exercícios resolvidos para a unidade curricular

Tópicos de Matemática Discreta

mestrado integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho 2019/2020

Cláudia Mendes Araújo
Suzana Mendes Gonçalves

Capítulo 1

Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

(a) A Terra é redonda.

(b) Hoje está sol.

(c) $2 + x = 3$ e 2 é par.

(d) $(25 \times 2) + 7$

(e) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?

(g) $4 < 3$

(h) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.

(i) A U.M. é a melhor academia do país.

resolução:

Relembremos que uma proposição é uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (dado um contexto fixado à partida e ainda que possamos não ser capazes de, no momento, determinar o seu valor lógico).

Das frases apresentadas são proposições as seguintes: (a), (b), (e), (g) e (h).

As frases (d) e (f) não são proposições, uma vez que não são frases declarativas. A frase (c) não é uma proposição uma vez que a sua veracidade depende do valor atribuído a x. Relativamente à frase (h), repare-se que a afirmação é verdadeira independentemente do valor da variável x. De facto, se $x \geq 2$, sabemos que $x^3 \geq 2^3$, ou seja, $x^3 \geq 8$, o que, obviamente, implica $x^3 \geq 1$. Em relação à segunda frase, subentende-se um determinado contexto (um determinado dia num dado local). Sobre a última frase da lista, note-se que não existe uma norma reconhecida para o que é efetivamente a melhor academia.

1.2. Representando as frases *Eu gosto de leite*, *Eu não gosto de cereais* e *Eu sei fazer crepes* por p_0, p_1 e p_2, respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

(a) $p_0 \wedge p_1$ (c) $\neg p_2$ (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$ (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$

(b) $p_1 \vee p_2$ (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$ (f) $p_2 \to p_0$ (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$

resolução:

(a) Eu gosto de leite e não gosto de cereais.

(b) Eu gosto de leite ou sei fazer crepes.

(c) Eu não sei fazer crepes.

(d) Eu não gosto de leite mas gosto de cereais. [em alternativa, Não é verdade que: eu gosto de leite ou não gosto de cereais.]

(e) Eu não gosto de leite ou gosto de cereais.

(f) Se eu sei fazer crepes então eu gosto de leite.

(g) Eu sei fazer crepes e gosto de leite ou eu não gosto de cereais.

(h) Eu sei fazer crepes e eu gosto de leite ou não gosto de cereais.

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por p_0, p_1 e p_2.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

(i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

(ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.

(iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

(i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ (iii) $(\neg p_2) \to (\neg p_1 \vee p_0)$

resolução:

(a)
(i) $\neg p_1 \wedge p_2$ (ii) $\neg(\neg p_0 \vee p_1)$ (iii) $p_1 \to \neg p_2$

(b)
(i) 7 é um inteiro par ou 24 não é divisível por 8.
(ii) 7 não é um inteiro par ou $3 + 1 \neq 4$. [em alternativa, Não é verdade que: 7 é um inteiro par e $3 + 1 = 4$.]
(iii) Se 24 não é divisível por 8, então $3 + 1 \neq 4$ ou 7 é um inteiro par.

1.4. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

(a)$(\neg\,(p_1 \vee p_2))$ (d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow\perp)$

(b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$ (e) $(\perp)$

(c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($ (f) $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$

resolução:

Recordemos que o conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das fórmulas do Cálculo Proposicional é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula do CP;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula do CP;

(F_3) se φ é uma fórmula do CP, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula do CP;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP.

Nesta resolução vamos assumir a convenção de que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos, por simplificação de escrita.

(a) $(\neg\,(p_1 \vee p_2)) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

① $p_1, p_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2;
② $(p_1 \vee p_2) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_5 e por ①;
③ $(\neg\,(p_1 \vee p_2)) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ②.

(b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6)) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

① $p_5, p_6 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2;
② $(\neg p_5), (\neg p_6) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ①;
③ $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6)) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_6 e por ②.

(c) Nesta palavra existe um número distinto de parêntesis direitos e de parêntesis esquerdos, o que nunca acontece numa fórmula do Cálculo Proposicional. Portanto, $((p_3 \wedge p_1) \vee (\notin \mathcal{F}^{CP}$.

(d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow\perp) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

① $\perp\in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_1;
② $p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2;
③ $\neg p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ②;
④ $(p_0 \wedge \neg p_0) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_4 e por ② e ③;
⑤ $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow\perp) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_6 e por ④ e ①.

(e) Note-se que não existe nenhuma regra, na definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$, que introduza parêntesis sem introduzir um dos conetivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$. Assim, $(\perp) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

(f) Nesta palavra existe um número distinto de parêntesis direitos e de parêntesis esquerdos, o que nunca acontece numa fórmula do Cálculo Proposicional.

Logo, $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp))) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

1.5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

(a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$

(b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.

(c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \rightarrow 530 < 25^2$

(e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

resolução:

(a) Representemos por p_0 a proposição simples $e < 4$ e por p_1 a proposição simples $e^2 < 9$. A proposição dada é, assim, representada por $p_0 \wedge p_1$. Sabemos que a proposição é verdadeira se e só se as proposições p_0 e p_1 são ambas verdadeiras. Como $e \sim 2,7$, é verdade que $e < 4$. Além disso, sendo $e < 3$, $e^2 < 3^2 = 9$. Portanto, a afirmação (a) é verdadeira.

(b) Representemos por p_0 a proposição "1 é solução da equação $x^3 - 1 = 0$" e por p_1 a proposição "-1 é solução da equação $x^3 - 1 = 0$". A proposição dada, representada por $p_0 \wedge p_1$, é verdadeira se e somente se p_0 e p_1 são ambas verdadeiras. Ora, $1^3 - 1 = 0$, pelo que p_0 é verdadeira, mas $(-1)^3 - 1 = -2$, donde p_1 é falsa. Portanto, -1 não é solução da equação $x^3 - 1 = 0$ e a afirmação é falsa.

(c) Representemos por p_0 a proposição "64 é múltiplo de 3" e por p_1 a proposição "64 é múltiplo de 4". A proposição dada é, então, representada por $p_0 \vee p_1$ e é verdadeira se e somente se pelo menos uma das proposições p_0, p_1 é verdadeira. Sabemos que 64 não é múltiplo de 3 mas é múltiplo de 4. Logo, a afirmação é verdadeira.

(d) Representemos por p_0 a proposição $\sqrt{530} < 25$ e por p_1 a proposição $530 < 25^2$. A proposição dada é, assim, representada por $p_0 \rightarrow p_1$. Sabemos que, para mostrar que $p_0 \rightarrow p_1$ é verdadeira, devemos assumir a veracidade de p_0 e mostrar que, nesse caso, também p_1 é verdadeira. Admitamos, então, que $\sqrt{530} < 25$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $(\sqrt{530})^2 < 25^2$, ou seja, $530 < 25^2$. Portanto, se p_0 é verdadeira, também p_1 é verdadeira. Verificámos, deste modo, que a afirmação dada é verdadeira.

(e) Representemos por p_0 a proposição "7^4 é par" e por p_1 a proposição "$7^4 + 1$ é ímpar". Note-se que p_1 pode ser reescrita na forma "$(7^4 + 1) - 1$ é par", uma vez que um inteiro é ímpar se e somente se o seu antecessor é par. Assim, p_0 e p_1 representam frases em que se afirma precisamente o mesmo. Por isso, os valores lógicos de p_0 e de p_1 são iguais. A afirmação dada é representada por $p_0 \leftrightarrow p_1$. Como os valores lógicos de p_0 e p_1 são iguais, $p_0 \leftrightarrow p_1$ é uma proposição verdadeira.

1.6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \to \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(i) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$

(j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \to p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$

resolução:

(a)

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
1	0	1
0	1	1

(b)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

(c)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

(d)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

(e)

p_0	p_1	$\neg p_1$	$p_0 \to \neg p_1$	$\neg(p_0 \to \neg p_1)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

(f)

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

(g)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \to p_1$	$\neg p_0 \vee p_1$	$(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

(h)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \to p_1$	$\neg p_1 \to \neg p_0$	$(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

(i)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_0 \to (p_1 \to p_2)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

(j)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$\neg(p_1 \to p_2)$	$p_0 \wedge (p_1 \to p_2)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

(k)

p_0	p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_0 \leftrightarrow \neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0

(l)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_0 \to (p_1 \to p_2)$	$p_0 \wedge p_1$	$(p_0 \wedge p_1) \to p_2$	$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p_0 \vee p_2$ (b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ (c) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$ (e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ (f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$

(g) $p_2 \to p_1$ (h) $p_0 \leftrightarrow p_2$ (i) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$

(j) $p_3 \to (p_0 \to \neg p_3)$ (k) $((p_1 \to p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ (l) $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$

resolução:

Sabemos que os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem nas fórmulas consideradas são os seguintes:

p_0	p_1	p_2	p_3
1	0	0	1

Em cada uma das alíneas, consideraremos, apenas, a linha da tabela de verdade da fórmula correspondente a esta combinação de valores ógicos.

(a)

p_0	p_2	$p_0 \vee p_2$
1	0	1

A fórmula $p_0 \vee p_2$ é verdadeira.

(b)

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$	$(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$
0	0	1	0	0

A fórmula $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ é falsa.

(c)

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$
1	0	0	1

A fórmula $\neg(p_0 \wedge p_1)$ é verdadeira.

(d)

p_2	p_3	$\neg p_2$	$\neg p_3$	$\neg p_3 \vee \neg p_2$
0	1	1	0	1

A fórmula $\neg p_3 \vee \neg p_2$ é verdadeira.

(e)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_3 \wedge p_0$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	0	0	1	1	0	1

A fórmula $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ é verdadeira.

(f)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_0 \wedge p_1$	$p_3 \vee (p_0 \wedge p_1)$	$p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$
1	0	0	1	0	1	1

A fórmula $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$ é verdadeira.

(g)

p_1	p_2	$p_2 \rightarrow p_1$
0	0	1

A fórmula $p_2 \rightarrow p_1$ é verdadeira.

(h)

p_0	p_2	$p_0 \leftrightarrow p_2$
1	0	0

A fórmula $p_0 \leftrightarrow p_2$ é falsa.

(i)

p_0	p_1	p_3	$p_1 \leftrightarrow p_3$	$(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$
1	0	1	0	0

A fórmula $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$ é falsa.

(j)

p_0	p_3	$\neg p_3$	$p_0 \rightarrow \neg p_3$	$p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$
1	1	0	0	0

A fórmula $p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$ é falsa.

(k)

p_0	p_1	p_3	$\neg p_0$	$p_1 \rightarrow p_3$	$(p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3$	$((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$
1	0	1	0	1	1	0

A fórmula $((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ é falsa.

(l)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_3 \rightarrow p_0$	$p_2 \vee p_1$	$\neg(p_2 \vee p_1)$	$(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$
1	0	0	1	1	0	1	1

A fórmula $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$ é verdadeira.

1.8. Admitindo que p_0, p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$

(b) $p_0 \vee p_1$

(c) $p_0 \to p_1$

(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

resolução:

Sabemos que os valores lógicos das variáveis proposicionais p_0 e p_1 são distintos, uma vez que a fórmula $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa. Assim, uma dessas variáveis proposicionais é verdadeira e a outra falsa.

(a) Sendo uma das variáveis proposicionais $p_0,\ p_1$ falsa, podemos afirmar que $p_0 \wedge p_1$ é falsa.

(b) Dado que uma das variáveis proposicionais $p_0,\ p_1$ é verdadeira, podemos concluir que $p_0 \vee p_1$ é verdadeira.

(c) Sabemos que as combinações possíveis de valores lógicos de p_0 e p_1 são as seguintes:

p_0	p_1
1	0
0	1

Assim, o valor lógico de $p_0 \to p_1$ em cada um desses casos é descrito na tabela que se segue:

p_0	p_1	$p_0 \to p_1$
1	0	0
0	1	1

Podemos, assim, afirmar que o valor lógico de $p_0 \to p_1$ é igual ao de p_1.

(d) As combinações possíveis de valores lógicos de p_0, p_1 e p_2 são

p_0	p_1	p_2
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

,

pelo que o valor lógico de $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ em cada um desses casos é descrito na tabela seguinte:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1

Podemos, assim, afirmar que o valor lógico de $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ é contrário ao de p_2.

1.9. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

resolução:

Representemos por p_0, p_1, p_2 e p_3, respetivamente, as seguintes frases declarativas simples: "O Manuel gosta da cor azul", "O Manuel gosta da cor vermelha", "O Manuel gosta da cor amarela" e "O Manuel gosta da cor verde". Sabemos que os valores lógicos de p_0, p_1, p_2 e p_3 são como se descreve na tabela que se segue:

p_0	p_1	p_2	p_3
1	0	1	0

Em cada uma das alíneas, apresentemos a fórmula que representa a proposição dada e estudemos o seu valor l'ogico, considerando as anteriores frases declarativas simples e a sua representação por p_0, p_1, p_2 e p_3, assim como os respetivos valores lógicos.

(a) $p_0 \wedge p_1$

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$
1	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

(b) $(p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_1$

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$p_2 \vee p_3$	$(p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_1$
0	1	0	1	1	1

A proposição é verdadeira.

(c) $p_1 \vee (p_0 \wedge p_2)$

p_0	p_1	p_2	$p_0 \wedge p_2$	$p_1 \vee (p_0 \wedge p_2)$
1	0	1	1	1

Podemos, assim, afirmar que a proposição é verdadeira.

(d) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_0 \vee p_2$	$p_1 \vee p_3$	$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
1	0	1	0	1	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

(e) $p_0 \rightarrow p_2$

p_0	p_2	$p_0 \rightarrow p_2$
1	1	1

Logo, a proposição é verdadeira.

(f) $p_2 \leftrightarrow p_1$

p_1	p_2	$p_2 \leftrightarrow p_1$
0	1	0

Concluímos, então, que a proposição é falsa.

(g) $p_3 \wedge (p_2 \rightarrow p_0)$

p_0	p_2	p_3	$p_2 \rightarrow p_0$	$p_3 \wedge (p_2 \rightarrow p_0)$
1	1	0	1	0

Podemos, assim, afirmar que a proposição é falsa.

(h) $(p_2 \rightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_1)$

p_1	p_2	p_3	$p_2 \rightarrow p_3$	$p_2 \leftrightarrow p_1$	$(p_2 \rightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_1)$
0	1	0	0	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

1.10. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.

(b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

resolução:

(a) Representemos por p_0, p_1 e p_2, respetivamente, as frases simples "Há vida em Marte", "Zuzarte gosta de tarte" e "Zuzarte é um marciano". As afirmações apresentadas podem ser expressas, então, por

$$\varphi = p_0 \to p_1$$

$$\psi = p_2 \vee \neg p_1$$

$$\sigma = \neg p_2 \wedge p_0$$

(b) Assumamos que as três afirmações podem ser simultaneamente verdadeiras e procuremos uma contradição. Sendo σ verdadeira, podemos afirmar que p_2 é falsa e p_0 é verdadeira. Nesse caso, dado que ψ também é verdadeira, podemos concluir que p_1 é falsa. Mas, assim, φ é falsa, o que contradiz a nossa assumpção de que as três afirmações são simultaneamente verdadeiras. Provámos, deste modo, que as três afirmações não podem ser simultaneamente verdadeiras.

NOTA: Em alternativa, podemos construir uma tabela conjunta para as três fórmulas e verificar que para nenhuma combinação possível de valores lógicos de p_0, p_1 e p_2 se tem φ, ψ e σ simultaneamente verdadeiras

p_0	p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	φ	ψ	σ
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0

1.11. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$

(b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$

(c) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(d) $(p_0 \to (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$

(e) $(p_0 \vee \neg p_0) \to (p_0 \wedge \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$

resolução:

Recordemos que uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem, e uma contradição é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem. Através da tabela de verdade de cada fórmula, podemos, em cada alínea, decidir se a fórmula em questão é uma tautologia, uma contradição ou nem tautologia nem contradição.

(a)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$p_0 \to (p_0 \vee p_1)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

A fórmula $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$ é, portanto, uma tautologia.

(b)

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0

A fórmula $\neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$ não é nem tautologia nem contradição.

(c)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \to p_1$	$\neg p_1 \to \neg p_0$	$(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A fórmula $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$ é uma tautologia.

(d)

p_0	p_1	$(p_0 \vee p_1)$	$p_0 \to (p_0 \vee p_1)$	$(p_0 \to (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

A fórmula $(p_0 \to (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$ não é nem tautologia nem contradição.

(e)

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$	$p_0 \wedge \neg p_0$	$(p_0 \vee \neg p_0) \to (p_0 \wedge \neg p_0)$
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0

A fórmula $(p_0 \vee \neg p_0) \to (p_0 \wedge \neg p_0)$ é uma contradição.

(f)

p_0	p_1	$p_1 \to p_0$	$p_0 \to (p_1 \to p_0)$	$\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$
1	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

A fórmula $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$ é uma contradição.

1.12. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \wedge p_1)$; $\neg p_0 \wedge \neg p_1$

(b) $p_0 \to p_1$; $p_1 \to p_0$

(c) $\neg(p_0 \to p_1)$; $p_0 \wedge (p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0))$

(d) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$; $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$

resolução:

Sabemos que duas fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Assim, para cada par de fórmulas φ e ψ, construimos, em cada alínea, a tabela de verdade de $\varphi \leftrightarrow \psi$ e verificamos se essa fórmula assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

(a)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$\neg p_0 \wedge \neg p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1

Como podemos verificar pela tabela de verdade acima, a fórmula $\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$ não é uma tautologia e, por conseguinte, as fórmulas $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e $\neg p_0 \wedge \neg p_1$ não são logicamente equivalentes.

(b)

p_0	p_1	$p_0 \to p_1$	$p_1 \to p_0$	$(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_0)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Da tabela de verdade acima, sabemos que a fórmula $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_0)$ não é uma tautologia e, por conseguinte, as fórmulas $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e $\neg p_0 \wedge \neg p_1$ não são logicamente equivalentes.

