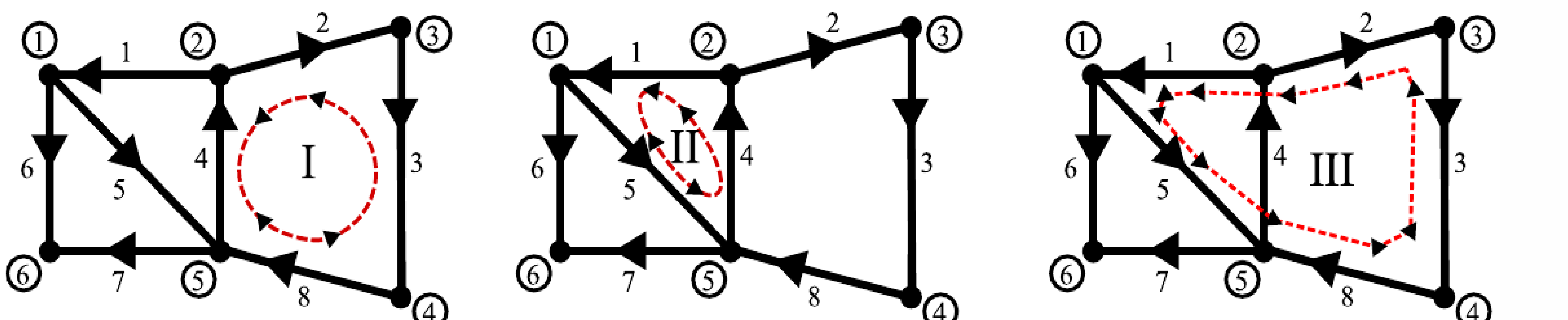
Não é laço

Grafos

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Caso especial de subgrafo: Laço

LKT – Somatório das tensões num laço é zero (associa-se sentido de referência ao laço)



(a) (b) (c)

$$-v_2 - v_4 - v_8 - v_3 = 0 \qquad v_1 + v_5 + v_4 = 0 \qquad -v_2 + v_1 + v_5 - v_8 - v_3 = 0$$

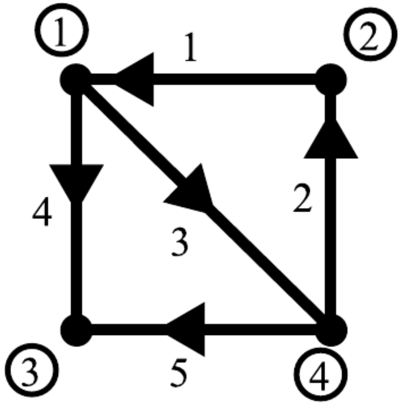
Observe que a equação de III é L.D. de I e II

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Observe o grafo a seguir

Qual matriz incidência?

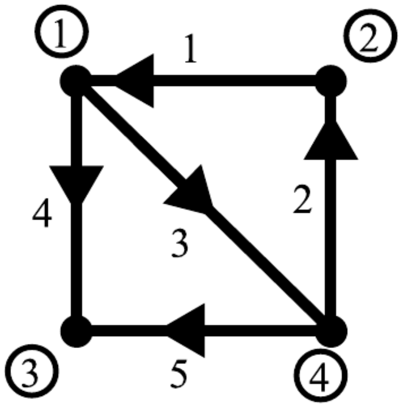


Método dos Nós

<u>Observe o grafo a seguir</u>

Qual matriz incidência? $n_t = 4$ $b = 5$

$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

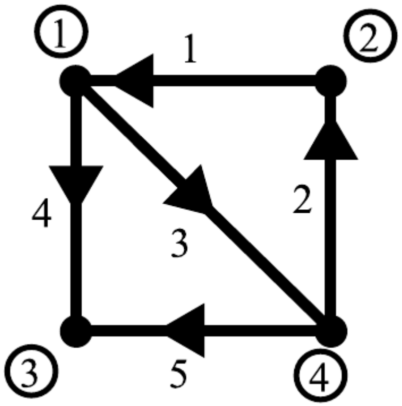
<u>Observe o grafo a seguir</u>

Qual matriz incidência? $n_t = 4$ $b = 5$

$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja um vetor com as correntes de ramo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{bmatrix}^T$$



Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Observe o grafo a seguir

Qual matriz incidência? $n_t = 4$ $b = 5$

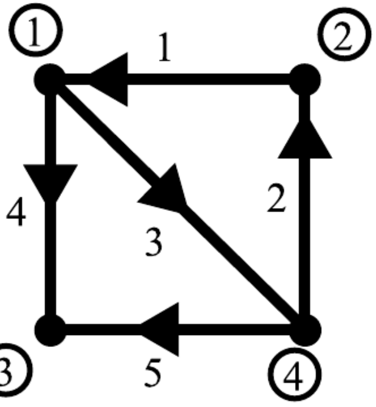
$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja um vetor com as correntes de ramo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{bmatrix}^T$$

Observemos o seguinte resultado $\varepsilon = \mathbf{A_a J}$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_3 - j_1 + j_4 \\ j_1 - j_2 \\ -j_4 - j_5 \\ j_2 - j_3 + j_5 \end{bmatrix}$$



Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Observe o grafo a seguir

Qual matriz incidência? $n_t = 4$ $b = 5$

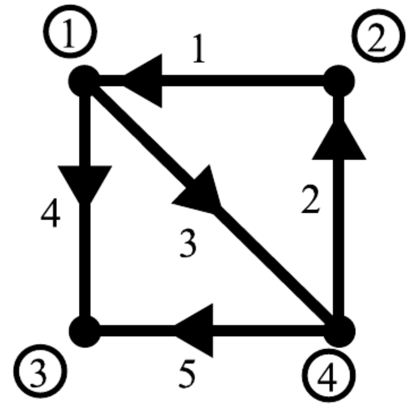
$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja um vetor com as correntes de ramo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{bmatrix}^T$$

Observemos o seguinte resultado $\varepsilon = \mathbf{A_a J}$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_3 - j_1 + j_4 \\ j_1 - j_2 \\ -j_4 - j_5 \\ j_2 - j_3 + j_5 \end{bmatrix}$$



Cada equação destas corresponde à equação de corrente em cada nó

Além disso, observe que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \equiv 0$ Conjunto de equações L.D

Método dos Nós

Eliminemos uma delas, por exemplo, ε_4

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \cancel{\varepsilon_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_3 - j_1 + j_4 \\ j_1 - j_2 \\ -j_4 - j_5 \\ \cancel{j_2 - j_3 + j_5} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \cancel{\varepsilon_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}$$

Conjunto remanescente é L.I.: Não conseguimos definir α1 e α2 tais que

$$\varepsilon_3 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -j_4 - j_5 = \alpha_1(-j_1 + j_3 + j_4) + \alpha_2(j_1 - j_2)$$

$$\mathbf{A_a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \mathbf{AJ}$$

"$n = n_t - 1$" equações de nó

Matriz incidência Ramo-Nó reduzida

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

LKC

Mas cada equação de nó, pela **LKC,** é igual a zero

Então, podemos expressar a **LKC** num formato matricial em função da **MATRIZ INCIDÊNCIA REDUZIDA**

$$\textbf{LKC} \quad \boxed{\mathbf{AJ} = \mathbf{0}}$$

Método dos Nós

LKC

Mas cada equação de nó, pela **LKC,** é igual a zero

Então, podemos expressar a **LKC** num formato matricial em função da **MATRIZ INCIDÊNCIA REDUZIDA**

LKC $\boxed{\mathbf{AJ} = \mathbf{0}}$

$$(\text{ordem } n \times b),$$
$$n = n_t - 1$$

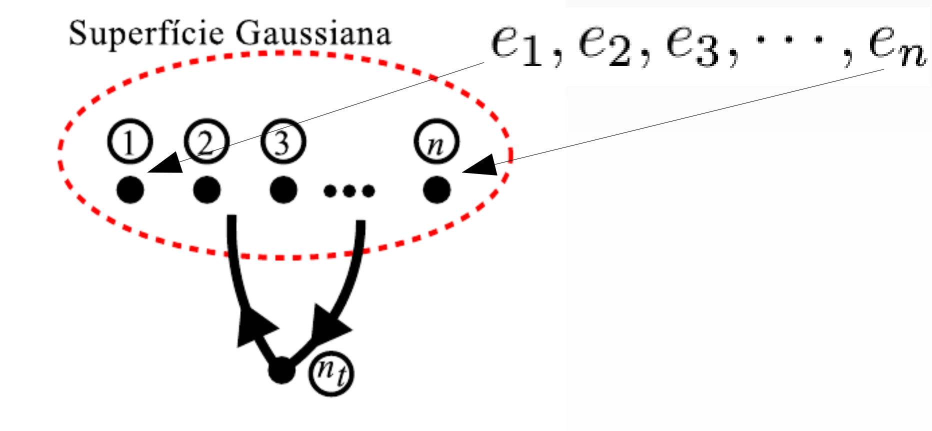
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_b \end{bmatrix}^T \text{ (ordem } b \times 1\text{)},$$

Convenientemente, numeramos os nós de 1 a nt. Eliminamos a equação do nó nt, o qual chamaremos de nó de referência!

Método dos Nós

LKC

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência



Método dos Nós

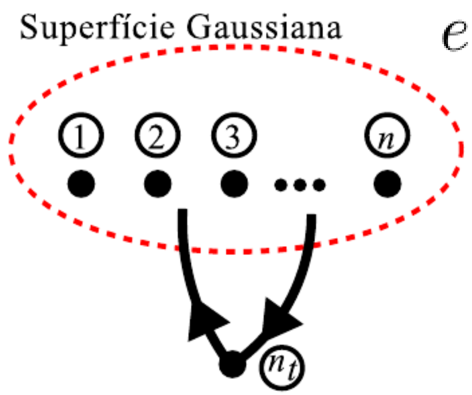
LKC

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência

$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$$

As tensões de ramo são

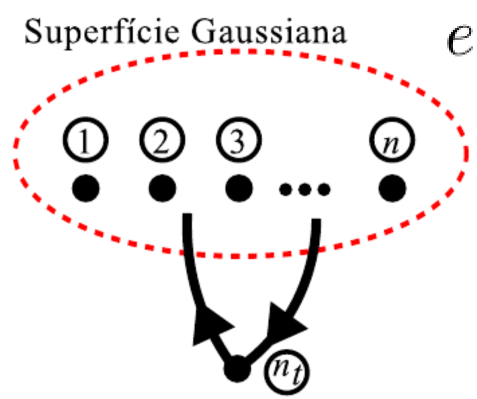
$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_b$$



Método dos Nós

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência

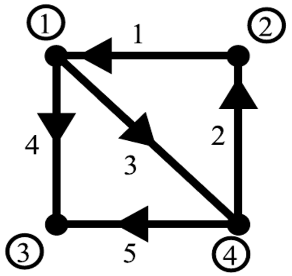
$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$$



As tensões de ramo são

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_b$$

No grafo que tomamos como exemplo, veja que

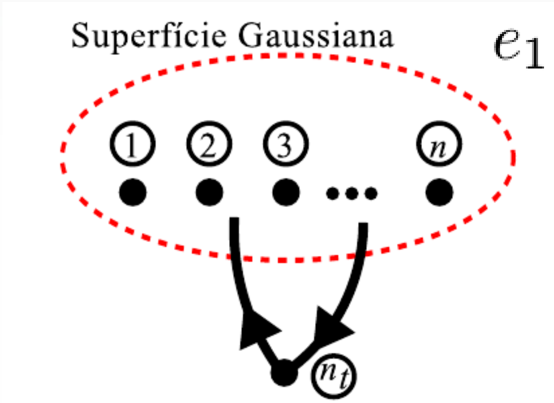


Método dos Nós

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência

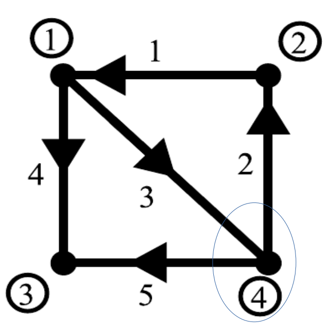
As tensões de ramo são

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_b$$



$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$$

No grafo que tomamos como exemplo, veja que



Nó de referência

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - e_1 \\ -e_2 \\ e_1 \\ e_1 - e_3 \\ -e_3 \end{bmatrix}$$

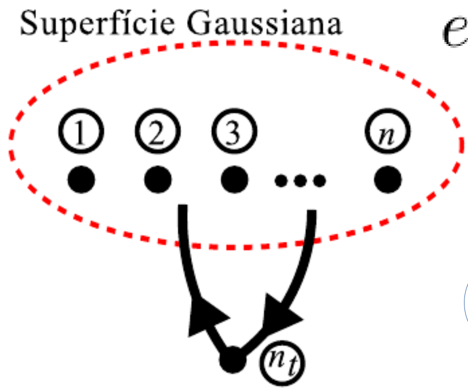
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

CEAR

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência



$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$$

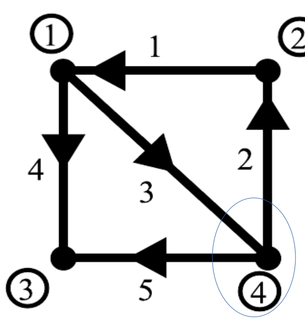
As tensões de ramo são

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_b$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

No grafo que tomamos como exemplo, veja que



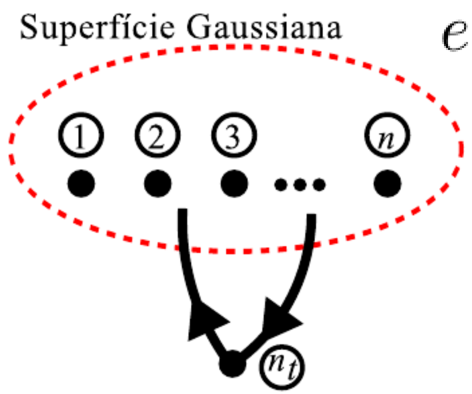
Nó de referência

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - e_1 \\ -e_2 \\ e_1 \\ e_1 - e_3 \\ -e_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Consideremos agora as tensões dos demais nós tomadas em relação ao nó de referência

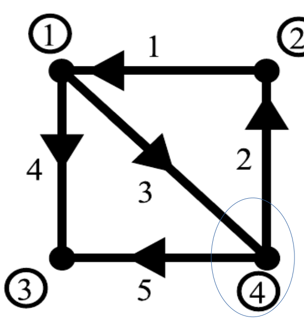


$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$$

As tensões de ramo são

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_b$$

No grafo que tomamos como exemplo, veja que



Nó de referência

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

LKT

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \mathbf{e}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

De um modo geral

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{e} \ \ (\mathbf{LKT})$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{0} \ \ (\mathbf{LKC})$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_b \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{bmatrix}^T$$

A - MATRIZ INCIDÊNCIA RAMO-NÓ REDUZIDA

Método dos Nós

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}$$

Método dos Nós

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{J}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{e} \ \ (\mathbf{LKT})}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{J} = \mathbf{e}^T\mathbf{A}\mathbf{J}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{J} = \mathbf{e}^T\mathbf{AJ}$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{LKC})$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{J} = \mathbf{e}^T\mathbf{A}\mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \mathbf{(LKC)}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Consequência direta da aplicação das **LKC** e **LKT**

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{J} = \mathbf{e}^T\mathbf{A}\mathbf{J} = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0}$$

Teorema de Tellegen

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Conservação da **potência complexa**
(Redes no regime permanente senoidal)

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \hat{\mathbf{v}}_k \hat{\mathbf{i}}_k^* \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{S}}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^*$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{i}}_b \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conservação da **potência complexa**
(Redes no regime permanente senoidal)

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \hat{\mathbf{v}}_k \hat{\mathbf{i}}_k^* \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{S}}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^*$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{i}}_b \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^* = (A^T \mathbf{E})^T \mathbf{I}^* = \mathbf{E}^T A \mathbf{I}^*$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Conservação da **potência complexa**
(Redes no regime permanente senoidal)

