

PICAMI TERCERA ENTREGA

Juan Felipe Restrepo
Pontificia Universidad Javeriana
Email: juanfrestrepo@javeriana.edu.co

Miguel Casallas
Pontificia Universidad Javeriana
Email: casallas.miguel@javeriana.edu.co

Valeria Catalina Peña
Pontificia Universidad Javeriana
Email: Pena_Vcatalina@javeriana.edu.co

I. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ENTREGA

En esta tercera entrega del proyecto PICAMI se desarrolla el análisis dinámico completo del motor radial de tres cilindros tipo Székely SR-3. Se emplean los parámetros geométricos y operativos obtenidos previamente, incluyendo la carrera, el radio de la manivela, la longitud de la biela, la velocidad nominal, la aceleración angular transitoria y la fuerza de combustión considerada en el análisis. La entrega se estructura en tres partes principales: identificación de fuerzas, diagramas de cuerpo libre/cinéticos y descripción cinética del elemento impulsado.



Figura 1. Prototipo de motor radial de 3 cilindros impreso en 3D.

II. PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y DE FUNCIONAMIENTO

Los parámetros utilizados para el análisis dinámico se resumen en la Tabla I.

Cuadro I
PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y OPERATIVOS DEL MOTOR RADIAL PICAMI

Parámetro	Valor
Diámetro del cilindro	$D = 105 \text{ mm}$
Carrera del pistón	$S = 76,2 \text{ mm}$
Radio de manivela	$r = 38,1 \text{ mm}$
Longitud de biela	$l = 152,4 \text{ mm}$
Velocidad nominal	$N = 1750 \text{ rpm}$
Velocidad angular	$\omega = 183,26 \text{ rad/s}$
Aceleración angular	$\alpha = 122,17 \text{ rad/s}^2$
Masa del pistón	$m_p = 1,5 \text{ kg}$
Masa de la biela	$m_b = 0,8 \text{ kg}$
Masa del cigüeñal	$m_c = 12 \text{ kg}$
Fuerza neta	$F_{\text{net}} \approx 24,5 \text{ kN}$
Fuerza de gas pico	$F_{\text{gas}} \approx 26,9 \text{ kN}$

Posiciones críticas del pistón

$$\theta_1 = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$$

Cuadro II
EVALUACIÓN CINEMÁTICA DE LOS PISTONES EN POSICIONES CRÍTICAS

Pistón	Posición (mm)	Velocidad (mm/s)	Aceleración (mm/s ²)
Posición crítica: $\theta_1 = 0^\circ$			
Pistón 1	190.5	0.0	$-1,60 \times 10^6$
Pistón 2	129.7	-5272.6	$0,80 \times 10^6$
Pistón 3	129.7	5272.6	$0,80 \times 10^6$
Posición crítica: $\theta_1 = 120^\circ$			
Pistón 1	129.7	-5272.6	$0,80 \times 10^6$
Pistón 2	129.7	5272.6	$0,80 \times 10^6$
Pistón 3	190.5	0.0	$-1,60 \times 10^6$
Posición crítica: $\theta_1 = 240^\circ$			
Pistón 1	129.7	5272.6	$0,80 \times 10^6$
Pistón 2	190.5	0.0	$-1,60 \times 10^6$
Pistón 3	129.7	-5272.6	$0,80 \times 10^6$

III. FUERZAS Y UBICACIONES DONDE SE APLICAN

Se identifican todas las fuerzas relevantes que actúan en el motor radial en los puntos críticos de operación o puntos muertos superiores (PMS), divididas por componentes principales:

III-A. Fuerzas en el Pistón

En este componente, actúan las fuerzas directas de la combustión y la dinámica del movimiento lineal.

- **Fuerza de los gases (F_{gas}):** Aplicada axialmente sobre la cabeza del pistón. Magnitud pico: $F_{\text{gas}} \approx 26,9 \text{ kN}$.