(c) Sejam $\varphi = \neg(p_0 \to p_1)$ e $\psi = p_0 \wedge (p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \to p_1$	φ	$p_0 \wedge \neg p_0$	$p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0)$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1

Como podemos verificar pela tabela de verdade, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia e, portanto, as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

NOTA: Em alternativa, podemos apresentar uma sequência de equivalências lógicas que mostre que $\varphi \Leftrightarrow \psi$:

$$\begin{aligned}
\psi &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \to \perp) \quad [\text{pois } p_0 \wedge \neg p_0 \Leftrightarrow \perp] \\
&\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_1 \quad [\text{uma vez que } \sigma \to \perp \Leftrightarrow \neg \sigma, \text{ para qualquer } \sigma \in \mathcal{F}^{CP}] \\
&\Leftrightarrow \varphi \quad [\text{pois } \neg(\sigma \to \tau) \Leftrightarrow \sigma \wedge \neg \tau, \text{ para quaisquer } \sigma, \tau \in \mathcal{F}^{CP}]
\end{aligned}$$

(d) Sejam $\varphi = p_0 \to (p_1 \to p_2)$ e $\psi = \neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$.

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \to p_2$	φ	$\neg p_2 \to \neg p_1$	$\neg(\neg p_2 \to \neg p_1)$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1

Pela tabela de verdade, podemos concluir que a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia e, portanto, as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

NOTA: Em alternativa, podemos apresentar uma sequência de equivalências lógicas que mostre que $\varphi \Leftrightarrow \psi$:

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow \neg(p_1 \to p_2) \to \neg p_0 \quad \text{[pois } \sigma \to \tau \Leftrightarrow \neg\tau \to \neg\sigma, \text{ para quaisquer } \sigma, \tau \in \mathcal{F}^{CP}] \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0 = \psi \end{aligned}$$

1.13. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conetivos $\wedge$ e $\neg$.

resolução:

Pela dupla negação, sabemos que

$$p_0 \vee \neg p_1 \Leftrightarrow \neg\neg(p_0 \vee \neg p_1)$$

e, pelas leis de De Morgan, temos

$$\neg\neg(p_0 \vee \neg p_1) \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \wedge \neg\neg p_1).$$

Assim, novamente pela dupla negação e ainda pela transitividade da relação de equivalência lógica,

$$p_0 \vee \neg p_1 \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \wedge p_1)$$

e esta última fórmula envolve apenas os conetivos $\wedge$ e $\neg$.

1.14. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.

(b) 1000000 não é o maior número natural.

(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

resolução:

(a) $\exists_{x \in \mathbb{N}} \quad x^3 = 28$

(b) $\exists_{x \in \mathbb{N}} \quad x > 1000000$

(c) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}} \quad n + (n+1) + (n+2) = 3k$

(c) $\forall_{x \in \mathbb{Q}} \forall_{y \in \mathbb{Q}} \quad (x \neq y \to \exists_{z \in \mathbb{Q}} \quad (x < z < y \vee y < z < x)$

1.15. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

(b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

(c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.

(d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

resolução:

Representemos por H um Hobbit arbitrário e por $p(H)$ o predicado "H é criatura pacífica". Será seguramente aceitável assumir que "H é criatura conflituosa" corresponde à negação de $p(H)$. Posto isto, a afirmação dada pode ser reescrita na forma

$$\forall_H \ p(H)$$

e s sua negação corresponderá a

$$\exists_H \ \neg p(H),$$

ou seja, "Existe pelo menos um Hobbit que é criatura conflituosa". Assim, a proposição da alínea (c) equivale, claramente, à negação da proposição dada. Relativamente às restantes proposições, note-se que a da alínea (a) pode ser reescrita como

$$\forall_H \ \neg p(H),$$

a da alínea (b) como

$$\neg(\forall_H \ p(H))$$

e a da alínea (d) como

$$\neg(\forall_H \ \neg p(H)).$$

Assim, destas três, apenas a proposição da alínea (b) equivale à negação da proposição dada.

1.16. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

(a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.

(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.

(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x.

(d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

resolução:

(a) Existe pelo menos um OVNI que não tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.

(b) Todos os morcegos pesam menos de 50 quilogramas.

(c) Existe pelo menos um número real x que não verifica a inequação $x^2 - 2x > 0$.

(d) Para qualquer inteiro n, n^2 não é um número perfeito.

1.17. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(a) $\forall_x \exists_y \; x + y = 0$

(b) $\exists_x \forall_y \; x + y = 0$

(c) $\exists_x \forall_y \; x + y = y$

(d) $\forall_x \; (x > 0 \to \exists_y \; xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

resolução:

(a)

(i) Em p afirma-se que, para todo o real x, existe pelo menos um real y tal que $x + y = 0$. Ora, dado um real x, basta tomar $y = -x$. A afirmação p é, portanto, verdadeira.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \exists_x \neg(\exists_y \; x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists_x \forall_y \; \neg(x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists_x \forall_y \; x + y \neq 0 \end{aligned}$$

Assim, $\exists_x \forall_y \; x + y \neq 0$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo $\neg$.

(b)

(i) Em p afirma-se que existe um real x tal que, para todo o real y, se tem $x + y = 0$. Assim, para esse x, teríamos, por exemplo, $x + 1 = 0$ e $x + 2 = 0$, o que é impossível. A afirmação p é, portanto, falsa.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \forall_x \neg(\forall_y \; x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall_x \exists_y \; \neg(x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall_x \exists_y \; x + y \neq 0 \end{aligned}$$

Assim, $\forall_x \exists_y \; x + y \neq 0$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo $\neg$.

(c)

(i) Em p afirma-se que existe um real x tal que, para todo o real y, se tem $x + y = y$. Consideremos $x = 0$. Para esse valor de x, temos que $x + y = 0 + y = y$, pelo que a afirmação p é verdadeira.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \forall_x \neg(\forall_y\ x + y = y) \\ &\Leftrightarrow \forall_x \exists_y\ \neg(x + y = y) \\ &\Leftrightarrow \forall_x \exists_y\ x + y \neq y \end{aligned}$$

Assim, $\forall_x \exists_y\ x + y \neq y$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo $\neg$.

(d)

(i) Em p afirma-se que, para todo o real x positivo, existe um real y tal que $x + y = y$. Para cada real positivo x, considere-se $y = \frac{1}{x}$. Temos $xy = x \times \frac{1}{x} = 1$. A afirmação p é verdadeira.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \exists_x \neg(x > 0 \rightarrow \exists_y\ xy = 1) \\ &\Leftrightarrow \exists_x (x > 0 \wedge \neg(\exists_y\ xy = 1)) \\ &\Leftrightarrow \exists_x (x > 0 \wedge \forall_y\ \neg(xy = 1)) \\ &\Leftrightarrow \exists_x (x > 0 \wedge \forall_y\ xy \neq 1) \end{aligned}$$

Assim, $\exists_x (x > 0 \wedge \forall_y\ xy \neq 1)$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo $\neg$.

1.18. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$,

(a) verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$.

(b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p.

resolução:

(a) Em p afirma-se que, para todo o elemento a de A, existe pelo menos um elemento b de B tal que $a^2 = b \vee a + b = 0$. Verifiquemos, então, para cada valor a de A, a existência de um tal b em B.

$\underline{a = -2}$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow (-2)^2 = b \vee -2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 4 \vee b = 2 \end{aligned}$$

Como $4 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b \in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$\underline{a=0}$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 0^2 = b \vee 0 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \vee b = 0 \end{aligned}$$

Como $0 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$\underline{a=1}$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 1^2 = b \vee 1 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \vee b = -1 \end{aligned}$$

Como $-1 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$\underline{a=2}$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 2^2 = b \vee 2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 4 \vee b = -2 \end{aligned}$$

Como $4 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

Assim, para todo $a \in A$, $\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$. Logo, a proposição p é verdadeira.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \exists_{a\in A} \neg(\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)) \\ &\Leftrightarrow \exists_{a\in A} \forall_{b\in B}\ \neg(a^2 = b \vee a + b = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists_{a\in A} \forall_{b\in B}\ (a^2 \neq b \wedge a + b \neq 0) \end{aligned}$$

Assim, $\exists_{a\in A} \forall_{b\in B}\ (a^2 \neq b \wedge a + b \neq 0)$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do símbolo de negação.

1.19. Considerando que p representa a proposição

$$\exists_{y\in A} \forall_{x\in A} (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

(a) dê exemplo de um universo A não vazio onde:

   (i) a proposição p é verdadeira;

   (ii) a proposição p é falsa.

(b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

resolução:

(a) Em p afirma-se que existe um elemento y de A tal que, para qualquer outro elemento x de A, se tem $xy > 0$ ou $x^2 + y = 0$.

(i) Seja $A = \{1, 2\}$. Consideremos $y = 1$. O único elemento x de A distinto de y é $x = 2$. Temos que $xy = 2 > 0$, pelo que $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira para esses valores de x e y. Assim, para este universo A, a proposição p é verdadeira.

OBS: Repare-se que, se A for apenas formado por reais positivos, sabemos que, para um qualquer elemento y de A, se terá $xy > 0$ para todos os restantes elementos x de A, o que garantirá que p é verdadeira em A. Mas existem outros exemplos de universos A, em que nem todos os elementos são reais positivos mas p é verdadeira. Consideremos, por exemplo, $A = \{-2, -1, 1\}$. Consideremos $y = -1$. Os elementos de A distintos de y são -2 e 1. Para $x = -2$, temos que $xy = 2 > 0$, pelo que $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira. Para $x = 1$, temos que $xy = -1 < 0$, mas $x^2 + y = 1^2 + (-1) = 0$, donde $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira. Assim, para este universo A, a proposição p é verdadeira.

(ii) Seja $A = \{-1, 2\}$. Vejamos que não existe $y \in A$ tal que $\forall_{x \in A}(x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))$. Temos apenas dois valores possíveis para y: -1 ou 2. Consideremos $y = -1$. O único elemento x de A distinto de y é $x = 2$. Temos que $xy = -2 < 0$ e $x^2 + y = 2^2 + (-1) = 3 \neq 0$. Assim, para $y = -1$ e $x = 2$, $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição falsa. Portanto, y não pode ser -1. Consideremos, agora, $y = 2$. O único elemento x de A distinto de y é $x = -1$. Temos que $xy = -2 < 0$ e $x^2 + y = (-1)^2 + 2 = 3 \neq 0$. Assim, para $y = 2$ e $x = -1$, $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição falsa. Portanto, y não pode ser 2. Logo, não existe $y \in A$ tal que $\forall_{x \in A}(x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))$. Assim, para este universo A, a proposição p é falsa.

(b) Temos que

$$\begin{aligned}
\neg p &\Leftrightarrow \forall_{y \in A} \neg(\forall_{x \in A}\ (x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)) \\
&\Leftrightarrow \forall_{y \in A} \exists_{x \in A}\ \neg(x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)) \\
&\Leftrightarrow \forall_{y \in A} \exists_{x \in A}\ (x \neq y \wedge \neg(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)) \\
&\Leftrightarrow \forall_{y \in A} \exists_{x \in A}\ (x \neq y \wedge xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0))
\end{aligned}$$

Assim, $\forall_{y \in A} \exists_{x \in A}\ (x \neq y \wedge xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0))$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem recorrer ao conetivo *negação*.

1.20. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) A Maria afirmou: "Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem esteve calor e fui à praia". Em resposta, a Rita concluiu: "Então encontraste a Alice".

(c) O Tiago disse: "Vou almoçar no bar ou na cantina". E acrescentou: "Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à cantina".

resolução:

(a) Representemos as frases declarativas simples “Hoje vou ao cinema” e“Fico em casa a ver um filme na televisão” por p_0 e p_1, respetivamente. A primeira afirmação de João pode ser traduzida por $p_0 \vee p_1$. A segunda afirmação de João pode ser representada por $\neg p_0$ e a conclusão de Joana por p_1. O argumento é, então representado por

$$((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \to p_1$$

O argumento será válido se esta última fórmula for uma tautologia, o que podemos averiguar através de uma tabela de verdade.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \vee p_1$	$(p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0$	$((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \to p_1$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Como podemos comprovar na tabela acima, a fórmula $((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \to p_1$ é sempre verdadeira, independentemente das variáveis proposicionais que nela ocorrem. Portanto, é uma tautologia e o argumento apresentado é válido.

OBS: Outra forma de verificar se o argumento é válido é averiguar a veracidade da conclusão assumindo a veracidade de todas as premissas. Admitindo, então, que $p_0 \vee p_1$ e $\neg p_0$ são ambas proposições verdadeiras, averiguemos se p_1 é necessariamente verdadeira. Ora, se o valor lógico de $\neg p_0$ é 1, então o valor lógico de p_0 é 0. Assim, como o valor lógico de $p_0 \vee p_1$ é 1, segue-se que o valor lógico de p_1 tem de ser 1. Podemos, portanto, afirmar que o argumento é válido.

(b) Representemos as frases declarativas simples “encontrar a Alice”, “estar calor” e “ir à praia” por p_0, p_1 e p_2, respetivamente. A primeira afirmação de Maria pode ser traduzida por $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$. A segunda afirmação de Maria pode ser representada por $p_1 \wedge p_2$ e a conclusão de Rita por p_0. O argumento é, então representado por

$$(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2)) \to p_0$$

Assumindo que as premissas são ambas verdadeiras, sabemos que os valores lógicos de $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$ e $p_1 \wedge p_2$ são iguais a 1. Sendo 1 o valor lógico de $p_1 \wedge p_2$, sabemos que os valores lógicos de p_1 e p_2 são ambos 1. Com p_2 verdadeira, nada podemos garantir sobre o valor lógico de p_0 a partir da veracidade de $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$. De facto, p_0 tanto pode ser verdadeira como falsa, pelo que o argumento não é válido.

OBS: Claramente, o exercício pode ser resolvido fazendo a tabela de verdade da fórmula $(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2)) \to p_0$, comprovando-se que não é uma tautologia.

(c) Representemos as frases declarativas simples “Vou almoçar no bar”, “Vou almoçar na cantina”, “Fico mal disposto” e “Vou ao cinema” por p_0, p_1 , p_2 e p_3, respetivamente. A primeira afirmação de Tiago pode ser traduzida por $p_0 \vee p_1$. A segunda afirmação de Tiago pode ser representada por $p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_3)$. A informação de que Joana encontrou Tiago no cinema pode ser traduzida por p_3 e a conclusão de Joana por p_1. O argumento é, então representado por

$$(((p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_3))) \wedge p_3) \to p_1$$

Assumindo que as três premissas são simultaneamente verdadeiras, sabemos que os valores lógicos de $p_0 \vee p_1$, de $p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_3)$ e de p_3 são iguais a 1. Pretendemos verificar se, nesse caso, p_1 é necessariamente verdadeira. Sendo 1 o valor lógico de p_3 e de $p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_3)$, segue-se que p_0 tem de ser falsa. Assim, dado que $p_0 \vee p_1$ é verdadeira, podemos afirmar que p_1 tem de ser verdadeira. Logo, o argumento é válido.

OBS: O exercício pode ser resolvido fazendo a tabela de verdade da fórmula $(((p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_3))) \wedge p_3) \to p_1$, comprovando-se que é uma tautologia.

1.21. Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é um número par.

resolução:

Sejam n, m dois inteiros ímpares. Então, existem inteiros k, r tais que

$$n = 2k + 1$$

e

$$m = 2r + 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n + m &= (2k + 1) + (2r + 1) \\ &= 2k + 2r + 2 \\ &= 2(k + r + 1). \end{aligned}$$

Como $k, r \in \mathbb{Z}$, segue-se que $k + r + 1 \in \mathbb{Z}$. Assim, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $n + m = 2s$ (basta considerar $s = k + r + 1$), pelo que $n + m$ é par.

1.22. Mostre que o produto de números inteiros ímpares é um número ímpar.

resolução:

Sejam n, m dois inteiros ímpares. Então, existem inteiros k, r tais que

$$n = 2k + 1$$

e

$$m = 2r + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} nm &= (2k+1)(2r+1) \\ &= 4kr + 2k + 2r + 1 \\ &= 2(2kr + k + r) + 1. \end{aligned}$$

Como $k, r \in \mathbb{Z}$, segue-se que $2kr + k + r \in \mathbb{Z}$. Assim, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $nm = 2s + 1$ (basta considerar $s = 2kr + k + r$), pelo que nm é ímpar.

1.23. Mostre que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

resolução:

Admitamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$. Então, $n - 3n = 2 - 5$, ou seja, $-2n = -3$. Logo, $n = \frac{3}{2}$, o que é uma contradição pois $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. Portanto, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

1.24. Seja n um número natural ímpar. Mostre que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

resolução:

Seja n um natural ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 + 8n - 1 &= (2k+1)^2 + 8(2k+1) - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 16k + 8 - 1 \\ &= 4k^2 + 20k + 8 \\ &= 4(k^2 + 5k + 2). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $k^2 + 5k + 2 \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 8n - 1 = 4s$ (basta considerar $s = k^2 + 5k + 2$), pelo que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

1.25. Mostre que, para todo o natural n, se $3n + 5$ é ímpar, então n é par.

resolução:

A prova segue por contraposição. Pretende-se provar que

$$3n + 5 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ par}$$

ou, equivalentemente, que

$$\neg(n \text{ par}) \Rightarrow \neg(3n + 5 \text{ ímpar}),$$

isto é,

$$n \text{ ímpar} \Rightarrow 3n + 5 \text{ par}.$$

Admitamos que n é ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} 3n + 5 &= 3(2k + 1) + 5 \\ &= 6k + 8 \\ &= 2(3k + 4). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $3k+4 \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $3n+5 = 2s$ (basta considerar $s = 3k + 4$), pelo que $3n + 5$ é par.