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \hat{\mathbf{v}}_k \hat{\mathbf{i}}_k^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{S}}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^*$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{i}}_b \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^* = (A^T \mathbf{E})^T \mathbf{I}^* = \boxed{\mathbf{E}^T A} \mathbf{I}^*$$

$$A\mathbf{I}^* = (A\mathbf{I})^* = 0$$

Método dos Nós

Conservação da **potência complexa**
(Redes no regime permanente senoidal)

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \hat{\mathbf{v}}_k \hat{\mathbf{i}}_k^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{S}}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^*$$

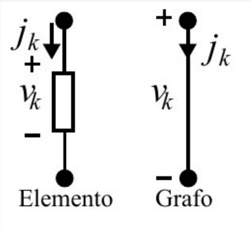
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{i}}_b \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{\mathbf{v}}_k \mathbf{i}_k^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^* = (A^T \mathbf{E})^T \mathbf{I}^* = \mathbf{E}^T A \mathbf{I}^* = 0$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Características dos Ramos



Elemento linear no regime permanente senoidal ou em termos de Laplace

$$\hat{\mathbf{V}}_k = \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{J}}_k \quad ou \quad \hat{\mathbf{J}}_k = \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{V}}_k$$

Elemento linear no tempo

$$v_k(t) = Rj_k(t) \quad ou \quad j_k(t) = Gj_k(t)$$

$$v_k(t) = L\frac{dj_k(t)}{dt} \quad ou \quad j_k(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_k(t) + j_k(0);$$

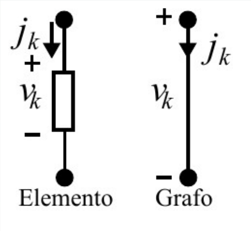
$$v_k(t) = \frac{1}{C}\int_0^t j_k(t) + v_k(0) \quad ou \quad j_k(t) = C\frac{dv_k(t)}{dt}$$

Fontes independentes: Tensão ou corrente do ramo é pré-definida (**Função não linear**)

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Características dos Ramos

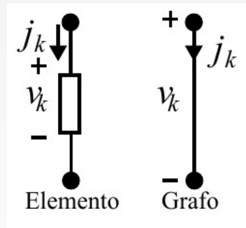


Fontes dependentes e circuitos acoplados – corrente e/ou tensão em uma dado ramo é função de outros ramos.

$$v_k = f_k(j_k) + h_l(v_l)$$

Método dos Nós

Características dos Ramos



Fontes dependentes e circuitos acoplados – corrente e/ou tensão em uma dado ramo é função de outros ramos.

$$v_k = f_k(j_k) + h_l(v_l)$$

Em um ramo sem acoplamento de uma maneira geral temos

$$\boxed{v_k = f_k(j_k) \quad ou \quad j_k = g_k(v_k)}$$

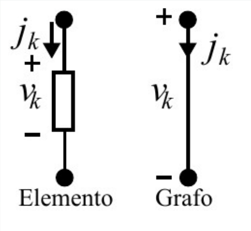
Se a função do ramo é linear, então

$$\boxed{g_k(\cdot) = f_k^{-1}(\cdot)}$$

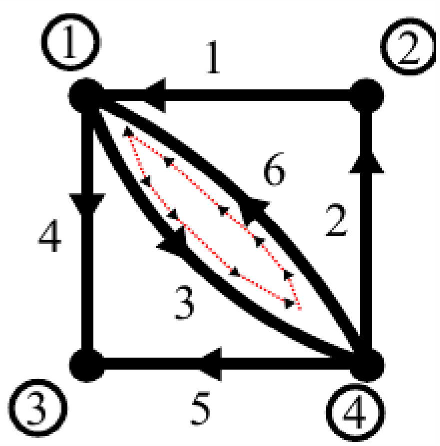
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Características dos Ramos



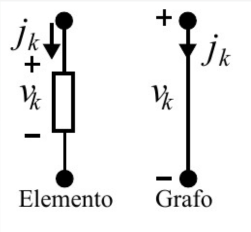
Um ramo composto apenas por uma **fonte de tensão** já tem a tensão de ramo pré-definida. Logo para respeitar a **LKT** não é possível se ter **laços** formados unicamente por fontes de tensão, isso implicaria em **LKT** não ser válida para quaisquer valores de tensão das fontes



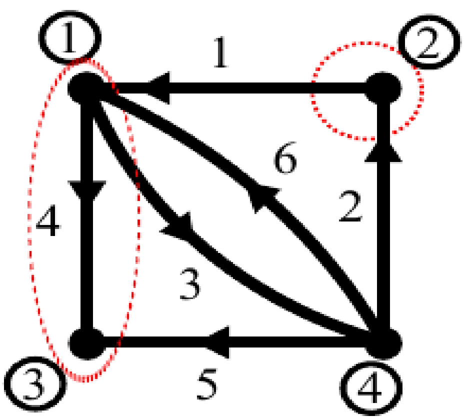
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Características dos Ramos



Um ramo composto apenas por uma **fonte de corrente** já tem a corrente de ramo definida. Logo para respeitar a **LKC** não é possível se ter **conjunto de corte** formados unicamente por fontes de correntes, isso implicaria em **LKC** não ser válida para quaisquer valores de corrente das fontes



Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

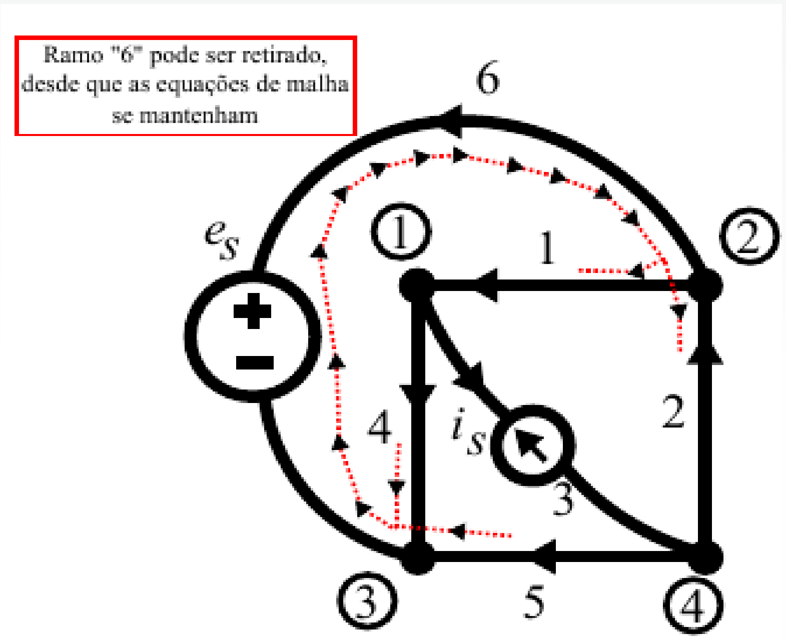
Característica Geral de um ramo desacoplado

Eliminação de ramos definidos por fontes de tensão: Uma vez que ramos definidos por fontes de tensão já têm sua tensão resolvida e sua corrente é apenas combinação linear das demais, podemos eliminar tal ramo e reduzir o número de ramos a ser determinados, consequentemente o número de equações do sistema.

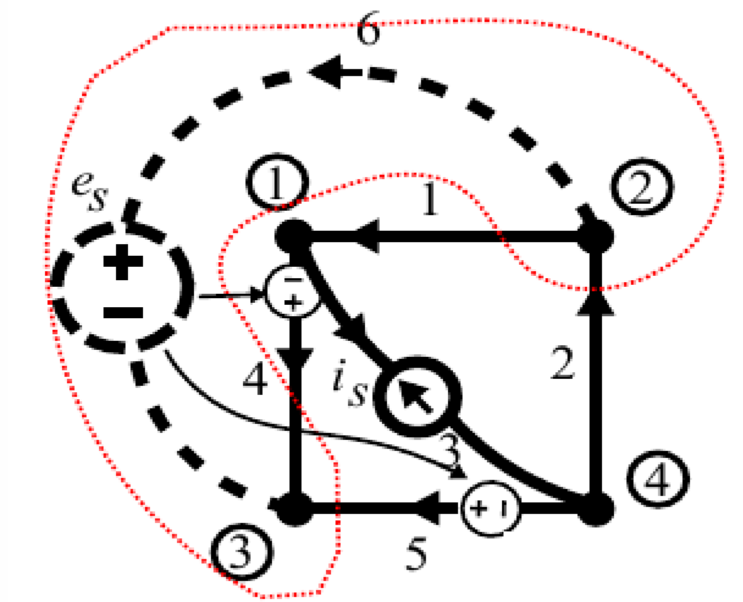
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Exemplo



Transferimos fonte de tensão para outros ramos de forma a manter **LKT** dos laços remanescentes



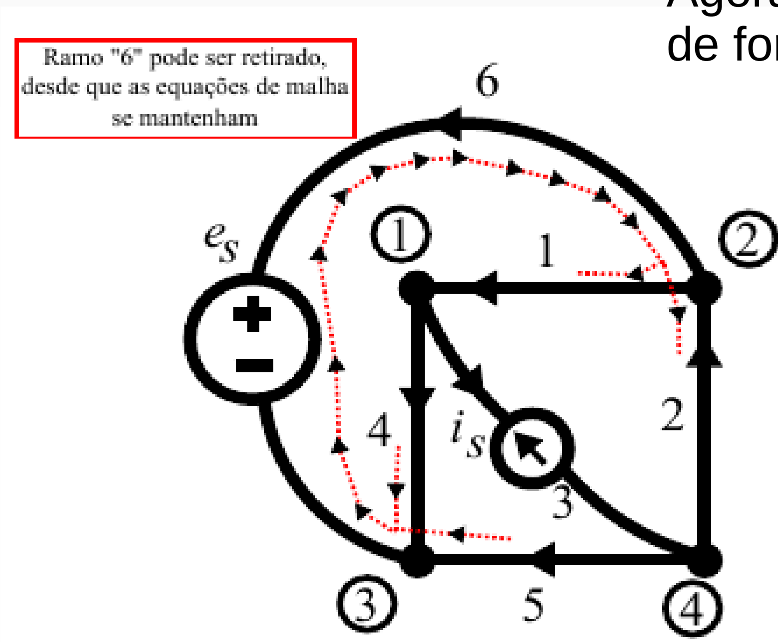
(c)

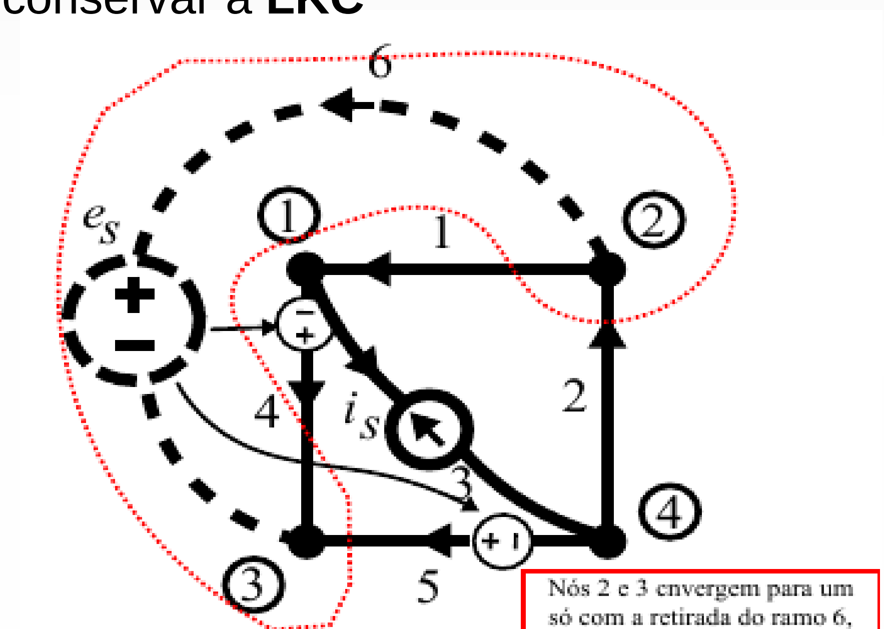
Método dos Nós

Característica Geral de um ramo desacoplado

Exemplo

Agora eliminamos ramo 6 convergindo nós 2 e 3 de forma a conservar a **LKC**





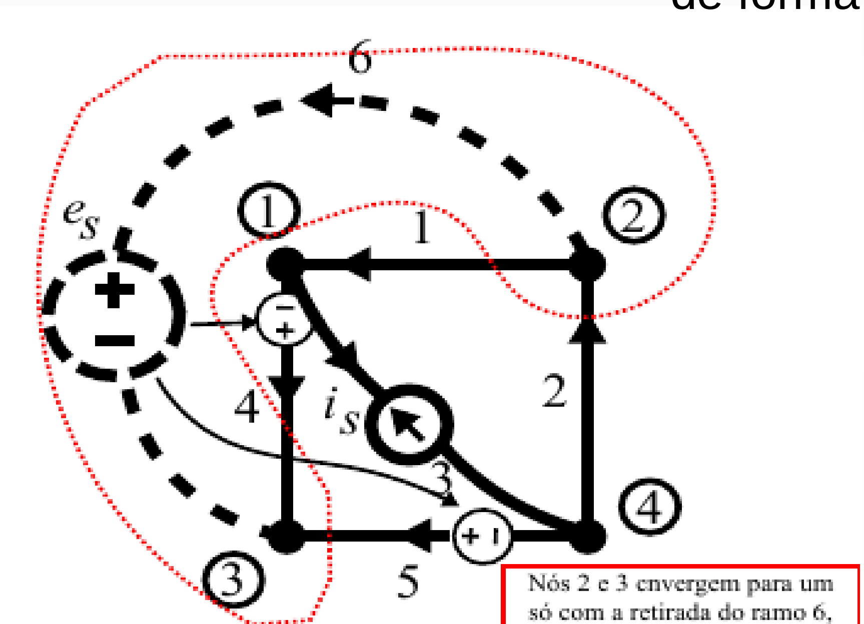
(c)

Método dos Nós

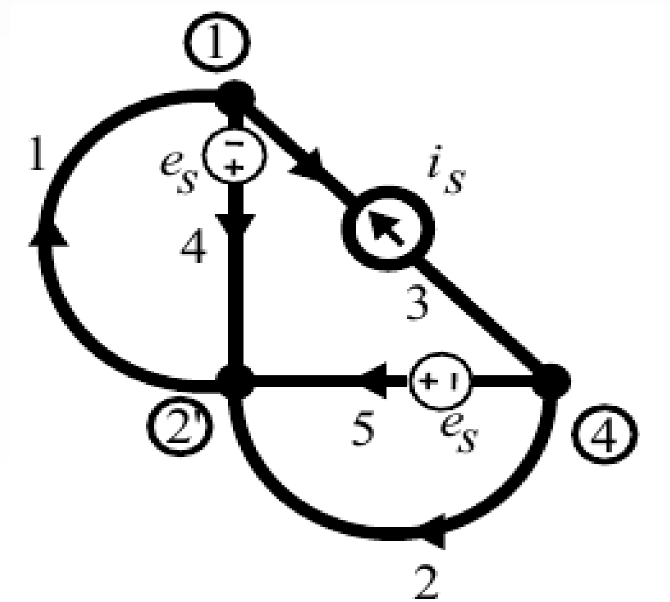
Transformação de fontes

Exemplo

Agora eliminamos ramo 6 convergindo nós 2 e 3 de forma a conservar a **LKC**



(c)



Método dos Nós

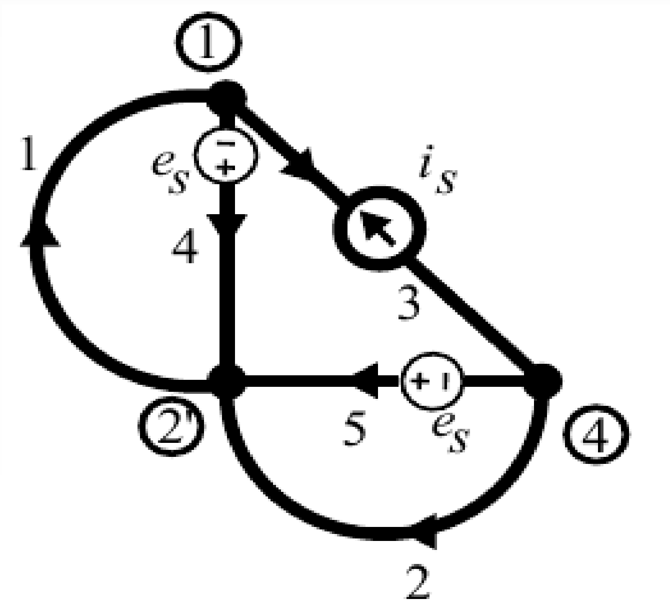
Característica Geral de um ramo desacoplado

