Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2019/2020

Exercício 7.1 Mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

Exercício 7.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $]-1, 1[$.

c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 7.3 Mostre, recorrendo ao teorema de Lagrange, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e^x > 1 + x;$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x;$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|.$

Exercício 7.4 Indique, se existir, ou justifique porque não existe, uma função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, derivável, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$.

Exercício 7.5 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\operatorname{tg} x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x e^{-x^2+1}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln x \, \ln(x - 1))$

i) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

j) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Exercício 7.6 Estude as funções (indicando domínio e contradomínio, extremos e intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidade; esboce o gráfico) definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

c) $h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

d) $j(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

Exercício 7.7 Em cada das seguintes alíneas, esboce graficamente uma função f satisfazendo os requisitos especificados:

a) as primeira e segunda derivadas são sempre positivas;

b) a primeira derivada é sempre negativa mas a segunda derivada é positiva em alguns pontos e negativa noutros.

Exercício 7.8 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{2x}$.

a) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

b) Determine uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

Exercício 7.9 Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f indicada em torno do ponto a apresentado:

a) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 10, \quad a = 0;$

b) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 8, \quad a = 0;$

c) $f(x) = \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 7, \quad a = 1;$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n = 7, \quad a = 1;$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad n = 6, \quad a = 0;$

f) $f(x) = x - \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 4, \quad a = 0.$

Exercício 7.10 Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 6 em torno da origem é dado por

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6\,.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Exercício 7.11 Escreva o polinómio $-x^6 + 6\,x^5 - 9\,x^4 - 4\,x^3 + 23\,x^2 - 21\,x + 6$ em potências de $x - 1$.

Exercício 7.12 Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas tal que

$$f(3) = 1,\ f'(3) = -2,\ f''(3) = 3 \ \text{ e } \ f'''(3) = -5\,.$$

Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3.

Exercício 7.13 Use um polinómio de Taylor, de ordem adequada, em torno de zero, da função definida por $f(x) = \cos x$, para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$