1.26. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

resolução:

Mostremos a dupla implicação

$$n \text{ ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ ímpar}$$

e

$$n^2 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ ímpar}.$$

A prova que apresentamos da primeira implicação é uma prova direta, ao passo que a prova que apresentamos para a segunda implicação é uma prova por contraposição.

($\Rightarrow$) Admitamos que n é ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}_0$ tal que $n^2 = 2s + 1$ (basta considerar $s = 2k^2 + 2k$), pelo que n^2 é ímpar.

($\Leftarrow$) A contrarrecíproca de

$$n^2 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ ímpar}.$$

é

$$\neg(n \text{ ímpar}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ ímpar}),$$

ou seja,

$$n \text{ par} \Rightarrow n^2 \text{ par}.$$

Admitamos que n é par. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Logo,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$, segue-se que $2k^2 \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 2s$ (basta considerar $s = 2k^2$), pelo que n^2 é par.

1.27. Prove que, dado um número natural n, se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

resolução:

Seja n um natural múltiplo de 6. Então, existe um natural k tal que $n = 6k$. Assim, $n = 2r$, onde $r = 3k \in \mathbb{N}$, pelo que n é múltiplo de 2. Por outro lado, temos que $n = 3s$, onde $s = 2k \in \mathbb{N}$, e, portanto, n é múltiplo de 3.

1.28. Encontre um contraexemplo para cada das afirmações seguintes:

(a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

resolução:

(a) Consideremos $p = 3$ e $q = 5$, ambos primos. Temos que $n = p^2 + q^2 = 9 + 25 = 34$ não é primo.

(b) Consideremos $a = 3$ e $b = -4$. Temos que $a > b$ mas $a^2 \not> b^2$

(c) Consideremos $x = -1$. Temos que $x^4 = 1$ e $x \neq 1$.

Capítulo 2

Teoria elementar de conjuntos

2.1. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\left\{a^2 \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$

(c) $\left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{a \in A} \quad b = a^2\right\}$

(d) $\{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\right\}$

(f) $\left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \quad b^2 = a\right\}$

resolução:

(a) Seja $B = \left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$. O conjunto B é o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que $a^2 \in \mathbb{Z}$, ou seja, dos elementos de A cujo quadrado é um nḿero inteiro.

Na seguinte tabela listamos os elementos de A e os correspondentes quadrados e averiguamos se estes pertencem ou não a $\mathbb{Z}$.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a^2 \in \mathbb{Z}$	sim	sim	não	sim	sim	não

Assim, $B = \{1, -1, 2, 0\}$.

(b) Seja $C = \left\{a^2 \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$. O conjunto C é o conjunto dos valores reais a^2 em que $a \in A$ e $a^2 \in A$, ou seja, C é formado pelos reais a^2 em que a é elemento de A assim como a^2.

Na seguinte tabela listamos os elementos de A, os correspondentes quadrados e averiguamos se estes pertencem ou não a A e se são reais.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a^2 \in \mathbb{R}$	sim	sim	sim	sim	sim	sim
$a^2 \in A$	sim	sim	não	não	sim	sim

Assim, $C = \{1, 0, \frac{1}{4}\}$.

(c) Seja $D = \left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{a\in A} \quad b = a^2\right\}$. Podemos reescrever D do seguinte modo:

$$D = \left\{a^2 \in \mathbb{Z} \,|\, a \in A\right\}.$$

O conjunto D é o conjunto dos valores inteiros a^2 em que $a \in A$, ou seja, D é formado pelos valores a^2 em que $a \in A$ e $a^2 \in \mathbb{Z}$.

Analisando a tabela apresentada na alínea (a), podemos concluir que $D = \{1, 4, 0\}$.

(d) Seja $E = \{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$. O conjunto E é o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que $a \geq 0$ e $\sqrt{a} \in A$

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A e as correspondentes raizes quadradas e averiguamos se $a \geq 0$ e se $\sqrt{a} \in A$.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
$a \geq 0$	sim	não	sim	sim	sim	não
$\sqrt{a} \in A$	sim	não	não	não	sim	não

Assim, $E = \{1, 0\}$.

(e) Seja $F = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a\in A} \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\right\}$. Podemos reescrever F do seguinte modo:

$$F = \left\{\sqrt{a} \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A \wedge a \geq 0\right\}.$$

O conjunto F é o conjunto dos valores reais $\sqrt{a}$ em que $a \in A$, $a^2 \in A$ e $a \geq 0$. Note-se que, exigindo que $a \geq 0$, estamos a garantir que $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$.

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A, as correspondentes raizes quadradas e os correspondentes quadrados e averiguamos se $a \geq 0$ e se $a^2 \in A$.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a \geq 0$	sim	não	sim	sim	sim	não
$a^2 \in A$	sim	sim	não	não	sim	sim

Assim, os elementos a de A que satisfazem as condições $a \geq 0$ e $a^2 \in A$ em simultâneo são 0 e 1. Portanto, F será o conjunto formado pelas raízes quadradas desses elementos, isto é, $F = \{0, 1\}$.

(f) Seja $G = \left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a\in A} \quad b^2 = a\right\}$. Uma vez que

$$b^2 = a \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{a},$$

podemos reescrever G do seguinte modo:

$$G = \left\{\pm\sqrt{a} \in \mathbb{R} \,|\, a \in A\right\}.$$

Deste modo, G é o conjunto dos valores $\pm\sqrt{a}$ que são reais, onde $a \in A$.

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A e as correspondentes raizes quadradas e averiguamos se estas são reais.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt{a} \in \mathbb{R}$	sim	não	sim	sim	sim	não

Assim, $G = \{-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}$.

2.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$

(b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

resolução:

Para definirmos por compreensão cada um dos conjuntos dados devemos indicar uma condição que descreva totalmente os elementos do conjunto.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

(b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$

(c) $AB = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge 1 < n \leq 5\}$

2.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $\{1, 2\}$ e $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\}$

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$

(c) $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$ e $\{\}$

(d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$

resolução:

Relembremos que dois conjuntos são iguais se têm exatamente os mesmos elementos.

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Portanto, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

Note-se que $0 < 1^2 \leq 4$, $0 < 2^2 \leq 4$ e $3^2 \not\leq 4$. Assim, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\} = \{1, 2\}$

Assim, todos os conjuntos desta alínea são iguais.

(b) Assumamos que r, s e t são todos distintos entre si. Assim, os elementos de $\{r, t, s\}$ são r, t e s, os de $\{s, t, r, s\}$ são r, t e s, os de $\{t, s, t, s\}$ são t e s e os de $\{s, t, r, t\}$ são r, t e s. Assim, os conjuntos cujos elementos são r, t e s são iguais entre si, ou seja, $\{r, t, s\} = \{s, t, r, s\} = \{s, t, r, t\}$ e o conjunto $\{t, s, t, s\}$ é distinto dos demais.

(c) Temos que $\varnothing = \{\}$, sendo estas duas formas de denotar o conjunto vazio. O conjunto $\{0\}$ tem um elemento, o número 0, e o conjunto $\{\varnothing\}$ tem um elemento, o conjunto $\varnothing$. Assim, cada um destes dois conjuntos é distinto dos restantes conjuntos listados.

(d) O conjunto $\{1, \{-1\}\}$ tem dois elementos, o número 1 e o conjunto $\{-1\}$. O conjunto $\{1, -1\}$ tem dois elementos, os números 1 e -1. Como

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1,$$

segue-se que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$ tem dois elementos, os números 1 e -1. Portanto, $\{1, -1\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$ e o conjunto $\{1, \{-1\}\}$ é distinto dos restantes.

2.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \varnothing\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$ (b) $\{5\} \in A$ (c) $\{5, 11\} \in A$ (d) $A \subseteq \mathbb{R}$

(e) $\{5, 11\} \subseteq A$ (f) $0 \in A$ (g) $\varnothing \in A$ (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

resolução:

Na resolução deste exercício, tenhamos em conta que, dado um objeto x, $x \in A$ se x é um dos elementos de A, e que os elementos de A são os listados de seguida:

- 5
- 11
- $\{5, 11\}$
- $\{0\}$
- $\varnothing$

Recordemos, ainda, que dados dois conjuntos X e Y, dizemos que $X \subseteq Y$ se todos os elementos de X são elementos de Y.

(a) A afirmação é verdadeira pois 5 é um dos elementos de A, como podemos verificar na lista acima.

(b) A afirmação é falsa pois $\{5\}$ não é um dos elementos de A.

(c) A afirmação é verdadeira pois $\{5, 11\}$ é um dos elementos de A.

(d) A afirmação é falsa pois nem todos os elementos de A são números reais. De facto, há elementos de A que são conjuntos e, portanto, não pertencem a $\mathbb{R}$. Tomemos, por exemplo, o objeto $\{5, 11\}$. Temos que $\{5, 11\} \in A$ mas $\{5, 11\} \notin \mathbb{R}$. Logo, $A \not\subseteq \mathbb{R}$.

(e) A afirmação é verdadeira. Por definição, $\{5, 11\} \subseteq A$ se 5 e 11 são elementos de A, o que pode ser comprovado na lista apresentada acima.

(f) A afirmação é falsa pois 0 não é um dos elementos de A.

(g) A afirmação é verdadeira pois $\varnothing$ é um dos elementos de A.

(h) A afirmação é falsa pois nem todos os elementos de $\{0, 5, 11\}$ são elementos de A. Com efeito, 5 e 11 são elementos de A, mas 0 não é elemento de A. Logo, $\{0, 5, 11\} \not\subseteq A$.

2.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ (b) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ (c) $\varnothing \notin \varnothing$ (d) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$

resolução:

(a) A afirmação é verdadeira pois o conjunto $\{\varnothing\}$ tem um só elemento, o conjunto $\varnothing$. Portanto, $\varnothing$ é um dos elementos (o único) de $\{\varnothing\}$, pelo que $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(b) A afirmação é verdadeira. De facto, sabemos que $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto.

(c) A afirmação é verdadeira. Com efeito, pensando na afirmação $\varnothing \in \varnothing$, esta é falsa, uma vez que afirma que $\varnothing$ tem pelo menos um elemento, o que é absurdo. Portanto, a sua negação ($\varnothing \notin \varnothing$) é verdadeira.

(d) A afirmação é falsa porque $\varnothing$ não é elemento de $\{\{\varnothing\}\}$. De facto, o único elemento deste conjunto é $\{\varnothing\}$.

2.7. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

resolução:

As afirmações garantidamente verdadeiras são as das alíneas (a), (e) e (f). Designemos por U o universo em questão (ou seja, a, b, c, d, e, f são elementos de U e $A, B, C \subseteq U$).

Como $A \subseteq C$, todos os elementos de A são elementos de C. Portanto, dado que $a \in A$, podemos afirmar que $a \in C$.

Como $b \in B$ e $A \subseteq B$, sabemos que

$$b \in A \vee b \in B \setminus A.$$

No entanto, não temos garantias de que $b \in A$.

O facto de d não pertencer a A apenas nos garante que $d \in U \setminus A$. Sabemos que $d \in U \setminus A$, mas isso não garante que d pertença a B.

Como $c \in C$ e $A \subseteq C$, sabemos que

$$c \in A \vee c \in C \setminus A.$$

Não temos, portanto, garantias de que $c \notin A$.

Se e pertencesse a A, então e pertenceria a B, dado que $A \subseteq B$. Logo, podemos afirmar que $e \notin A$.

Se f pertencesse a A, então f pertenceria a C, uma vez que $A \subseteq C$. Assim, podemos afirmar que $f \notin A$.

2.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$ (b) $A \not\subseteq B$ e $A \in B$

(c) $A \not\subseteq B$ e $A \notin B$ (d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

resolução:

(a) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Todos os elementos de A são elementos de B, pelo que $A \subseteq B$, mas o objeto $\{1, 2\}$ não é um elemento de B, donde $A \notin B$.

(b) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, \{1, 2\}\}$. Nem todos os elementos de A são elementos de B, pelo que $A \not\subseteq B$. Dado que o objeto $\{1, 2\}$ é um dos três elementos de B, segue-se que $A \in B$.

(c) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$. Nem todos os elementos de A são elementos de B, pelo que $A \not\subseteq B$, e o objeto $\{1, 2\}$ não é um dos dois elementos de B, pelo que $A \notin B$.

(d) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$. Todos os elementos de A são elementos de B, pelo que $A \subseteq B$, e o objeto $\{1, 2\}$ é um dos elementos de B, pelo que $A \in B$.

2.9. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \mid x \in A\}$. Determine $A \cup C$, $A \cup B$, $C \cup B$, $A \cup A$, $A \cap B$, $B \cap B$, $B \cup C \cup A$, $C \backslash A$, $A \backslash B$ e $B \backslash A$.

resolução:

Note-se que os elementos de B são os naturais que podem escrever-se na forma $2y$, com $y \in \mathbb{N}$. Assim, B é o conjunto dos naturais pares (i.e., $B = 2\mathbb{N}$). Os elementos do conjunto C são os valores de x^2 em que $x \in A$. Logo, $C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2\} = \{4, 16, 36, 64\}$. Assim,

$$A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}, \quad A \cup B = B, \quad C \cup B = B, \quad A \cup A = A$$

$$A \cap B = A, \quad B \cap B = B, \quad B \cup C \cup A = B, \quad C \setminus A = \{16, 36, 64\}$$

$$A \setminus B = \varnothing, \quad B \setminus A = \{2y \ \mid \ y \in \mathbb{N} \wedge y \geq 5\}$$

2.10. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$ (c) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ (e) se $A \cup B = \varnothing$ então $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$

(b) $A \backslash B \subseteq A$ (d) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$ (f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

resolução:

Recordemos que para mostrar que dois conjuntos X e Y são iguais basta mostrar que, para todo o objeto x, $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. Mais ainda, para mostrar que $X \subseteq Y$, basta provar que, para todo o objeto X, $x \in X \Rightarrow x \in Y$.

(a) Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \quad \text{[pela definição de } \cup] \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{[pela equivaência lógica } \varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi] \end{aligned}$$

Logo, $A \cup A = A$.

(b) Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Assim, $A \setminus B \subseteq A$.

(c) Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \setminus B \quad \text{[pela definição de } \cup] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \quad \text{[pela definição de } \cap \text{ e de } \setminus] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \quad \text{[pela distributividade de } \wedge \text{ em relação a } \vee] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg \perp \quad \text{[uma vez que } x \in B \vee x \notin B \text{ é uma tautologia]} \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{[uma vez que } \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}] \end{aligned}$$

Logo, $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.

(d) Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \quad \text{[pela definição de } \cap] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \quad \text{[pela definição de } \setminus] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \quad \text{[pela associatividade de } \wedge] \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \quad \text{[pela definição de } \cap] \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C \quad \text{[pela definição de } \setminus] \end{aligned}$$

Logo, $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$.

(e) Pretendemos mostrar que

$$A \cup B = \varnothing \Rightarrow (A = \varnothing \wedge B = \varnothing).$$

Admitamos, então, que $A \cup B = \varnothing$. Queremos mostrar que $A = \varnothing \wedge B = \varnothing$. Suponhamos que $A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$. Sem perda de generalidade, admitamos que $A \neq \varnothing$ (note-se que o caso em $B \neq \varnothing$ é análogo). Nesse caso, existe um elemento a de A. Mas, então, $a \in A \cup B$, o que contradiz a hipótese $A \cup B = \varnothing$. A contradição resultou de supormos que $A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$. Portanto, $A = \varnothing \wedge B = \varnothing$.

(f) Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned}
& x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C && [1]\\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) && [2]\\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C) && [3]\\
& \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B)) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) && [4]\\
& \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) && [5]\\
& \Leftrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) && [6]\\
& \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge (x \notin B \vee x \notin C) && [7]\\
& \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \cap C && [8]\\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C) && [9]
\end{aligned}$$

justificações:
[1] pela definição de reunião
[2] pela definição de complementação
[3] pela distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$
[4] pelo facto de $x \in B \wedge x \notin B$ ser uma contradição, pela equivalência lógica $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$ e pela definição de reunião
[5] pela distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$
[6] pela definição de reunião
[7] pela distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$
[8] pela definição de interseção [note-se que $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in C$; logo, $x \notin B \cap C \Leftrightarrow \neg(x \in B \wedge x \in C)$]
[9] pela definição de complementação

2.11. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

resolução:

Mostremos que, nas condições do enunciado, para todo o objeto x, $x \in B \Leftrightarrow x \in C$. Provemos que, para todo o objeto x, $x \in B \Rightarrow x \in C$. A prova de que para todo o objeto x, $x \in C \Rightarrow x \in B$ é análoga.

Seja $x \in B$.

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in C \end{aligned}$$

Existem, portanto, dois casos possíveis: CASO 1: $x \in A$; CASO 2: $x \in C$.

CASO 1: Neste caso, sabemos que $x \in A$ e $x \in B$. Assim, $x \in A \cap B$. Dado que $A \cap B = A \cap C$, podemos afirmar que $x \in A \cap C$, donde $x \in C$.
CASO 2: Neste caso, é imediato o que pretendíamos provar: $x \in C$.

Provámos, deste modo, que em ambos os casos $x \in C$. Assim, se $x \in B$ então $x \in C$. Portanto, $B \subseteq C$.

2.12. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ (b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

resolução:

(a) Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ e $C = \{3\}$. Temos que $A \cup (B \backslash C) = \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$ e $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{1,2,3\} \backslash \{1,2,3\} = \varnothing$. Assim, $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

(b) Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$. Temos que $A \backslash (B \cap C) = \{1,2\} \backslash \varnothing = \{1,2\}$ e $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) =$. Assim, $\{1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$. Portanto, $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2.13. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$.

(c) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.

(d) Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

resolução:

(a) A afirmação é falsa. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$ e $C = \{1,5\}$. Temos que $C \subseteq A \cup B$ mas $C \nsubseteq A$ e $C \nsubseteq B$.

