4. ESPAÇOS VETORIAIS

4.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos n-uplos ordenados de números reais, isto é, o conjunto dos elementos da forma

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

é designado por $\mathbb{R}^n$.

Dois elementos $\boldsymbol{x} = (x_i)$ e $\boldsymbol{y} = (y_i)$ de $\mathbb{R}^n$ dizem-se iguais se e só se as componentes homólogas são iguais, isto é,

$$x_i = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Notação:

- o elemento de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são todas iguais a zero representa-se por $\mathbf{0}$.
- Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-\boldsymbol{x}$ representa o elemento de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são os simétricos das componentes homólogas de $\boldsymbol{x}$, isto é, $-\boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Em $\mathbb{R}^n$ definimos duas operações:

① Adição

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

② Multiplicação por um número real

$$\alpha\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n).$$

Teorema: *Sejam x, y, z elementos de $\mathbb{R}^n$ e sejam α, β números reais. Então*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.
3. $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
4. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
5. $\alpha\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\,\boldsymbol{x} + \alpha\,\boldsymbol{y}$.
6. $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{x} = \alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{x}$.
7. $\alpha\,(\beta\,\boldsymbol{x}) = (\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{x}$.
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Porque o conjunto $\mathbb{R}^n$ algebrizado com as operações de adição e multiplicação por um número real satisfaz as propriedades listadas no teorema anterior diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados vetores do espaço $\mathbb{R}^n$.

$\mathbf{0}$ é designado por vetor nulo de $\mathbb{R}^n$.

Os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ adquirem um significado geométrico quando "identificados" respetivamente, com o conjunto dos vetores de um plano, e com o conjunto dos vetores do espaço ordinário.

4.2 Espaço vetorial - definição

Seja V um conjunto no qual estão definidas duas operações:

① uma que designamos por adição e que associa a cada par $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de elementos de V, um e um só elemento de V, representado por

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

② outra operação, que designamos por multiplicação escalar e que associa a cada número real α e cada elemento $\boldsymbol{u}$ de V, um e um só elemento de V, representado por

$$\alpha\,.\,\boldsymbol{u} \quad \text{ou} \quad \alpha\,\boldsymbol{u}$$

Definição: Diz-se que V é um espaço vetorial real se estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$ comutatividade da adição
2. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V,\ \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}.$ associatividade da adição
3. $\exists \mathbf{0}_V \in V\ \forall \boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$
   existência de elemento neutro da adição
4. $\forall \boldsymbol{u} \in V \exists \boldsymbol{u}' \in V :\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' = \mathbf{0}_V = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}.$
   existência de elemento simétrico da adição
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in V,\ (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{u} = \alpha\,\boldsymbol{u} + \beta\,\boldsymbol{u}.$
   distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em $\mathbb{R}$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,\ \alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\,\boldsymbol{u} + \alpha\,\boldsymbol{v}.$
   distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em V
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in V,\ (\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\,\boldsymbol{u}).$
   associatividade mista da multiplicação escalar
8. $\forall \boldsymbol{u} \in V,\ \mathbf{1} \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$

Exemplos

1. O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes reais de ordem $m \times n$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por um número, é um espaço vetorial real.

2. O conjunto $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios, na variável x, com coeficientes reais, de grau inferior ou igual a n, com $n \in \mathbb{N}_0$, isto é,

$$\mathcal{P}_n(x) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 :\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

é um espaço vetorial real para a adição usual de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real.

E o conjunto $\{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 :\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0\}$?

Os elementos de um espaço vetorial chamam-se vetores e os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados escalares.

Nota: Os espaços vetoriais que definimos são espaços vetoriais reais porque os escalares usados na multiplicação escalar são números reais; existem também espaços vetoriais complexos, quando os escalares forem números complexos (e até espaços em que os escalares pertencem a outros conjuntos que não $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Como, neste curso, consideramos apenas espaços vetoriais reais, quando falarmos em espaço vetorial, tal deverá ser entendido com o significado de espaço vetorial real .

- Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbb{R}^{1\times n}$

$\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

$\mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbb{R}^{1\times n}$ são “o mesmo”, pelo que não os distinguiremos e falaremos sempre em $\mathbb{R}^n$.