- **Fuerza de inercia (F_{in}):** Definida como $F_{in} = -m \cdot a_p$. Depende de la aceleración del pistón; cuando los pistones están en las PMS: $a_p = -1600 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_{in} = 2400 \text{ N}$.
- **Peso (F_g):** $F_g = mg = 14,7 \text{ N}$ (comparativamente pequeña).
- **Reacción en el bulón:** Fuerza de contacto entre el pistón y el perno que lo une a la biela. Debido a que el pistón se apoya contra la pared del cilindro (generando una fuerza normal N), la fuerza neta axial se descompone. La fuerza total transmitida al bulón actúa en la dirección de la biela, usando la relación encontrada entre la longitud total de desplazamiento del pistón y el ángulo del cigüeñal se tiene que:

$$F_{bulon} = \frac{F_{neta}}{\cos(\theta_2)} = \frac{F_{neta}}{\sqrt{1 - 0,0625 \sin^2 \theta_1}} \quad (1)$$

Siendo el resultado final en el PMS de cada pistón:

$$F_{bulon} = 24,5 \text{ kN} \quad (2)$$

III-B. Fuerzas en la Biela

La biela transmite los esfuerzos del pistón hacia el eje del cigüeñal, soportando principalmente compresión y flexión.

- **Fuerza del Pistón ($F_{pistón}$):** Es la carga axial transmitida por el bulón al extremo pequeño de la biela. Su magnitud es igual a la fuerza en el bulón (F_{bulon}), actuando a lo largo del eje de la biela.

$$F_{pistón} = F_{bulon} = \frac{F_{neta}}{\cos(\theta_2)} = \frac{F_{neta}}{\sqrt{1 - 0,0625 \sin^2 \theta_1}} \quad (3)$$

Para la posición crítica ($\theta_1 = 0^\circ$) donde $F_{neta} = 24,5 \text{ kN}$, se tiene $F_{pistón} = 24,5 \text{ kN}$.

- **Fuerzas Gravitacionales y de Inercia:** El peso (W_b) es la fuerza gravitacional de la biela. La fuerza de inercia ($F_{in,b}$) es la fuerza reactiva debida a la aceleración lineal (a_{cm}) del centro de masa (CM).

1. Peso (W_b):

$$W_b = m_b \cdot g = 0,8 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 7,85 \text{ N} \quad (4)$$

2. Fuerza de Inercia ($F_{in,b}$):

Evaluando la fuerza de inercia de la biela en la posición crítica $\theta_1 = 0^\circ$, donde la aceleración del centro de masa se approxima a la aceleración del pistón $a_{cm} \approx -1600 \text{ m/s}^2$:

$$F_{in,b} = -m_b \cdot a_{cm} = -(0,8 \text{ kg}) \cdot (-1600 \text{ m/s}^2) \quad (5)$$

$$F_{in,b} = 1,28 \text{ kN} \quad (6)$$

- **Reacción en el Muñón ($F_{muñón}$):** Es la fuerza que ejerce el cigüeñal sobre la cabeza de la biela para mantener el equilibrio dinámico. Haciendo una sumatoria de fuerzas verticales sobre la biela en el PMS ($\sum F_y = 0$):

$$F_{muñón} + F_{in,b} - F_{pistón} - W_b = 0 \quad (7)$$

Despejando la reacción necesaria:

$$F_{muñón} = F_{pistón} + W_b - F_{in,b} \quad (8)$$

$$F_{muñón} \approx 24,5 \text{ kN} + 0,007 \text{ kN} - 1,28 \text{ kN} \approx 23,22 \text{ kN} \quad (9)$$

Esta fuerza (23,22 kN) es la reacción que soporta el cojinete y, por Tercera Ley de Newton, es la magnitud de la fuerza que la biela ejerce sobre el cigüeñal.

III-C. Fuerzas en el Cigüeñal

El elemento final que transforma el movimiento y recibe la carga total. La fuerza transmitida por la biela al muñón (F_{biela}) se descompone en componentes radiales (F_R) y tangenciales (F_T).

- **Ángulo Total de Aplicación (θ_3):** Este ángulo es crítico para la descomposición. Es la suma del ángulo del cigüeñal (θ_1) y el ángulo de la biela (θ_2), justificándose por la geometría del mecanismo biela-manivela al transferir la fuerza F_{biela} al muñón, al evaluarlo en la PMS se tiene que:

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ \quad (10)$$

- **Fuerza Tangencial (F_T):** Es la componente perpendicular al radio de la manivela (r). Esta fuerza es la que produce la rotación del cigüeñal.

$$F_T = F_{biela} \sin(\theta_3) = (23,212 \text{ kN}) \sin(0^\circ) \quad (11)$$

$$F_T = 0 \text{ kN} \quad (12)$$

- **Fuerza Radial (F_R):** Es la componente que actúa a lo largo del radio (r), dirigida hacia o desde el centro del eje. Esta fuerza contribuye a la carga total que deben soportar los cojinetes principales.