(b) A afirmação é verdadeira. Admitamos que $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$. Se $C \subseteq A$, dado que $A \subseteq A \cup B$, segue-se, pela transitividade da relação de inclusão, que $C \subseteq A \cup B$. Se $C \subseteq B$, como $B \subseteq A \cup B$, temos, novamente pela transitividade da relação de inclusão, que $C \subseteq A \cup B$.

(c) A afirmação é falsa. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,6\}$ e $C = \{1,2\}$. Temos que $C \subseteq A$ (pelo que a proposição "$C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$" é verdadeira. No entanto, $C \nsubseteq A \cap B = \{2\}$.

(d) A afirmação é verdadeira. Admitamos que $C \subseteq (A \cap B)$. Como $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq A$, podemos concluir que $C \subseteq A$. De modo análogo, dado que $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq B$, segue-se que $C \subseteq B$

2.14. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\varnothing, 7, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

resolução:

Lembremos que, dado um conjunto X, o conjunto das partes de X, $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos de X. Assim, um conjunto Y é um elemento de $\mathcal{P}(X)$ se $Y \subseteq X$.

Temos que

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\}\Big\}$$

e

$$\mathcal{P}(B) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{7\}, \{\{1, 5, 7\}\}, \{\varnothing, 7\}\{\varnothing, \{1, 5, 7\}\}, \{7, \{1, 5, 7\}\}, \{\varnothing, 7, \{1, 5, 7\}\}\Big\}$$

Como $\{1, 5, 7\}$ não é um dos elementos de $\mathcal{P}(B)$, temos que $A \notin \mathcal{P}(B)$ (OBS: poderíamos, em alternativa, referir que nem todos os elementos de A são elementos de B, pelo que $A \nsubseteq B$ e, por conseguinte, $A \notin \mathcal{P}(B)$).

Sabemos que $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se e somente se $A \subseteq \mathbb{N}$. Ora, todos os elementos de A são números naturais, ou seja, todos os elementos de A são elementos de $\mathbb{N}$. Logo, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que se $X \subseteq Y$, então $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$, para quaisquer conjuntos X e Y. Como $A \subseteq \mathbb{N}$, podemos concluir que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.15. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\varnothing) &= \{\varnothing\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) &= \mathcal{P}\left(\{\varnothing\}\right) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) &= \mathcal{P}\left(\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\}\right) = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \Big\{\{\varnothing\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}$$

2.16. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes: (a) $\mathcal{P}\,(A \cap B) = \mathcal{P}\,(A) \cap \mathcal{P}\,(B)$; (b) $\mathcal{P}\,(A \cup B) = \mathcal{P}\,(A) \cup \mathcal{P}\,(B)$.

resolução:

(a) A afirmação (a) é verdadeira. De facto, para todo o objeto X, $X \in \mathcal{P}\,(A \cap B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}\,(A) \cap \mathcal{P}\,(B)$, como a seguir comprovamos:

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P}\,(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \quad \text{[pela definição de conjunto das partes]} \\
&\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \quad \text{[pela definição de } \cap\text{, pelo ex. 2.13(d) e recíproca]} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}\,(A) \wedge X \in \mathcal{P}\,(B) \; \text{[pela definição de conjunto das partes]} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}\,(A) \cap \mathcal{P}\,(B) \quad \text{[pela definição de } \cap\text{]}
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) A afirmação (a) é falsa. De facto, consideremos $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2\}$ e

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}\big\},$$
$$\mathcal{P}(B) = \big\{\varnothing, \{2\}\big\}$$

e

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}.$$

Para estes conjuntos,

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\big\}.$$

2.17. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \varnothing \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

resolução:

$$\begin{aligned}
A \times C &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in C\} = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\} \\
C \times A &= \{(x, y) \mid x \in C \wedge y \in A\} = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3)\} \\
(A \times C) \setminus (C \times A) &= \{a \mid a \in A \times C \wedge a \notin C \times A\} = A \times C \\
A \times B \times C &= \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\} \\
&= \{(1, a, 5), (2, a, 5), (3, a, 5), (1, b, 5), (2, b, 5), (3, b, 5)\} \\
A \times \varnothing \times C &= \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in \varnothing \wedge z \in C\} = \varnothing \\
C^3 &= \{(x, y, z) \mid x \in C \wedge y \in C \wedge z \in C\} = \{(5, 5, 5)\} \\
C^3 \times B &= \{(x, y) \mid x \in C^3 \wedge y \in B\} \\
&= \big\{\big((5, 5, 5), a\big), \big((5, 5, 5), b\big)\big\}
\end{aligned}$$

2.18. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

resolução:

Para todo o objeto (x, y),

$$\begin{aligned}
(x, y) \in C \times (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in A \cup B && [1] \\
&\Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \vee y \in B) && [2] \\
&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in B) && [3] \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in C \times A \vee (x, y) \in C \times B && [4] \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (C \times A) \cup (C \times B) && [5]
\end{aligned}$$

justificações:
[1] pela definição de produto cartesiano
[2] pela definição de reunião
[3] pela distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$
[4] pela definição de produto cartesiano
[5] pela definição de reunião

2.19. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \varnothing$.

resolução:

A prova segue por redução ao absurdo. Admitamos que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$ e suponhamos que $C \neq \varnothing$.

Dado que $A \neq B$, sabemos que existe um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro. Sem perda de generalidade, admitamos que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ (*). Sendo $C \neq \varnothing$, sabemos que C tem pelos menos um elemento, digamos y. Assim, $(x, y) \in A \times C$. Como $(x, y) \in A \times C$ e $A \times C = B \times C$, podemos afirmar que $(x, y) \in B \times C$. Mas, deste modo, $x \in B$, o que leva a uma contradição. A contradição resultou de supormos que $C \neq \varnothing$. Portanto, $C = \varnothing$.

(*) Aqui, o "sem perda de generalidade" refere-se ao facto de o caso em que existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ ser perfeitamente análogo ao caso analisado.

2.20. Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A, B e C tais que:

(a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$

(b) $A \cap \varnothing = A$

(c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$

(d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$

(e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \nsubseteq B$

(f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$

(g) $A \times (B \backslash C) = A \times C$ c/ $B, C \neq \varnothing$

(h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ c/ $A, B \neq \varnothing$

(i) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \varnothing$

resolução:

(a) Consideremos $A = \big\{1, \{1\}\big\}$. Temos que $\{1\}$ é um dos elementos de A. Assim, podemos dizer que $\{1\} \in A$. Mais ainda, todos os elementos de $\{1\}$ são elementos de A (de facto, 1 é elemento de A). Portanto, $\{1\} \subseteq A$.

(b) O único conjunto A que satisfaz $A \cap \varnothing = A$ é $A = \varnothing$.

(c) Consideremos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{1, 5\}$. Temos que $A \cap B = \{1\} = A \cap C$. No entanto, $B \neq C$.

(d) Não existem tais conjuntos. De facto, se $B = C$, então $A \cap B = A \cap C$ (de facto, basta substituir B em $A \cap B$ por C).

(e) Só podemos ter $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \nsubseteq B$ quando $B = \varnothing$ e A é um conjunto não vazio. Consideremos, por exemplo, $A = \{1\}$, $B = \varnothing$ e $C = \{2\}$. Temos que

$$A \times B = \{1\} \times \varnothing = \varnothing,$$

$$B \times C = \varnothing \times \{2\} = \varnothing,$$

$$A \times B = \varnothing \subseteq \varnothing = B \times C$$

e

$$A \nsubseteq B.$$

(f) Consideremos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{2, 4\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = A \cup C$. No entanto, $B \neq C$.

(g) Consideremos, por exemplo, $A = \varnothing$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2\}$. Temos que

$$A \times (B \setminus C) = \varnothing \times \{1\} = \varnothing$$

e

$$A \times C = \varnothing \times \{2\} = \varnothing.$$

Note-se que $B, C \neq \varnothing$ e $A \times (B \setminus C) = \varnothing = A \times C$.

(h) Consideremos, por exemplo, $A = B = \{1, 2\}$. Temos que $A, B \neq \varnothing$ e $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\} \cup \{1, 2\}) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(i) Consideremos $A = \big\{1, \{1\}\big\}$. Temos que

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\Big\}.$$

Assim,

$$\mathcal{P}(A) \cap A = \Big\{\{1\}\Big\} \neq \varnothing.$$

2.21. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

resolução:

Seja n o número de elementos de A ($n \in \mathbb{N}_0$). Temos que $A \times A$ tem $n \times n = n^2$ elementos e, portanto, $\mathcal{P}(A \times A)$ tem $2^{(n^2)}$ elementos. Por outro lado, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos, pelo que $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem $2^n \times 2^n = 2^{(2n)}$ elementos. Portanto, se $n = 1$, é $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ que tem mais elementos. Se $n = 2$, os conjuntos em questão têm o mesmo número de elementos. Para $n \geq 3$, é $\mathcal{P}(A \times A)$ que tem mais elementos.

Capítulo 3

Indução nos naturais

3.1. Prove, por indução nos naturais, as seguintes propriedades:

(a) $2+4+6+...+2n = n(n+1)$, para todo $n \geq 1$.

(b) $1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

(c) $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

(d) $1+4+9+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.

(e) $n^2 > 2n+1$, para todo $n \geq 3$.

(f) $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.

(g) $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.

(h) $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.

(i) $7n < 2^n$ para todo $n \geq 6$.

(j) $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

(k) $a^n \leq b^n$, para todo $n \geq 1$ e para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$.

resolução:

(a) Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais pares é igual a $n(n+1)$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$" sobre os naturais n.

(I) Para $n = 1$, temos $2 = 1(1+1) \Leftrightarrow 2 = 2$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2+4+6+\cdots+2k = k(k+1). \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$2+4+6+\cdots+2(k+1)=(k+1)(k+2).$$

Temos que

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2(k+1)&=(2+4+6+\cdots+2k)+2(k+1)\\&=k(k+1)+2(k+1)\quad\text{pela (H.I.)}\\&=(k+1)(k+2),\end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1),$$

para todo $n\geq 1$.

(b) Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, para todo o natural $n\in\mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$" sobre os naturais n.

(I) Para $n=1$, temos $1=\frac{1(1+1)}{2}\Leftrightarrow 1=1$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.\quad\text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$1+2+3+4+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}1+2+3+4+\cdots+(k+1)&=(1+2+3+4+\cdots+k)+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\quad\text{pela (H.I.)}\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que

$$1+2+3+4+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

para todo $n \geq 1$.

(c) Mostremos que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$" sobre os naturais n.

(I) Para $n = 1$, temos $2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1 \Leftrightarrow 1 + 2 = 4 - 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k+1} &= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \quad \text{pela (H.I.)} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{1+k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

para todo $n \geq 1$.

(d) Mostremos que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$" sobre os naturais n.

(I) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 4 + 9 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 4 + 9 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Temos que

$$\begin{aligned} 1+4+9+\cdots+(k+1)^2 &= (1+4+9+\cdots+k^2)+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \quad \text{pela (H.I.)} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(k+1)\big(2k^2+7k+6\big)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que

$$1+4+9+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

para todo $n \geq 1$.

(e) Mostremos que $n^2 > 2n+1$, para todo $n \geq 3$, pelo método de indução simples de base 3 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^2 > 2n+1$" sobre os naturais $n \geq 3$.

(I) Para $n = 3$, temos $n^2 > 2n+1 \Leftrightarrow 3^2 > 2\times 3+1 \Leftrightarrow 9 > 7$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$k^2 > 2k+1 \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$(k+1)^2 > 2(k+1)+1,$$

isto é,

$$(k+1)^2 > 2k+3.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2+2k+1 \\ &> (2k+1)+2k+1 \quad \text{(note-se que } k^2 > 2k+1 \text{ pela (H.I.)} \\ &= 4k+2 \\ &> 2k+3, \quad \text{(uma vez que } k \geq 3 \text{ e } 4k+2 > 2k+3 \Leftrightarrow 2k > 1) \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 3 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $n^2 > 2n+1$, para todo $n \geq 3$.

(f) Mostremos que $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$, pelo método de indução simples de base 4 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n! \geq n^2$" sobre os naturais $n \geq 4$.

(I) Para $n = 4$, temos $n! \geq n^2 \Leftrightarrow 4! > 4^2 \Leftrightarrow 24 > 16$, pelo que $p(4)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 4$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$k! \geq k^2 \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $(k+1)! \geq (k+1)^2$. Temos que

$$\begin{aligned}(k+1)! \geq (k+1)^2 &\Leftrightarrow (k+1)k! \geq (k+1)^2 \\ &\Leftrightarrow k! \geq k+1.\end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $k! \geq k^2$. Pela alínea (e), sabemos que $k^2 > 2k+1$. É claro que $2k+1 > k+1$. Portanto,

$$k! \geq k^2 > 2k+1 > k+1,$$

donde é verdade que $k! \geq k+1$ e $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 4 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.

(g) Mostremos que $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^3 - n$ é múltiplo de 3".

(I) Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$. Como 0 é múltiplo de 3, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é múltiplo de 3. Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$.

Assim,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ &= 3q + (3k^2 + 3k) \\ &= 3(q + k^2 + k).\end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3 - (k+1) = 3(q + k^2 + k)$, sendo $q + k^2 + k \in \mathbb{N}$. Portanto, $k^3 - k$ é múltiplo de 3, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que

$$n^3 - n \text{ é múltiplo de } 3,$$

para todo o natural n.

(h) Mostremos que $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$5^n - 1$ é múltiplo de 4".

(I) Para $n = 1$, temos $5^n - 1 = 5 - 1 = 4$, que é, obviamente, múltiplo de 4. Logo, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $5^k - 1$ é múltiplo de 4. Então, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $5^k - 1 = 4r$.

Assim,

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \times 5^k - 1 \\ &= 5 \times (4r + 1) - 1 \quad \text{(uma vez que } 5^k - 1 = 4r \Leftrightarrow 5^k = 4r + 1\text{)} \\ &= 20r + 5 - 1 \\ &= 20r + 4 \\ &= 4 \times (5r + 1). \end{aligned}$$

Dado que $5r + 1 \in \mathbb{N}$, podemos dizer que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $5^{k+1} - 1 = 4s$, ou seja, $5^{k+1} - 1$ é múltiplo de 4. Assim, $p(k + 1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo o natural n.

(i) Mostremos que $7n < 2^n$ para todo $n \geq 6$, pelo método de indução simples de base 6 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$7n < 2^n$" sobre os naturais $n \geq 6$.

(I) Para $n = 6$, temos $7n < 2^n \Leftrightarrow 7 \times 6 < 2^6 \Leftrightarrow 42 < 64$, pelo que $p(6)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 6$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$7k < 2^k \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $7(k + 1) < 2^{k+1}$. Temos que

$$\begin{aligned} 7(k + 1) < 2^{k+1} &\Leftrightarrow 7k + 7 < 2 \times 2^k \\ &\Leftrightarrow 7k + 7 < 2^k + 2^k. \end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $7k < 2^k$. Como $k \geq 6$, sabemos que $2^k \geq 2^6 = 64$. Portanto, $7 < 2^k$. Como $7k < 2^k$ e $7 < 2^k$, podemos afirmar que $7k + 7 < 2^k + 2^k$. Portanto, $p(k + 1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 6 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $7n < 2^n$, para todo $n \geq 6$.

(j) Mostremos que $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$, pelo método de indução simples de base 10 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^n > n^3$" sobre os naturais $n \geq 10$.

(I) Para $n = 10$, temos $2^n > n^3 \Leftrightarrow 2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 1024 > 1000$, pelo que $p(10)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 10$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^k > k^3 \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $2^{k+1} > (k+1)^3$. Temos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} > (k+1)^3 &\Leftrightarrow 2 \times 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &\Leftrightarrow 2^k + 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1. \end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $2^k > k^3$. Se mostrarmos que $2^k > 3k^2 + 3k + 1$, poderemos afirmar que $2^k + 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ e, consequentemente que $p(k+1)$ é verdadeira. Façamos esta prova também por indução nos naturais.

> Consideremos o predicado $q(k): \; 2^k > 3k^2 + 3k + 1$, para todo o natural $k \geq 10$. Provemos que $q(k)$ é verdadeira para todo $k \geq 10$.
>
> (A) Para k=10, temos que $2^k > 3k^2 + 3k + 1 \Leftrightarrow 1024 > 3 \times 100 + 3 \times 10 + 1 \Leftrightarrow 1024 > 331$, donde $q(10)$ é verdadeira.
>
> (B) Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 10$ e $q(m)$ é verdadeira, ou seja, $2^m > 3m^2 + 3m + 1$. Pretendemos mostrar que $q(m+1)$ é verdadeira, isto é, que $2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1$. Ora,
>
> $$\begin{aligned} 2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2^m > 3m^2 + 6m + 3 + 3m + 3 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6). \end{aligned}$$
>
> Pela H.I., sabemos que $2^m > 3m^2 + 3m + 1$. Pela alínea (i), sabemos que $2^m > 7m$. Mais ainda, é claro que, para $m \geq 10$, $7m > 6m + 6$ (note-se que $7m > 6m + 6 \Leftrightarrow 7m - 6m > 6 \Leftrightarrow m > 6$). Assim,
>
> $$2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + 7m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6).$$
>
> Sendo $2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6)$, podemos afirmar que $2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1$, ou seja, que $q(m+1)$ é verdadeira.
>
> Pelo Princípio de Indução de base 10 para os naturais e por (A) e (B), podemos concluir que $2^k > 3k^2 + 3k + 1$, para todo $k \geq 10$.

Estamos, assim, em condições de afirmar que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 10 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

(k) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$. Mostremos que $a^n \leq b^n$, para todo $n \geq 1$.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$a^n \leq b^n$".

