1.5 Derivadas

Definição

- [Função derivável num ponto] Diz-se que a função f é derivável em $a \in D \cap D'$ quando existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

Ao valor real d chama-se derivada de f no ponto a e escreve-se $f'(a) = d$.

Observação

- Uma forma equivalente de definir a derivada de f em a é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

e que resulta de tomar $x = a + h$, na definição anterior.

- Usando a notação $y = f(x)$ notações alternativas para a derivada são

$$f'(x);\ y';\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df}{dx}.$$

- [Derivada lateral] Diz-se que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

  - derivável à esquerda em a (quando a é ponto de acumulação à esquerda) se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d;$$

  - derivável à direita em a (quando a é ponto de acumulação à direita) se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d.$$

Nota

Para f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'_- \cap D'_+$ tem-se que f é derivável em a se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

Exemplo

1. Não é derivável em nenhum ponto a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

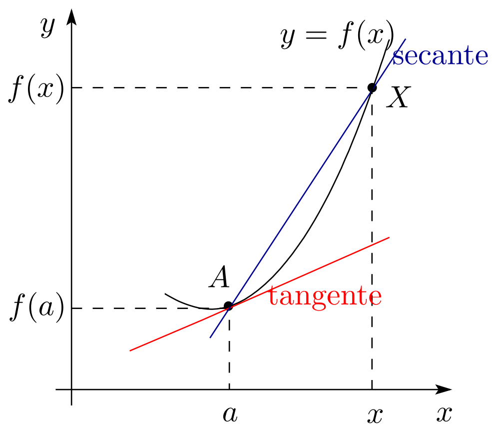
2. A função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

derivável apenas no ponto $a=0$.

3. A função $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definida por $h(x)=[x]$ é derivável em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,.$

Interpretação geométrica da derivada



O declive m da reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto de coordenadas $(a,f(a))$ é o limite dos sucessivos declives das retas secantes definidas por A e X, à medida que X se aproxima de A, isto é,

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

[Nota] O ponto X pode estar à direita (como representado na figura) ou à esquerda de A.

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$.

- A equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ tem equação
$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

- A equação da reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$, $f'(a) \neq 0$, tem equação
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a).$$

[Nota] A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico nesse ponto.

Quando f é derivável em a

- a curva definida por $y = f(x)$ não apresenta nenhum "ponto anguloso" em $x = a$;

  Ex.: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

- a reta definida por $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$ "confunde-se" com a curva numa vizinhança de a;

- o polinómio $f(a) + f'(a)\,(x - a)$, de grau ≤ 1, pode usar-se como aproximação para f perto de a.

Observação

- Quando f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \infty$$

a reta tangente à curva definida por $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta vertical definida pela equação $x = a$.

  - Neste caso diz-se que o gráfico da função tem uma tangente vertical em $x = a$.

Função derivável e função derivada

Seja $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in D$ e $A \subset D$.

- Diz-se que
  - f é derivável se f é derivável em todo o domínio D;
  - f é derivável em $A \subset D$ se $f\big|_A$ é derivável.
- Se f é derivável, a função

$$\begin{array}{cccc} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

diz-se a função derivada de f.

Propriedades das funções deriváveis

Teorema (Continuidade de funções deriváveis)

Se $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é derivável em $a\in D\cap D'$ então f é contínua em a.

Tem-se ainda que

- se existir derivada lateral à direita em a, $f'_+(a)$, então f é contínua à direita em a;
- se existir derivada lateral à esquerda em a, $f'_-(a)$, então f é contínua à esquerda em a.

[Regras básicas de derivação]

Sejam $f,g\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções de domínio D, deriváveis no ponto $a\in D\cap D'$.

Então:

(a) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$;

(b) $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a)\neq 0$.

Exemplo

1. [Derivadas das funções hiperbólicas]
   - $\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\mathrm{th}' x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$
   - $\mathrm{coth}' x = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$

Teorema (Derivada da função composta / Regra da Cadeia)

Sejam $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $u(a) \in B \cap B'$.

Se u é derivável em a e f é derivável em $u(a)$ então $f \circ u$ é derivável em a, tendo-se

$$(f \circ u)'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a)\,.$$

Teorema (Derivada da função inversa)

Seja f: $D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijetiva. Se f é derivável no ponto $a \in D \cap D'$, $f'(a) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Exemplo

1. [Derivada da função composta] Dada uma função derivável $u = u(x)$, tem-se

   - $[\operatorname{sen} u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$
   - $[\cos u(x)]' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$
   - $[\operatorname{tg} u(x)]' = u'(x) \dfrac{1}{\cos^2 u(x)}$
   - $[\operatorname{cotg} u(x)]' = -u'(x) \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 u(x)}$

2. [Derivada da função inversa]

   A função logaritmo natural é a função inversa da função exponencial de base e e

   - $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[, \quad f(x) = e^x$ é bijetiva e $f'(x) = e^x \neq 0$;
   - $f^{-1}(y) = \ln y, \quad y \in]0, +\infty[$ é contínua

   Pelo teorema da derivada da função inversa, sendo $y = f(x)$, vem

$$(\ln y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

   Assim

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y \in]0, +\infty[.$$

3. [Derivada da função inversa]

A função arco-seno é a função inversa da função $\operatorname{sen}\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ e[1]

- $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-1,1[$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é bijetiva e $f'(x) = \cos x \neq 0$;
- $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(y)$, $y \in]-1,1[$.

