

## 1.2 Generalidades sobre funções reais de variável real

Definição de função real de variável real

Operações algébricas

Composição de funções

Restrição e prolongamento de uma função

Características geométricas

Função inversa

### Definição

- [Função real de variável real] Chama-se **função real de variável real** a um terno  $D, E$  e  $f$  onde  $D$  e  $E$  são dois subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}$ , e  $f$  é de uma lei de formação (regra de correspondência) que a cada elemento  $x$  de  $D$  associa um único elemento  $f(x)$  de  $E$ .
- denota-se a função por  $f : D \longrightarrow E$ ;
  - usar-se-á as notações  $x \mapsto f(x)$  ou  $x \rightsquigarrow f(x)$  para indicar que o elemento  $x$  de  $D$  é transformado por  $f$  no elemento  $f(x)$  de  $E$ ;
  - o conjunto  $D$  designa-se **domínio** da função;
  - o conjunto  $E$  designa-se **conjunto de chegada** da função

► Seja  $f : D \longrightarrow E$  e  $D, E \subset \mathbb{R}$  não vazios. Nestas condições

- a imagem ou **contradomínio** de  $f$  é o subconjunto de  $\mathbb{R}$  definido por

$$\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Para o contradomínio, usa-se as notações

$$\text{CD}_f \quad \text{ou} \quad f(D).$$

Se  $A \subset D$  tem-se  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ .

- o **gráfico** de  $f$  é o conjunto  $G_f$  dos pares ordenados  $(x, f(x))$  com  $x \in D$ , isto é,

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

## Observação

- $D \subset \mathbb{R}$  significa que  $D$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ .
- $f : D \longrightarrow E$ ,  $D, E \subset \mathbb{R}$  significa que a função  $f$  a cada elemento de  $D$  faz corresponder um número real em  $E$ .
- Quando não houver dúvidas denotar-se-á a função  $f : D \longrightarrow E$  simplesmente por  $f$ .
- Uma função pode ser representada de diferentes formas
  - tabelas
  - gráficos
  - leis de formação
  - ...

## Casos particulares

►  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  com

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_0, \dots, a_n$  são números reais tais que  $a_n \neq 0$ , denomina-se **função polinomial de grau  $n$** .

- **[Polinómio de grau zero]** Define-se polinómio de grau zero como sendo uma **função constante**, ou seja

$$f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

O contradomínio de  $f$  é o conjunto  $\text{CD}_f = \{a\}$  e o gráfico de  $f$  representa-se como os pontos da reta definida por  $y = a$ .

► Uma **função racional**  $f$  é uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde  $p$  e  $q$  são funções polinomiais e cujo domínio é o conjunto  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ .

► O **valor absoluto** é a função  $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por

$$|x| := \max\{-x, x\} = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

► A **função identidade** é a função  $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ .

# Igualdade de funções

- Sejam  $A, B, E, F \subset \mathbb{R}$  e

$$f : A \longrightarrow E, \quad g : B \longrightarrow F$$

duas funções.

As funções  $f$  e  $g$  dizem-se **iguais** quando

$$A = B = D, \quad E = F \quad \text{e} \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in D.$$

## Operações algébricas

Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$  e  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$  duas funções.

- A **soma/ diferença** de  $f$  e  $g$  é a função  $f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O **produto** de  $f$  e  $g$  é a função  $f \cdot g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O **quociente** de  $f$  e  $g$  é a função  $\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D = A \cap \{x \in B : g(x) \neq 0\}.$$

# Composição de funções

- Sejam  $D_f, D_g, B, E \subset \mathbb{R}$ , não vazios, e

$$f : D_f \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow E$$

duas funções tais que  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ .

A **função composta** de  $g$  e  $f$ , denotada  $g \circ f$ , é a função definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow E \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

onde

$$D = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}.$$

## Exemplo

1. Sejam

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \sqrt{x} \\ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & g(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} g \circ f : ]0, +\infty[ &\longrightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\longmapsto (f \circ g)(x) = |x| \end{aligned}$$

# Restrição e prolongamento<sup>1</sup>

Sejam  $A, E \subset \mathbb{R}$ .

- [Restrição de uma função] A **restrição** de uma função  $f : A \longrightarrow E$  a um subconjunto  $X \subset A$  é a função  $f|_X : X \longrightarrow E$ , definida por

$$f|_X(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

[Nota] Este será um conceito fundamental no Cap. 1.3.

- [Prolongamento de uma função] Um **prolongamento** de uma função  $g : X \longrightarrow E$  a um conjunto  $A \supset X$  é uma função  $f : A \longrightarrow E$  que coincida com  $g$  em  $X$ , isto é tal que

$$f|_X(x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

[Nota] A restrição é única mas o prolongamento não!

---

<sup>1</sup>Prolongamento ou extensão

M.Isabel Caiado

[MIEInf] Cálculo-2019-20

11 / 23

## Exemplo

1. Seja  $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

- **Restrição** de  $f$  a  $X = [1, 2]$  é a função, seja  $h = f|_{[1,2]}$ ,

$$h : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2$$

- **Prolongamento** de  $f$  a  $A = [-5, 5]$

- $g : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2;$

- $\ell : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 5]; \\ 0, & x \in [-5, 0[ \end{cases}$

- e muitas outras funções ...