(I) Para $n = 1$, temos $a^n \leq b^n \Leftrightarrow a \leq b$. Portanto, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $a^k \leq b^k$. De $0 \leq a \leq b$ e de $a^k \leq b^k$, podemos concluir que

$$a \times a^k \leq b \times b^k,$$

ou seja, $a^{k+1} \leq b^{k+1}$ e, consequentemente, $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que $a^n \leq b^n$, para todo o natural n.

3.2. Seja $p(n)$ a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que se $p(k)$ é verdadeira (com $k \in \mathbb{N}$), então $p(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

resolução:

(a) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{(k-1)(k+2)}{2}. \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (k+1) &= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) \\ &= \frac{(k-1)(k+2)}{2} + (k+1) \quad \text{(pela H.I.)} \\ &= \frac{(k-1)(k+2) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 2k - k - 2 + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k}{2} \\ &= \frac{k(k+3)}{2}, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

(b) Consideremos $n = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} &\Leftrightarrow 1 = \frac{(1-1)(1+2)}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 = 0, \end{aligned}$$

pelo que $p(1)$ é falsa. Logo, $p(n)$ não é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in X \Rightarrow n+3 \in X.$$

Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

resolução:

Sabemos que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ se e somente se todos os elementos de $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$ são elementos de X. Pretendemos, pois, provar que $3n \in X$, para todo o natural n.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$3n \in X$" sobre os naturais.

(I) Para $n = 1$, temos $3n = 3$. Sabemos, pela definição de X, que $3 \in X$. Portanto, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$3k \in X \quad \text{(H.I.)}$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $3(k+1) \in X$. Pela definição de X, como $3k \in X$ pela H.I., podemos afirmar que $3k+3 \in X$. Portanto, $3(k+1) \in X$ e, por conseguinte, $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que $3n \in X$, para todo o natural n, donde $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

3.4. Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que a sequência de Fibonacci (definida por F_1, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$) satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$.

resolução:

A prova segue por Indução Completa nos naturais. Representemos por $p(n)$ o predicado

$$F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

sobre os naturais.

(I) Como o termo F_n é definido a partir de F_{n-1} e F_{n-2} apenas para $n \geq 3$, vejamos que $p(1)$ e $p(2)$ são verdadeiras. Temos que Se $n = 1$,

$$\begin{aligned} F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} &\Leftrightarrow F_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

pelo que $p(1)$ é verdadeira. Se $n = 2$,

$$F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \Leftrightarrow F_2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2}$$
$$\Leftrightarrow 1 \geq 1,$$

pelo que $p(2)$ é verdadeira.

(II) Consideremos, agora, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$ e tal que $p(1), p(2), \ldots, p(k)$ são verdadeiras. Sabemos, então, que

$$F_j \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{j-2}, \quad \text{(H.I.)}$$

para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Vejamos que $p(k+1)$ também é verdadeira. Temos que

$$\begin{aligned} F_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-2} &\Leftrightarrow F_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &\Leftrightarrow F_{(k+1)-1} + F_{(k+1)-2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{(pela definição de } F_n\text{)} \\ &\Leftrightarrow F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Pela H.I., sabemos que

$$F_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$$

e

$$F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)-2}.$$

Portanto,

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)-2},$$

ou seja,

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}.$$

Note-se que, se

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1},$$

então teremos

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e poderemos concluir que

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e, consequentemente, que

$$F_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-2}.$$

Vejamos que, de facto,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1} + 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq \frac{9}{4},
\end{aligned}$$

o que é verdade. Portanto,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução Completa para $\mathbb{N}$ e por (I) e (II), podemos concluir que $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, para todo o natural n.

Capítulo 4

Funções

4.1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

(a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.

(b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

resolução:

(a) Consideremos a correspondência f de A para B que a 1 faz corresponder a e a 2 faz corresponder b. f não é uma função pois $3 \in A$ e f não faz corresponder nenhum elemento de B a 3.

(b) A tem 3 elementos e B tem 4 elementos. Portanto, existem $4^3 = 64$ funções de A para B e $3^4 = 81$ funções de B para A.

4.2. Considere as funções:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 2x - 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Determine:

(a) $g(\{-1, 0, 1\})$; (b) $g(]-\infty, 0])$; (c) $g(\mathbb{R})$;

(d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$; (e) $g^{\leftarrow}(]-\infty, 0])$; (f) $f(\{4, 6, 9\})$;

(g) $f(\{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x = 3y\})$; (h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$; (i) $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\})$.

resolução:

(a) Por definição,

$$g(\{-1, 0, 1\}) = \{g(-1), g(0), g(1)\}.$$

Dado que $g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$, $g(0) = 0^2 - 1 = -1$ e $g(1) = 1^2 - 1 = 0$, segue-se que

$$g(\{-1, 0, 1\}) = \{0, -1\}.$$

(b) $g(]-\infty, 0]) = \{g(x) \mid x \in]-\infty, 0]\} = [-1, +\infty[$.

(c) $g(\mathbb{R}) = \{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty[$.

(d) Por definição,

$$g^{\leftarrow}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$g^{\leftarrow}(\{0\}) = \{-1, 1\}.$$

(e) Por definição,

$$g^{\leftarrow}(]-\infty, 0]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} g(x) \leq 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$g^{\leftarrow}(]-\infty, 0]) = [-1, 1].$$

(f) Temos que

$$f(\{4, 6, 9\}) = \{f(4), f(6), f(9)\}.$$

Como $f(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$, $f(6) = 2 \times 6 - 1 = 11$ e $f(9) = 2 \times 9 - 1 = 17$, segue-se que

$$f(\{4, 6, 9\}) = \{7, 11, 17\}.$$

(g) Temos que

$$\begin{aligned} f(\{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x = 3y\}) &= f(\{3y \mid y \in \mathbb{N}\}) \\ &= \{f(3y) \mid y \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2 \times (3y) - 1 \mid y \in \mathbb{N}\} \\ &= \{6y - 1 \mid y \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(h) Por definição,

$$f^{\leftarrow}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 2\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{\leftarrow}(\{2\}) = \varnothing.$$

(i) Sabemos que

$$f^{\leftarrow}(\{3,4,5\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 3 \vee f(x) = 4 \vee f(x) = 5\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \\ &\Leftrightarrow 2x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Assim,

$$f^{\leftarrow}(\{3,4,5\}) = \{2,3\}.$$

4.3. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Determine:

(a) $f \circ f$; (b) $f \circ g$; (c) $g \circ f$; (d) $g \circ h$;

(e) $f \circ g \circ h$; (f) $h \circ f$; (g) $h \circ g$; (h) $h \circ f \circ g$.

resolução:

Todas as funções estão definidas em $\mathbb{N}_0$, sendo o conjunto de chegada, também, $\mathbb{N}_0$. Em cada alínea apresentamos as expressões que determinam a imagem para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) $(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = (n+1) + 1 = n + 2$.

(b) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1$.

(c) $(g \circ f)(n) = g\,(f(n)) = g(n+1) = 2(n+1) = 2n+2$.

(d) $(g \circ h)(n) = g\,(h(n)) = \begin{cases} g(0), & \text{se } n \text{ é par} \\ g(1), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 2 \times 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 \times 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

(e) $(f \circ g \circ h)(n) = f\,((g \circ h)(n)) = \begin{cases} f(0), & \text{se } n \text{ é par} \\ f(2), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

(f) $(h \circ f)(n) = h\,(f(n)) = h\,(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{se } n+1 \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n+1 \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$, uma vez que $n+1$ é par se e somente se n é ímpar.

(g) $(h \circ g)(n) = h\,(g(n)) = h\,(2n) = 0$, uma vez que $2n$ é par.

(h) $(h \circ f \circ g)(n) = h\,((f \circ g)(n)) = h\,(2n+1) = 1$, uma vez que $2n+1$ é ímpar.

4.4. Dê exemplos de:

(a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.

(b) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

resolução:

(a) Sejam f e g as funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definidas por

$$f\,(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e $g\,(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que $(f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = f(x^2) = 0$, uma vez que $x^2 \geq 0$. Assim, $(f \circ g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $f \circ g$ é uma função constante.

(b) Seja f a função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida por $f\,(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $id_{\mathbb{R}}(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f \neq id_{\mathbb{R}}$. Mais ainda, $(f \circ f)(x) = f\,(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4.5. Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Mostre que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

resolução:

Sabemos que $id_B \circ f$, f e $f \circ id_A$ são funcões definidas de A para B. Vejamos que as imagens por estas funções são iguais para cada elemento de A.

Seja $x \in A$. Temos que

$$\begin{aligned} (id_B \circ f)\,(x) &= id_B\,(f(x)) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

uma vez que $id_B(y) = y$, para todo $y \in B$ e $f(x) \in B$, e

$$\begin{aligned}(f \circ id_A)(x) &= f(id_A(x)) \\ &= f(x),\end{aligned}$$

uma vez que $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

Podemos, pois, afirmar que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

4.6. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja: (a) não injetiva; (b) injetiva; (c) sobrejetiva; (d) não sobrejetiva.

resolução:

(a) Consideremos, por exemplo, a função $f : A \to B$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = a$ e $f(3) = a$. Como há objetos distintos com a mesma imagem, f não é injetiva.

(b) Consideremos, por exemplo, a função $g : A \to B$ definida por $g(1) = a$, $g(2) = b$ e $g(3) = c$. Como objetos distintos têm imagens distintas, g é injetiva.

(c) Não existe nenhuma função sobrejetiva de A para B. De facto, dada uma qualquer função h de A para B, há pelo menos um elemento em $B \setminus \{h(1), h(2), h(3)\}$. Portanto, h nunca será sobrejetiva. [note-se que $\#A < \#B$].

(d) A função f definida na alínea (a) é não sobrejetiva, uma vez que, por exemplo, $b \in B$ e b não é imagem por f de nenhum elemento de A. A função g definida na alínea (b) tampouco é sobrejetiva, já que $d \in B$ e d não é imagem por g de nenhum elemento de A.

4.7. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f_1(x) = 2x; \qquad f_2 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad f_2(x) = \tfrac{1}{x};$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[, \quad f_3(x) = x^2; \qquad f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f_4(x) = |x| + 2.$$

resolução:

f_1 é injetiva?:

Sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}f_1(x_1) = f_1(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

Portanto, se dois elementos têm imagem igual por f_1, esses elementos são iguais, o que é equivalente a afirmar que objetos diferentes têm imagens diferentes. Portanto, f_1 é injetiva.

f_1 é sobrejetiva?:

Repare-se que todas as imagens por f são naturais pares. Assim, por exemplo, 1 é elemento de $\mathbb{N}$ e não é imagem de nenhum elemento do domínio. De facto,

$$\begin{aligned} f_1(x) = 1 &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, f_1 não é sobrejetiva.

f_1 é bijetiva?:

Uma função diz-se bijetiva se é injetiva e sobrejetiva. Dado que f_1 não é sobrejetiva, podemos afirmar que f_1 não é bijetiva.

f_2 é injetiva?:

Sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Temos que

$$\begin{aligned} f_2(x_1) = f_2(x_2) &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Mostrámos, deste modo, que se dois elementos têm imagem igual por f_2, esses elementos são iguais. Assim, objetos diferentes têm imagens diferentes por f_2 e f_2 é injetiva.

f_2 é sobrejetiva?:

Seja $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Pretendemos verificar se existe $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $y = f_2(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} y = f_2(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, f_2 é sobrejetiva.

f_2 é bijetiva?:

Dado que f_2 é injetiva e sobrejetiva, podemos afirmar que f_2 é bijetiva.

f_3 é injetiva?:

Atendendo a que

$$f_3(-1) = (-1)^2 = 1$$

e

$$f_3(1) = 1^2 = 1,$$

temos que existem objetos diferentes com imagens iguais por f_3. Assim, f_3 não é injetiva.

f_3 é sobrejetiva?:

Seja $y \in [0, +\infty[$. Pretendemos verificar se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f_3(x)$. Temos que

$$\begin{aligned} y = f_3(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Sendo $y \geq 0$, segue-se que $-\sqrt{y}$ e $\sqrt{y}$ são elementos de $\mathbb{R}$. Logo, para todo $y \in [0, +\infty[$, existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f_3(x)$, donde f_3 é sobrejetiva.

f_3 é bijetiva?:

Dado que f_3 não é injetiva, podemos concluir que f_3 não é bijetiva.

f_4 é injetiva?:

Atendendo a que

$$f_4(-1) = |-1| + 2 = 3$$

e

$$f_4(1) = |1| + 2 = 3,$$

existem objetos distintos com a mesma imagem por f_4. Logo, f_4 não é injetiva.

f_4 é sobrejetiva?:

Seja $y = 1 \in \mathbb{N}$. Pretendemos verificar se existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $y = f_4(x)$. Temos que

$$\begin{aligned} y = f_4(x) &\Leftrightarrow 1 = |x| + 2 \\ &\Leftrightarrow |x| = -1, \end{aligned}$$

o que é impossível. Dado que existe pelo menos um elemento do conjunto de chegada que não é imagem de nenhum elemento do domínio por f_4, podemos concluir que f_4 não é sobrejetiva.

f_4 é bijetiva?:

Dado que f_4 não é injetiva nem sobrejetiva, podemos concluir que f_4 não é bijetiva.

4.8. Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & x^3, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Verifique que f, g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

resolução:

f é injetiva:

Sejam x_1, $x_2 \in [0,1]$. Temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{(x_1)^3} = \sqrt[3]{(x_2)^3} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Mostrámos, deste modo, que se dois elementos têm imagem igual por f, esses elementos são iguais. Assim, objetos diferentes têm imagens diferentes por f e f é injetiva.

f é sobrejetiva:

Seja $y \in [0,1]$. Pretendemos verificar se existe $x \in [0,1]$ tal que $y = f(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^3 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y} \in [0,1]. \end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetiva.

f é bijetiva:

Dado que f é injetiva e sobrejetiva, podemos afirmar que f é bijetiva.

Sendo bijetiva, f admite inversa. Além disso, dado que, para cada $y \in [0,1]$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$, temos que $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ é definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

g é injetiva:

Sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Assim, objetos diferentes têm imagens diferentes por g e g é injetiva.

g é sobrejetiva:

Seja $y \in \mathbb{R}$. Pretendemos verificar se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Leftrightarrow y = 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = y + 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, g é sobrejetiva.

g é bijetiva:

Sendo g injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que g é bijetiva.

Assim, g admite inversa. Dado que, para cada $y \in \mathbb{R}$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$, temos que $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

h é injetiva:

Comecemos por notar que se $x \in \mathbb{Z}_0^+$, então $h(x)$ é um natural par, e se $x \in \mathbb{Z}^-$, então $h(x)$ é um natural ímpar. Sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{Z}$. Temos quatro casos possíveis:

caso 1: $x_1, x_2 \geq 0$;
caso 2: $x_1, x_2 < 0$;
caso 3: $x_1 < 0$ e $x_2 \geq 0$;
caso 4: $x_1 \geq 0$ e $x_2 < 0$.

Repare-se que nos casos 3 e 4 não podemos ter $h(x_1) = h(x_2)$, já que nesses casos uma das imagens é par e a outra é ímpar. Assim, para estudar a injetividade de h apenas precisamos de considerar os casos 1 e 2.

caso 1: Neste caso,

$$\begin{aligned} h(x_1) = h(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

caso 2: Neste caso,

$$\begin{aligned} h(x_1) = h(x_2) &\Leftrightarrow -2x_1 - 1 = -2x_2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Assim, se dois objetos têm imagens iguais por h, então esses objetos são iguais. Logo, h é injetiva.

h é sobrejetiva:

Seja $y \in \mathbb{N}_0$. Pretendemos verificar se existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $y = h(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow (y = 2x \wedge x \geq 0) \vee (y = -2x - 1 \wedge x < 0) \\ &\Leftrightarrow (x = \frac{y}{2} \wedge x \geq 0) \vee (x = \frac{y+1}{2} \wedge x < 0). \end{aligned}$$

Temos que $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{Z}$ se e só se y é par e que $x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{Z}$ se e só se y é ímpar. Assim, dado $y \in \mathbb{N}_0$, se y é par então $y = h\left(\frac{y}{2}\right)$ (com $\frac{y}{2} \in \mathbb{Z}$), e se y é ímpar então $y = h\left(\frac{y+1}{2}\right)$ (com $\frac{y+1}{2} \in \mathbb{Z}$). Portanto, h é sobrejetiva.

h é bijetiva:

Sendo h injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que h é bijetiva.

Assim, h admite inversa e $h^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ é definida por

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \\ \\ \frac{x+1}{2}, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

4.9. Sejam A e B conjuntos não vazios. Considere a função $f : A \times B \to B \times A$ definida por $f(a, b) = (b, a)$, para todo $(a, b) \in A \times B$.

(a) Mostre que f é bijetiva.

(b) Determine f^{-1}.

resolução:

(a) Mostremos, primeiro, que f é injetiva. Para tal consideremos dois elementos arbitrários (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de $A \times B$. Temos que

$$\begin{aligned} f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) &\Leftrightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2) \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_2 \wedge a_1 = a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \\ &\Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2). \end{aligned}$$

Mostrámos, deste modo, que se dois elementos têm imagem igual por f, esses elementos são iguais. Assim, objetos diferentes têm imagens diferentes por f e f é injetiva.

Vejamos, de seguida, que f é sobrejetiva. Para tal, mostremos que qualquer elemento de $B \times A$ é imagem por f de algum elemento de $A \times B$. Dado $(b, a) \in B \times A$, é óbvio que $(b, a) = f(a, b)$ e que $(a, b) \in A \times B$.

Como f é injetiva e sobrejetiva, temos que f é bijetiva.

(b) f^{-1} é a função de $B \times A$ para $A \times B$ definida por $f^{-1}(b, a) = (a, b)$, para todo $(b, a) \in B \times A$.