Pelo teorema da derivada da função inversa vem

$$\operatorname{arcsen}' y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)}.$$

Uma vez que, para $z = \operatorname{arcsen} y$

$$\cos(\operatorname{arcsen} y) = \sqrt{1-y^2}$$

vem

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \text{para } y \in]-1,1[.$$

[1]Toma-se o dimínio da função seno aberto para que $\operatorname{sen}' x \neq 0$

4. Derivadas das funções trigonométricas inversas

- $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in]-1,1[$
- $\operatorname{arccos}' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in]-1,1[$
- $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$

Teoremas fundamentais sobre funções deriváveis

Teorema (Fermat)

Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D \cap D'$. Se a é um extremante de f então $f'(a) = 0$.

[Nota] O recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \not\Longrightarrow \quad f(a) \text{ extremo local de } f\,.$$

Exemplo?

Teorema (Rolle)

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então

$$\exists c \in \,]a,b[\,: \quad f'(c) = 0\,.$$

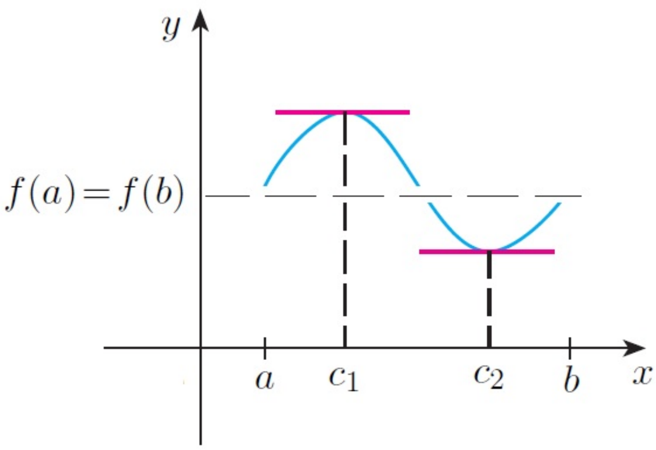


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

- [Corolários do teorema de Rolle] Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $]a,b[$.

  1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.
  2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.
  3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Teorema (Teorema do valor médio de Lagrange)

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Então

$$\exists c \in\ ]a,b[\ :\quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

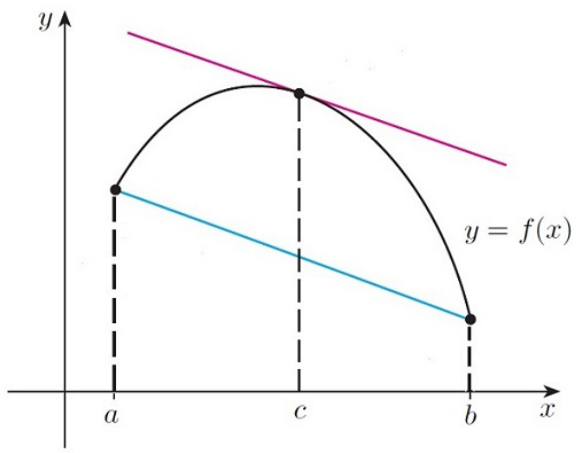


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

[Nota.] Veremos uma aplicação deste teorema no estudo do comprimento de uma curva (Cap. 3)

Exemplo

1. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que para todo o $x \neq 0$, $e^x > x + 1$.

- [Corolários do teorema de Lagrange]

1. Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$, então f é constante.

2. Se $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a,b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in [a,b]$.

   [Nota] Uma aplicação deste corolário será vista no Cap. 2.

3. [Monotonia das funções reais]
   Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Tem-se:
   3.1 $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é crescente em I;
   3.2 $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é decrescente em I;
   3.3 se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I;
   3.4 se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

Teorema (de Darboux)

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I para a qual existem $a, b \in I$ tais que $f'(a) < f'(b)$.
Seja ainda $k \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) < k < f'(b)$. Então

$$\exists c \in]a, b[: \quad f'(c) = k\,.$$

[Nota] O Teorema de Darbux

- também vale se $f'(a) > f'(b)$;
- não exige a continuidade de f'.

