Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2019/2020

Exercício 2.1 Determine o interior, a aderência, a fronteira e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos e indique quais são abertos e quais são fechados:

a) $\mathbb{N}$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $\mathbb{Z}$;
d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
e) $\mathbb{Q}$;
f) $[0, 2[$;
g) $[0, 2]$;
h) $]0, 2[$;
i) $\mathbb{Q} \cap [-2, 0[$;
j) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$;
k) $]0, 3[\setminus \{1\} \cup \{4, 5\}$;
l) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercício 2.2 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

a) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto então A não é limitado;
b) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $B \subseteq \mathbb{R}$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;
c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não são abertos nem fechados então $A \cap B$ não é aberto nem fechado;
d) o conjunto $A = \,]0, 4[\, \cap \mathbb{Q}$ é aberto;
e) o conjunto $A = [0, 7] \cap \mathbb{Q}$ é fechado;
f) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 - x^2 < 1\}$ é limitado superiormente;
g) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 7\}$ é fechado e limitado.

Exercício 2.3 Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, a aderência, a fronteira, o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

a) $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 50\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} : x < |x|\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\}$;
f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+2} > 2\right\}$;
g) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - 1| \leq 4\}$;
h) $\{x \in \mathbb{Q} : |x| < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$;
i) $\{x \in \mathbb{Q} : |x + 4| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\}$;
j) $[0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercício 2.4 Quando possível, apresente um subconjunto A de $\mathbb{R}$ que:

a) não seja aberto nem fechado;
b) seja simultaneamente aberto e fechado;
c) seja aberto e limitado;
d) seja fechado e não limitado;
e) tenha o interior vazio e seja não limitado;
f) seja limitado mas não seja aberto nem fechado;
g) não contenha o seu derivado;
h) coincida com o seu derivado;
i) tenha um único ponto de acumulação;
j) seja limitado e cujo ínfimo pertença ao seu interior;
k) tenha apenas dois pontos de acumulação;
l) seja fechado e tal que $\overline{\mathring{A}} \neq A$;
m) seja aberto e tal que $\mathring{\overline{A}} \neq A$;
n) coincida com a sua fronteira;
o) a sua fronteira seja o conjunto vazio.