Exemplo

Agora eliminamos ramo 6 convergindo nós 2 e 3 de forma a conservar a **LKC**

Ramos 4 e 5 passaram a ser uma fonte de tensão em série com um elemento com a função que antes desempenhava

$$v_4 = -e_s + f_4(j_4)$$
$$v_5 = -e_s + f_5(j_5)$$

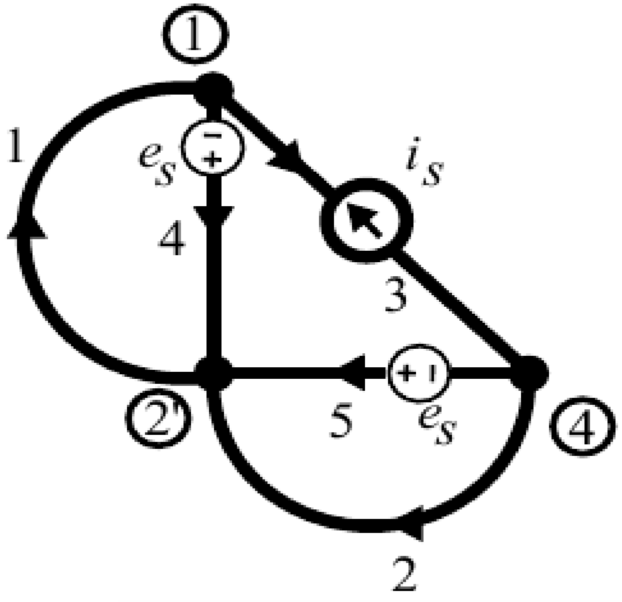


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Característica Geral de um ramo desacoplado

Eliminação de ramos definidos por fontes de corrente: Uma vez que ramos definidos por fontes de corrente já têm sua corrente resolvida e sua tensão é apenas combinação linear das demais, podemos eliminar tal ramo e reduzir o número de ramos a ser determinados, consequentemente o número de equações do sistema.

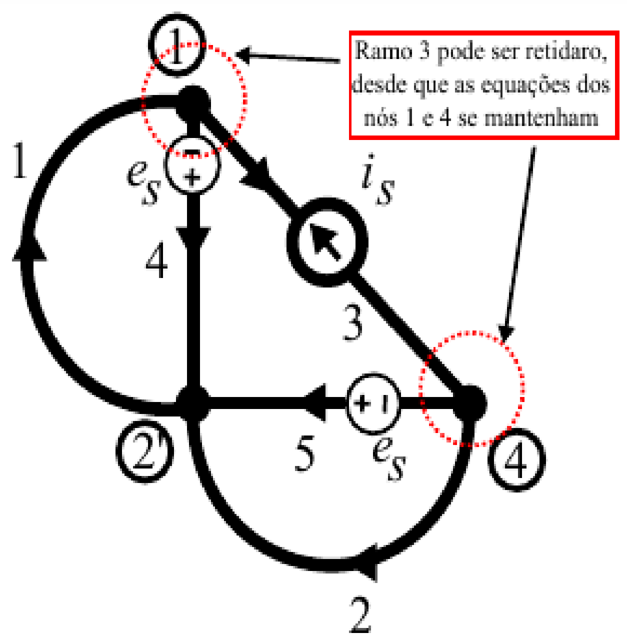


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Característica Geral de um ramo desacoplado

Eliminação de ramos definidos por fontes de corrente: Uma vez que ramos definidos por fontes de corrente já têm sua corrente resolvida e sua tensão é apenas combinação linear das demais, podemos eliminar tal ramo e reduzir o número de ramos a ser determinados, consequentemente o número de equações do sistema.

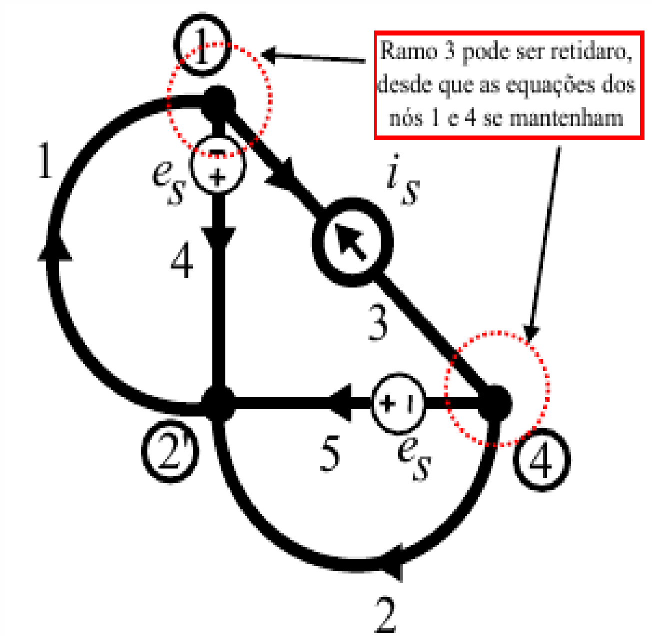


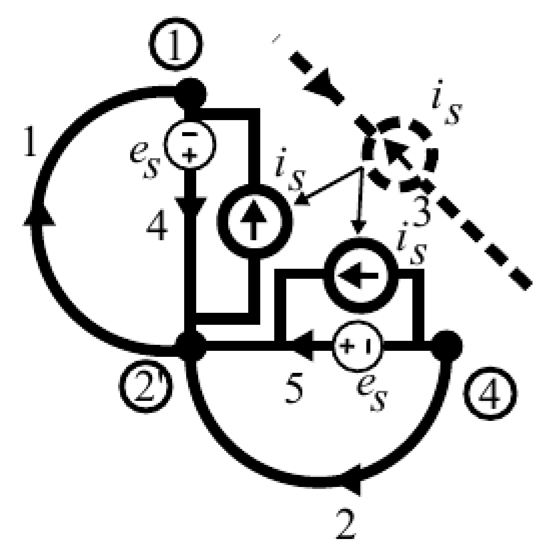
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Característica Geral de um ramo desacoplado

Eliminação de ramos definidos por fontes de corrente: Uma vez que ramos definidos por fontes de corrente já têm sua corrente resolvida e sua tensão é apenas combinação linear das demais, podemos eliminar tal ramo e reduzir o número de ramos a ser determinados, consequentemente o número de equações do sistema.



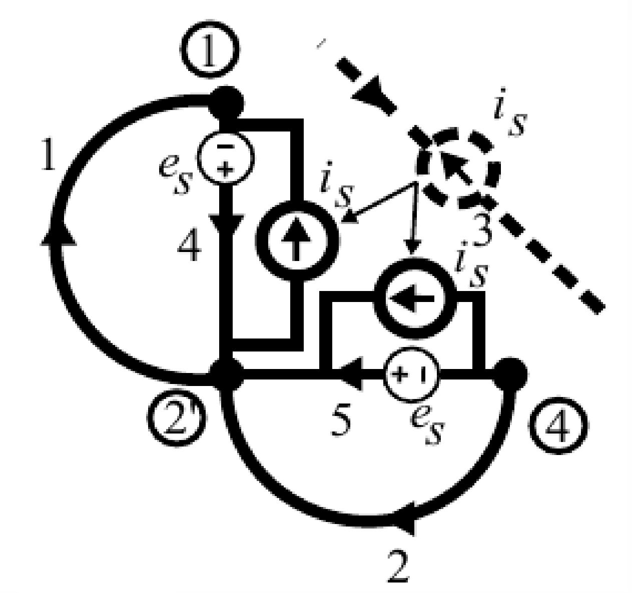


Método dos Nós

Característica Geral de um ramo desacoplado

Observe que agora os ramos 4 e cinco passaram a ser fonte de tensão em série com o elemento e em paralelo com uma fonte de corrente

$$v_4 = -e_s + f_4(j_4 + i_s)$$
$$v_5 = -e_s + f_5(j_5 + i_s)$$



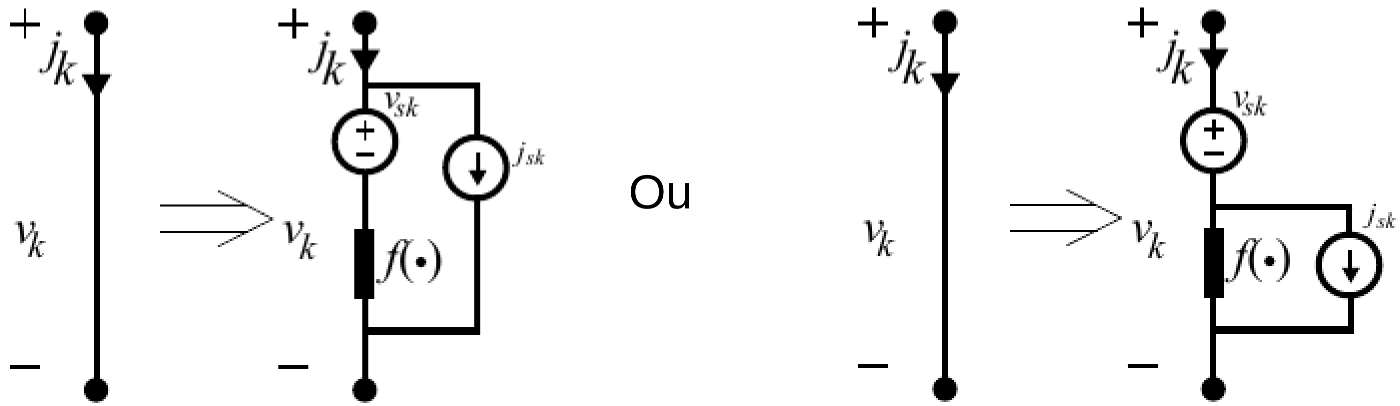
Método dos Nós

Característica Geral de um ramo desacoplado

Chegamos a característica mais geral de um ramo desacoplado

$$v_k = v_{sk} + f_k(j_k - j_{sk})$$

$$j_k = j_{sk} + f_k^{-1}(v_k - v_{sk})$$



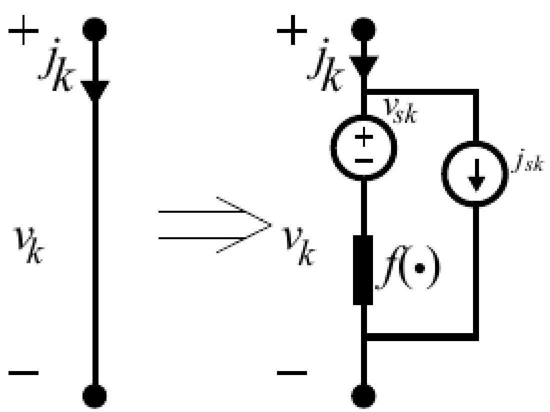
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

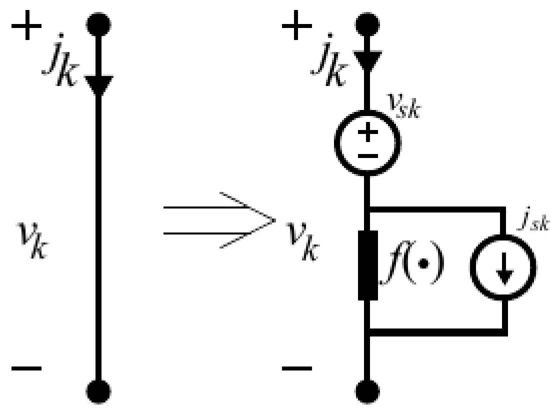
Se a rede é linear

$$v_k = v_{sk} + f_k(j_k) - f_k(j_{sk})$$

$$j_k = j_{sk} + f_k^{-1}(v_k) - f_k^{-1}(v_{sk})$$



Ou



Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

A equação dos “b” ramos e uma rede correspondem a

$$
\begin{aligned}
j_1 &= j_{s1} + f_1^{-1}(v_1) - f_1^{-1}(v_{s1}) \\
j_2 &= j_{s2} + f_2^{-1}(v_2) - f_2^{-1}(v_{s2}) \\
j_3 &= j_{s3} + f_3^{-1}(v_3) - f_3^{-1}(v_{s3}) \\
&\vdots \\
j_k &= j_{sk} + f_k^{-1}(v_k) - f_k^{-1}(v_{sk}) \\
&\vdots \\
j_b &= j_{sb} + f_b^{-1}(v_b) - f_b^{-1}(v_{sb})
\end{aligned}
$$

Podem ser apresentadas matricialmente

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

Correntes de ramo

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

Fontes independentes de corrente que existam no ramo

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

Tensões de ramo

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}}$$

Fontes independentes de Tensão que possam existir nos ramos

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \boxed{\begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

Matriz admitância de arco

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{-1}(\cdot) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(\cdot) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_b^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

CEAR

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

$$\mathbf{AJ} = 0$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$

$$0 = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{f}^{-1}\mathbf{v}_s$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz incidência reduzida

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{AJ}_s + \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{Af}^{-1}\mathbf{v}_s$$

$$(\mathbf{Af}^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{e} = (\mathbf{Af}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{AJ}_s$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^{T})\mathbf{e} = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

Unidade de admitância

Adimensional

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

$$\underbrace{\boxed{(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^T)}}_{\text{Unidade de Admitância}}\mathbf{e} = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^T)}_{\mathbf{F_n}}\mathbf{e} = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

Matriz admitância de nó – converte tensões de nó em corrente

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$\boxed{(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^{T})\mathbf{e}} = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

Unidade de corrente

Matriz admitância de nó – converte tensões de nó em corrente

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{e} = \boxed{(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s} - \boxed{\mathbf{A}\mathbf{J}_s}$$

Fontes independentes de corrente que chegam aos nós

Fontes independentes de tensão que existam convertidas em fontes de corrente

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

$$(\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{e} = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

$$\boxed{\mathbf{F}_n\mathbf{e} = \mathbf{I_s}}$$

Resolver para “e”

$$\mathbf{F_n} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{-1}\mathbf{A}^T$$

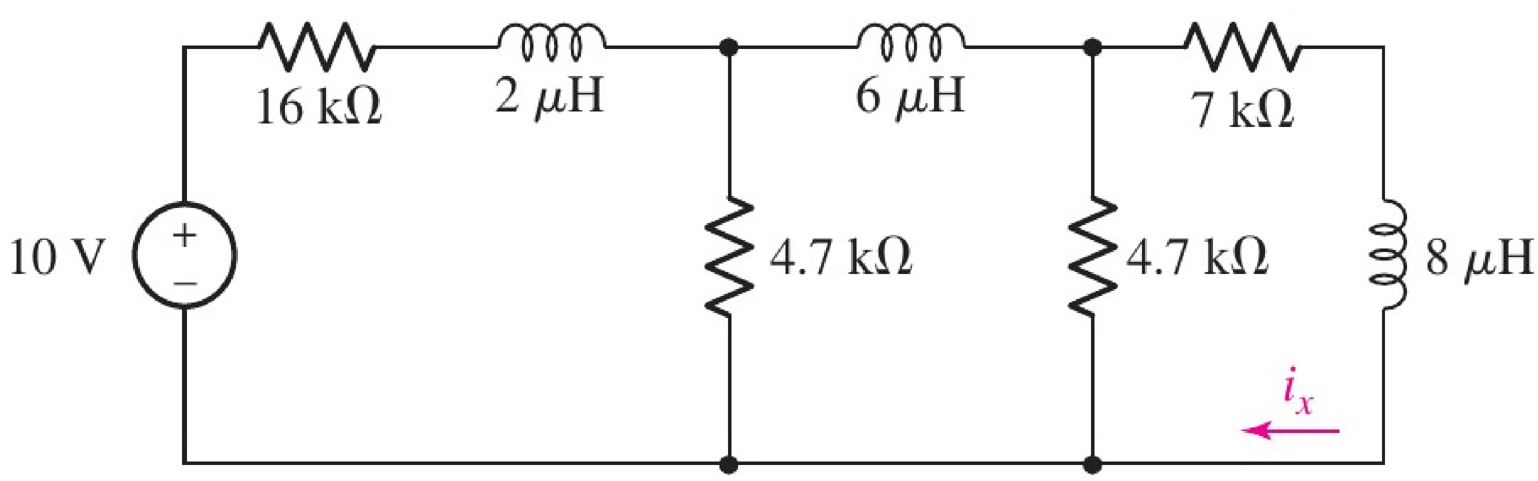
$$\mathbf{I}_s = (\mathbf{A}\mathbf{f}^{-1})\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s$$