$$F_R = F_{biela} \cos(\theta_3) = (23,212 \text{ kN}) \cos(0^\circ) \quad (13)$$

$$F_R = 23,212 \text{ kN} \quad (14)$$

- **Peso del Cigüeñal (W_c):** Fuerza gravitacional que actúa verticalmente en el centro de gravedad del cigüeñal.

$$W_c = m_c \cdot g = 12 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 117,72 \text{ N} \quad (15)$$

IV. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE Y DIAGRAMAS CINÉTICOS

Diagramas de cuerpo libre

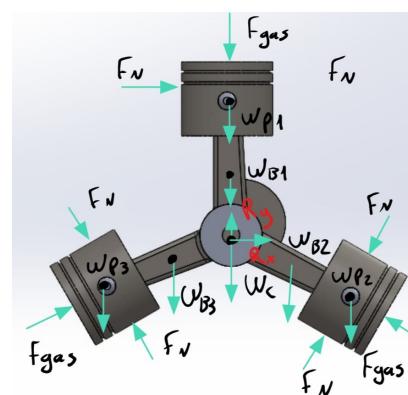


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre general del mecanismo.

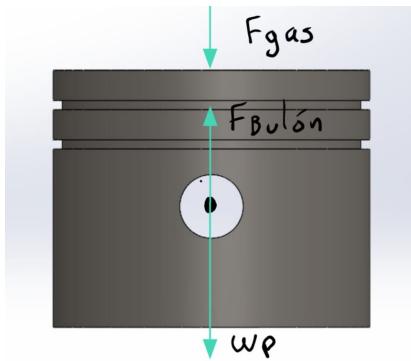


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre del pistón.

Diagramas cinéticos

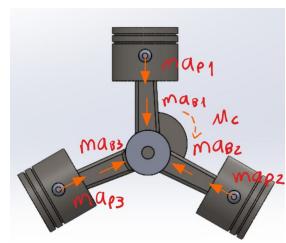


Figura 6. Diagrama cinético del mecanismo.

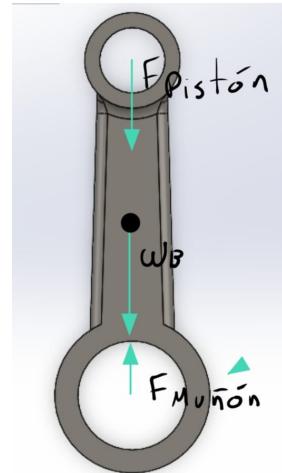


Figura 4. Diagrama de cuerpo libre de la biela.



Figura 7. Diagrama cinético del pistón.

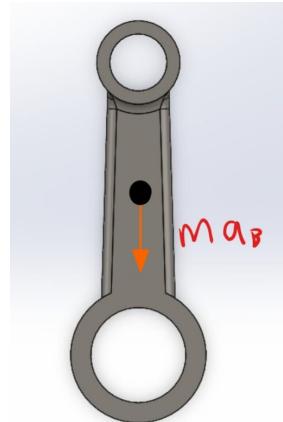


Figura 8. Diagrama cinético de la biela.

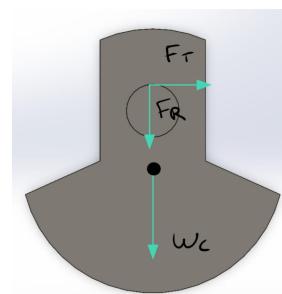


Figura 5. Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal.

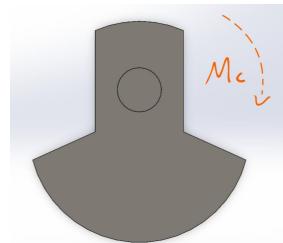


Figura 9. Diagrama cinético del cigüeñal.

V. DESCRIPCIÓN CINÉTICA DEL ELEMENTO

V-A. Identificación del Cigüeñal como Elemento Impulsado

En el análisis dinámico del mecanismo biela-manivela radial, el cigüeñal se define como el elemento impulsado debido a su función como receptor final del flujo de potencia mecánica. Mientras que los pistones actúan como los elementos motrices primarios al convertir la energía termodinámica de la expansión de los gases en trabajo mecánico lineal, el cigüeñal integra estas fuerzas transmitidas secuencialmente por las bielas a través de los muñones. Su rol cinético consiste en transformar el movimiento alternativo de los tres cilindros en un movimiento rotatorio continuo, acumulando el par motor resultante y la energía cinética rotacional necesaria para vencer las cargas externas y sostener el ciclo operativo del motor.

