Complejidad Computacional Eliminación Gaussiana

Miguel De La Rosa Guzmán

September 2024

Supóngase que se esta considerando la matriz aumentada $(A|b)$ (con A de dimensión nxn y el vector b de dimensión n) de la siguiente forma:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Si aplicamos eliminación Gaussiana a la matriz $(A|b)$, esto consiste en realizar 2 procedimientos llamados eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás (Skiba, 2005).

Eliminación hacia adelante

Primera iteración.

Esto consiste en considerar nuestro elemento pivote dado por $a_{11} \neq 0$, por lo que el coeficiente de eliminación cambiará de acuerdo a cada fila, entonces las operaciones que se realizarán son de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1 \\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1 \\ E_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} E_1 \\ \vdots \\ E_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} E_1 \end{gathered}$$

O visto de otra manera:

$$
\begin{aligned}
&(a_{21}a_{22} \quad \cdots a_{2n} \quad b_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}a_{12} \quad \cdots a_{1n} \quad b_1)\\
&(a_{31}a_{32} \quad \cdots a_{3n} \quad b_3) - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{11}a_{12} \quad \cdots a_{1n} \quad b_1)\\
&(a_{41}a_{42} \quad \cdots a_{4n} \quad b_4) - \frac{a_{41}}{a_{11}}(a_{11}a_{12} \quad \cdots a_{1n} \quad b_1)\\
&\quad\vdots\\
&(a_{n1}a_{n2} \quad \cdots a_{nn} \quad b_n) - \frac{a_{n1}}{a_{11}}(a_{11}a_{12} \quad \cdots a_{1n} \quad b_1)
\end{aligned}
$$

Multiplicaciones

Separemos las multiplicaciones en $(A|b)$, observe que el total de multiplicaciones considerando solo los elementos de A está dado por (n-1)*n y el total de multiplicaciones para el vector b está dado por n-1, en total para la primera iteración tenemos (n-1)*n + n-1 multiplicaciones.

Divisiones

Notemos que los coeficientes de eliminacion están dados por $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \frac{a_{41}}{a_{11}}, \cdots, \frac{a_{n1}}{a_{11}}$, nuevamente como estamos considerando únicamente n-1 filas, entonces el total de divisiones está dado por n-1.

Restas

En cada caso estamos restando los elementos de cada vector renglon por el vector resultante de aplicar las operaciones multiplicaciones/divisiones, lo cual nos deja un total de restas para los elementos de la matriz A de (n-1)*n más las restas del vector b que son un total de n-1, así que para la primera iteración consideramos un total de (n-1)*n + n-1 restas.

Segunda iteración

Debido a las operaciones anteriores nuestra matriz aumentada queda dada de la siguiente forma:

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
0 & a_{22}^{'} & \cdots & a_{2n}^{'} & b_2^{'}\\
0 & a_{32}^{'} & \cdots & a_{3n}^{'} & b_3^{'}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & a_{n2}^{'} & \cdots & a_{nn}^{'} & b_n^{'}
\end{array}\right)
$$

Nuestro elemento pivote dado por $a_{22}^{'} \neq 0$, por lo que el coeficiente de eliminación cambiará de acuerdo a cada fila, entonces las operaciones que se realizarán son de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&(a_{31}^{'} a_{32}^{'} \quad \cdots a_{3n}^{'} \quad b_3^{'}) - \frac{a_{32}^{'}}{a_{22}^{'}}(a_{22}^{'} \cdots \quad a_{2n}^{'} b_2^{'}) \\
&(a_{41}^{'} a'_{42} \quad \cdots a_{4n}^{'} \quad b_4^{'}) - \frac{a_{42}^{'}}{a_{22}^{'}}(a_{22}^{'} \cdots \quad a_{2n}^{'} b_2^{'}) \\
&\quad \vdots \\
&(a_{n1}^{'} a_{n2}^{'} \quad \cdots a_{nn}^{'} \quad b_n) - \frac{a_{n1}^{'}}{a_{22}^{'}}(a_{22}^{'} \cdots \quad a_{2n}^{'} b_2^{'})
\end{aligned}
$$

Multiplicaciones

El total de multiplicaciones considerando solo los elementos de A está dado por (n-2)*(n-1) y el total de multiplicaciones para el vector b está dado por n-2, en total para la primera iteración tenemos (n-2)*(n-1) + n-2 multiplicaciones.

Divisiones

Notemos que los coeficientes de eliminacion están dados por $\frac{a_{32}^{'}}{a_{22}^{'}}, \frac{a_{42}^{'}}{a_{22}^{'}}, \cdots, \frac{a_{n1}^{'}}{a_{22}^{'}}$, nuevamente como estamos considerando únicamente n-2 filas, entonces el total de divisiones está dado por n-2.

Restas

En cada caso estamos restando los elementos de cada vector renglon por el vector resultante de aplicar las operaciones multiplicaciones/divisiones, lo cual nos deja un total de restas como en las multiplicaciones, es decir, (n-2)*(n-1) + n-2

Al final estamos considerando el total de operaciones de cada iteración, debido a que el proceso de eliminación hacía adelante se realiza un total de n-1 veces, entonces obtenemos las siguientes operaciones:

Multiplicaciones

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)+(n-i)$$

Divisiones

$$\sum_{i=1}^{n-1} n-i$$

Restas

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)+(n-i)$$

Por lo que si consideramos los siguientes resultados:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(2n+1)(n+1)$$

Entonces obtenemos que para las multiplicaciones:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)+(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + n - i + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)$$

Por una parte

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 = (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)(2(n-1)+1)((n-1)+1) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(n)$$

Por otro lado

$$2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = (n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots 1 = 2\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2 * \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = n(n-1)$$

Por lo que el total de multiplicaciones está dado por:

$$\frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(n) + n(n-1) = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

Para el total de las divisiones, por lo anterior tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n-1} n-i = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Para el total de las restas observe que teníamos el mismo número de operaciones que las multiplicaciones, por lo que tenemos:

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

Finalmente el total de operaciones para el procedimiento de eliminación hacia delante es considerar la suma entre restas, multiplicaciones y divisiones obtenidas (Novozhilov, n.d.):

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

$$= \frac{4n^3 + 9n^2 - 13n}{6}$$

$$= \frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{13n}{3}$$

Por lo que el procedimiento de eliminación hacia delante en el método de eliminación Gaussiana es de orden $O(n^3)$.

References

Novozhilov, A. S. (n.d.). *Numerical analysis 1.* https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/math488.html.

Skiba, Y. (2005). *Métodos y esquemas numéricos: un análisis computacional.* UNAM. (Páginas 82 y 101)