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

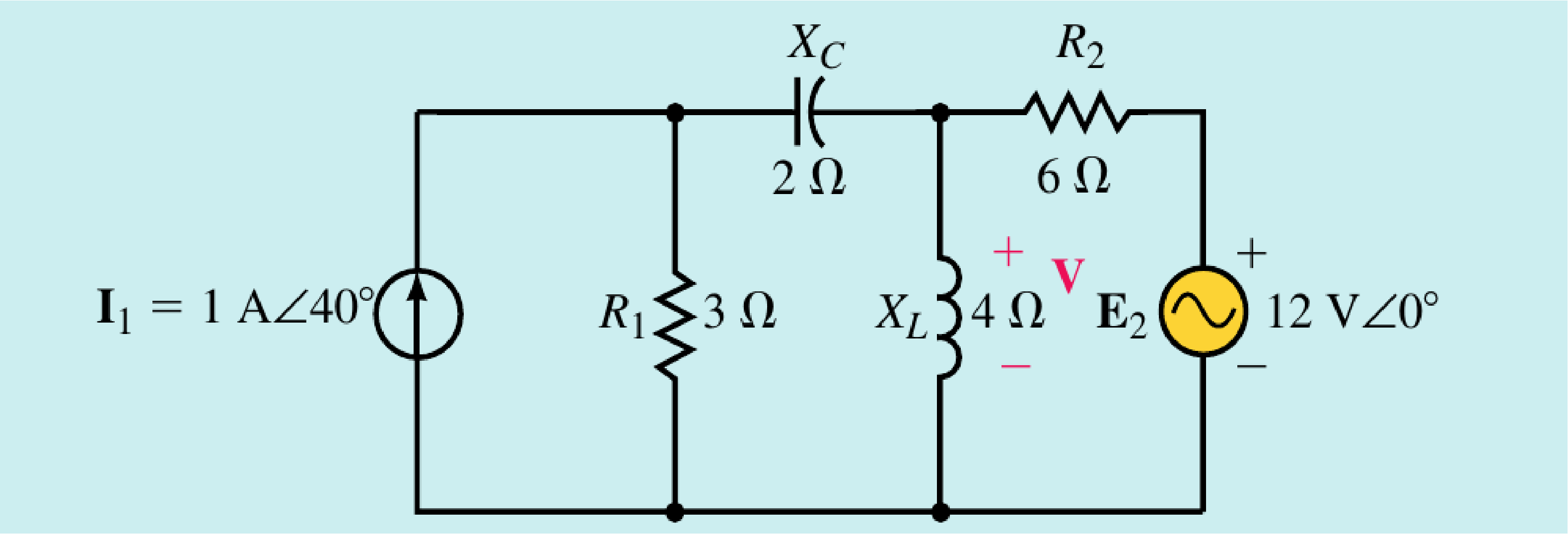
Seja rede cc abaixo no domínio do tempo com condições iniciais nulas! Usando circuito equivalente de Laplace equacione-a usando método dos nós



Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós

Resolva rede abaixo no regime permanente senoidal usando método dos nós

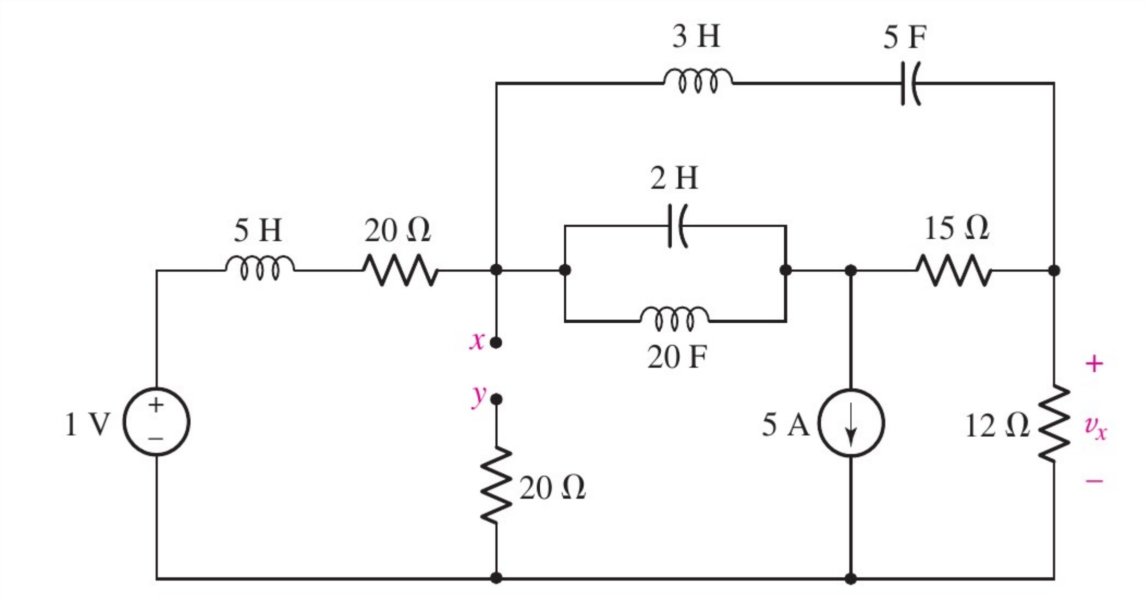


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós

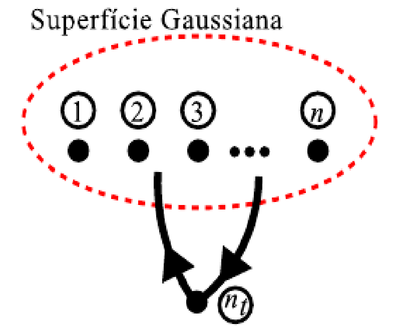
Seja rede cc abaixo no domínio do tempo com condições iniciais nulas! Usando circuito equivalente de Laplace equacione-a usando método dos nós! Considere um capacitor de 1F conectado entre os pontos “*x*” e “*y*”.



Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós (Regime permanente senoidal ou Laplace)

1) Usando transformações de fontes, elimine todos os ramos compostos unicamente por fontes



2) Enumere todos os nós e ramos da rede

3) Associe orientação aos ramos

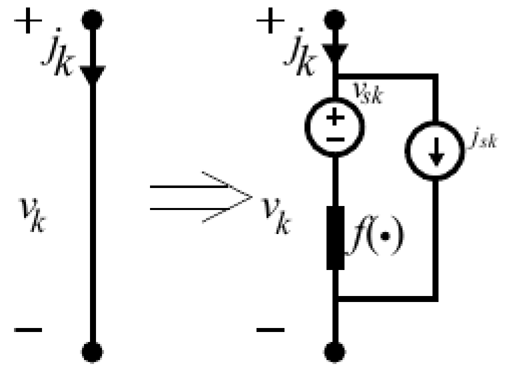
4) Escolha o nó de maior número como referência

5) Obtenha a matriz incidência ramo-nó : **Aa**

5) Elimine última linha de **Aa** para obter matriz incidência reduzida **A**

6) Escreva a equação de cada ramo no formato

$$\hat{\mathbf{j}}_k = \hat{\mathbf{j}}_{sk} + Y_k \hat{\mathbf{v}}_k - Y_k \hat{\mathbf{v}}_{sk}$$



Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

7) Ponha todas as equações de ramo num formato matricial

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{Y}}_b^{b\times b} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{y}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\mathbf{y}}_b \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

7) Ponha todas as equações de ramo num formato matricial

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

8) Aplica-se **LKC** e **LKT**

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s \\
\mathbf{0} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s \\
\mathbf{0} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s \\
\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} &= -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_s &= -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s \\
\mathbf{Y}_e &= \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T
\end{aligned}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

7) Ponha todas as equações de ramo num formato matricial

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

8) Aplica-se **LKC** e **LKT**

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

Matriz admitância de malha que é diagonal para rede sem a presença de elementos acoplados

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$\mathbf{I}_s = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

7) Ponha todas as equações de ramo num formato matricial

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

8) Aplica-se **LKC** e **LKT**

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_k - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} - \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{e} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

Matriz admitância de nó

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$\mathbf{I}_s = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$$

CEAR

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

9) Resolva o sistema de equações para se obter as tensões de nó

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s \qquad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}^T$$

10) A partir das tensões de nó pode-se encontrar todas as tensões nos ramos

$$\widehat{\mathbf{v}}^{b\times 1} = (\mathbf{A}^T)^{b\times n}\widehat{\mathbf{e}}^{n\times 1}$$

11) A partir das tensões de ramo podemos encontrar todas as correntes de ramo

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$

12) Está resolvido o circuito

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção

Equações obtidas com o método – redes sem acoplamentos

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$\mathbf{I}_s = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção

Equações obtidas com o método – redes sem acoplamentos

$$\boxed{\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$\mathbf{I}_s = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{V}}_s$$
$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$$

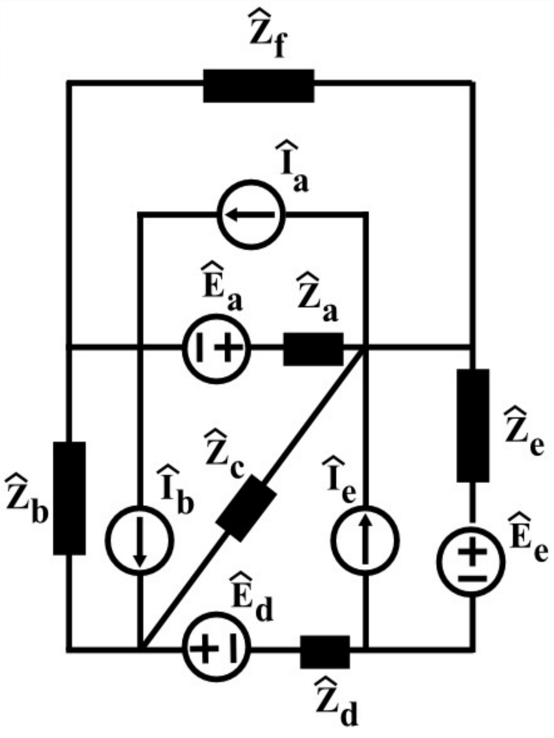
Podemos montar as matrizes admitância de nó e fontes de correntes por inspeção, sem passar pelos passos intermediários!

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



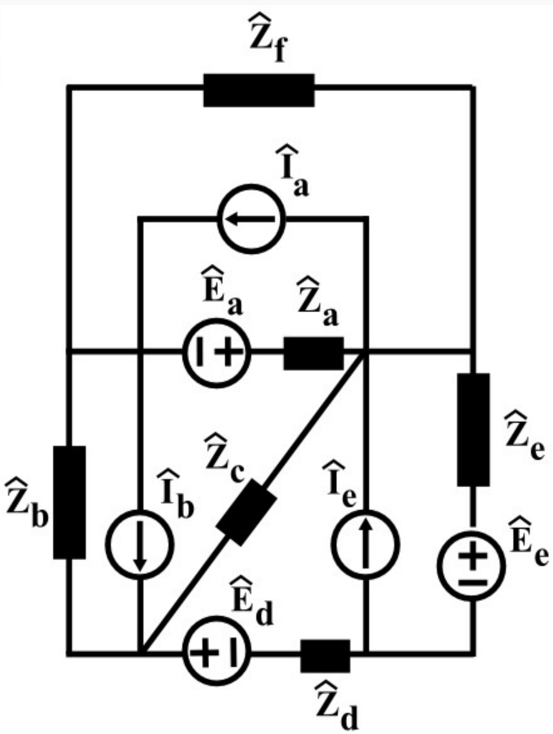
CEAR

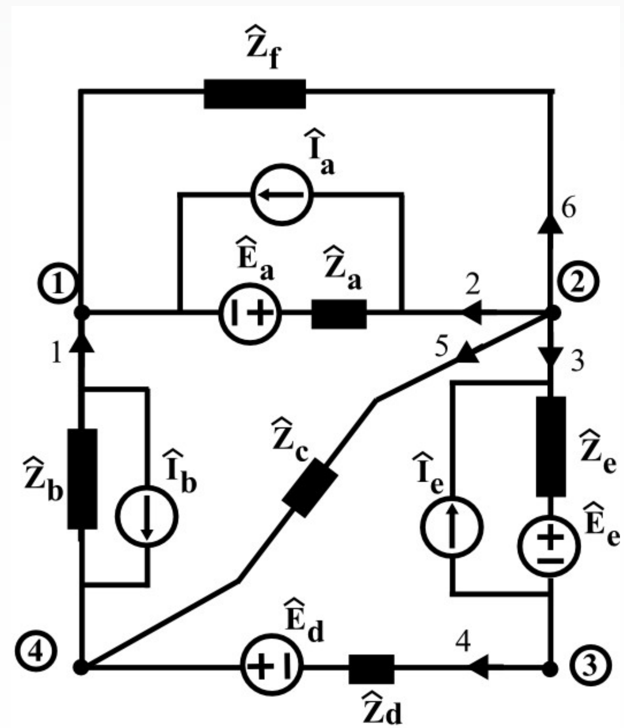
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



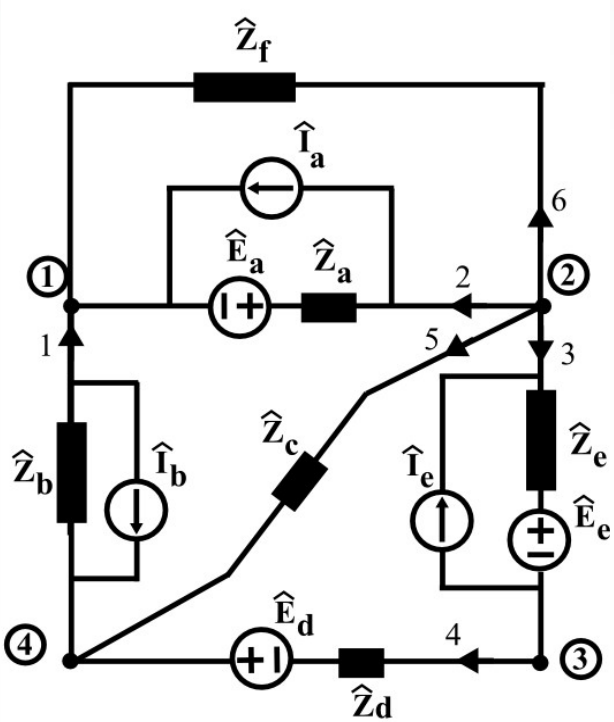


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

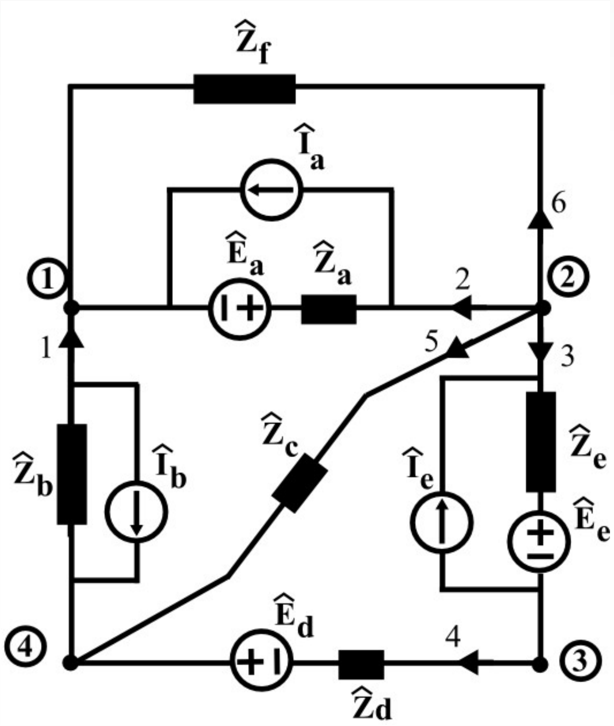
Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)