Teorema: *Seja V um espaço vetorial.*

1. *O elemento neutro para a adição é único (representamo-lo por $\mathbf{0}_V$ ou apenas $\mathbf{0}$).*
2. *Para cada $\boldsymbol{v} \in V$, o simétrico de $\boldsymbol{v}$ é único (representamo-lo por $-\boldsymbol{v}$).*
3. *Para quaisquer vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e quaisquer escalares α, β, tem-se*
   - $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$
   - $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$
   - $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$
   - $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
   - $(-\alpha)\boldsymbol{v} = \alpha(-\boldsymbol{v}) = -(\alpha \boldsymbol{v})$; *em particular,* $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$
   - $\alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *ou* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
   - $\alpha \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$
   - $\alpha \boldsymbol{v} = \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$

Definição: Um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é chamado um subespaço vetorial (ou apenas subespaço) de V se

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U,\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in U,\ \alpha\, \boldsymbol{u} \in U$.

Exemplos

- O conjunto $\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
- O conjunto $\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Observação: Um subespaço de V é, ele próprio, um espaço vetorial (para as operações nele naturalmente definidas por ser um subconjunto de V).

Definição: Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vetores de um espaço vetorial V.
Diz-se que $\boldsymbol{v} \in V$ é **combinação linear** dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ se

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ dizem-se coeficientes da combinação linear.

Exemplos

1. O vetor $\boldsymbol{v} = (3,0)$ de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}_1 = (5,-2)$ e $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1)$, uma vez que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 - 2\,\boldsymbol{u}_2.$$

2. O vetor $\boldsymbol{v} = (3,0)$ de $\mathbb{R}^2$ não é combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}_1 = (-2,2)$ e $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1)$. (Porquê?)

Teorema: *Se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ são vetores de um espaço vetorial V, então o conjunto U formado por todas as combinações lineares destes vetores é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração:

① *U é não vazio, pois $\mathbf{0} = 0\,\boldsymbol{v}_1 + 0\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\,\boldsymbol{v}_n$., i. e. $\mathbf{0} \in U$*

② *Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, isto é, se $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$ e $\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n$, então*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n) + (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{u}_n. \end{aligned}$$

Logo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$, porque é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

③ *Também*

$$\alpha\,\boldsymbol{u} = \alpha(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n) = (\alpha\,\alpha_1)\,\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (\alpha\,\alpha_n)\,\boldsymbol{u}_n$$

pertence a U.

O subespaço formado por todas as combinações lineares dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ chama-se subespaço gerado pelos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ e denota-se por $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, i.e.

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Se $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, diz-se que $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ geram U ou são geradores de U.

Exemplos

1. $\langle (1,0) \rangle = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$
2. $\langle (1,1), (2,3) \rangle = \mathbb{R}^2$
3. $\langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}$

O conjunto

$$S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Indique um conjunto de geradores deste subespaço.

Teorema: *Sejam* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *e* $\boldsymbol{v}$ *vetores de um espaço vetorial* V. *Então, o vetor* $\boldsymbol{v}$ *é combinação linear de* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *se e só se*

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle .$$

Demonstração:

▶Suponhamos que $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ e mostremos que

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle .$$

Sejam

$$U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle \quad \text{e} \quad U' = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$$

Se $\boldsymbol{x} \in U$ então

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + 0\, \boldsymbol{v},$$

logo $\boldsymbol{x} \in U'$, i.e. $U \subset U'$.

Se $\boldsymbol{y} \in U'$ então

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Como $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ então

$$\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n,$$

com $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Donde, substituindo,

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta 2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)\, \boldsymbol{u}_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)\, \boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)\, \boldsymbol{u}_n$$

ou seja $\boldsymbol{y} \in U$, i.e. $U' \subset U$.

Como $U' \subset U$ e $U \subset U'$, conclui-se que $U = U'$.

- Para mostrar que, se $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$, então $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ basta notar que $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$ (porquê?), donde $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, ou seja, $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Teorema:

Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vetores de um espaço vetorial V e sejam $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vetores obtidos de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ por uma das seguintes operações:

1. *troca da ordem de dois vetores;*
2. *multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;*
3. *substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.*

Tem-se então

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle .$$

Demonstração: ver folha de exercícios.

4.3 Bases e dimensão

Definição: Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de um espaço vetorial V dizem-se linearmente independentes se só for possível escrever o vetor nulo como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ considerando todos os coeficientes iguais a zero, i.e. se tivermos

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ dizem-se linearmente dependentes se não são linearmente independentes.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 4)$ são linearmente dependentes.
2. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ são linearmente independentes.
3. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 0, 0)$ são linearmente independentes.

Teorema: *Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ($n \geq 2$) de um espaço vetorial V são linearmente dependentes se e só se (pelo menos) um dos vetores puder ser escrito combinação linear dos restantes.*

Demonstração:

- Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ linearmente dependentes.

Então pode ter-se

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero.

Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.[1] Então podemos escrever

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_n.$$

Donde, $\boldsymbol{v}_1$ é combinação linear dos restantes vetores.

[1] A demonstraçao será totalmente análoga se considerarmos outro escalar não nulo.

► Suponhamos agora que um dos vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, por exemplo $\boldsymbol{v}_1$, é combinação linear dos restantes, i.e.

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Vem então

$$\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Tem-se assim uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero (o de $\boldsymbol{v}_1$, que vale 1), pelos que os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são linearmente dependentes.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 4)$ são linearmente dependentes, porque $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$.
2. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ e $\boldsymbol{w} = (3, 6, 4)$ são linearmente dependentes, porque $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Teorema: *Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V e $\boldsymbol{v}$ não é combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ são linearmente independentes.*

Demonstração:

Consideremos

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

e mostremos que terá de ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$.
Se α_{n+1} fosse diferente de zero, poder-se-ia escrever $\boldsymbol{v}$ como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, o que iria contra a hipótese. Logo, temos de ter $\alpha_{n+1} = 0$. Mas então, ficamos com

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Como, por hipótese, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores linearmente independentes, isto implica que terá de ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teorema:

Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *vetores de um espaço vetorial* V *e sejam* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *vetores obtidos de* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *por uma das seguintes operações:*

1. *troca da ordem de dois vetores;*
2. *multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;*
3. *substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.*

Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *são linearmente independentes (dependentes) sse* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *são linearmente independentes (dependentes).*

Demonstração: ver folha de exercícios.

Definição: Uma sequência de vetores $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de um espaço vetorial V é uma base de V se os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são linearmente independentes e geram V.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

2. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 0)$ não são linearmente independentes nem geram $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

3. O vetor de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ é linearmente independente, mas não gera $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 2)$ geram $\mathbb{R}^2$, mas não são linearmente independentes, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. A sequência $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, com

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

   é uma base de $\mathbb{R}^n$.

2. A sequência $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ é uma base do espaço $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a n.

3. $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ é uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Teorema:

Seja V um espaço vetorial. Se $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ geram V e $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $m \geq n$.

Corolário: *Se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, então todas as bases de V têm n elementos.*

Demonstração:
Seja $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ uma base de V e seja $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ uma outra base de V.
Então,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \text{ geram } V \\ (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ lin. indep.}\end{array}\right\} \Rightarrow n \geq m \\ \left.\begin{array}{ll}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \text{ lin. indep.} \\ (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ geram } V\end{array}\right\} \Rightarrow m \geq n\end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$

Definição: Se V é um espaço vetorial que admite uma base com n elementos, diz-se que V tem **dimensão** n e escreve-se $\dim V = n$.

Observação: Se $V = \{\,\mathbf{0}\,\}$, considera-se que $\emptyset$ é base de V e que $\dim V = 0$.

Exemplos

1. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\qquad \dim \mathbb{R}^n = ?$
2. $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ $\qquad \dim \mathbb{R}^{m\times n} = ?$
3. $\dim \mathcal{P}_2(x) = 3$ $\qquad \dim \mathcal{P}_n(x) = ?$
4. $B = ((-1,1,0),(-1,0,1))$ é uma base do subespaço

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\},$$

logo $\dim S = 2$.

Corolário: *Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ vetores de V.*

1. *Se $p < n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ não geram V.*
2. *Se $p > n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ não são linearmente independentes.*

Dito de outro modo: num espaço de dimensão n, o número mínimo de geradores é n e o número máximo de vetores linearmente independentes é n.

Demonstração: De imediato, tendo em conta o resultado do teorema anterior, a definição de dimensão e a definição de base.

Teorema: *Seja V um espaço vetorial de dimensão n.*

1. *Se $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ geram V, então $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ é uma base de V.*
2. *Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V.*

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Exemplo: Os vetores $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 0, 0)$ são 3 vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$; como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, eles constituem uma base deste espaço.

Para que valores de k os vetores $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (k, -1, -k)$ e $\boldsymbol{w} = (1, k, 1)$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$?

4.4 Matrizes e espaços vetoriais

Sejam A e B matrizes reais de ordem $m \times n$ tais que

$$A \xrightarrow[linhas]{} B.$$

Consideremos as linhas de A e de B como vetores de $\mathbb{R}^n$.
Relembre que:

1. As linhas de A geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^n$ que as linhas de B.
2. As linhas de A são linearmente independentes sse as linhas de B são linearmente independentes.

