Análise

Folha 8 2019/20

Cálculo Integral em $\mathbb{R}^3$: Integração Tripla

1. Calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\, d(x,y,z)$ com $\mathcal{D} = [0,2]^3$;

   (b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} z\mathrm{e}^{x+y}\, dV$, com $\mathcal{D} = [0,1]^3$;

   (c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} xy\, d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\right\}$;

   (d) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\, dV$, com $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 3\right\}$.

2. Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z = a - x^2 - y^2$, com $a > 0$, e pelo plano XOY.

3. Construa um integral triplo que expresse o volume do elipsoide definido pela equação $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

4. Faça um esboço da região (de $\mathbb{R}^3$) de integração e reescreva o integral com ordem de integração $dx\, dy\, dz$:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$;

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$.

5. Calcule, mudando se necessário a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2\, dz\, dy\, dx.$$

6. Seja $\mathcal{G}$ um sólido, no primeiro octante de um referencial cartesiano, obtido a partir de um cilindro definido por $y^2 + z^2 = 1$ que foi seccionado pelos planos definidos por $y = x$ e $x = 0$.

   Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{G}} z\, dV$.

7. Considerando $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y \geq 0,\ \sqrt{x+y}+1 \leq z \leq 2\right\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \sqrt{xy}\, d(x,y,z),$$

   usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2, v^2, w) \end{array}$$

8. Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + 2y + z \leq 2,\ 0 \leq x + y - z \leq \tfrac{\pi}{4},\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

   (a) Calcule o volume de $\mathcal{D}$.

   (b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{x+2y+z}\, d(x,y,z)$.

9. Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

10. Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 2 \leq z \leq 3\right\}$. Use coordenadas cilíndricas para determinar

$$\iiint_{\mathcal{D}} z e^{x^2+y^2}\, d(x,y,z).$$

11. Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - (x^2+y^2)\right\}$. Calcule, usando coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x+y)\, d(x,y,z).$$

12. Seja $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.

13. Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ e à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

14. Seja a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas condições $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$.

   (a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

   (b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d(x,y,z)$.

15. Calcule o volume de $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 6,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - y^2\right\}$.

16. Usando um sistema de coordenadas adequado, calcule o volume das regiões sólidas delimitadas

   (a) pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

   (b) pelas superfícies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;

   (c) pelos parabolóides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$;

   (d) pelo plano $x = 1$ e pelo parabolóide $y^2 + z^2 = 4x$;

   (e) pelo plano $x = 9$ e pelo parabolóide elíptico $4y^2 + 9z^2 = 4x$;

   (f) pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelas superfícies cilíndricas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

17. Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^3$ de raio $r > 0$.