Solución a sistemas de Ecuaciones Lineales

Miguel De La Rosa Guzmán

September 2024

1 Eliminación Gaussiana por factorización LU.

Resolver el sistema (Grajeda y Álvarez,), (Burden y cols.,), (Skiba,):

$A * X = b$

Dónde:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \text{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Considerar la matriz M_1 dada por:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & & & \\ -m_{3,1} & & 1 & & & & \\ . & & & . & & & \\ . & & & & . & & \\ . & & & & & & \\ -m_{i,1} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Dónde $m_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ con $i = 2, 3, \cdots, n$ es el coeficiente de eliminación, por lo que para la primera iteración (1), M_1 es tal que:

$$M_1 * A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ 0 & a_{3,2}^{(2)} & \cdots & a_{3,n}^{(2)} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & a_{i,2}^{(2)} & \cdots & a_{i,n}^{(2)} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \\ & & & \end{pmatrix}$$

Para la segunda iteración (2) con $i = 3, \cdots, n$:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & -m_{3,2} & 1 & & & \\ \cdot & -m_{4,2} & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & -m_{i,2} & & & & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

La matriz M_2 cumple que:

$$M_2 * M_1 * A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(3)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & a_{i,3}^{(3)} & \cdots & a_{i,n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n}^{(3)} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

En general para el k-ésimo paso en la eliminación para la matriz A está dado por lo siguiente:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ \cdot & 0 & & 1 & \cdot & & \\ \cdot & & & -m_{k+1,k} & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & -m_{n,k} & & & 1 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

La matriz M_k es tal que:

$$M_k * M_{k-1} * \cdots * A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & a_{2,4}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(3)} & a_{3,4}^{(1)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4}^{(4)} & \cdots & a_{4,n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdots & a_{n,n}^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Por lo que considerando k = n y n-1 iteraciones obtenemos:

$$M_{n-1} * M_{n-2} * \cdots * A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & a_{2,4}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(3)} & a_{3,4}^{(1)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4}^{(4)} & \cdots & a_{4,n}^{(4)} \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \cdots & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Dónde $U = M_{n-1} * M_{n-2} * \cdots * A^{(n)}$, que es la matriz triangular superior.

Además si:

$$M_{n-1} * M_{n-2} * \cdots * M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \cdots & & \\ -m_{2,1} & 1 & & & \cdots & & \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & & \cdots & & \\ -m_{4,1} & -m_{4,2} & -m_{4,3} & 1 & \cdots & & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3}. & \cdots & . & -m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M_{n-1}^{-1} * M_{n-2}^{-1} * \cdots * M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \cdots & & \\ m_{2,1} & 1 & & & \cdots & & \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & & \cdots & & \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & 1 & \cdots & & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ . & . & . & . & \cdots & . & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3}. & \cdots & . & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Dónde $L = M_{n-1}^{-1} * M_{n-2}^{-1} * \cdots * M_1^{-1}$, que es la matriz triangular inferior, resultando así que A puede reescribirse por medio de las matrices L y U, es decir A = L*U.

Para encontrar la solución al sistema $LUX = b$, se debe considerar resolver los sistemas $Ly = b$ y $UX = Y$, que es más fácil de resolver pues L y U son matrices triangulares, en el que puede aplicarse simplemente sustitución hacia atrás y hacia adelante.

Para $Ly = b$ se tiene entonces el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ m_{2,1}y_1 + y_2 &= b_2 \\ m_{3,1}y_1 + m_{3,2}y_2 + y_3 &= b_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ m_{n,1}y_1 + m_{n,2}y_2 + m_{n,3}y_3 + \cdots + y_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Conociendo ahora los valores para $y_1, y_2, \cdots, y_n$, podemos encontrar los valores de x resolviendo:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + a_{1,3}^{(1)}x_3 \cdots + a_{1,n}^{(1)}x_n &= y_1 \\
a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,n}^{(2)}x_n &= y_2 \\
a_{3,3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,n}^{(2)}x_n &= y_3 \\
. \\
. \\
. \\
a_{n,n}^{(n)}x_n &= y_n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

2 Ejemplo.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método de desomposición LU.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ -x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x + 4y - 7z &= 10 \end{aligned} \tag{3}$$

La matriz A de coeficientes asociada al sistema es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Primera iteración:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2,1} & 1 & 0 \\ -m_{3,1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Segunda iteración:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{2,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M_2 * (M_1 * A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-52}{5} \end{pmatrix}$$

$$U = M_2 * M_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-52}{5} \end{pmatrix}$$

$$L = M_2^{-1} * M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & m_{2,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L * U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-52}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Resolver ahora los sistemas $L * Y = b$ y $U * X = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 8 \\ -y_1 + y_2 &= 1 \\ 3y_1 - \frac{2}{5}y_2 + y_3 &= 10 \end{aligned} \tag{4}$$

Dónde $y_1 = 8$, $y_2 = 9$, $y_3 = \frac{52}{5}$.

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-52}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -\frac{52}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 5x_2 - x_3 &= 9 \\ -\frac{52}{5}x_3 &= -\frac{-52}{5} \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo que $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

3 Referencias

Burden, R. L., y cols. (2017). Análisis numérico.
(Páginas 350–362)

Grajeda, J. G., y Álvarez, R. M. G. (2007). *Análisis numérico, una untroducción crítica a sus conceptos, métodos y herramientas computacionales.* Vínculos matemáticos, UNAM.

Skiba, Y. (2005). *Métodos y esquemas numéricos: un análisis computacional.* UNAM. (Páginas 82 y 101)