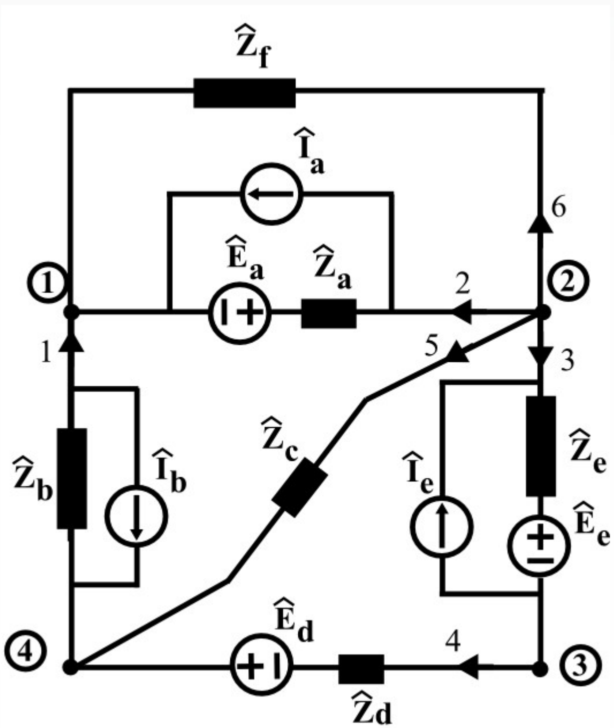


$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

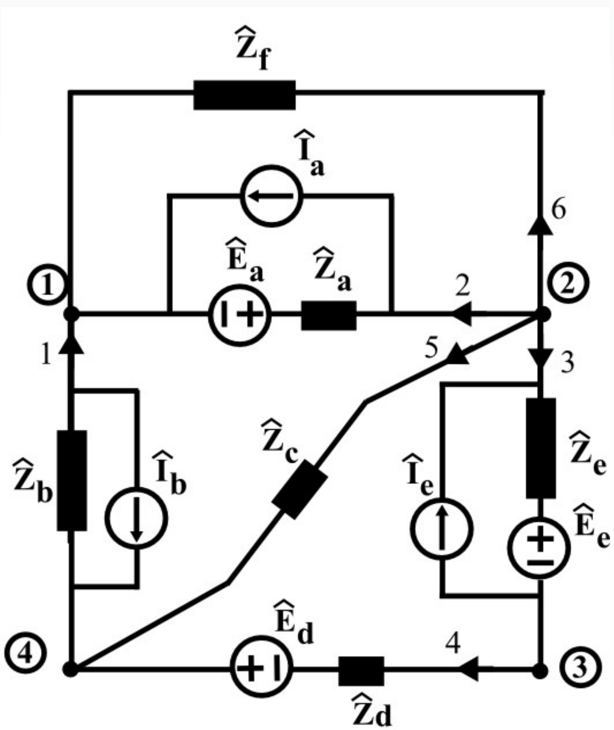
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_b = \begin{bmatrix} Y_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_f \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ E_e \\ -E_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} -I_b \\ I_a \\ -I_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)

$$\mathbf{Y}_e = A\mathbf{Y}_b A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

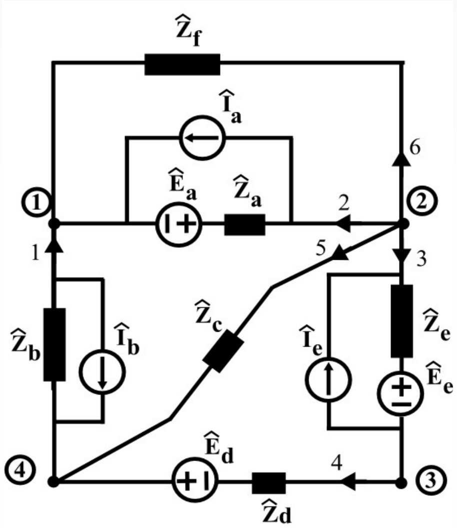
$$\mathbf{Y}_e = A\mathbf{Y}_b A^T = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



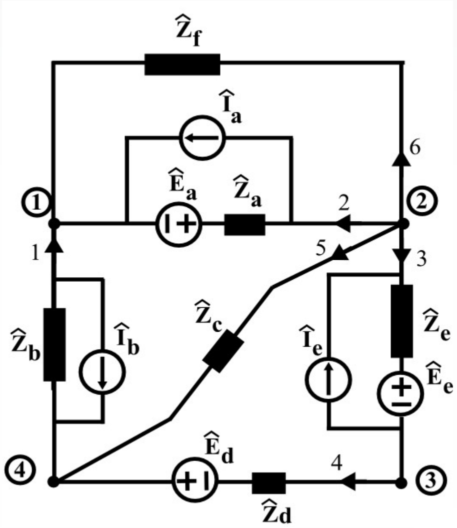
$$\mathbf{Y}_e = A\mathbf{Y}_b A^T = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = -A\mathbf{J}_s + A\mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s$$

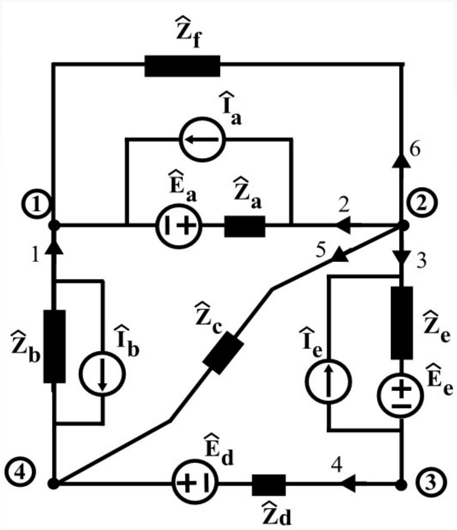
$$-A\mathbf{J}_s = -\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_b \\ I_a \\ -I_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_e - I_a \\ -I_e \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ E_e \\ -E_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_aY_a \\ E_eY_e + E_aY_a \\ -E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = -A\mathbf{J}_s + A\mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s$$

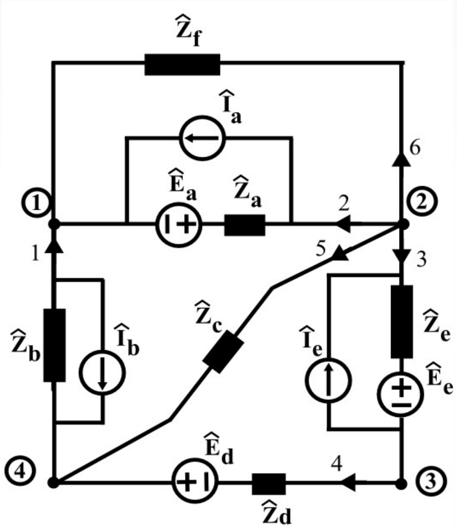
$$\mathbf{I}_s = -A\mathbf{J}_s + A\mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_e - I_a \\ -I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -E_aY_a \\ E_eY_e + E_aY_a \\ -E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b - E_aY_a \\ I_e - I_a + E_eY_e + E_aY_a \\ -I_e - E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - I_b - E_a Y_a \\ I_e - I_a + E_e Y_e + E_a Y_a \\ -I_e - E_e Y_e - E_d Y_d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

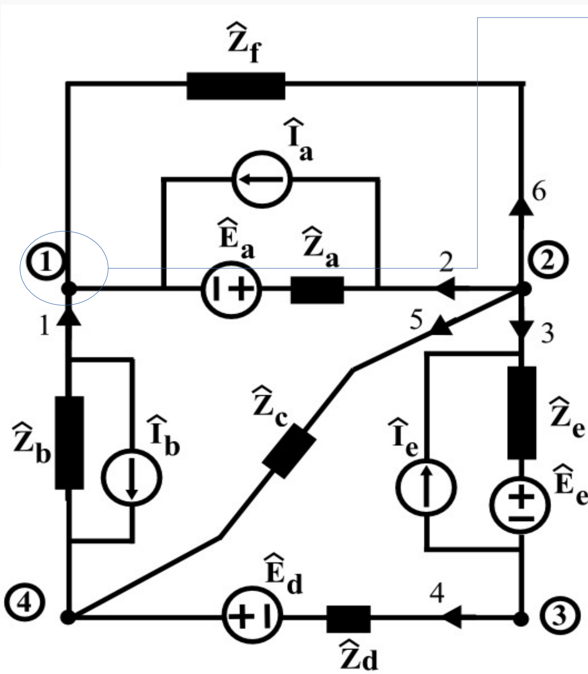
CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} \boxed{Y_a + Y_b + Y_f} & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{11}

Somatório das admitâncias dos ramos que incidem no nó 1

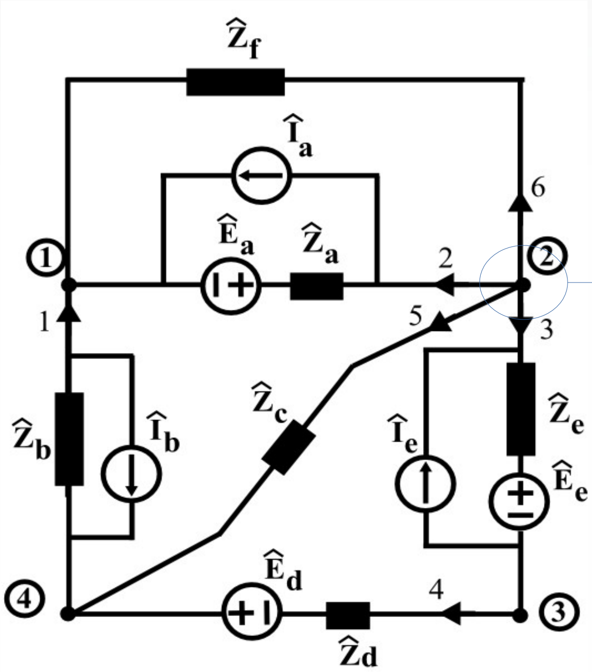
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & \boxed{Y_e + Y_a + Y_c + Y_f} & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{22}

Somatório das admitâncias dos ramos que incidem no nó 2

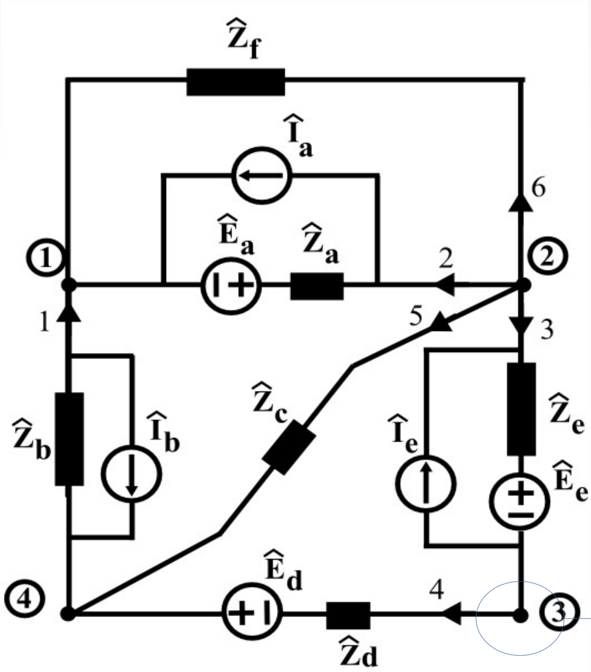
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\boxed{\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{33}

Somatório das admitâncias dos ramos que incidem no nó 3

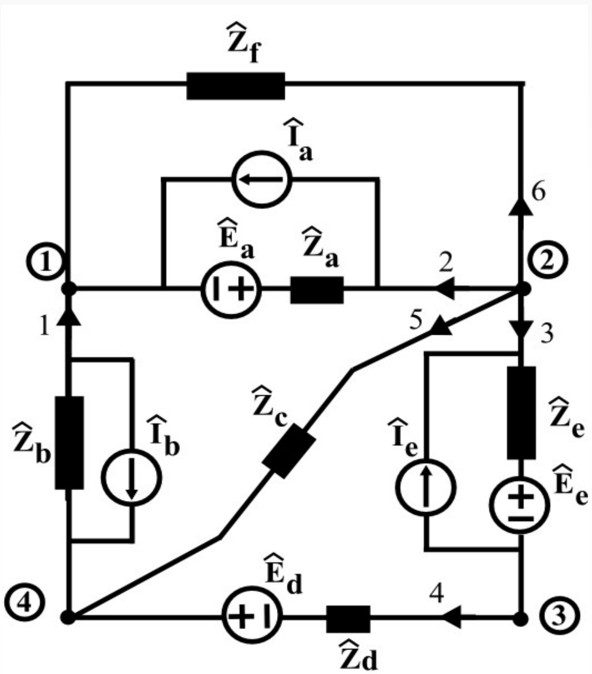
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

Elementos da diagonal principal

$$\boxed{y_{ik} = \sum \left(Admitâncias\ dos\ ramos\ incidentes\ com\ nó\ i \right), Se\ i = k}$$

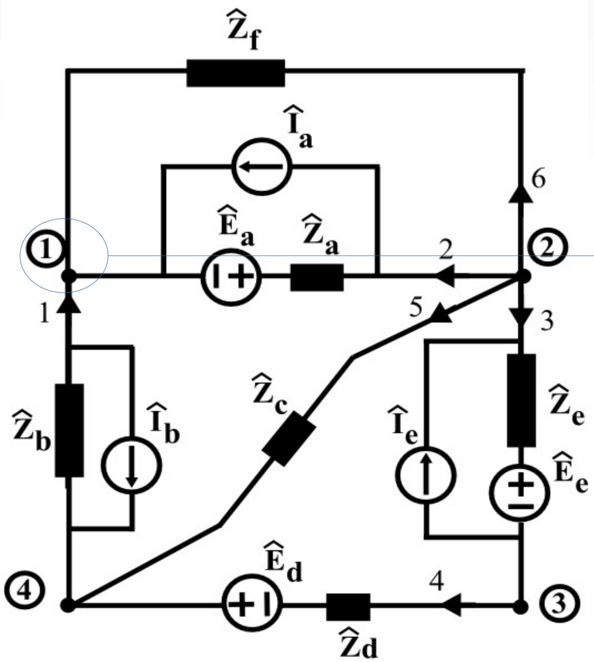
Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & \boxed{-Y_a - Y_f} & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{12}

Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 1 e 2

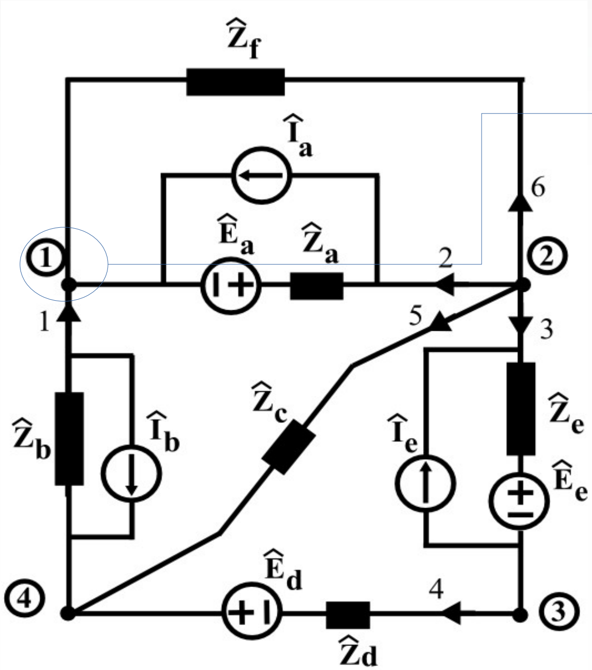
Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ \boxed{-Y_a - Y_f} & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{21}

