

Universidad de Guanajuato - DICIS

Tarea 3. Métodos numéricos

Daniel Juárez Robles

Mayo - Agosto 2014

Fecha de entrega: **Martes, 3 de Junio del 2014**

1. Considere la expresión

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

y suponga que $x \neq \pm 1$.

- (a) ¿Para qué rango de valores de x es difícil calcular esta expresión de manera exacta, en la aritmética de punto flotante?
- (b) Reescribir la expresión de tal manera que, para el intervalo para x de la parte (a), el cálculo sea más preciso en la aritmética de punto flotante.

2. La función seno está dada por la serie infinita

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- (a) ¿Cuáles son el error hacia atrás y el error hacia adelante si se aproxima la función seno usando sólo los primeros dos términos en la serie, i.e., $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!}$ para $x = 0.1, 0.5$ y 1.0 ?
 - (b) ¿Cuáles serían el error hacia adelante y hacia atrás si se aproxima la función seno usando los primeros cuatro términos de la serie, i.e., $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ para $x = 0.1, 0.5$ y 1.0 ?
3. En la mayoría de los sistemas de punto flotante, una rápida aproximación al valor de redondeo puede ser obtenido evaluando la expresión

$$\epsilon_{mach} \approx |3 * (4/3 - 1) - 1|.$$

- (a) Explique por qué este truco funciona.
 - (b) Intente esta operación en una variedad de computadoras (ambas, de simple y doble precisión), calculadoras y celulares para confirmar que esto funciona. Reporte en que dispositivos lo intento y el resultado que obtuvo.
4. Considere la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- (a) Pruebe que la serie es divergente. *Hint:* Agrupe los términos en conjuntos que contengan términos desde $1/(2^{k-1} - 1)$ hasta $1/(2^k)$, para $k = 1, 2, \dots$
 - (b) Explique por qué la suma de la serie en la aritmética de punto flotante conduce a una suma finita.
5. Suponga que necesita generar $n + 1$ puntos igualmente espaciados en el intervalo $[a, b]$, con espaciamiento $h = (b - a)/n$.

- (a) En la aritmética de punto flotante, ¿cuál de los siguientes métodos,

$$x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 1, \dots, n$$

ó

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n$$

es mejor, y por qué?

- (b) Escriba un programa en donde se implementen ambos métodos y realice un ejemplo, digamos, $a = 0$ y $b = 1$, que ilustre la diferencia entre ambos.

6. Escriba un programa que calcule la constante matemática e , la base de los logaritmos naturales, a partir de su definición

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Específicamente, calcule $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 20$. Determine el error entre cada una de las aproximaciones comparandolas con el valor real de e^1 . ¿El error siempre decrece conforme n crece? Explique sus resultados.

7. (a) Escriba un programa que calcule la función exponencial e^x usando la serie infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(b) Sumando en el orden de los números naturales, ¿qué criterio de paro usaría?

(c) Prueba tu programa para

$$x = \pm 1, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20$$

y compara tus resultados con la función e^x . Explica tus resultados.

8. Escriba un programa que resuelva la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ usando la fórmula cuadrática estándar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o la fórmula alternativa

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Su programa debe pedir los valores de los coeficientes a , b y c como entradas y debe de producir las dos raíces de la ecuación como salida. El programa debe detectar cuando las raíces sean imaginarias, sin necesidad de usar aritmética compleja. Haz tu programa robusto para que este protegido contra valores inusuales de entrada. Cualquier raíz que esté dentro del rango del sistema de punto flotante debe ser calculado, aun cuando la otra raíz este fuera de rango. Prueba tu programa usando los siguientes valores para los coeficientes:

a	b	c
6	5	-4
6×10^{30}	5×10^{30}	-4×10^{30}
0	1	1
1	-10^5	1
1	-4	3.999999
10^{-30}	-10^{30}	10^{30}

“Es más fácil creer que pensar”

$$\heartsuit^\infty \hookrightarrow \mathfrak{s}$$