Folha 4

Os exercícios 4 a) b) e 6 estão resolvidos nos exemplos dos diapositivos.

Segue-se a resolução de alguns exercícios selecionados.

3. Considere a função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$ com o eixo dos zz.

A função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ está definida em $\mathbb{R}^2$ e é a composta da função exponencial com uma função polinomial logo é diferenciável (na verdade é de classe C^∞).

A equação do plano tangente à superfície de equação $z = f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$ (note que $f(1,1) = 1$) é dada por:

$$z = 1 + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1).$$

Temos: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2-y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\, e^{x^2-y^2}$ pelo que $\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (2,-2)$.

Portanto: a equação cartesiana do plano pretendido é:

$$z = 1 + 2(x-1) - 2(y-1) \Leftrightarrow z = 1 + 2x - 2y.$$

O ponto de interseção deste plano com o eixo dos zz tem então coordenadas $(0,0,1)$.

4. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$;

(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.

d. $$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e. $$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Considere as funções f e g tais que

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 && \longrightarrow && \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) && \longmapsto && f(x,y,z) = (x-y+z, x^2yz, xyz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \quad & \mathbb{R}^3 && \longrightarrow && \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) && \longmapsto && g(x,y,z) = (xy, yz, 2x, xyz) \end{aligned}$$

Calcule $df(-1,0,1)$ e $dg(-1,0,1)$.

As funções f e g são ambas diferenciáveis uma vez que as suas funções componentes são funções polinomiais definidas em $\mathbb{R}^3$.

- Função f:

A matriz jacobiana de f é dada por: $Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2xyz & x^2z & x^2y \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$

Substituindo no ponto $(-1,0,1)$ temos: $Jf(-1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo a diferencial $df(-1,0,1): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é

a aplicação linear cuja matriz relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $Jf(-1,0,1)$. Assim:

$$df(-1,0,1)(v_1,v_2,v_3) = (v_1 - v_2 + v_3, v_2, -v_2).$$

- Função g:

Analogamente se calcula que: $Jg(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2 & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$ e $Jg(-1,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo $dg(-1,0,1): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é tal que $(v_1, v_2, v_3) \longmapsto (-v_2, v_2, 2v_1, -v_2)$.