Folha 3

8. Mostre que

(a) $u(x,y) = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$ (com A, B e $C \in \mathbb{R}$) satisfaz a equação $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4u$

(b) se $P(T,V) = k\dfrac{T}{V}$ (com $k \in \mathbb{R}$), então $\quad V\dfrac{\partial P}{\partial V} = -P \quad$ e $\quad T\dfrac{\partial P}{\partial T} = P$

(c) se $h(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, então $\quad h_x + h_y + h_z = 1$

a. $u(x,y) = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4Ax^3 + 4Bxy^2 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4Bx^2y + 4Cy^3$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4x(Ax^3 + Bxy^2) + 4y(Bx^2y + Cy^3) = 4(Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4) = u(x,y)$$

b. $P(T,V) = k\dfrac{T}{V}$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{k}{V} \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}$$

$$V\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{kT}{V} = -P \quad e \quad T\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{kT}{V} = P$$

c. $h(x,y) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$

$$h_x = 1 + \frac{1}{y-z}, \quad h_y = \frac{z-x}{(y-z)^2}, \quad h_z = \frac{x-y}{(y-z)^2}$$

$$h_x + h_y + h_z = 1 + \frac{(y-z) + (z-x) + (x-y)}{(y-z)^2}$$

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Mostre que existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$, $\forall a, u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

a. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que é um aberto de $\mathbb{R}^2$, a função f está definida pelo quociente de dois polinómios, logo sabemos que admite $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ para qualquer $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ com $\|u\| = 1$.

Para $a = (0,0)$ há que usar a definição de derivada direcional. Fazendo $u = (\alpha, \beta)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2\alpha^2 t\beta}{t(t^2\alpha^2 + t^2\beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$ Logo, existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = f(u)$.

b. Da alínea a sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \; [u=(1,0)] \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \; [u=(0,1)].$$

Portanto, a aplicação linear candidata a diferencial de f em $(0,0)$ é:

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, v_2 = 0.$$

Assim, a diferencial de f no ponto $(0,0)$, a existir, será dada por:

$$df(0,0): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad df(0,0)(v_1,v_2) = 0$$

No entanto, se f for diferenciável em $(0,0)$ teremos necessariamente

$$df(0,0)(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \text{ para todo o } u \in \mathbb{R}^2 \text{ com } \|u\|=1,$$

o que claramente entra em contradição com os cálculos da alínea anterior.

Logo f não é diferenciável em $(0,0)$.

12. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que:

(a) f é contínua;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = f(u), \forall u \in \mathbb{R}^2$

a. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que é um aberto de $\mathbb{R}^2$, a função f está definida pelo quociente de dois polinómios logo é contínua.

Em $(x,y)=(0,0)$, que é ponto de acumulação de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, há que verificar que:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0).$$

Vejamos que, de facto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Para tal vamos usar o teorema do enquadramento.

Temos:

$$|f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \leq |x| \quad \text{uma vez que } \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \text{ para } (x,y) \neq (0,0).$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, fica provado que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

b. $$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^3}{t(t^2u_1^2+t^2u^2)} = \frac{u_1^3}{u_1^2+u_2^2} = f(u_1,u_2) = f(u).$$

13. Calcule as derivadas parciais de 2.ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

(a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

(b) $f(x,y) = \cos(xy^2)$;

(c) $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

c. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^2 e^{-xy^2} + 4y^3x^3$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^4 e^{-xy^2} + 12y^3x^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2xy\, e^{-xy^2} + 3y^2x^4$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-xy^2} + (2xy)^2 e^{-xy^2} + 6yx^4$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y e^{-xy^2} + 2y^3x\, e^{-xy^2} + 12y^2x^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

15. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

(a) $f_x(x,y) = 2x^3$ e $f_y(x,y) = yx^2 + x$;

(b) $f_x(x,y) = x \operatorname{sen} y$ e $f_y(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

b. Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x \operatorname{sen} y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y \operatorname{sen} x$.

Logo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x\cos y$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y \cos x$.

Observando que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ então, pelo teorema de Schwarz, não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 com as derivadas parciais de 1ª ordem apresentadas pois, nesse caso, teríamos necessariamente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.