V-B. Planteamiento de la Ecuación Dinámica

El análisis cinético del cigüeñal se rige por el equilibrio dinámico de los momentos actuantes sobre el eje de rotación. Basado en la segunda ley de Newton para cuerpos rígidos, se establece el siguiente modelo matemático simplificado para la aceleración en vacío:

- **Suposiciones del Modelo:**

- Se desprecia el par de carga externa ($M_{carga} \approx 0$) para evaluar la aceleración máxima libre.

- **Ley General de Movimiento:** La aceleración angular (α) es el resultado de la sumatoria de todos los momentos motores dividido por el momento de inercia (I) del conjunto.

$$\sum M_{motores} = I \cdot \alpha \quad (16)$$

- **Ecuación Dinámica Expandida:** Desglosando el momento total como la suma de las contribuciones individuales de los tres cilindros, y recordando que el momento es el producto de la fuerza tangencial (F_T) por el radio de la manivela (R), se obtiene la ecuación del sistema mostrada en la Figura de análisis:

$$F_{T1} \cdot R + F_{T2} \cdot R + F_{T3} \cdot R = I\alpha \quad (17)$$

V-C. Modelo Matemático del Par Motor Desfasado

Para determinar la contribución exacta de cada cilindro al movimiento del cigüeñal, se desarrolla un modelo matemático que relaciona el ángulo de entrada (θ_1) con el torque total, incorporando la restricción geométrica de la biela y el desfase angular del motor radial.

- **1. Relación Geométrica (Restricción de Posición):**

Partiendo de la geometría del mecanismo biela-manivela, la posición angular de la biela (θ_2) está vinculada al ángulo del cigüeñal (θ_1) por la ley de senos:

$$r \sin(\theta_1) = L \sin(\theta_2) \quad (18)$$

Despejando θ_2 , obtenemos la función de oblicuidad:

$$\theta_2(\theta_1) = \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin \theta_1\right) \quad (19)$$

■ **2. Definición de la Fuerza Tangencial (F_T):** La fuerza tangencial es la componente efectiva de la fuerza de la biela (F_{biela}) que genera rotación. Esta actúa con un ángulo $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$. Sustituyendo la expresión de θ_2 :

$$F_T(\theta_1) = F_{biela} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (20)$$

$$F_T(\theta_1) = F_{biela} \cdot \sin\left(\theta_1 + \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin \theta_1\right)\right) \quad (21)$$

■ **3. Ecuación General de Momentos (Superposición):** El cigüeñal recibe simultáneamente el par de los tres cilindros. Dado que es un motor radial simétrico, los eventos de combustión ocurren con una separación de 120° . La ecuación dinámica fundamental ($\sum M = I\alpha$) se expande sumando los torques individuales, donde cada término se evalúa con su respectivo desfase angular:

$$\sum M = T_1(\theta_1) + T_2(\theta_1 + 120^\circ) + T_3(\theta_1 + 240^\circ) = I\alpha \quad (22)$$

Sustituyendo $T = F_T \cdot R$ y expandiendo cada término de la función anterior:

$$I\alpha = R \cdot \left[F_{biela}(\theta_1) \cdot \sin\left(\theta_1 + \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin \theta_1\right)\right) + F_{biela}(\theta_1 + 120^\circ) \cdot \sin\left((\theta_1 + 120^\circ) + \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin(\theta_1 + 120^\circ)\right)\right) + F_{biela}(\theta_1 + 240^\circ) \cdot \sin\left((\theta_1 + 240^\circ) + \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin(\theta_1 + 240^\circ)\right)\right) \right] \quad (23)$$

V-D. Ecuación Dinámica de la Fuerza en la Biela

A diferencia del análisis estático simplificado, en la operación real del motor la fuerza axial que soporta la biela (F_{biela}) es una magnitud altamente variable que depende de la posición instantánea del cigüeñal (θ_1). Su comportamiento está dado por la interacción entre la termodinámica, la inercia y la geometría.