Exemplo

1. $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$

   Esta função apresenta uma descontinuidade de salto. Claramente ela não possui a propriedade do valor intermédio. Então g não pode ser a derivada de função alguma $f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   Esta função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se

   $$h'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

   A função $h' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua, no entanto, verifica o teorema de Darboux.

Derivadas de ordem superior

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'$. Seja E o subconjunto de D formado por todos os pontos onde f é derivável.

- Diz-se que f é duas vezes derivável em $a \in E \cap E'$, se f' for derivável em a.
  - Chama-se segunda derivada de f em a à derivada$(f')'(a)$;
  - Usam-se, ainda, as notações

$$f''(a), \qquad f^{(2)}(a) \qquad \text{ou} \qquad D^2 f(a)$$

- De modo análogo define-se a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função que se denota por

$$f^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad D^{(n)} f\,.$$

[Nota] Por convenção, considera-se $f^{(0)} = f$.

Funções de classe $\mathscr{C}^k$

Seja $D \subset \mathbb{R}$, não vazio, tal que $D \subset D'$.

- Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se conjunto das funções de classe $\mathscr{C}^k$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathscr{C}^k(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } D \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua} \,\}$$

- Chama-se conjunto das funções de classe $\mathscr{C}^\infty$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathscr{C}^\infty(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } D \,\}$$

Limites: levantamento de Indeterminações

- As derivadas podem ser aplicadas no cálculo de limites para resolver formas indeterminadas.

- As formas indeterminadas de limites são:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

- Esta aplicação das derivadas é justificada com um resultado conhecido como regra de L'Hôpital.

- [Regra de L'Hôpital]

  Sejam $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis num intervalo aberto I exceto, eventualmente, no ponto $c \in I$.
  Se
  - $g'(x) \neq 0\,, \;\; \forall x \in I \setminus \{c\}$
  - $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$, com

$$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = +\infty \quad \text{ou} \quad \ell = -\infty$$

  então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

  desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).

Observação

- A regra de l'Hôpital
  - estende-se ao caso em que $c = +\infty$ ou $c = -\infty$.
  - pode ser aplicada recursivamente;
  - recorrendo a manipulações algébricas, é aplicável a outras formas de indeterminação. Ex.: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
- A regra de L'Hôpital não se aplica aos casos em que os limites, do numerador e/ou do denominador, existem mas são diferentes de zero/∞.

Exemplo

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x}{\operatorname{sen} x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{-\cos x}$ Porquê?

Monotonia e extremos de funções

Seja I um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.

- Na secção 1.4 foi visto que
  - se $f'(x) > 0$ em I, então f é estritamente crescente em I;
  - se $f'(x) < 0$ em I, então f é estritamente decrescente em I.
- [Ponto Crítico] Um ponto $x_0 \in I$ diz-se um ponto crítico de f quando $f'(x_0) = 0$. (c.f. Teorema de Fermat)
- Como encontrar os extremantes de f?

- [Teste da 1.ª derivada]

  Seja x_0 um ponto crítico de f.
  - Se f' muda de sinal negativo para positivo em x_0, então x_0 é um minimizante local de f;
  - Se f' muda de sinal positivo para negativo em x_0, então x_0 é um maximizante local de f.

Concavidade e pontos de inflexão

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset D$ um intervalo.

- O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I quando para todos os $x_1,\ x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está abaixo do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.
  - No caso de f ser derivável em I, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima quando f' for crescente neste intervalo.
- O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I quando para todos os $x_1,\ x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está acima do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.
  - No caso de f ser derivável em I, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo quando f' for decrescente neste intervalo.

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset D$ um intervalo onde $f \in \mathscr{C}^2(I)$.

- Se $f''(x) > 0$ em I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I;
- Se $f''(x) < 0$ em I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I;

- [Teste da 2.ª derivada] Seja x_0 um ponto crítico de f.
  - Se $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) = 0$, então nada se pode concluir.
- [Ponto de inflexão] Um ponto do domínio de uma função contínua onde o gráfico muda de concavidade chama-se ponto de inflexão.
  - Se $f''(x_0) = 0$ e $f''(a)$ muda de sinal em x_0 então x_0 é um ponto de inflexão.

Exemplo

1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um ponto crítico em $x_0 = 0$ pois $f'(0) = 0$.

   Usando o teste da 2.ª derivada, $f''(0) > 0$, $x_0 = 0$ é um minimizante local de f.

2. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^3$ é derivável em $\mathbb{R}$. Embora $x_0 = 0$ seja um ponto crítico, a função não tem aqui um extremo.

   $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão da função.

3. A função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = |x|$ não é derivável em $\mathbb{R}$, pois não é derivável em $x_0 = 0$.