4.10. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \ x \leq -2 \\ x + 2 & \text{se } \ x > -2 \end{cases} .$$

(a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f\big(]-2, 4]\big)$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

resolução:

(a) Temos que $f(-2) = |-2| + 2 = 4$ e $f(2) = |2| + 2 = 4$. Assim, $f(\{-2, 2\}) = \{f(-2), f(2)\} = \{4\}$.

Por definição, $f\big(]-2,4]\big) = \{f(x) \mid x \in]-2,4]\}$. f é uma função estritamente decrescente em $]-\infty,0]$ e estritamente crescente em $[0,+\infty[$. Temos que $f(-2)=4$, $f(0)=2$ e $f(4)=6$. Além disso, todo o elemento y entre 2 e 6 é imagem, por f, de $x = y-2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $f\big(]-2,4]\big) = [2,6]$.

(b) Por definição, $f^{\leftarrow}(\{-2,0,1,2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 1 \vee f(x) = 2\}$. Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = -2 &\Leftrightarrow |x| + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow |x| = -4 \\ &\Leftrightarrow i(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow |x| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x| = -2 \\ &\Leftrightarrow i(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow |x| + 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |x| = -1 \\ &\Leftrightarrow i(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow |x| + 2 = 2 \\ &\Leftrightarrow |x| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \end{aligned}$$

onde $i(x)$ representa uma condição impossível em x. Assim, $f^{\leftarrow}(\{-2,0,1,2\}) = \{0\}$

(c) Note-se que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)+2 = |x|+4$. Dado que $(g \circ f)(-1) = (g \circ f)(1) = 5$, $g \circ f$ não é injetiva. Além disso, $(g \circ f)(x) \geq 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = 0$ e $g \circ f$ não é sobrejetiva.

4.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \{3,10\}$ definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } \; x \in]-\infty,4[\cup]20,30] \\ \\ 10 & \text{se } \; x \in [4,20]\cup]30,+\infty[\end{cases}.$$

e a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Determine $g\big(\{1,2,3,4\}\big)$ e $g^{\leftarrow}\big(\{1,5\}\big)$.

(b) Determine $f\big(\{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - 16 = 0\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{10\})$.

(c) Mostre que $f \circ g$ é uma função constante.

(d) Indique se alguma das funções f ou g é injetiva.

resolução:

(a) Por definição,

$$g\big(\{1,2,3,4\}\big) = \{g(1), g(2), g(3), g(4)\}\,.$$

Dado que $g(1) = 2 - \frac{1}{1} = 1$, $g(2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $g(3) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ e $g(4) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, temos que

$$g\big(\{1,2,3,4\}\big) = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right\}.$$

Sabemos que

$$g^{\leftarrow}\big(\{1,5\}\big) = \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = 1 \vee g(n) = 5\}\,.$$

Ora,

$$\begin{aligned} g(n) = 1 &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} = 1 \\ &\Leftrightarrow n = 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(n) = 5 &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} = -3 \\ &\Leftrightarrow n = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Portanto, $g^{\leftarrow}\big(\{1,5\}\big) = \{1\}\,.$

(b) Atendendo a que

$$\begin{aligned} x^2 - 16 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \\ &\Leftrightarrow x = \pm 4, \end{aligned}$$

temos que

$$f\big(\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 16 = 0\}\big) = f\big(\{-4, 4\}\big) = \{f(-4), f(4)\}\,.$$

Como $f(-4) = 3$ e $f(4) = 10$, segue-se que

$$f\big(\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 16 = 0\}\big) = \{3, 10\}\,.$$

Por definição,

$$f^{\leftarrow}\left(\{10\}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 10\}\,.$$

Logo,

$$f^{\leftarrow}\left(\{10\}\right) = [4, 20] \cup]30, +\infty[.$$

(c) Sabemos que $1 \leq g(n) < 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $g(n) \in]-\infty, 4[\cup]20, 30]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(f \circ g)(n) = f\left(g(n)\right) = 3$. Portanto, $f \circ g$ é uma função constante.

(d) A função f não é injetiva pois $1 \neq 2$ e $f(1) = f(2) = 3$. Já a função g é injetiva, como podemos verificar: dados quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g(n) = g(m) &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{m} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \\ &\Leftrightarrow n = m. \end{aligned}$$

Logo, se dois objetos têm a mesma imagem por g, esses objetos são iguais.

Capítulo 5

Relações binárias

5.1. Para cada uma das relações seguintes indique o domínio e imagem.

(a) S é a relação de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para $B = \{1, 2, 3\}$ dada por $S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$.

(b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

(c) $\mid$ é a relação "divide" em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por $a \mid b \leftrightarrow (\exists_{n \in \mathbb{N}}\ b = na)$.

resolução:

(a) $\mathrm{Dom(S)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\mathrm{Im(S)} = \{1, 2, 3\}$.

(b) Note-se que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in R$. De facto, para $y = x^2$, xRy. Assim, $\mathrm{Dom(R)} = \mathbb{R}$. Dado $y \in \mathbb{R}$, temos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$ se e só se $y \geq 0$ (nesse caso, $x = \sqrt{y}$). Assim, $\mathrm{Im(R)} = \mathbb{R}_0^+$.

(c) Sabendo que $x|x$, para todo o inteiro x, temos que $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(6, 6)$, $(9, 9)$, $(10, 10)$, $(12, 12)$ e $(20, 20)$ pertencem à relação $|$. Portanto, $\mathrm{Dom}(|) = \mathrm{Im}(|) = \{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$.

5.2. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}, \qquad S = \{(10, 2), (10, 8)\}, \qquad T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}.$$

Determine

(a) R^{-1}

(b) $R^{-1} \cup S^{-1}$

(c) $T \setminus S^{-1}$

(d) $T^{-1} \cap S$

(e) $S \circ T$

(f) $R \circ T$

(g) $S^{-1} \circ S$

(h) $(S \circ T)^{-1}$

(i) $S^{-1} \circ T^{-1}$

(j) $T^{-1} \circ S^{-1}$

(k) $(R \circ S) \circ T$

(l) $R \circ (S \circ T)$

resolução:

(a) $R^{-1} = \{(x, y) \in A^2 \mid (y, x) \in R\} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 10)\}$.

(b) $S^{-1} = \{(x, y) \in A^2 \mid (y, x) \in S\} = \{(2, 10), (8, 10)\}$.

Logo, $R^{-1} \cup S^{-1} = \{(2,2),(4,2),(6,2),(8,10),(2,10)\}$.

(c) $T \setminus S^{-1} = \{(6,2),(6,4),(8,10)\} \setminus \{(2,10),(8,10)\} = \{(6,2),(6,4)\}$

(d) $T^{-1} = \{(x,y) \in A^2 \mid (y,x) \in T\} = \{(2,6),(4,6),(10,8)\}$.
Portanto, $T^{-1} \cap S = \{(10,8)\}$.

(e) Por definição, $S \circ T = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z \in A} \ ((x,z) \in T \wedge (z,y) \in S)\big\}$. Temos

$$\begin{aligned}
&(6,2) \in T \text{ mas } \nexists_{\mathrm{y} \in \mathrm{A}} \ (2,\mathrm{y}) \in \mathrm{S} \\
&(6,4) \in T \text{ mas } \nexists_{\mathrm{y} \in \mathrm{A}} \ (4,\mathrm{y}) \in \mathrm{S} \\
&(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{2}) \in \mathrm{S} \\
&(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{8}) \in \mathrm{S}
\end{aligned}$$

Logo,

$$S \circ T = \{(8,2),(8,8)\}.$$

(f) Por definição, $R \circ T = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z \in A} \ ((x,z) \in T \wedge (z,y) \in R)\big\}$. Temos

$$\begin{aligned}
&(\underline{6},2) \in T \text{ e } (2,\underline{2}) \in \mathrm{R} \\
&(\underline{6},2) \in T \text{ e } (2,\underline{4}) \in \mathrm{R} \\
&(\underline{6},2) \in T \text{ e } (2,\underline{6}) \in \mathrm{R} \\
&(6,4) \in T \text{ mas } \nexists_{\mathrm{y} \in \mathrm{A}} \ (4,\mathrm{y}) \in \mathrm{R} \\
&(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{8}) \in \mathrm{R}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R \circ T = \{(6,2),(6,4),(6,6),(8,8)\}.$$

(g) Por definição, $S^{-1} \circ S = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z \in A} \ \big((x,z) \in S \wedge (z,y) \in S^{-1}\big)\big\}$. Recordemos que $S^{-1} = \{(2,10),(8,10)\}$. Temos

$$\begin{aligned}
&(\underline{10},2) \in S \text{ e } (2,\underline{10}) \in \mathrm{S}^{-1} \\
&(\underline{10},8) \in S \text{ e } (8,\underline{10}) \in \mathrm{S}^{-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$S^{-1} \circ S = \{(10,10)\}.$$

(h) Sabemos, da alínea (e), que $S \circ T = \{(8,2),(8,8)\}$. Portanto, $(S \circ T)^{-1} = \{(2,8),(8,8)\}$.

(i) Por definição, $S^{-1} \circ T^{-1} = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z \in A} \ \big((x,z) \in T^{-1} \wedge (z,y) \in S^{-1}\big)\big\}$. Recordemos que $T^{-1} = \{(2,6),(4,6),(10,8)\}$ e que $S^{-1} = \{(2,10),(8,10)\}$. Temos

$$\begin{aligned}
&(2,6) \in T^{-1} \text{ mas } \nexists_{\mathrm{y} \in \mathrm{A}} \ (6,\mathrm{y}) \in \mathrm{S}^{-1} \\
&(4,6) \in T^{-1} \text{ mas } \nexists_{\mathrm{y} \in \mathrm{A}} \ (6,\mathrm{y}) \in \mathrm{S}^{-1} \\
&(\underline{10},8) \in T^{-1} \text{ e } (8,\underline{10}) \in \mathrm{S}^{-1}
\end{aligned}$$

Assim,

$$S^{-1} \circ T^{-1} = \{(10,10)\}.$$

(j) Por definição, $T^{-1} \circ S^{-1} = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z\in A} \ \big((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in T^{-1}\big)\big\}$. Recordemos que $T^{-1} = \{(2,6),(4,6),(10,8)\}$ e que $S^{-1} = \{(2,10),(8,10)\}$. Temos

$$\begin{aligned} &(\underline{2},10) \in S^{-1} \text{ e } (10,\underline{8}) \in \mathrm{T}^{-1} \\ &(\underline{8},10) \in S^{-1} \text{ e } (10,\underline{8}) \in \mathrm{T}^{-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$T^{-1} \circ S^{-1} = \{(2,8),(8,8)\}.$$

[OBS.: Em alternativa, podia usar-se a propriedade $T^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ T)^{-1}$ e a alínea (h)]

(k) Comecemos por determinar $R \circ S$. Temos que

$$\begin{aligned} &(\underline{10},2) \in S \text{ e } (2,\underline{2}) \in \mathrm{R} \\ &(\underline{10},2) \in S \text{ e } (2,\underline{4}) \in \mathrm{R} \\ &(\underline{10},2) \in S \text{ e } (2,\underline{6}) \in \mathrm{R} \\ &(10,8) \in S \text{ mas } \ \nexists_{\mathrm{y}\in \mathrm{A}} \ (8,\mathrm{y}) \in \mathrm{R} \end{aligned}$$

Assim,

$$R \circ S = \{(10,2),(10,4),(10,6)\}.$$

Por definição, $(R \circ S) \circ T = \big\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z\in A} \ ((x,z) \in T \wedge (z,y) \in R \circ S)\big\}$. Temos que

$$\begin{aligned} &(6,2) \in T \text{ mas } \ \nexists_{\mathrm{y}\in \mathrm{A}} \ (2,\mathrm{y}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S} \\ &(6,4) \in T \text{ mas } \ \nexists_{\mathrm{y}\in \mathrm{A}} \ (4,\mathrm{y}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S} \\ &(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{2}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S} \\ &(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{4}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S} \\ &(\underline{8},10) \in T \text{ e } (10,\underline{6}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S} \end{aligned}$$

Assim,

$$(R \circ S) \circ T = \{(8,2),(8,4),(8,6)\}.$$

(l) Atendendo a que $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$, temos que

$$R \circ (S \circ T) = \{(8,2),(8,4),(8,6)\}.$$

5.3. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{x,y,w,z\}$. Considere as relações binárias R, de A em B, e S, de B em A:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,x),(1,z),(2,y),(2,z)\} \\ S &= \{(x,1),(x,3),(y,2),(w,2),(z,3)\}. \end{aligned}$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine R^{-1}, S^{-1}, T, $T \circ T$, U e $U \circ U$.

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de R.

(d) Indique quantas relações binárias de A em B existem.

(e) Indique todas as relações binárias de A em B cujo domínio é $\{2,3\}$ e cuja imagem é $\{x,z\}$.

(f) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R', de A em B, e S', de B em A, tais que $S' \circ R' \neq \varnothing$ e $R' \circ S' = \varnothing$.

resolução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \{(x,1),(z,1),(y,2),(z,2)\} \\
S^{-1} &= \{(1,x),(3,x),(2,y),(2,w),(3,z)\} \\
T = S \circ R &= \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3)\} \\
T \circ T &= \{(1,1),(1,3),(2.2),(2,3)\} \\
U = R \circ S &= \{(x,x),(x,z),(y,y),(y,z),(w,y),(w,z)\} \\
U \circ U &= \{(x,x),(x,z),(y,y),(y,z),(w,y),(w,z)\}
\end{aligned}$$

(b) Por definição, $R^{-1} \circ S^{-1} = \left\{(x,y) \in A^2 \mid \exists_{z \in A} \ \left((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1}\right)\right\}$. Assim,

$$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(1,1),(3,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

(c) $\mathrm{Dom(R)} = \{1,2\}$ e $\mathrm{Im(R)} = \{\mathrm{x,y,z}\}$.

(d) Uma relação binária de A em B é um subconjunto de $A \times B$. Portanto, existem tantas relações binárias de A em B quantos os subconjuntos de $A \times B$. Portanto, o número de relações binárias de A em B é dado por

$$\#\mathcal{P}(A \times B) = 2^{\#A \times B} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}.$$

(e) Para que 2 pertença ao domínio de uma relação binária V de A em B, tem de existir $b \in B$ tal que $(2,b) \in V$ e para que 3 pertença ao domínio de V, tem de existir $c \in B$ tal que $(2,c) \in V$. Para que x pertença à imagem de V, tem de existir $a \in B$ tal que $(a,x) \in V$ e para que z pertença à imagem de V, tem de existir $d \in A$ tal que $(d,z) \in V$. Além disso, não pode existir nenhum par (a,b) em V tal que $a = 1$ ou $b \in \{y,w\}$. Assim, os elementos possíveis de V são

$(2,x),(2,z),(3,x)$ e $(3,z)$. As relações binárias que satisfazem as condições indicadas são:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{(2,x),(2,z),(3,x),(3,z)\}\\
V_2 &= \{(2,x),(2,z),(3,x)\}\\
V_3 &= \{(2,x),(2,z),(3,z)\}\\
V_4 &= \{(2,x),(3,x),(3,z)\}\\
V_5 &= \{(2,z),(3,x),(3,z)\}\\
V_6 &= \{(2,x),(3,z)\}\\
V_7 &= \{(2,z),(3,x)\}
\end{aligned}$$

(f) Sejam $R' = \{(2,x)\}$ e $S' = \{(x,3)\}$. Como $R' \subseteq A \times B$, R' é uma relação binária de A em B. Dado que $S' \subseteq B \times A$, S' é uma relação binária de B em A.

Temos que $S' \circ R' = \{(2,3)\} \neq \varnothing$ e $R' \circ S' = \varnothing$.

5.4. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Dê exemplo de, ou justifique que não existe:

(a) uma relação binária R de A em B tal que $R = R^{-1}$;

(b) relações binárias R e S em A tais que $R \circ S = S \circ R$ e $R \neq S$;

(c) uma relação binária R em A tal que $\mathrm{id}_A \subseteq R$ e $\mathrm{id}_A \not\subseteq R^{-1}$;

(d) uma relação binária R de A em B tal que $\mathrm{Dom}(R) = \emptyset$;

(e) relações binárias R de A em B e S de B em A tais que $R \circ S = \mathrm{id}_B$ e $S \circ R = \mathrm{id}_A$.

resolução:

(a) Seja $R = \{(3,3)\}$. Temos que $R^{-1} = \{(3,3)\} = R$.

(b) Sejam $R = \{(1,3)\}$ e $S = \{(2,4)\}$. Temos que $R \circ S = S \circ R = \varnothing$ e $R \neq S$.

(c) Tal relação não existe. De facto, se $\mathrm{id}_A \subseteq R$, então $(a,a) \in R$, para todo $a \in A$. Portanto, $(a,a) \in R^{-1}$, para todo $a \in A$, pelo que $\mathrm{id}_A \subseteq R^{-1}$.

(d) $R = \varnothing$

(e) Sejam $R = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ e $S = \{(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}$. Temos que $R \circ S = \{(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} = \mathrm{id}_B$ e $S \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = \mathrm{id}_A$.

5.5. Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Mostre que

(a) Se $R^{-1} = R$, então R é simétrica.

(b) R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$.

resolução:

(a) Pretendemos mostrar que se $(a, b) \in R$ então $(b, a) \in R$, para quaisquer $a, b \in A$. Sejam $a, b \in A$ tais que $(a, b) \in R$. Por definição, sabemos que $(b, a) \in R^{-1}$. Como $R^{-1} = R$, podemos, então, afirmar que $(b, a) \in R$. Logo, R é simétrica.

(b) Admitamos que R é transitiva. Assim, para quaisquer $a, b, c \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. Seja $(x, y) \in R \circ R$. Por definição, sabemos que existe $z \in A$ tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$. Mas, sendo R transitiva, isso implica $(x, y) \in R$. Vimos, assim, que todos os elementos de $R \circ R$ são elementos de R. Logo, $R \circ R \subseteq R$.