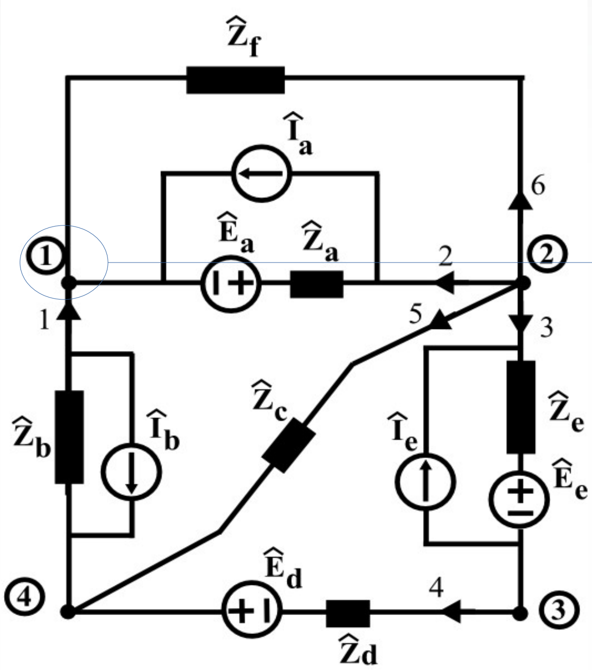
Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 1 e 2

Método dos Nós

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & \boxed{0} \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{13}

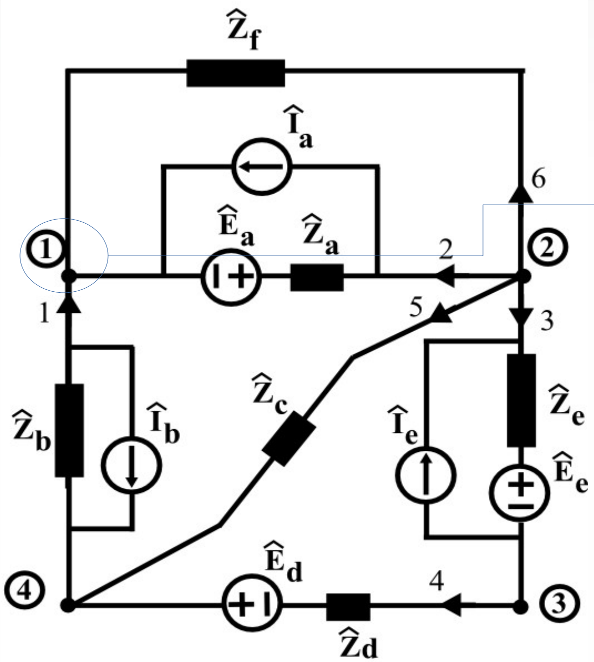
Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 1 e 3

Método dos Nós

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a+Y_b+Y_f & -Y_a-Y_f & 0 \\ -Y_a-Y_f & Y_e+Y_a+Y_c+Y_f & -Y_e \\ \boxed{0} & -Y_e & Y_e+Y_d \end{bmatrix}$$

y_{31}

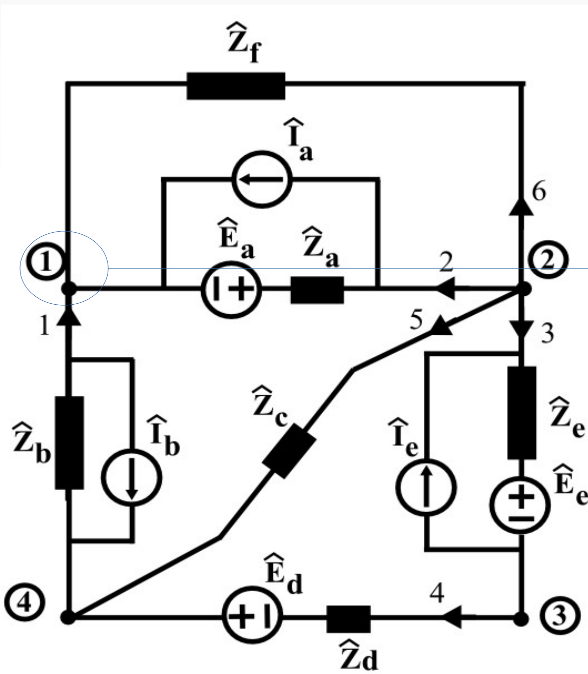
Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 1 e 3

Método dos Nós

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & \boxed{-Y_e} \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{23}

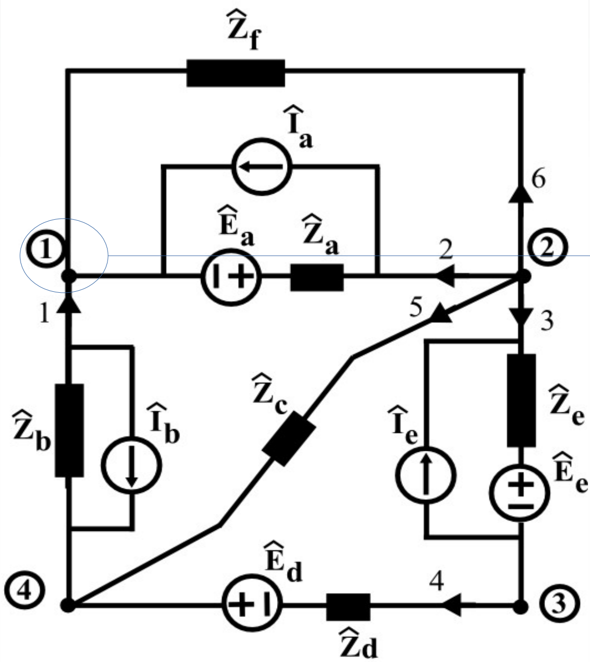
Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 2 e 3

Método dos Nós

$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & \boxed{-Y_e} & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

y_{32}

Negativo do somatório das admitâncias dos ramos que ligam diretamente os nós 2 e 3

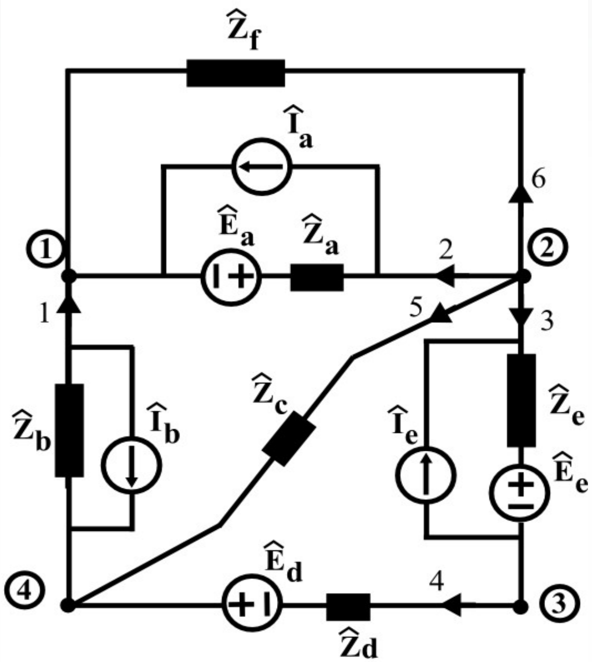
Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\boxed{\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_c + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

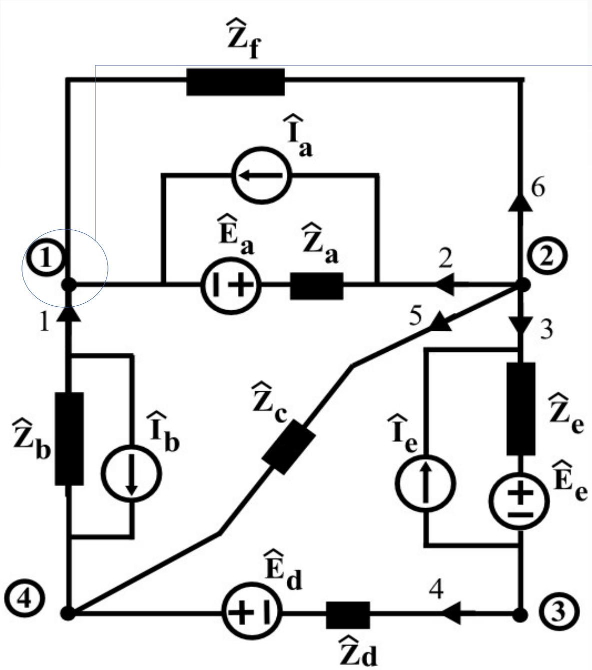
$$\boxed{y_{ik} = \begin{cases} \sum (\text{Admitâncias dos ramos que incidem ao nó } i), \ Se\ i = k \\ -\sum (\text{Admitâncias dos ramos que ligam nó } i \text{ ao nó } k), \ Se\ i \neq k \end{cases}}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \boxed{I_a - I_b - E_aY_a} \\ I_e - I_a + E_eY_e + E_aY_a \\ -I_e - E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix}$$

Somatório das fontes de correntes que chegam ao nó nó "1" , convertendo-se as fontes de tensão em fontes de correntes

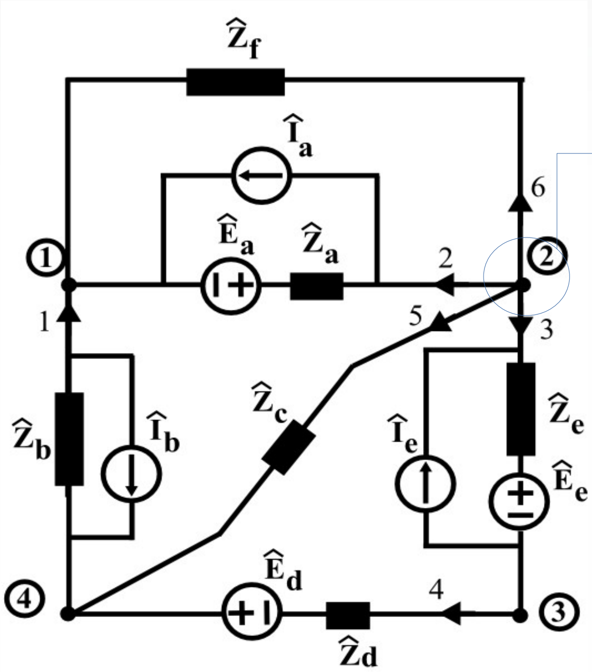
Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - I_b - E_aY_a \\ \boxed{I_e - I_a + E_eY_e + E_aY_a} \\ -I_e - E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix}$$

Somatório das fontes de correntes que chegam ao nó nó "2" , convertendo-se as fontes de tensão em fontes de correntes

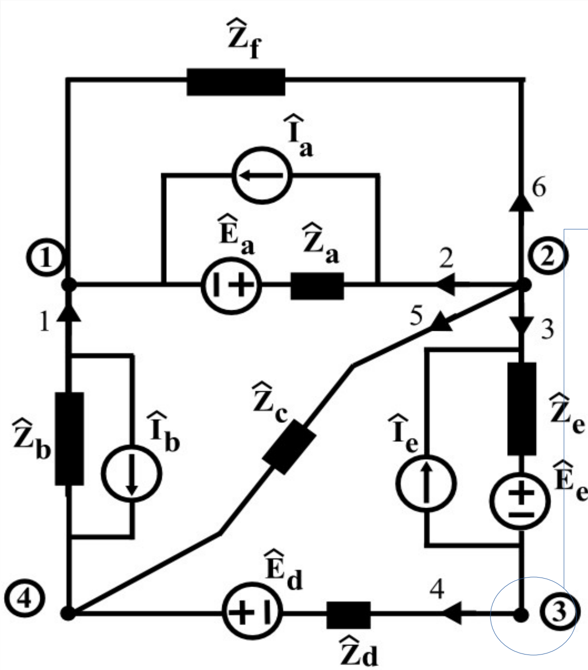
CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - I_b - E_aY_a \\ I_e - I_a + E_eY_e + E_aY_a \\ \boxed{-I_e - E_eY_e - E_dY_d} \end{bmatrix}$$

Somatório das fontes de correntes que chegam ao nó nó "3" , convertendo-se as fontes de tensão em fontes de correntes

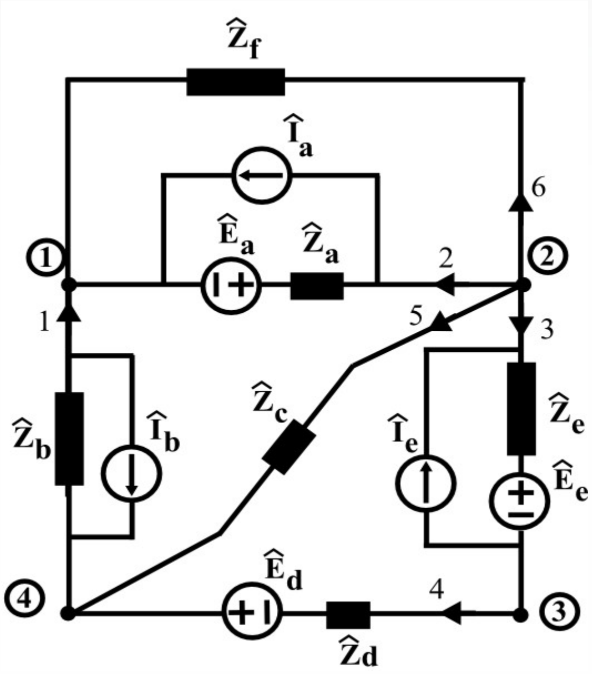
Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Escrevendo equações por inspeção (Mostremos com um exemplo)



$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - I_b - E_aY_a \\ I_e - I_a + E_eY_e + E_aY_a \\ -I_e - E_eY_e - E_dY_d \end{bmatrix}$$

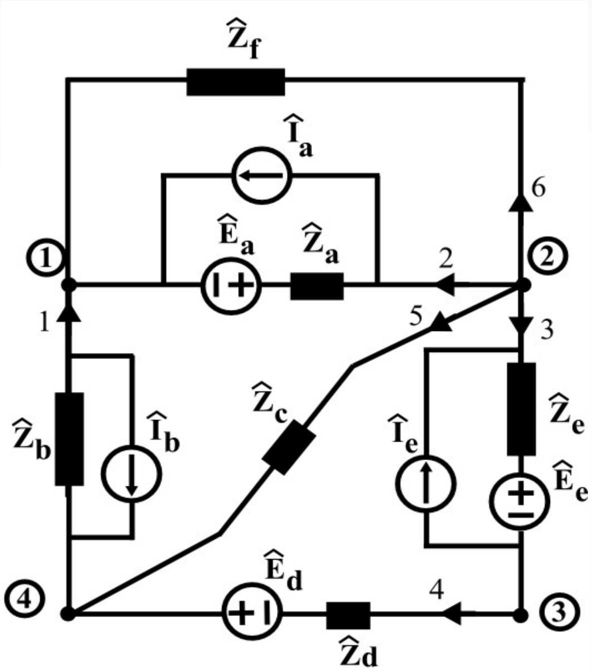
Somatório das fontes de correntes que chegam ao nó nó "i" , convertendo-se as fontes de tensão em fontes de correntes

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós
Rede no Regime permanente Senoidal

Por Inspeção



$$\boxed{\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} \sum\left(\text{Admitâncias dos ramos que incidem ao nó } i\right), \text{Se } i = k \\ -\sum\left(\text{Admitâncias dos ramos que ligam nó } i \text{ ao nó } k\right), \text{Se } i \neq k \end{cases}$$

$$I_k = \sum\left(\begin{matrix}\text{Somatório das fontes de correntes que chegam ao nó ``} k \text{''} \\ \text{convertendo} - \text{se as fontes de tensão em fontes de correntes}\end{matrix}\right)$$