   A esta função não é aplicável o teste da 1.ª derivada em $x_0 = 0$, por a função não ser derivável neste ponto. No entanto tem um extremo em $x_0 = 0$ pois é contínua neste ponto, é crescente em $]0, \varepsilon[$ e decrescente em $]-\varepsilon, 0[$, $\varepsilon > 0$.

Esboço do gráfico de funções

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Pretende-se fazer um esboço da curva definida $y = f(x)$. Os passos seguintes fornecem informações úteis para fazer o esboço pretendido:

1. Determinação do domínio e contradomínio;
2. Análise de alguns limites apropriados (existência de assintotas);
3. Interseção com os eixos: x tal que $f(x) = 0$ e y tal que $f(0) = y$;
4. Algumas características geométricas: simetria, periodicidade, ...;
5. Extremantes e intervalos de monotonia;
6. Pontos de inflexão e intervalos de concavidade.

Exercício

1. Justifique as representações gráficas das funções hiperbólicas (c.f. Cap. 1.4)
2. Esboce graficamente a função definida por $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

Aproximação polinomial de funções

- [Polinómio de Taylor]

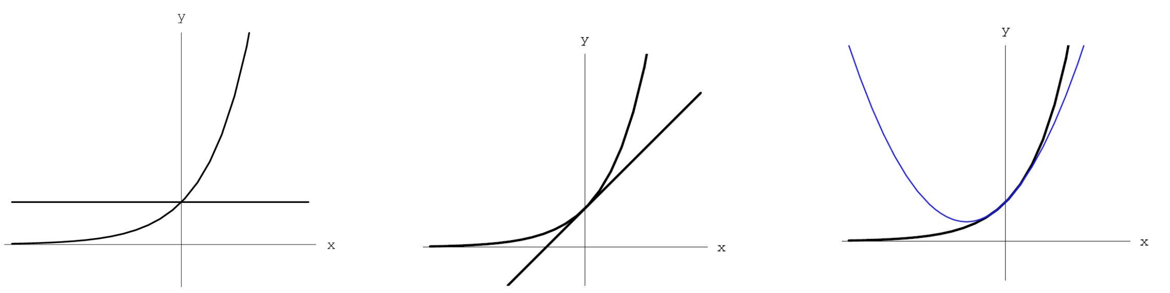
  Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in I$ tal que a n-ésima derivada de f existe em a. O polinómio

  $$P_{n,a}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

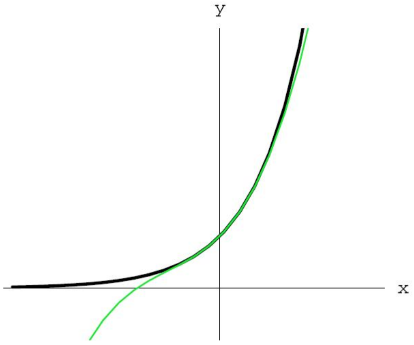
  é chamado polinómio de Taylor de f, de ordem n, em torno do ponto a.

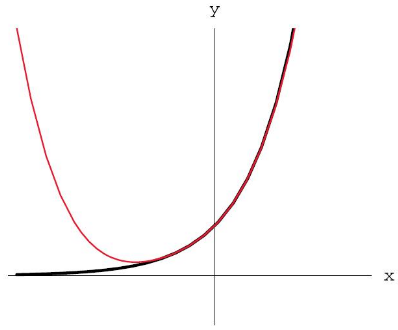
Exemplo

1. $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad a = 0$



$P_{0,0}(x) = 1$ $\qquad$ $P_{1,0}(x) = 1 + x$ $\qquad$ $P_{2,0}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}$





$$P_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \qquad P_{4,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

No caso de $f(x) = e^x$ demonstra-se que, para um qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, se tem

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Observação

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Os coeficientes de $P_{n,a}$ dependem das derivadas de f calculadas em a.
- Se f é n vezes derivável em $a \in I$ está garantida a existência das constantes

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a).$$

- $P_{n,a}$ é um polinómio de grau não superior a n: grau $P_{n,a} \leq n$.
- A reta tangente ao gráfico da função em $(a, f(a))$, estudada na secção 1.5, é um caso particular do Polinómio de Taylor ($n = 1$).

▶ [Teorema]

O polinómio de Taylor $P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a (desde a ordem 0 até à ordem n) coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

- Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in I$. Dado $n \in \mathbb{N}_0$, diz-se que f e g são iguais até à ordem n em a se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

- Quando existem $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, $g'(a), \ldots, g^{(n)}(a)$. Então

f é igual a g até à ordem n em a se e só se

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

▶ [Fórmula de Taylor]

Chama-se fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a à expressão

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

- $R_{n,a}$ diz-se resto de Taylor de f de ordem n em a;
- existem diferentes fórmulas para $R_{n,a}$;
- uma das fórmulas para o resto de Taylor é a fórmula de Lagrange

$$R_{n,a}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

onde ξ é um valor entre a e x.