Universidade do Minho — MIEInf

Departamento de Matemática

Análise

Folha 3 — 2019/20

Derivadas

1. Determine a derivada direcional de cada uma das funções, no ponto P e segundo um vetor unitário com a direção e sentido de $\vec{v}$.

   (a) $f(x,y) = 4 - x^2 - \dfrac{1}{4}y^2$, $P = (1,2)$ e $\vec{v} = \cos\dfrac{\pi}{3}\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\,\vec{e}_2$

   (b) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(2y)$, $P = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\vec{v} = (3,-4)$

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$

2. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy^2 + x$, calcule, usando a definição:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)$ (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

3. Calcule as derivadas parciais de 1.ª ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

   (a) $f(x,y) = y^2 e^{3x}$

   (b) $g(x,y) = (3xy + 2x)^5$

   (c) $f(x,y) = e^{x+3y} \operatorname{sen}(xy)$

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^3}{z}$

   (e) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

   (f) $\rho(\phi,\theta) = \phi \cos\phi \operatorname{sen}\theta$

   (g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2y^3)$

   (h) $g(x,y,z) = \ln(e^x + z^y)$

   (i) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^3 + e^z}{x^3y - e^z}$

4. Para cada uma das funções seguintes, calcule, se existirem, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \pi & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. Encontre o vetor gradiente das seguintes funções (e no ponto assinalado, se for esse o caso):

   (a) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x-y}$, em $(3,1)$

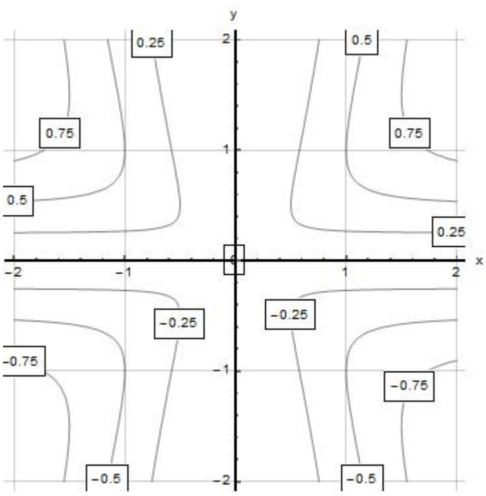
   (b) $f(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$

   (c) $f(x,y) = y\ln x + xy^2$, em $(1,2)$

   (d) $f(x,y,z) = e^{-x}\operatorname{sen}(z+2y)$, em $\left(0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

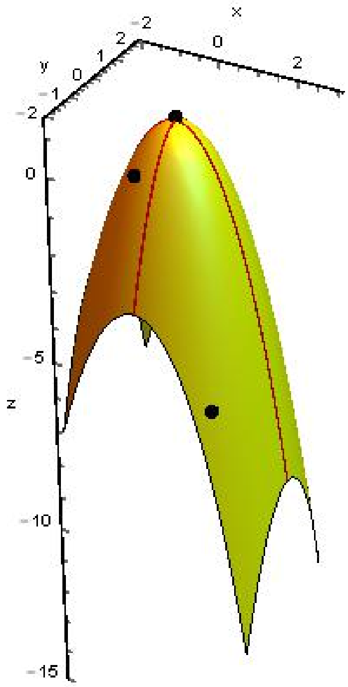
   (e) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1}$

   (f) $f(x,y,z) = (x-y)\cos(\pi z)$



6. Atente no diagrama de nível, de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, anexo. Indique o sinal de $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_x(-1,1)$, $f_y(-1,1)$, $f_x(-1,-1)$, $f_y(-1,-1)$, $f_x(1,-1)$ e $f_y(1,-1)$.

7. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, representada graficamente pela figura anexa, indique o sinal de cada uma das derivadas parciais de f, para cada um dos três pontos assinalados da superfície.



8. Mostre que

   (a) $u(x,y) = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$ (com A, B e $C \in \mathbb{R}$) satisfaz a equação $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4u$

   (b) se $P(T,V) = k\dfrac{T}{V}$ (com $k \in \mathbb{R}$), então $\quad V\dfrac{\partial P}{\partial V} = -P \quad$ e $\quad T\dfrac{\partial P}{\partial T} = P$

   (c) se $h(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, então $\quad h_x + h_y + h_z = 1$

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (a) Verifique que f possui derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique que f não é contínua na origem e conclua que f não é diferenciável na origem.

   (c) Sendo $v = (\alpha, \beta)$, mostre que existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ se e só se $\alpha\beta = 0$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    (a) Mostre que existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$, $\forall a, u \in \mathbb{R}^2$ com $\|u\| = 1$.

    (b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

    (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0,0)$.

(c) Verifique que f é diferenciável em $(0,0)$.

12. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Mostre que:

(a) f é contínua;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)=f(u)$, para todo o vetor unitário u de $\mathbb{R}^2$.

13. Calcule as derivadas parciais de 2.ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

(a) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

(b) $f(x,y)=\cos(xy^2)$;

(c) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy^2}+y^3x^4$;

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2 x+\mathrm{e}^{-y}}$.

14. Mostre que a função $g(x,t)=2+\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} x$ satisfaz a equação do calor $\dfrac{\partial g}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

15. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

(a) $f_x(x,y)=2x^3 \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=yx^2+x$;

(b) $f_x(x,y)=x\ \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=y\ \operatorname{sen} x$.