Teorema: *As linhas não nulas de uma matriz com a forma em escada são linearmente independentes.*

Aplicações

Sejam dados m vetores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[linhas]{} A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 \\ \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}'_m \end{pmatrix} \qquad A' \text{ com forma em escada}$$

① Verificar se os vetores são linearmente independentes

$\boxed{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ são linearmente independente sse } A' \text{ não tem linhas nulas}}$

sse $\boldsymbol{v}'_m \neq \mathbf{0}$

sse $\operatorname{car}(A) = m$

Exemplos

1. Os vetores $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (3,2,1)$ e $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,-1)$ são linearmente dependentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Os vetores $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,1)$ e $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,1)$ são linearmente independentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② Determinar uma base e a dimensão de $\mathcal{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$

$$\boxed{\text{Sendo } r = \operatorname{car}(A), \quad (\boldsymbol{v}_1', \ldots, \boldsymbol{v}_r') \text{ é uma base de } \mathcal{V}}$$

$$\boxed{\dim \mathcal{V} = \operatorname{car}(A)}$$

Exemplos

1.

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1,2,3), (3,2,1), (1,0,-1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad ((1,2,3),(0,1,2)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_1$$

2.

$$\mathcal{V}_2 = \langle (1,2,3), (3,2,1), (1,0,1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_2 = 3 \qquad \text{e} \qquad ((1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_2$$

③ Verificar se $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$

$$\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \text{ sse } \operatorname{car} A = \operatorname{car} \begin{pmatrix} A \\ \hline \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

Exemplos

1. $(1, 0, -1) \in \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $(1, 0, 1) \notin \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Espaços associados a matrizes

Definição:

Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$.

1. Chama-se espaço das linhas de A e representa-se por $\mathcal{L}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas m linhas de A.
2. Chama-se espaço das colunas de A e representa-se por $\mathcal{C}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas n colunas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(A) = \langle (1,-1,1,0), (2,-1,3,1), (3,-2,4,1) \rangle$$

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1,2,3), (-1,-1,-2), (1,3,4), (0,1,1) \rangle$$

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{L}(A) = 2$

Base $\mathcal{L}(A)$: $((1,-1,1,0),(0,1,1,1))$

$$A^T \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{C}(A) = 2$

Base $\mathcal{C}(A)$: $((1,2,3),(0,1,1))$

É possível, conhecendo uma matriz em escada, equivalente por linhas a A, determinar simultaneamente uma base para $\mathcal{L}(A)$ e uma base para $\mathcal{C}(A)$?

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{linhas}]{} A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 \\ \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}'_m \end{pmatrix}$$

A' matriz em escada

- Uma base para o espaço das linhas de A é constituída pelas linhas não nulas de A'.
- Uma base para o espaço das colunas de A é constituída pelas colunas de A que correspondem às colunas de A' que contêm pivôs- colunas principais.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad\qquad \end{array} \xrightarrow[\text{linhas}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad\qquad \end{array}$$

Base $\mathcal{L}(A)$: $((1, -1, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$

Base $\mathcal{C}(A)$: $((1, 2, 3), (-1, -1, -2))$

Teorema: $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A$

Observação: Definições equivalentes de característica de A:

1. número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A;
2. dimensão do espaço das linhas de A;
3. dimensão do espaço das colunas de A;
4. número (máximo) de linhas linearmente independentes de A ;
5. número (máximo) de colunas linearmente independentes de A

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução se e só se $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(A)$.*

Demonstração: O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução sse existe $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, ou seja, sse tivermos

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

onde $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ são as n colunas da matriz A. Tal é equivalente a ter-se

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

o que equivale a dizer que $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \mathcal{C}(A)$.

$$\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle \Leftrightarrow \operatorname{car}(B) = \operatorname{car}(B|\boldsymbol{v}),$$

onde B é a matriz com os vetores $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ como colunas.

Teorema: *Seja $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas. O conjunto de soluções deste sistema constitui um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Definição: Dada uma matriz real de ordem $m \times n$, chama-se espaço nulo ou núcleo de A, e representa-se por $\mathcal{N}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_6 - x_5 \\ x_3 = -x_6 \\ x_4 = x_6 - x_5 \end{cases}$$

SPI g.i. 6-4=2

$$\mathcal{N}(A) = \{(0, \beta - \alpha, -\beta, \beta - \alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \langle (0, -1, 0, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 1, 0, 1) \rangle$$

$\dim \mathcal{N}(A) = 2$

$\text{car}\, A = 4$

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Então*

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{car} A$$

Exemplo: Seja $A \in \mathbb{R}^{10\times 20}$ uma matriz tal que $\operatorname{car} A = 6$. Então

$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A = 6$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = 20 - 6 = 14$$

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = 10 - 6 = 4$$