Solución a sistemas de Ecuaciones Lineales

26 de septiembre de 2024

1 Eliminación Gaussiana.

Resolver el sistema (Skiba,), (Burden y cols.,):

$A * X = b$

Dónde:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Construir la matriz aumentada que contiene los elementos de la matriz A (los coeficientes $(a_{i,j})$ y los elementos de la matriz b, como sigue:

$$A^{(1)\prime} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ . & . & & . & | & . \\ a_{i,1}^{(1)} & a_{i,2}^{(1)} & & a_{i,n}^{(1)} & | & b_i^{(1)} \\ . & . & & . & | & . \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Además $E_1 = (a_{1,1} \cdots a_{1,n}|b_1)$ y en general $E_i = (a_{i,1} \cdots a_{i,n}|b_i)$ con $i = 1, \cdots, n$, es decir, E_i son los renglones de la matriz aumentada $A^{(1)\prime}$. Si $a_{1,1} \neq 0$, entonces se busca eliminar los elementos $a_{i,j}$ tal que $i > j$ haciendo para la primera iteración (1), $(E_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} * E_1) \rightarrow E_i$ para $i = 2, 3, \cdots, n$, dónde a $m_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}}$ se le conoce como el coeficiente de eliminación, obteniendo una matriz $A^{(2)\prime}$ de la siguiente forma:.

$$A^{(2)\prime} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{3,2}^{(2)} & \cdots & a_{3,n}^{(2)} & | & b_3^{(2)} \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ 0 & a_{i,2}^{(2)} & \cdots & a_{i,n}^{(2)} & | & b_i^{(2)} \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} & | & b_n^{(2)} \\ \end{pmatrix}$$

Para la segunda iteración (2), si $a_{2,2} \neq 0$ se considera ahora $(E_i - \frac{a_{i,2}}{a_{2,2}} * E_2) \to E_i$ para $i = 3, \cdots, n$, obteniendo entonces:

$$A^{(3)\prime} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(3)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ . & . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & . & \cdots & . & | & . \\ 0 & 0 & a_{i,3}^{(3)} & \cdots & a_{i,n}^{(3)} & | & b_i^{(3)} \\ . & . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & . & \cdots & . & | & . \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n}^{(3)} & | & b_n^{(3)} \\ \end{pmatrix}$$

Continuando este proceso hasta n iteraciones obtendremos una matriz triangular superior $A_t^{(n)\prime}$ como:

$$A_t^{(n)\prime} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & a_{2,4}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(3)} & a_{3,4}^{(1)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4}^{(4)} & \cdots & a_{4,n}^{(4)} & | & b_4^{(4)} \\ . & . & . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & | & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \cdots & a_{n,n}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Por lo que nuestro sistema de ecuaciones se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + a_{1,3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
a_{3,3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_{n,n}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}
\end{aligned} \tag{1}$$

El cual puede ser resuelto realizando sustitución hacia atrás al resolver la n-ésima ecuación para x_n :

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{n,n}^{(n)}}$$

Después resolver la (n-1)-ésima ecuación para x_{n-1} considerando el valor conocido de x_n como:

$$a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)}$$

$$\rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

Continuando esta forma de resolver por sustitución hacia atrás tenemos que para $i = n - 1, n-2, n-3, \cdots, 2, 1$ se obtiene que:

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}^{(i)} * x_k}{a_{i,i}^{(i)}}$$

2 Ejemplo.

Considere Fl(10,3,-2,6), resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación Gaussiana, utilizando redondeo.

$$\begin{gathered} 0.1 * 10^{-2}x_1 + 0.183 * 10^2 x_2 = 0.183 * 10^2 \\ 0.523 * 10^2 x_1 + 0.796 * 10^3 x_2 = 0.132 * 10^4 \end{gathered}$$

La matriz aumentada asociada al sistema es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0.1 * 10^{-2} & 0.183 * 10^2 & | & 0.183 * 10^2 \\ 0.523 * 10^2 & 0.796 * 10^3 & | & 0.132 * 10^4 \end{pmatrix}$$

Dado que $a_{1,1} \neq 0$ entonces $m_{2,1} = \frac{0.523*10^2}{0.1*10^{-2}}$ entonces realizamos la siguiente operación $(E_2 - m_{2,1} * E_1) -> E_2$, quedando la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 0.1 * 10^{-2} & 0.183 * 10^2 & | & 0.183 * 10^2 \\ 0 & -0.956 * 10^6 & | & -0.956 * 10^6 \end{pmatrix}$$

Obteniendo entonces el siguiente sistema:

$$\begin{gathered} 0.1 * 10^{-2}x_1 + 0.183 * 10^2 x_2 = 0.183 * 10^2 \\ -0.956 * 10^6 x_2 = -0.956 * 10^6 \end{gathered}$$

Realizando ahora sustitución hacia atrás:

$$\begin{gathered} -0.956 * 10^6 x_2 = -0.956 * 10^6 \\ \to x_2 = 1. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 0.1 * 10^{-2}x_1 + 0.183 * 10^2(1) = 0.183 * 10^2 \\ \to 0.1 * 10^{-2}x_1 = 0.183 * 10^2 - 0.183 * 10^2 \\ \to x_1 = 0 \end{gathered}$$

3 Referencias

Burden, R. L., y cols. (2017). Análisis numérico.
(Páginas 350–362)

Skiba, Y. (2005). *Métodos y esquemas numéricos: un análisis computacional.* UNAM. (Páginas 82 y 101)