La expresión analítica exacta se define como:

$$F_{biela}(\theta_1) = \frac{F_{neta}(\theta_1)}{\cos(\theta_2)} = \frac{F_{gas}(\theta_1) + F_{inercia}(\theta_1)}{\sqrt{1 - 0,0625^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (24)$$

VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS GRÁFICOS

A continuación se presentan las curvas características del comportamiento dinámico del mecanismo durante un ciclo completo de 720° .

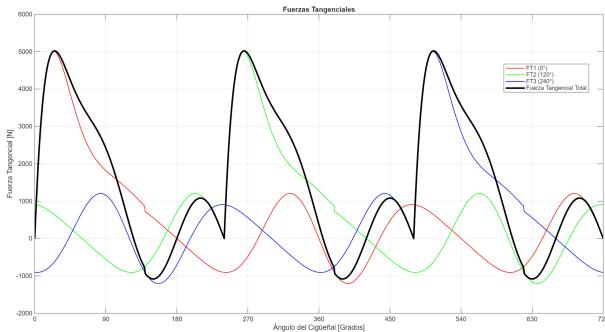


Figura 10. Superposición de las fuerzas tangenciales dinámicas (Gas + Inercia) en los tres cilindros.

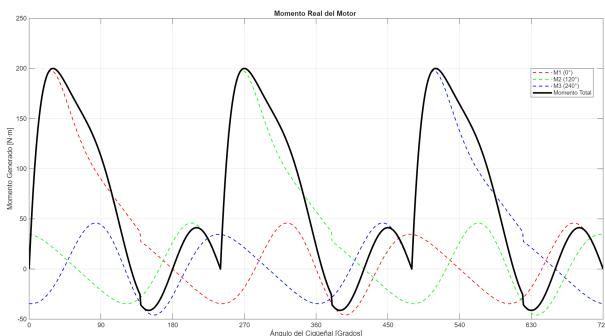


Figura 11. Evolución del Momento Real (Torque) del motor durante el ciclo de trabajo.

En la Figura 10 se observa la evolución de las fuerzas tangenciales. El comportamiento de cada cilindro se caracteriza por un pico pronunciado (≈ 5 kN) que corresponde a la carrera de expansión, donde la presión de los gases de combustión ejerce su máxima potencia. Fuera de este intervalo, las curvas presentan oscilaciones de menor amplitud dominadas por las fuerzas de inercia de las masas recíprocas. La línea negra representa la suma vectorial de los tres cilindros; su perfil mayoritariamente positivo confirma que, gracias al desfase de encendido de 240° (necesario para distribuir los tres eventos de potencia uniformemente en el ciclo de 720°), los eventos de potencia se superponen lo suficiente para mantener una fuerza impulsora continua, minimizando los "baches" de potencia.

Por su parte, la Figura 11 ilustra el par motor resultante. Dado que el momento es producto de la fuerza tangencial por el radio de manivela, la curva sigue la misma tendencia. Es importante notar las zonas donde la curva negra desciende por debajo de cero (momento negativo); estos valles representan el trabajo consumido por el motor para vencer la compresión de la mezcla en un cilindro y la resistencia inercial de los pistones que están acelerando. Sin embargo, la magnitud de los picos positivos de momento (generados por la combustión) es significativamente mayor que estos valles negativos, resultando en un par medio positivo que garantiza la aceleración angular (α) y el funcionamiento autónomo del motor.

REFERENCIAS

- [1] Szekely Aircraft and Engine Co., "Szekely SR-3 Engine Specifications," 1931.
- [2] J. Taylor, *Jane's All the World's Aircraft 1933*. Sampson Low, London, 1933.
- [3] A. H. Slocum, *Precision Machine Design*, McGraw-Hill, 1992.
- [4] R. L. Norton, *Kinematics and Dynamics of Machinery*, 3rd ed., McGraw-Hill Education, New York, NY, 2021.
- [5] J. B. Heywood, *Internal Combustion Engine Fundamentals*, 2nd ed., McGraw-Hill Education, New York, NY, 2018.
- [6] J. E. Shigley, C. R. Mischke, and R. G. Budynas, *Mechanical Engineering Design*, 11th ed., McGraw-Hill Education, New York, NY, 2020.
- [7] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Pearson, Hoboken, NJ, 2017.
- [8] C. F. Taylor, "The Dynamics of the Radial Engine," *SAE Trans.*, vol. 49, no. 4, pp. 401–412, 1941.