Reciprocamente, admitamos que $R \circ R \subseteq R$. Mostremos que R é transitiva. Para tal, consideremos $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ e provemos que $(a, c) \in R$. Como $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, segue-se que $(a, c) \in R \circ R$. Dado que $R \circ R \subseteq R$, podemos concluir que $(a, c) \in R$, o que conclui a prova.

5.6. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

$$R_1 = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}, \qquad R_2 = \{(2,3)\},$$

$$R_3 = \{(1,2), (2,3), (3,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}, \quad R_4 = \{(a,a) \mid a \in A\} = \mathrm{id}_A.$$

Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) antissimétrica; (d) transitiva.

resolução:

(a) Para que uma relação binária R em A seja reflexiva, temos de ter $\mathrm{id}_A \subseteq R$, ou seja, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ e $(4, 4)$ têm de ser elementos de R. Posto isto, as relações R_1, R_2 e R_3 não são reflexivas e a relação R_4 é reflexiva.

(b) Para que uma relação binária R em A seja simétrica, temos de ter $(a, b) \in R$ se $(b, a) \in R$, para quaisquer $a, b \in A$, ou, equivalentemente, $R = R^{-1}$. Ora,

$$\begin{aligned}
R_1^{-1} &= \{(4,1), (2,2), (3,2), (2,3), (1,4)\} = R_1, \\
R_2^{-1} &= \{(2,3)\} \neq R_2, \\
R_3^{-1} &= \{(2,1), (3,2), (2,3), (3,1), (2,2), (3,3)\} \neq R_3, \\
R_4^{-1} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} = R_4.
\end{aligned}$$

Portanto, apenas R_1 e R_4 são simétricas.

(c) Para que uma relação binária R em A seja antissimétrica, temos de ter $(a,b) \notin R$ se $(b,a) \in R$, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, ou, equivalentemente, $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$. Ora,

$$\begin{aligned}
&(1,4),(4,1) \in R_1,\\
&R_2 \cap R_2^{-1} = \varnothing \subseteq \mathrm{id}_A,\\
&(2,3),(3,2) \in R_3,\\
&R_4 \cap R_4^{-1} = \mathrm{id}_A \subseteq \mathrm{id}_A.
\end{aligned}$$

Logo, apenas as relações R_2 e R_4 são antissimétricas.

(d) Uma relação binária R em A é transitiva se quando $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in A$ se tem $(a,c) \in R$, para quaisquer $a, b, c \in A$, ou, equivalentemente, se $R \circ R \subseteq R$. Temos que

$$\begin{aligned}
&(1,4),(4,1) \in R_1 \text{ mas } (1,1) \notin \mathrm{R}_1,\\
&R_2 \circ R_2 = \varnothing \subseteq R_2,\\
&R_3 \circ R_3 = R_3 \subseteq R_3,\\
&R_4 \circ R_4 = \mathrm{id}_A = R_4 \subseteq R_4.
\end{aligned}$$

Portanto, apenas R_1 não é transitiva.

5.7. Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A. Mostre que

(a) R não é necessariamente reflexiva. (b) Se o domínio de R é A, então R é reflexiva.

resolução:

(a) Consideremos $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. Facilmente se verifica que R é uma relação simétrica e transitiva em A, mas R não é reflexiva.

(b) Seja $a \in A$. Como $\mathrm{Dom}(R) = A$, existe $b \in A$ tal que $(a,b) \in R$. Sendo R simétrica, segue-se que $(b,a) \in R$. Como $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R$ e R é transitiva, segue-se que $(a,a) \in R$. Provámos, deste modo, que $(a,a) \in R$, para todo $a \in A$, ou seja que R é reflexiva.

5.8. Considere o conjunto $A = \{a,b,c\}$. Determine todas as relações de equivalência em A e, para cada uma, indique o conjunto quociente.

resolução:

Uma relação de equivalência é uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva. Temos as seguintes possibilidades e os respetivos conjuntos quociente:

$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ e $A/R_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
$R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ e $A/R_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$
$R_3 = \{(a,a),(a,c),(c,a),(b,b),(c,c)\}$ e $A/R_3 = \{\{a,c\},\{b\}\}$
$R_4 = \{(a,a),(b,c),(c,b),(b,b),(c,c)\}$ e $A/R_4 = \{\{a\},\{b,c\}\}$
$R_5 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a),(b,b),(c,c)\}$ e $A/R_5 = \{\{a,b,c\}\}$

5.9. Seja $A = \{-3,-1,0,1,2,3\}$ e considere a relação de equivalência R em A definida por $x\ R\ y$ se e só se $x^2 = y^2$. Indique todos os elementos da classe $[-3]_R$ e determine o conjunto quociente A/R.

resolução:

Por definição, a classe de equivalência $[-3]_R$ é o conjunto de todos os elementos de A que estão relacionados com -3 por R, ou seja, dos elementos de A cujo quadrado é igual a $(-3)^2 = 9$. Sabemos que $(-3,-3) \in R$ e $(-3,3) \in R$. Portanto, $[-3]_R = \{-3,3\}$.

Sabemos que $A/R = \{[-3]_R, [-1]_R, [0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$. Ora,

$$\begin{aligned}
[-3]_R &= \{-3,3\} = [3]_R \\
[-1]_R &= \{-1,1\} = [1]_R \\
[0]_R &= \{0\} \\
[2]_R &= \{2\}
\end{aligned}$$

Assim,

$$A/R = \{\{-3,3\},\{-1,1\},\{0\},\{2\}\}.$$

5.10. Seja $A = \{1,2,4,6,7,9\}$ e considere a relação de equivalência $\sim$ em A definida por $x \sim y$ se e só se $x+y = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Indique todos os elementos da classe $[2]_\sim$ e determine o conjunto quociente $A/\sim$.

resolução:

Note-se que, dados $x, y \in A$, $x \sim y$ se e só se $x+y$ é par. Ora, a soma de dois naturais é par se e somente se os naturais têm a mesma paridade (ou seja, ou são ambos pares ou são ambos ímpares). Portanto, dados $x, y \in A$, $x \sim y$ se e só se x e y têm a mesma paridade.

Por definição, $[2]_\sim = \{x \in A \mid x \sim 2\}$. Sabemos que $x \sim 2$ se e somente se x e 2 têm a mesma paridade, ou seja, se e só se x é par. Portanto, $[2]_\sim = \{2,4,6\}$.

Sabemos que $A/\sim = \{[1]_\sim, [2]_\sim, [4]_\sim, [6]_\sim, [7]_\sim, [9]_\sim\}$. Como

$$[2]_\sim = \{2,4,6\} = [4]_\sim = [6]_\sim$$

e

$$[1]_\sim = \{1,7,9\} = [7]_\sim = [9]_\sim \,,$$

segue-se que

$$A/\sim = \{\{2,4,6\},\{1,7,9\}\}\,.$$

5.11. Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$. Considere as seguintes relações de equivalência em A: R é a menor relação de equivalência em A tal que $(1,2),(1,3),(4,5) \in R$ e S é a relação de equivalência em A cujas classes de equivalência são: $\{1,3\}$, $\{4\}$ e $\{2,5\}$. Determine R, indique todos os elementos da classe $[2]_R$ e indique, se existirem, $a,b \in A$ tais que aRb e aSb.

resolução:

Para que R seja relação de equivalência em A, R tem de ser reflexiva, simétrica e transitiva.

Se R é reflexiva, todos os elementos da forma (a,a), com $a \in A$, têm de pertencer a R.

Se R é simétrica, sabemos que, se $(a,b) \in R$, então $(b,a) \in R$. Dado que $(1,2),(1,3),(4,5) \in R$, temos que $(2,1),(3,1),(5,4) \in R$.

Finalmente, sabendo que R é transitiva, temos que, se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$. Assim, como $(2,1) \in R$ e $(1,3) \in R$, segue-se que $(2,3) \in R$. Como R é simátrica, também $(3,2) \in R$.

Dado que R é a menor relação de equivalência em A tal que $(1,2),(1,3),(4,5) \in R$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(4,5),(2,1),(3,1),(5,4),(2,3),(3,2)\}$. [OBS.: para comprovar que R é, de facto, transitiva, basta verificar que $R \circ R \subseteq R$ - com efeito, $R \circ R = R$].

Os elementos que estão relacionados por R com 2 são $1, 2$ e 3. Portanto, $[2]_R = \{1,2,3\}$.

Note-se que $A/R = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ e que $A/S = \{\{1,3\},\{4\},\{2,5\}\}$. Determinar $a,b \in A$ tais que aRb e aSb passa por determinar $a,b \in A$ que estejam na mesma classe de equivalência módulo R e na mesma classe de equivalência módulo S. Basta, pois, considerar $a = b$ qualquer em A ou $a = 1$ e $b = 3$.

5.12. Considere a relação R em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x,y)\,R\,(z,w)$ se e só se $y = w$. Verifique que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e descreva a classe de equivalência $[(2,3)]_R$.

resolução:

Comecemos por verificar que R é reflexiva: dado $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, temos que $(x,y)\,R\,(x,y)$, pois as segundas coordenadas são, obviamente, iguais.

Verifiquemos, agora, que R é simétrica. Consideremos $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tais que $(x,y)\,R\,(z,w)$. Então, $y = w$ e, portanto, também $(z,w)\,R\,(x,y)$ (pois $w = y$).

Mostremos, finalmente, que R é transitiva. Sejam $(x,y),(z,w),(u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tais que $(x,y)\,R\,(z,w)$ e $(z,w)\,R\,(u,v)$. Pretendemos provar que $(x,y)\,R\,(u,v)$. Como $(x,y)\,R\,(z,w)$, segue-se que

$y = w$, e, como $(z, w) \, R \, (u, v)$, temos que $w = v$. Assim, $y = w = v$. Como $y = v$, podemos afirmar que $(x, y) \, R \, (u, v)$.

5.13. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$$\Pi_1 = \{\{2,4\}, \{3\}, \{4,6\}, \{3,6,7\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{2,4,6\}, \{3,7\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{2\}, \{3,4,7\}\}, \quad \Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\},$$
$$\Pi_5 = \{\{2\}, \emptyset, \{3,4\}, \{6,7\}\}, \quad \Pi_6 = \{\{2,6\}, \{3,7\}, \{4\}\}.$$

(a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para os conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que são partições, determine $\mathcal{R}_{\Pi_j}$ e indique $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_j}}$.

resolução:

(a) Recordemos que $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$ é uma **partição do conjunto** A se $\varnothing \notin \Pi$, se, para todos $X, Y \in \Pi$ tais que $X \neq Y$ se tem $X \cap Y = \varnothing$, e se

$$\bigcup_{X \in \Pi} X = A.$$

Assim, Π_1 não é uma partição de A, pois $\{2,4\}, \{4,6\} \in \Pi_1$ e $\{2,4\} \cap \{4,6\} \neq \varnothing$. Tampouco Π_3 é uma partição de A pois

$$\bigcup_{X \in \Pi_3} X = \{2,3,4,7\} \neq A.$$

Mais ainda, dado que $\varnothing \in \Pi_5$, podemos concluir que Π_5 não é uma partição de A.

Relativamente a Π_2, temos que $\varnothing \notin \Pi_2$, que $\{2,4,6\} \cap \{3,7\} = \varnothing$ e que $\{2,4,6\} \cup \{3,7\} = A$. Portanto, Π_2 é uma partição de A.

Relativamente a Π_4, temos que $\varnothing \notin \Pi_4$, que $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, e que $\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{7\} = A$. Logo, Π_4 é uma partição de A.

Relativamente a Π_6, temos que $\varnothing \notin \Pi_6$, que $\{2,6\} \cap \{3,7\} = \varnothing$, $\{2,6\} \cap \{4\} = \varnothing$ e $\{3,7\} \cap \{4\} = \varnothing$, e que $\{2,6\} \cup \{3,7\} \cup \{4\} = A$. Portanto, Π_6 é uma partição de A.

(b) Como $\Pi_2 = \{\{2,4,6\}, \{3,7\}\}$, sabemos que há duas classes de equivalência distintas módulo $\mathcal{R}_{\Pi_2}$: $\{2,4,6\}$ e $\{3,7\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Pi_2} &= (\{2,4,6\} \times \{2,4,6\}) \cup (\{3,7\} \times \{3,7\}) \\ &= \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,2), (4,6), (6,6), (6,2), (6,4), (3,3), (3,7), (7,3), (7,7)\}. \end{aligned}$$

Mais ainda, dado que $7 \in \{3,7\}$, $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_2}} = \{3,7\}$.

Dado que $\Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\}$, temos cinco classes de equivalência distintas módulo $\mathcal{R}_{\Pi_4}$: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ e $\{7\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Pi_4} &= (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) \cup (\{4\} \times \{4\}) \cup (\{6\} \times \{6\}) \cup (\{7\} \times \{7\}) \\ &= \{(2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (7,7)\}. \end{aligned}$$

Como $7 \in \{7\}$, $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_4}} = \{7\}$.

Como $\Pi_6 = \{\{2,6\}, \{3,7\}, \{4\}\}$, sabemos que há três classes de equivalência distintas módulo $\mathcal{R}_{\Pi_6}$: $\{2,6\}$, $\{3,7\}$ e $\{4\}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\Pi_6} &= (\{2,6\} \times \{2,6\}) \cup (\{3,7\} \times \{3,7\}) \cup (\{4\} \times \{4\}) \\ &= \{(2,2),(2,6),(6,6),(6,2),(3,3),(3,7),(7,3),(7,7),(4,4)\} .\end{aligned}$$

Mais ainda, dado que $7 \in \{3,7\}$, $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_6}} = \{3,7\}$.

5.14. Seja $A = \{a, b\}$. Indique todas as relações de ordem parcial em A e apresente os correspondentes diagramas de Hasse.

resolução:

Recordemos que uma relação de ordem parcial em A é uma relaçãoi binária em A reflexiva, antissimétrica e transitiva. Para $A = \{a, b\}$, temos as seguintes:

(i) $R_1 = \{(a,a),(b,b)\}$ com o seguinte diagrama de Hasse

(ii) $R_2 = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$ com o seguinte diagrama de Hasse

(iii) $R_3 = \{(a,a),(b,b),(b,a)\}$ com o seguinte diagrama de Hasse

5.15. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$\rho_1 = \{(1,1), (4,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4)\}$

$\rho_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (2,4)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$\rho_4 = \{(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,1)\}$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

resolução:

Uma relação de ordem parcial em A é uma relaçã0 binária em A reflexiva, antissimétrica e transitiva.

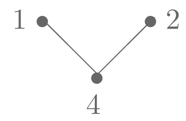
Uma relação binária R em A é reflexiva se $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$, ou seja, se $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ e $(4, 4)$ pertencem a R. Assim, todas as relações dadas são reflexivas.

Uma relação binária R em A é antissimétrica se, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$ e $(a, b) \in R$, se tem $(b, a) \notin R$, ou, equivalentemente, se $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$. Temos que $\rho_1 \cap \rho_1^{-1} = \mathrm{id}_A$. Logo, ρ_1 é antissimétrica. Por outro lado, $(2, 4) \in \rho_2$ e $(4, 2) \in \rho_2$, donde ρ_2 não é antissimétrica. Relativamente a ρ_3, temos que $\rho_3 \cap \rho_3^{-1} = \mathrm{id}_A$. Logo, ρ_3 é antissimétrica. Também ρ_4 é tal que $\rho_4 \cap \rho_4^{-1} = \mathrm{id}_A$. Portanto, ρ_4 é antissimétrica.

Neste momento, podemos afirmar que ρ_2 não é uma relação de ordem parcial em A.

Vejamos, agora, quais das restantes relações R são transitivas. Para tal, devemos verificar se, para quaisquer $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, se tem $(a, c) \in R$, ou, equivalentemente, se $R \circ R \subseteq R$. Temos que $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_1$. Portanto, ρ_1 é transitiva. Também $\rho_3 \circ \rho_3 = \rho_3$. Logo, ρ_3 é transitiva. Relativamente a ρ_4, temos que $\rho_4 \circ \rho_4 = \rho_4$, donde também ρ_4 é transitiva.

Sendo reflexiva, antissimétrica e transitiva, ρ_1 é uma relação de ordem parcial em A e o seu diagrama de Hasse é o seguinte:



Como ρ_3 é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva, ρ_3 é uma relação de ordem parcial em A. O seu diagrama de Hasse é o seguinte:

Também ρ_4, por ser reflexiva, antissimétrica e transitiva, é uma relação de ordem parcial em A. O seu diagrama de Hasse é o seguinte:

5.16. Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto;

(b) $(\mathbb{N}_0, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*" definida por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

resolução:

(a) Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, sabemos que $X \subseteq X$. Logo, a relação de inclusão é reflexiva. Dados $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ tais que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, temos que $X = Y$. Portanto, a relação de inclusão é antissimétrica. Sabemos, também, que se $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ são tais que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, então $X \subseteq Z$. Portanto, a relação de inclusão é transitiva. Assim, o par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

(b) Dado $n \in \mathbb{N}_0$, sabemos que $n|n$. Logo, a relação "divide" é reflexiva. Dados $n, m \in \mathbb{N}_0$ tais que $n|m$ e $m|n$, temos que $n = m$. Portanto, a relação "divide" é antissimétrica. Sabemos, também, que se $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ são tais que $n|m$ e $m|k$, então $n|k$. Portanto, a relação "divide" é transitiva. Assim, o par $(\mathbb{N}_0, |)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

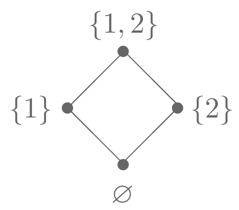
5.17. Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2\}$;

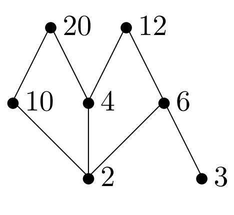
(b) $(A, |)$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$ e $|$ a relação dada por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

resolução:

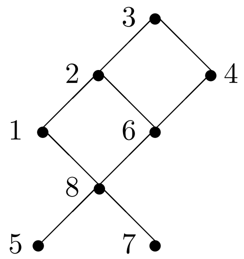
(a)



(b)



5.18. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \preceq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



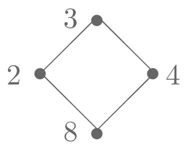
Para cada um dos conjuntos A, X e Y determine, caso existam, os majorantes e os minorantes, o supremo e o ínfimo, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

resolução:

(a) O único elemento maximal de A é o 3, sendo os seus elementos minimais o 5 e o 7. O único majorante de A é o 3. A não admite minorantes. O supremo de A é o 3 e A não admite ínfimo. O máximo de A é o 3 e A não tem mínimo.

