Folha 4

Os exercícios 4 a) b), 6, 8 e 9.b) estão resolvidos nos exemplos dos diapositivos.

Segue-se a resolução de alguns exercícios selecionados.

3. Considere a função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$ com o eixo dos zz.

A função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ está definida em $\mathbb{R}^2$ e é a composta da função exponencial com uma função polinomial logo é diferenciável (na verdade é de classe C^∞).

A equação do plano tangente à superfície de equação $z = f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$ (note que $f(1,1) = 1$) é dada por:

$$z = 1 + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1).$$

Temos: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2-y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\, e^{x^2-y^2}$ pelo que $\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (2,-2)$.

Portanto: a equação cartesiana do plano pretendido é:

$$z = 1 + 2(x-1) - 2(y-1) \Leftrightarrow z = 1 + 2x - 2y.$$

O ponto de interseção deste plano com o eixo dos zz tem então coordenadas $(0,0,1)$.

4. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$;

(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.

d. $$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e. $$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Considere as funções f e g tais que

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z) = (x-y+z, x^2yz, xyz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) &\longmapsto g(x,y,z) = (xy, yz, 2x, xyz) \end{aligned}$$

Calcule $df(-1,0,1)$ e $dg(-1,0,1)$.

As funções f e g são ambas diferenciáveis uma vez que as suas funções componentes são funções polinomiais definidas em $\mathbb{R}^3$.

- Função f:

A matriz jacobiana de f é dada por: $\mathcal{J}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2xyz & x^2z & x^2y \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$

Substituindo no ponto $(-1,0,1)$ temos: $\mathcal{J}f(-1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo a diferencial $df(-1,0,1): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação linear cuja matriz relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\mathcal{J}f(-1,0,1)$. Assim:

$$df(-1,0,1)(v_1,v_2,v_3) = (v_1 - v_2 + v_3, v_2, -v_2).$$

- Função g:

Analogamente se calcula que: $\mathcal{J}g(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2 & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$ e $\mathcal{J}g(-1,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo $dg(-1,0,1): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é tal que $(v_1, v_2, v_3) \longmapsto (-v_2, v_2, 2v_1, -v_2)$.

7. Considere as funções

$$u: \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad v: \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto \operatorname{sen}(xy) \end{aligned} \qquad w: \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

$$f: \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^2y + y^2z \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad h: \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ (x,y) &\longmapsto f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \end{aligned}$$

Determine $\nabla h(x,y)$.

Escrevendo a função (real) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(u,v,w) = u^2 v + v^2 w$ e considerando a função (vetorial) auxiliar $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y), w(x,y))$ onde $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $w(x,y) = e^x$, temos que:

a função (real) $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $h = f \circ g$.

Note-se que f é derivável (função polinomial definida em $\mathbb{R}^3$) e que a função g é também derivável (as suas funções componentes são funções elementares — polinómios, seno, exponencial e compostas destas — definidas em $\mathbb{R}^2$).

Logo, pela regra da cadeia, $h = f \circ g$ é derivável e temos:

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(g(x,y))\, \mathcal{J} g(x,y).$$

- $\nabla f(u,v) = (2uv,\ u^2 + 2vw,\ v^2)$
- $\nabla f(g(x,y)) = (2xy \operatorname{sen}(xy),\ x^2y^2 + 2\operatorname{sen}(xy) e^x,\ \operatorname{sen}^2(xy))$
- $\mathcal{J} g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^x & 0 \end{bmatrix}$

- $\nabla h(x,y) = \left[2xy \operatorname{sen}(xy),\ x^2y^2 + 2\operatorname{sen}(xy) e^x,\ \operatorname{sen}^2(xy)\right] \begin{bmatrix} y & x \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^x & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2xy^2 \operatorname{sen}(xy) + y\cos(xy)\left(x^2y^2 + 2\operatorname{sen}(xy) e^x\right) + \operatorname{sen}^2(xy) e^x \\ 2x^2 y \operatorname{sen}(xy) + x\cos(xy)\left(x^2y^2 + 2\operatorname{sen}(xy) e^x\right) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix}^T.$$

9. Calcule:

(a) $\dfrac{du}{dt}$, onde $u = \ln\left(\operatorname{sen} \frac{x}{y}\right)$ e $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1+t^2}$;

Observamos que todas as funções envolvidas são elementares e, em particular, que $1+t^2$ não se anula, logo $y = \sqrt{1+t^2}$ é diferenciável. A função $u = u(x,y) = \ln\left(\operatorname{sen} \frac{x}{y}\right)$ é diferenciável em qualquer aberto de $\mathbb{R}^2$ que verifique $\operatorname{sen} \frac{x}{y} > 0$.

Pela regra da cadeia, $u = u(t) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{x(t)}{y(t)}\right)$ é diferenciável e podemos escrever:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}\, 6t + \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}\,\frac{1}{2}\, 2t\,(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1/y\,\cos(x/y)}{\operatorname{sen}(x/y)}\, 6t - \frac{x/y^2\,\cos(x/y)}{\operatorname{sen}(x/y)}\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{6t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{3t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right) - \frac{3t^3}{(1+t^2)^{3/2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{3t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right) =$$

$$= \frac{6t(1+t^2) - 3t^3}{(1+t^2)^{3/2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{3t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{3t(2+t^2)}{(1+t^2)^{3/2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{3t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$