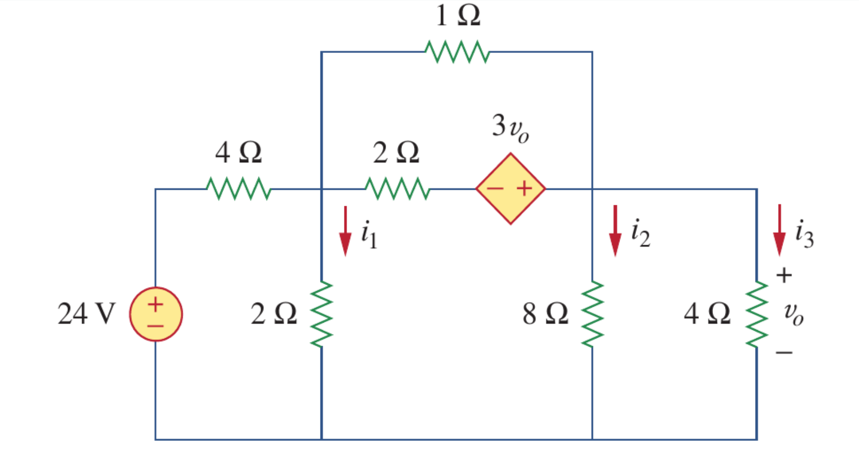
Método dos Nós

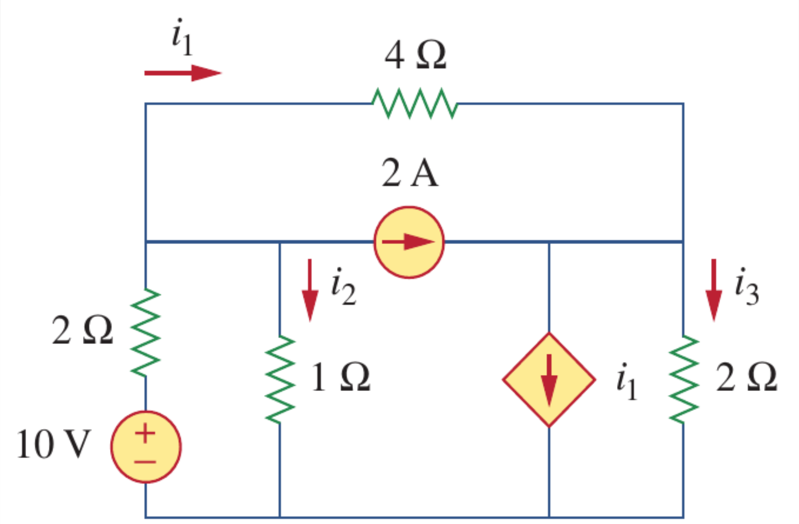
CEAR

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede com elementos acoplados



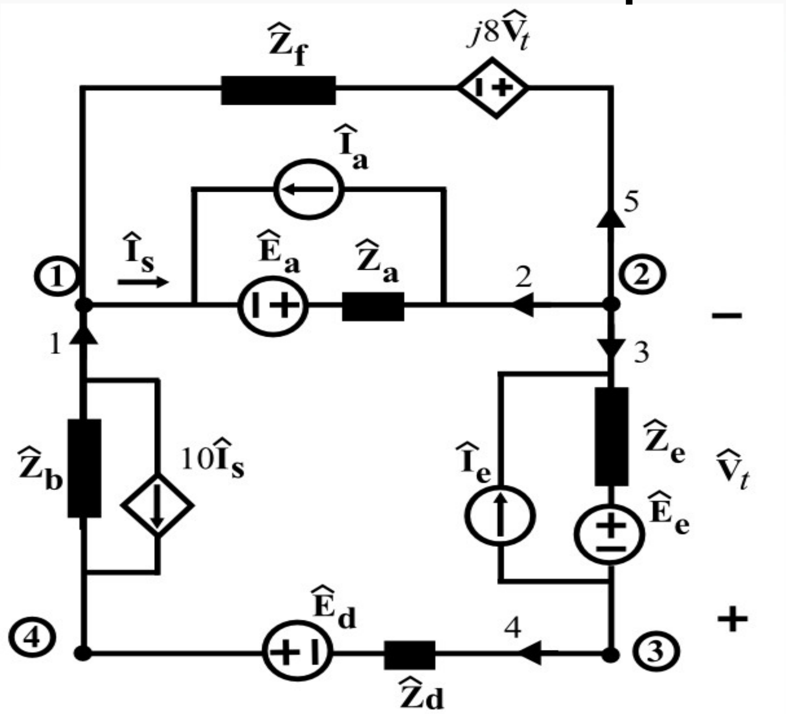


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Exemplo de Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

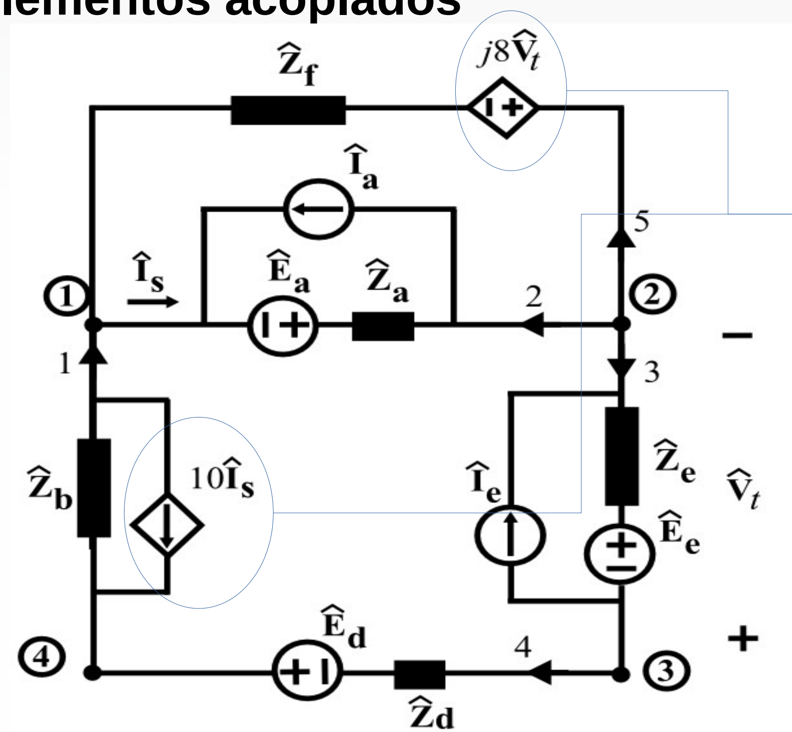


Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



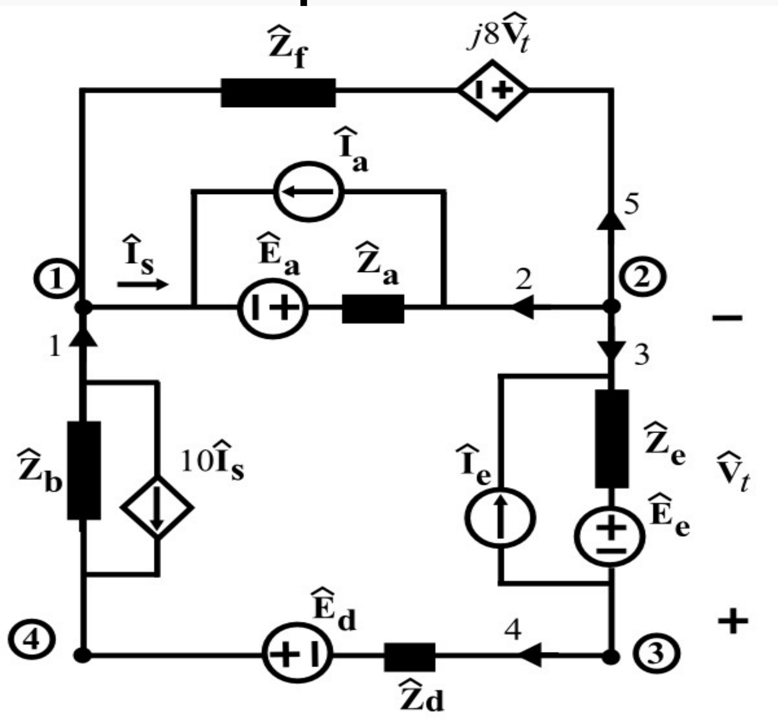
Formularemos por inspeção considerando as fontes dependentes como fontes independentes!

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

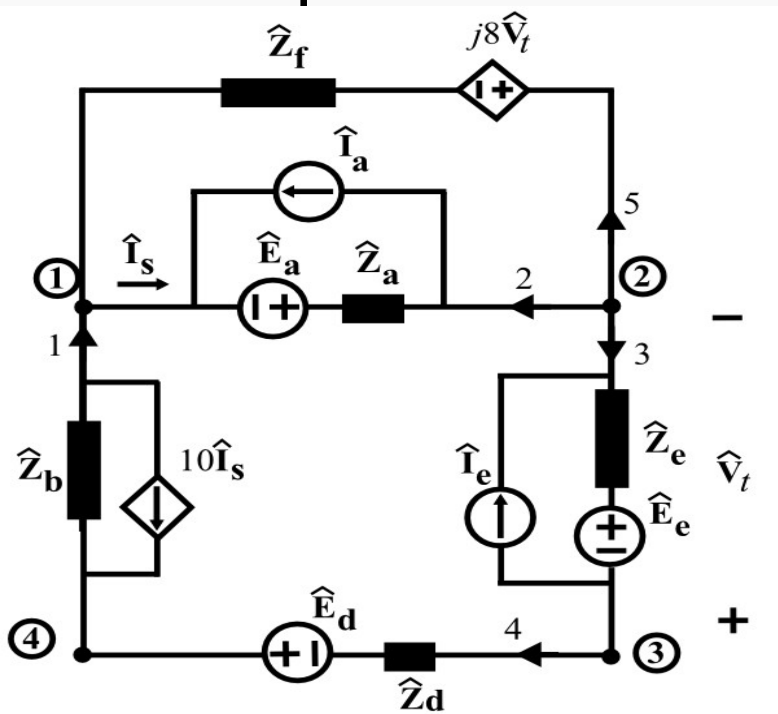


$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



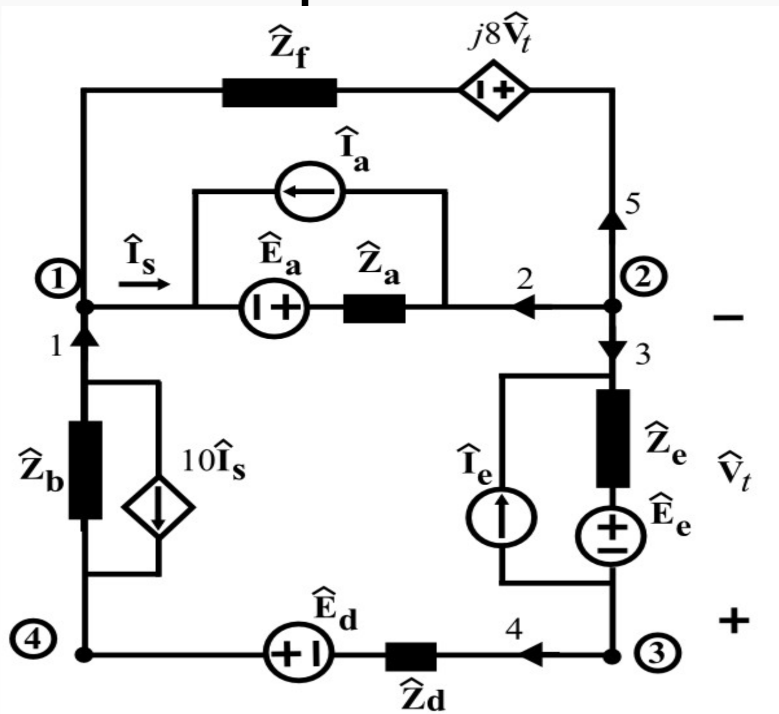
$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



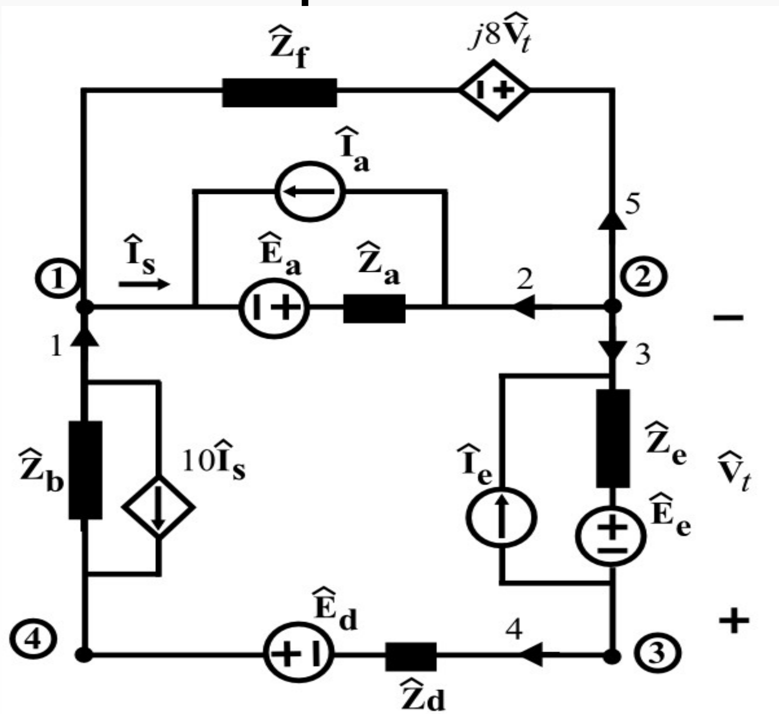
$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_f & -Y_a - Y_f & 0 \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

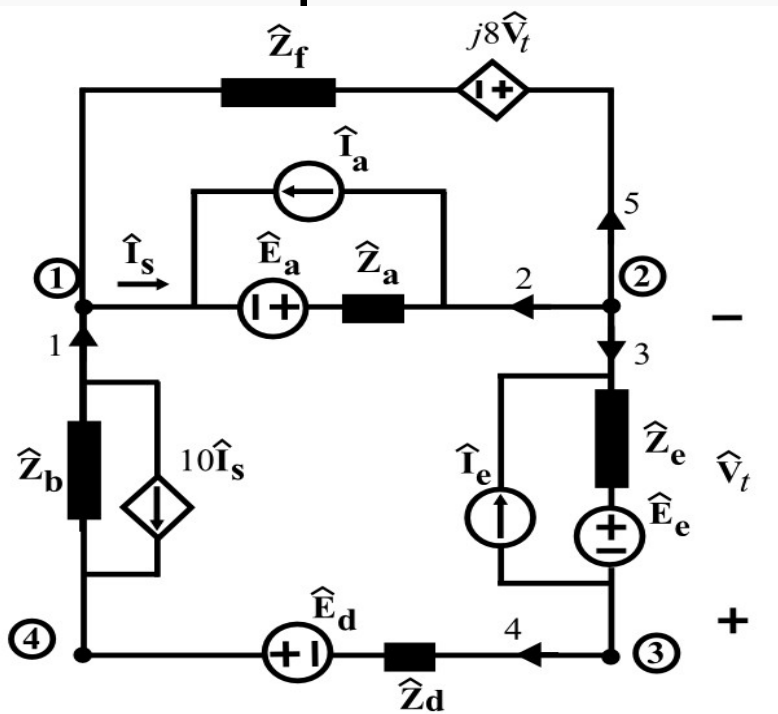
$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_a E_a - Y_f(j8V_t) - 10 I_s \\ -I_a + E_a Y_a + Y_f(j8V_t) + I_e + Y_e E_e \\ -I_e - Y_e E_e - Y_d E_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \boxed{- Y_f(j8V_t) - 10I_s} \\ -I_a + E_aY_a + \boxed{Y_f(j8V_t)} + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix}$$