# Características geométricas

Seja  $D \subset \mathbb{R}$  e  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função. Diz-se que:

- ▶  $f$  é uma função par quando  
para qualquer  $x \in D$ ,  $-x \in D$  e  $\forall x \in D$   $f(-x) = f(x)$ ;
- ▶  $f$  é uma função ímpar quando  
para qualquer  $x \in D$ ,  $-x \in D$  e  $\forall x \in D$   $f(-x) = -f(x)$ ;
- ▶  $f$  é uma função periódica de período  $p$  quando  
para qualquer  $x \in D$ ,  $x + p \in D$  e  $\forall x \in D$   $f(x + p) = f(x)$ .

## Exemplo

1.  $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  não é par;
2.  $h : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2$  não é par;
3.  $g : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  é par;
4.  $\ell : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 5]; \\ 0, & x \in [-5, 0[ \end{cases}$  não é par.

**Sugestão:** Represente graficamente as funções acima indicadas.

Seja  $D \subset \mathbb{R}$ . Diz-se que a função  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  é

- ▶ **majorada** quando existe  $M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$ , qualquer que seja  $x \in D$
- ▶ **minorada** quando existe  $m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m$ , qualquer que seja  $x \in D$
- ▶ **limitada** quando  $f$  é majorada e minorada, isto é,

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A.$$

Seja  $D \subset \mathbb{R}$ . Diz-se que a função  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  é

- ▶ **crescente** quando para quaisquer  
 $x, y$  em  $D \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- ▶ **estritamente crescente** quando para quaisquer  
 $x, y$  em  $D \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- ▶ **decrecente** quando para quaisquer  
 $x, y$  em  $D \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- ▶ **estritamente decrecente** quando para quaisquer  
 $x, y$  em  $D \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- ▶ **monótona** quando  $f$  é crescente ou decrecente
- ▶ **estritamente monótona** quando  $f$  é estritamente crescente ou estritamente decrecente



Sejam  $D, E \subset \mathbb{R}$ . Uma função  $f : D \longrightarrow E$  diz-se

► **injetiva** quando

$$\forall x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

► **sobrejetiva** quando

$$\forall y \in E \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

► **bijetiva** quando  $f$  for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

## Exemplo

1. Não é injetiva nem sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

2. Não é injetiva mas é sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ x &\longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

3. É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função

$$\begin{aligned} h : ]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ x &\longmapsto h(x) = x^2 \end{aligned}$$

## Extremos locais<sup>2</sup>

Seja  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função. Um ponto  $x_0 \in D$  diz-se

- ▶ um ponto de máximo local ou **maximizante local** de  $f$  se para todo o  $x$  numa vizinhança de  $x_0$  contida em  $D$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

e  $f(x_0)$  diz-se **máximo local** de  $f$ ;

- ▶ um ponto de mínimo local ou **minimizante local** de  $f$  se para todo o  $x$  numa vizinhança de  $x_0$  contida em  $D$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

e  $f(x_0)$  diz-se **mínimo local** de  $f$ .

---

<sup>2</sup>Ou extremos relativos

## Extremos globais<sup>3</sup>

Seja  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função. Um ponto  $x_0 \in D$  diz-se

- ▶ um ponto de máximo global ou **maximizante global** de  $f$  se para todo o  $x \in D$

$$f(x) \leq f(x_0),$$

e  $f(x_0)$  diz-se **máximo global** de  $f$ ;

- ▶ um ponto de mínimo global ou **minimizante global** de  $f$  se para todo o  $x \in D$

$$f(x) \geq f(x_0),$$

e  $f(x_0)$  diz-se **mínimo global** de  $f$ ;

- ▶ um **ponto de extremo** (local ou global) se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de  $f$ .

---

<sup>3</sup>Ou extremos absolutos

# Função inversa

- [Função inversa] Seja  $f : D \longrightarrow E$  uma função bijetiva. A função

$$E \longrightarrow D$$

que faz corresponder a  $y \in E$  o único  $x \in D$  tal que  $f(x) = y$  é chamada **função inversa** de  $f$  e é indicada por  $f^{-1}$ .

## Nota

Não confundir  $f^{-1}$  com  $\frac{1}{f}$ .

[Propriedades da função inversa] Seja  $f : D \longrightarrow E$  uma função bijetiva.

1. Se  $g : E \longrightarrow D$  é uma função bijetiva, então  $g$  é a função inversa de  $f$  se e só se
  - $g(f(x)) = x, \quad \forall x \in D;$
  - $f(g(y)) = y, \quad \forall y \in E.$

2. Se  $g$  é a função inversa de  $f$ , então

$$\bullet D_f = \text{CD}_g; \quad \bullet \text{CD}_f = D_g; \quad \bullet g^{-1} = f.$$

## Exemplo

1. A função  $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$  definida por  $g(x) = x^2$  não tem inversa pois embora seja sobrejetiva não é injetiva.
2. A função  $h : ] - \infty, 0[ \longrightarrow [0, +\infty[$  definida por  $h(x) = x^2$  tem inversa pois é bijetiva.

A sua inversa é a função

$$\begin{aligned} h^{-1} : [0, +\infty[ &\longrightarrow ] - \infty, 0] \\ x &\longmapsto h^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{aligned}$$