



Nome

Número

As respostas aos grupos II e III são dadas na folha do enunciado.

I

Questão 1. [2 valores] Justifique que a equação $\log x^3 = x - 2$ possui exatamente duas soluções reais.

Questão 2. [3 valores] Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{P}_{3,1}(x) = x^3 + x$$

é o polinómio de Taylor de f de ordem 3 em torno do ponto 1.

- a) Obtenha os valores de $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ e $f'''(1)$.
- b) Obtenha o polinómio de Taylor de f de ordem 2 em torno do ponto 1.

Questão 3. [4 valores] Calcule:

- a) $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x} dx$;
- b) $\int x \operatorname{sh} x dx$.

Questão 4. [2 valores] Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^2} dt$. Calcule $F'(x)$.

Questão 5. [3 valores] Considere a região do plano

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 - x \leq y \leq 3x - x^2\}.$$

- a) Apresente um esboço gráfico da região R .
- b) Calcule a medida da área da região R .
- c) **Escreva** uma expressão integral que permita calcular a medida do perímetro da região R .

Questão 6. [2 valores] Determine a natureza do integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

II

Neste grupo cada resposta certa vale 0.5 valor e cada resposta errada -0,5 valores.

[2 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

	V	F
a) Se f é uma função derivável e F uma sua primitiva então $f'(x) = F(x)$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $\int_0^1 f(x) dx = 0$ então $\exists c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Se f é integrável no intervalo $[-1, 1]$ então $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq 0$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ então o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

III

Neste grupo cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada -0,25 valores.

[2 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique a afirmação verdadeira.

- a) Identifique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{1 - \cos x}$:
- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| <input type="radio"/> 0; | <input type="radio"/> $+\infty$; |
| <input type="radio"/> -1; | <input type="radio"/> $-\infty$. |
- b) Considere o integral $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$. A mudança de variável $x = \ln(t^2 + 1)$ permite escrever o integral como:
- | | |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| <input type="radio"/> $\int_0^1 t dt$; | <input type="radio"/> $\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt$; |
| <input type="radio"/> $\int_0^{\ln 2} \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt$; | <input type="radio"/> $\int_0^{\ln 2} t dt$. |