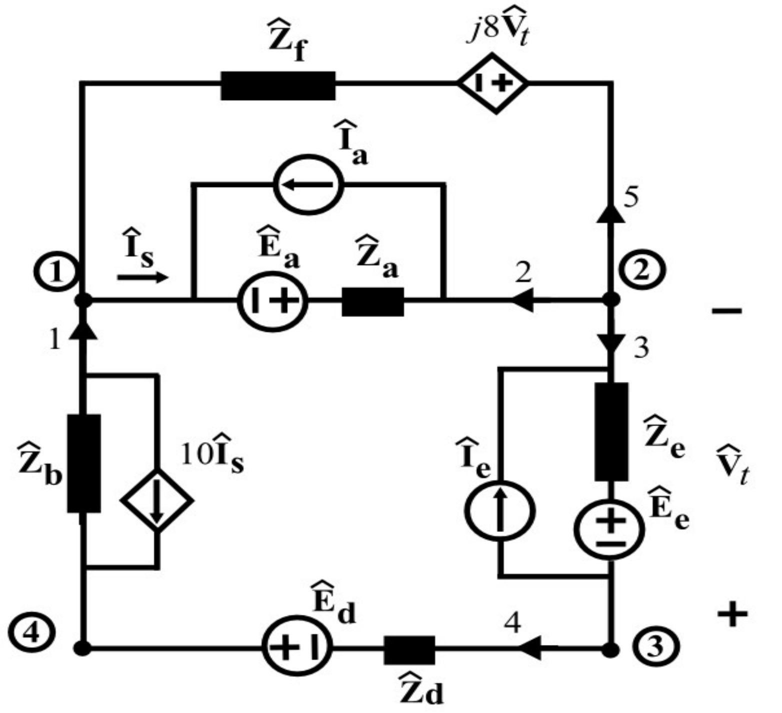
Isolemos os termos das fontes dependentes

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

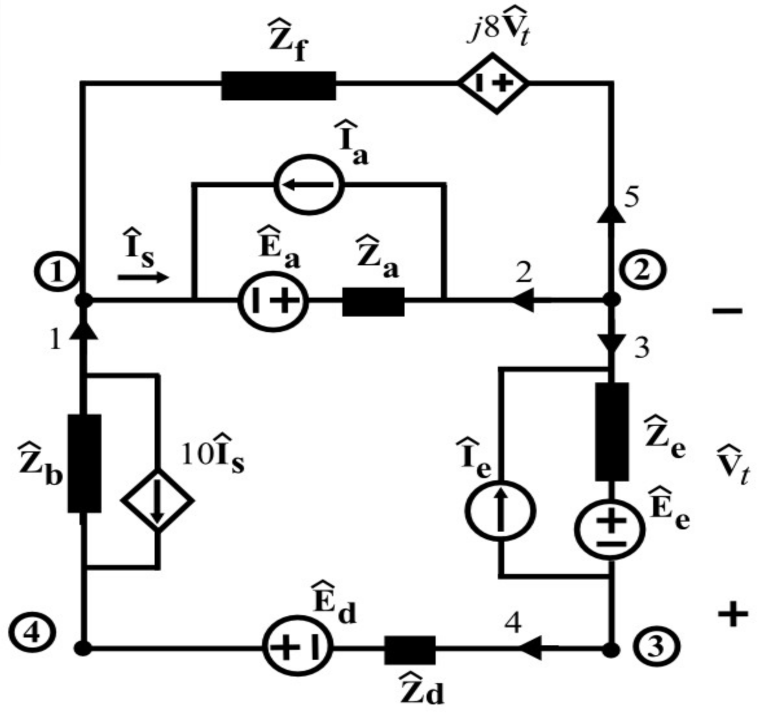
$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

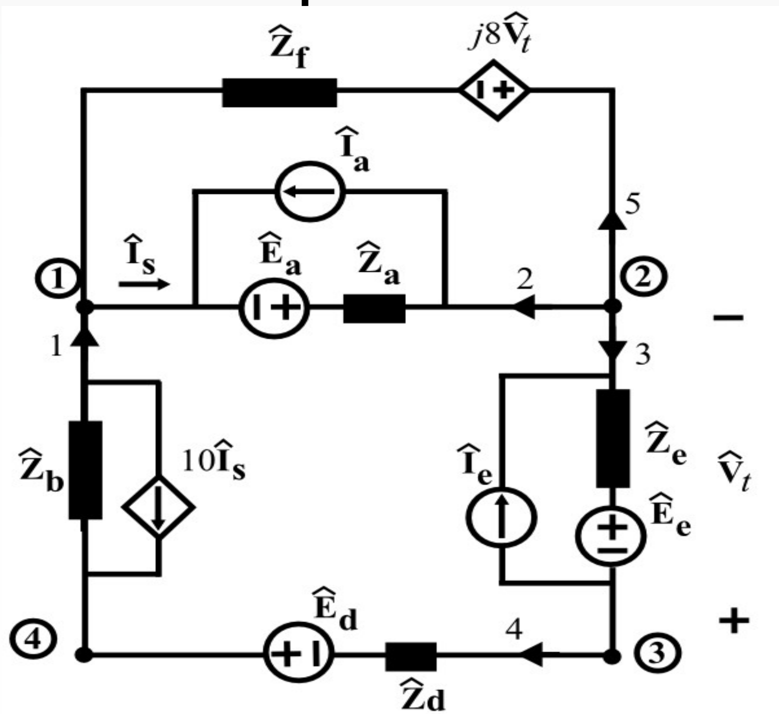
$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_a E_a \\ -I_a + E_a Y_a + I_e + Y_e E_e \\ -I_e - Y_e E_e - Y_d E_d \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

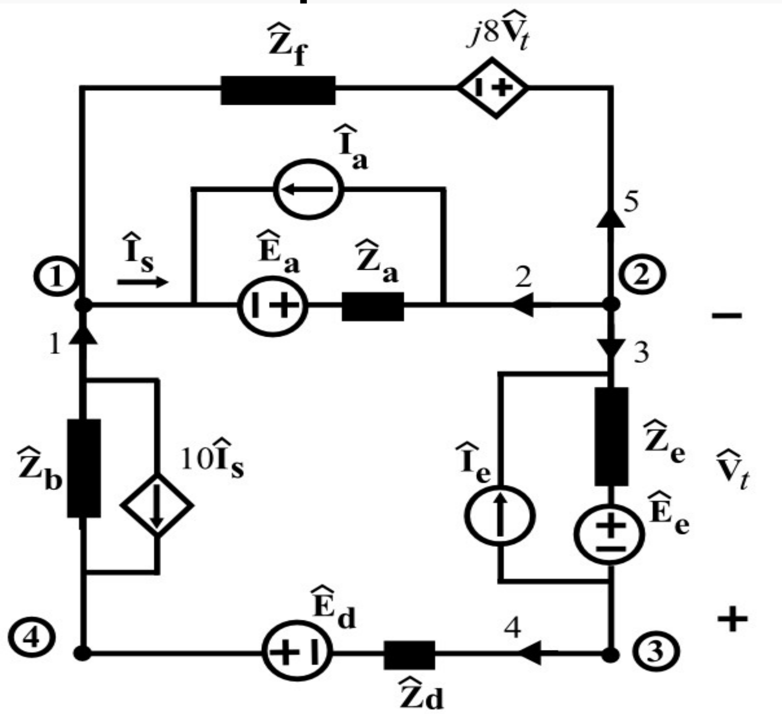
$$\boxed{V_t = e_3 - e_2}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_a E_a \\ -I_a + E_a Y_a + I_e + Y_e E_e \\ -I_e - Y_e E_e - Y_d E_d \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10 I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

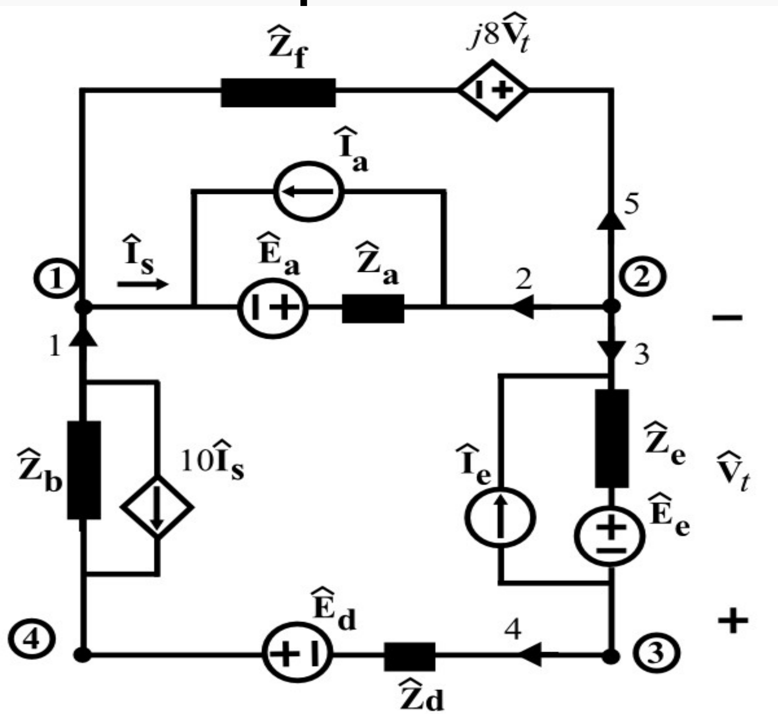
$$I_s = -I_2 = -[I_a + Y_a v_2 - Y_a E_a]$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

$$I_s = -I_2 = -[I_a + Y_av_2 - Y_aE_a]$$

$$I_s = -I_a - Y_av_2 + Y_aE_a$$

$$I_s = -I_a - Y_a(e_2 - e_1) + Y_aE_a$$

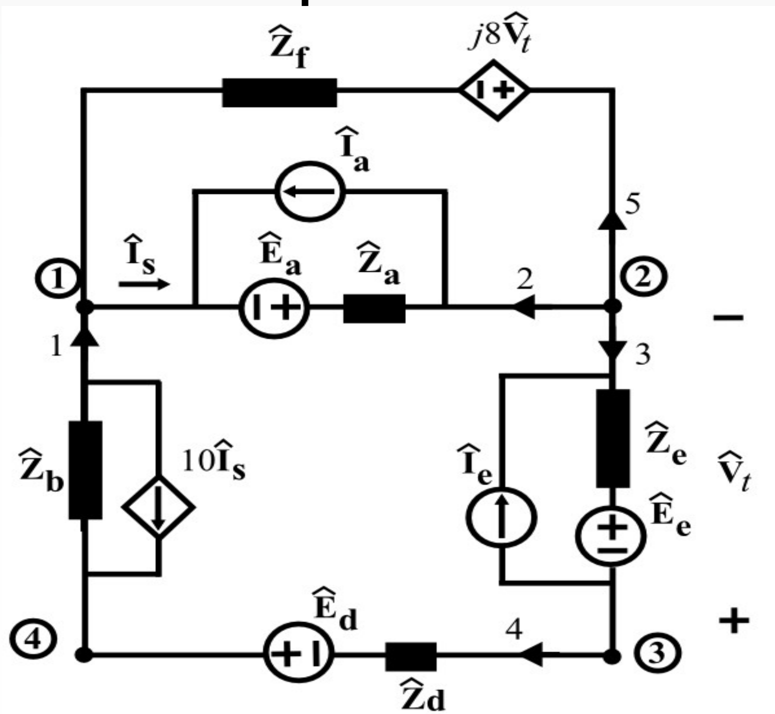
$$I_s = -I_a + Y_aE_a - Y_ae_2 + Y_ae_1$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados



$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_a E_a \\ -I_a + E_a Y_a + I_e + Y_e E_e \\ -I_e - Y_e E_e - Y_d E_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f(j8V_t) - 10 I_s \\ Y_f(j8V_t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estes termos são função das tensões de nó!

$$V_t = e_3 - e_2$$

$$I_s = -I_a + Y_a E_a - Y_a e_2 + Y_a e_1$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e \mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_a E_a \\ -I_a + E_a Y_a + I_e + Y_e E_e \\ -I_e - Y_e E_e - Y_d E_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{fj} 8(e_3 - e_2) - 10(-I_a + Y_a E_a - Y_a e_2 + Y_a e_1) \\ Y_{fj} 8(e_3 - e_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{ff}j8(e_3 - e_2) - 10(-I_a + Y_aE_a - Y_ae_2 + Y_ae_1) \\ Y_{ff}j8(e_3 - e_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{ff}j8e_3 + Y_{ff}j8e_2 - 10I_a - 10Y_aE_a + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_{ff}j8e_3 - Y_{ff}j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8(e_3 - e_2) - 10(-I_a + Y_aE_a - Y_ae_2 + Y_ae_1) \\ Y_f j8(e_3 - e_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8e_3 + Y_f j8e_2 \boxed{-10I_a - 10Y_aE_a} + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_f j8e_3 - Y_f j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Termos função das fontes independentes

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8e_3 + Y_f j8e_2 - 10I_a - 10Y_aE_a + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_f j8e_3 - Y_f j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10I_a - 10Y_aE_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8e_3 + Y_f j8e_2 + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_f j8e_3 - Y_f j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10I_a - 10Y_aE_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8e_3 + Y_f j8e_2 + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_f j8e_3 - Y_f j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a - 10I_a - 10Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_f j8e_3 + Y_f j8e_2 + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_f j8e_3 - Y_f j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_a - Y_aE_a - 10I_a - 10Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{ff}j8e_3 + Y_{ff}j8e_2 + 10Y_ae_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_{ff}j8e_3 - Y_{ff}j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} -9I_a - 11Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{ff}j8e_3 + (Y_{ff}j8 + 10Y_a)e_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_{ff}j8e_3 - Y_{ff}j8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} -9I_a - 11Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{fj}8e_3 + (Y_{fj}8 + 10Y_a)e_2 - 10Y_ae_1 \\ Y_{fj}8e_3 - Y_{fj}8e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} -9I_a - 11Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10Y_a & (Y_{fj}8 + 10Y_a) & -Y_{fj}8 \\ 0 & -Y_{fj}8 & Y_{fj}8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

CEAR
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\begin{bmatrix} Y_a+Y_b+Y_f & -Y_a-Y_f & 0 \\ -Y_a-Y_f & Y_e+Y_a+Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e+Y_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9I_a-11Y_aE_a \\ -I_a+E_aY_a+I_e+Y_eE_e \\ -I_e-Y_eE_e-Y_dE_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10Y_a & (Y_fj8+10Y_a) & -Y_fj8 \\ 0 & -Y_fj8 & Y_fj8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a+Y_b+Y_f & -Y_a-Y_f & 0 \\ -Y_a-Y_f & Y_e+Y_a+Y_f & -Y_e \\ 0 & -Y_e & Y_e+Y_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10Y_a & (Y_fj8+10Y_a) & -Y_fj8 \\ 0 & -Y_fj8 & Y_fj8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9I_a-11Y_aE_a \\ -I_a+E_aY_a+I_e+Y_eE_e \\ -I_e-Y_eE_e-Y_dE_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11Y_a+Y_b+Y_f & -11Y_a-(1+j8)Y_f & j8Y_f \\ -Y_a-Y_f & Y_e+Y_a+(1+j8)Y_f & -Y_e-j8Y_f \\ 0 & -Y_e & Y_e+Y_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9I_a-11Y_aE_a \\ -I_a+E_aY_a+I_e+Y_eE_e \\ -I_e-Y_eE_e-Y_dE_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

$$\mathbf{Y}_e\mathbf{e} = \mathbf{I}_s$$

$$\begin{bmatrix} 11Y_a + Y_b + Y_f & -11Y_a - (1+j8)Y_f & j8Y_f \\ -Y_a - Y_f & Y_e + Y_a + (1+j8)Y_f & -Y_e - j8Y_f \\ 0 & -Y_e & Y_e + Y_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9I_a - 11Y_aE_a \\ -I_a + E_aY_a + I_e + Y_eE_e \\ -I_e - Y_eE_e - Y_dE_d \end{bmatrix}$$

Método dos Nós

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Formulação do Método dos Nós por inspeção

Rede no Regime permanente Senoidal com elementos acoplados

Encontre a tensão **V**a da rede abaixo utilizando formulação pelo método dos nós por inspeção!