X tem um só elemento maximal, o 2, e dois elementos minimais, o 1 e o 6. Temos que $\mathrm{Maj}(X) = \{2, 3\}$ e $\mathrm{Min}(X) = \{8, 5, 7\}$. Assim, $\sup(X) = 2$, $\max(X) = 2$, $\inf(X) = 8$ e não existe mínimo de X.

Relativamente a Y, comecemos por notar que o seu diagrama de Hasse seria:



Y tem um só elemento maximal, o 3, e um só elemento minimal, o 8. Temos que $\mathrm{Maj}(Y) = \{3\}$ e $\mathrm{Min}(Y) = \{8, 5, 7\}$. Assim, $\sup(Y) = 3$, $\max(Y) = 3$, $\inf(Y) = 8$ e $\min(Y) = 8$.

5.19. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

(a) Se X tem um elemento maximal então X tem elemento máximo;

(b) Se X tem elemento máximo então X tem um elemento maximal;

(c) Se existe $\sup(X)$ então X tem um elemento maximal;

(d) Se X tem um elemento maximal então existe $\sup(X)$.

resolução:

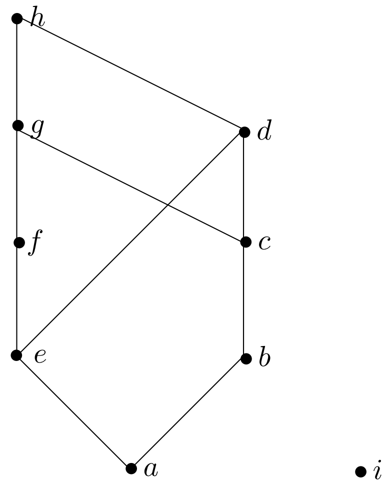
(a) A afirmação é falsa. Consideremos o c.p.o. (A, ρ_1) do exercício 5.15 e tomemos $X = A$. X tem dois elementos maximais e não tem máximo.

(b) A afirmação é verdadeira. Se $m = max(X)$, então não existe $x \in X$ tal que $m \leq x$ e $x \neq m$. Portanto, m é um elemento maximal de X.

(c) A afirmação é falsa. Consideremos o c.p.o. $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual que" usual. Seja $X =]-3, 2[$. Sabemos que $sup(X) = 2$. No entanto, X não tem elemento maximal.

(d) A afirmação é falsa. Consideremos novamente o c.p.o. (A, ρ_1) do exercício 5.15 e tomemos $X = A$. X tem dois elementos maximais e não existe $\sup(X)$.

5.20. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



(a) Indique os elementos maximais e minimais de A.

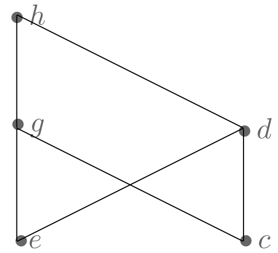
(b) Seja $X = \{c, d, e, g, h\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de X em A e, caso existam, o máximo, o mínimo, o supremo e o ínfimo de X.

(c) Dê exemplo de um subconjunto próprio de A com 3 elementos maximais e indique-os.

resolução:

(a) Os elementos maximais de A são o h e o i. Os elementos minimais de A são o a e o i.

(b) Relativamente a X, comecemos por notar que o seu diagrama de Hasse seria:



Assim, X tem um só elemento maximal, o h, e dois elementos minimais, o e e o c. Temos que $\mathrm{Maj}(X) = \{h\}$ e $\mathrm{Min}(X) = \{a\}$. Assim, $\sup(X) = h$, $\max(X) = h$, $\inf(X) = a$ e não existe mínimo de X.

(c) Consideremos, por exemplo, $Z = \{e, b, a, i\}$, cujos elementos maximais são e, b e i.

5.21. Mostre que, num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$: (1) $a \leq b$; (2) $\sup\{a, b\} = b$; (3) $\inf\{a, b\} = a$.

resolução:

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$:

Admitamos que $a \leq b$. Sabemos que os majorantes de $\{a, b\}$ são os elementos m de A tais que $a \leq m$ e $b \leq m$. É claro que b é um majorante de $\{a, b\}$, uma vez que $a \leq b$, por hipótese, e que $b \leq b$. Dado um majorante m de $\{a, b\}$, sabemos que $b \leq m$. Portanto, b é, de facto, o supremo de $\{a, b\}$.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$:

Admitamos que $\sup\{a, b\} = b$. Sabemos, então, que b é um dos majorantes de $\{a, b\}$ e, por isso, $a \leq b$ e $b \leq b$. Dado que $a \leq b$ e $a \leq a$, podemos afirmar que a é um minorante de $\{a, b\}$. Consideremos um minorante m de $\{a, b\}$. Sabemos, em particular, que $m \leq a$. Portanto, a é, de facto, o ínfimo de $\{a, b\}$.

$\underline{(3) \Rightarrow (1)}$:

Admitamos que $\inf\{a, b\} = a$. Sabemos, então, que a é um dos minorantes de $\{a, b\}$ e, por isso, $a \leq b$ e $a \leq a$. Em particular, $a \leq b$.

Provámos, deste modo que as três afirmações são equivalentes.

5.22. Considere o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, |)$ (definido no exercício 5.16.(b)).

(a) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ não é uma cadeia.

(b) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}_0, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.

(c) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ é um reticulado, indicando para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}_0$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.

(d) Considere $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.

  (i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |)$ e de $(Y, |)$.

  (ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X.

  (iii) Dê exemplos de subconjuntos Z de Y, com pelo menos quatro elementos, tais que $(Z, |)$ é uma cadeia.

  (iv) Indique, caso existam, elementos $a, b \in Y$ tais que:

    (α) exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$ e este supremo seja diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}_0, |)$;

(β) não exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$;

(v) Dê exemplo de um subconjunto W de X tal que $(W, |)$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e não seja um reticulado.

resolução:

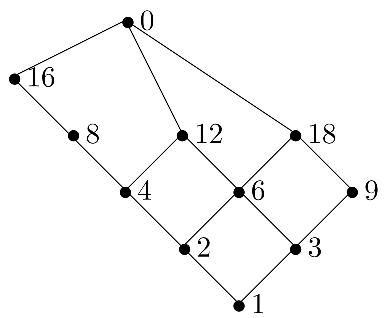
(a) $(\mathbb{N}_0, |)$ não é uma cadeia, uma vez que nem todos os elementos x, y de $\mathbb{N}_0$ são comparáveis. Tomemos, por exemplo, $x = 2$ e $y = 3$. Temos que $2 \not| 3$ e $3 \not| 2$.

(b) Como $1|x$ para todo $x \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $1 = \min(\mathbb{N}_0)$. Atendendo a que $0 = 0 \times x$, para todo $x \in \mathbb{N}_0$, temos que $x|0$, para todo $x \in \mathbb{N}_0$. Logo, $0 = \max(\mathbb{N}_0)$.

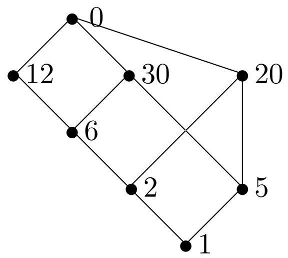
(c) $\sup\{a, b\} = m.m.c.(a, b)$ e $\inf\{a, b\} = m.d.c.(a, b)$

(d)

(i) O diagrama de Hasse de $(X, |)$ é o seguinte



e o de $(Y, |)$ o seguinte



(ii) O único elemento minimal de X é o 1 e o único maximal é o 0.

(iii) Consideremos, por exemplo, $Z = \{1, 2, 6, 12\}$ ou $Z = \{1, 2, 6, 30, 0\}$.

(iv)

(α) Consideremos $a = 12$ e $b = 5$. O supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$ é 0 e este supremo é diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}_0, |)$, que é 60.

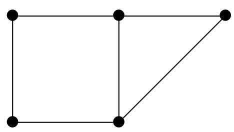
(β) Consideremos, agora, $a = 2$ e $b = 5$. O supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}_0, |)$ é 10, mas não existe supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$. De facto, o conjunto dos majorantes de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$ é $\{20, 30, 0\}$ e $20 \| 30$.

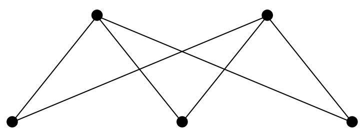
(e) Consideremos, por exemplo, $W = \{1, 2, 3, 12, 18, 0\}$. Temos que não existe $\sup(\{2, 3\})$, pelo que W não é um reticulado, e W admite máximo (o elemento 0) e mínimo (o elemento 1).

Capítulo 6

Grafos

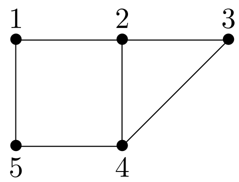
6.1. Descreva formalmente cada um dos seguintes grafos e determine matrizes de incidência e de adjacência de cada um deles.





resolução:

Seja $G = (V, E)$ o grafo



Temos que

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}\ .$$

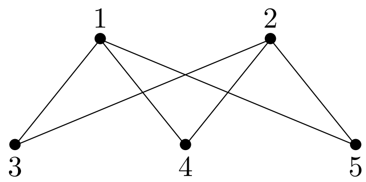
Uma matriz de adjacência de G é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e uma matriz de incidência de G é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $G' = (V', E')$ o grafo



Temos que

$$V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e

$$E' = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\} .$$

Uma matriz de adjacência de G' é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

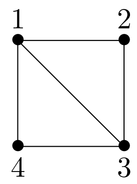
e uma matriz de incidência de G' é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. Desenhe um grafo que tenha como matriz de adjacência a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

resolução:

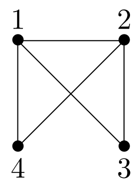
Consideremos o grafo G:



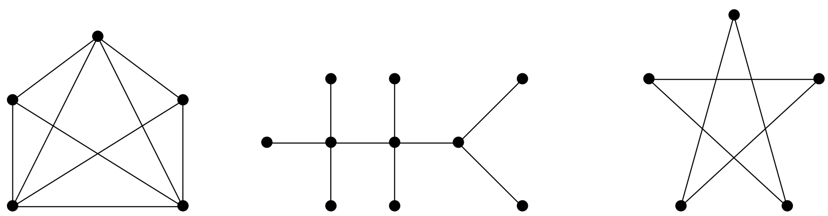
6.3. Desenhe um grafo que tenha como matriz de incidência a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

resolução:

Consideremos o grafo G:

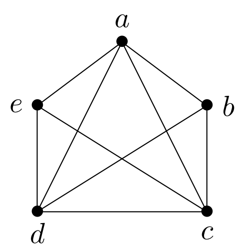


6.4. Dos seguintes grafos, diga quais são bipartidos, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices.



resolução:

Consideremos, primeiro, o grafo $G = (V, E)$

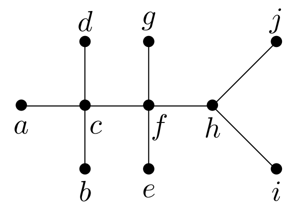


Pretendemos verificar se existem $X, Y \subseteq V$, diferentes do conjunto vazio, tais que $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \varnothing$ e os vértices de X apenas são adjacentes a vértices de Y e os vértices de Y apenas são adjacentes a vértices de X.

Suponhamos que existem esses conjuntos X e Y. Sem perda de generalidade, admitamos que $a \in X$. Como a é adjacente a todos os outros vértices, segue-se que b, c, d, e têm de pertencer a Y. Mas, por exemplo, b é adjacente a c, o que contradiz o facto de vértices de Y apenas serem adjacentes a vértices de X.

Podemos, então, concluir que tais conjuntos X e Y não existem e que G não é bipartido.

Consideremos, agora, o grafo $G' = (V', E')$



Pretendemos verificar se existem $X, Y \subseteq V'$, diferentes do conjunto vazio, tais que $X \cup Y = V'$, $X \cap Y = \varnothing$ e os vértices de X apenas são adjacentes a vértices de Y e os vértices de Y apenas são adjacentes a vértices de X.

Suponhamos que existem esses conjuntos X e Y. Sem perda de generalidade, admitamos que $a \in X$. Como a é adjacente a c, temos que $c \in Y$. Sendo c adjacente a d, f e b, esses vértices são elementos de X. Como $f \in X$ e f é adjacente a g, h e e, estes vértices têm de pertencer a Y. Sendo $h \in Y$ e h adjacente a i e j, esses vértices são elementos de X. Assim,

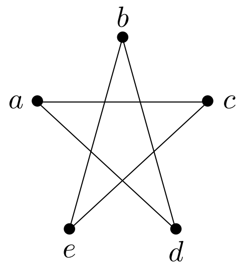
$$X = \{a, b, d, f, i, j\}$$

e

$$Y = \{c, g, e, h\}.$$

Podemos, então, concluir que G' é bipartido.

Consideremos, agora, o grafo $G'' = (V'', E'')$

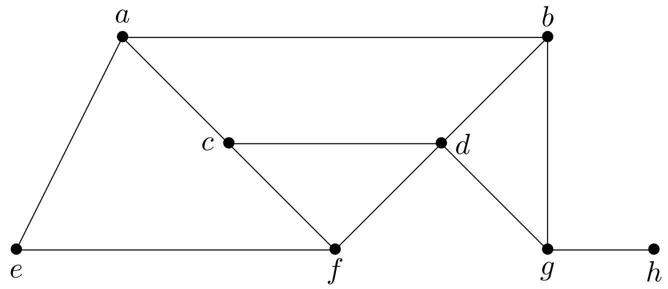


Pretendemos verificar se existem $X, Y \subseteq V''$, diferentes do conjunto vazio, tais que $X \cup Y = V''$, $X \cap Y = \varnothing$ e os vértices de X apenas são adjacentes a vértices de Y e os vértices de Y apenas são adjacentes a vértices de X.

Suponhamos que existem esses conjuntos X e Y. Sem perda de generalidade, admitamos que $a \in X$. Como a é adjacente a c, segue-se que c têm de pertencer a Y. Como c é adjacente a e, temos que e tem de pertencer a X. Dado que e é adjacente a b, podemos concluir que b tem de pertencer a Y. Como b é adjacente a d, temos que d tem de pertencer a X. Mas, assim, a é adjacente a d e ambos pertencem a X, o que contradiz o facto de vértices de X apenas serem adjacentes a vértices de Y.

Podemos, então, concluir que tais conjuntos X e Y não existem e que G'' não é bipartido.

6.5. Considere o seguinte grafo G.



(a) Indique o(s) caminho(s) de a a h de menor comprimento.

(b) Indique o(s) caminho(s) de a a h de maior comprimento que não têm vértices repetidos.

(c) Indique um caminho de a a h sem arestas repetidas, mas com vértices repetidos.

(d) Indique um ciclo de G de comprimento 7.

(e) Indique todos os ciclos de G cujo vértice inicial é a.

resolução:

(a) $\langle a, b, g, h\rangle$ (comprimento 3)

(b) $\langle a, e, f, c, d, b, g, h\rangle$ (comprimento 7)

(c) $\langle a, b, d, f, c, d, g, h\rangle$

(d) $\langle a, e, f, c, d, g, b, a\rangle$

(e) $\langle a, e, f, c, a\rangle$, $\langle a, e, f, d, b, a\rangle$, $\langle a, e, f, c, d, b, a\rangle$, $\langle a, e, f, d, g, b, a\rangle$, $\langle a, e, f, c, d, g, b, a\rangle$, $\langle a, e, f, d, c, a\rangle$, ...

6.6. Dê exemplo, caso exista, de:

(a) um grafo sem vértices de grau ímpar;

(b) um grafo sem vértices de grau par;

(c) um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar;

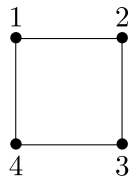
(d) um grafo com exatamente um vértice de grau par;

(e) um grafo com exatamente dois vértices de grau ímpar;

(f) um grafo com exatamente dois vértices de grau par.

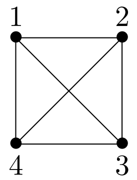
resolução:

(a) Consideremos o grafo G:



Todos os vértices de G têm grau par. Portanto, não há vértices de grau ímpar em G.

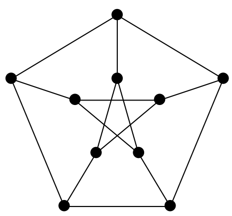
(b) Consideremos o grafo G:



Todos os vértices de G têm grau ímpar. Portanto, não há vértices de grau par em G.

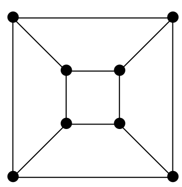
6.7. Um *conjunto de desconexão* de um grafo conexo G é um conjunto de arestas cuja remoção dá origem a um grafo desconexo.

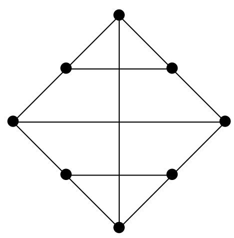
(a) Encontre conjuntos de desconexão para o grafo de Petersen



com 3, 4 e 5 arestas.

(b) Encontre conjuntos de desconexão com o menor número possível de arestas para os grafos seguintes:





6.8. Construa todas as árvores possíveis com 6 vértices.