Universidade do Minho MiEInf
Dep. Matemática 2018/2019

Lógica EI

2º Teste — 29 de maio de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número ________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de relação unário P. Se $LIV(\mathsf{P}(t)) = \emptyset$ para algum termo t de tipo L, então L tem pelo menos uma constante.	□	□
2. $(\forall x_0\ x_0 < x_1)[x_1/x_0] = \forall x_0\ x_1 < x_1$.	□	□
3. Seja L um tipo de linguagem formado apenas por duas constantes. Existe um conjunto D tal que o número de estruturas de tipo L com domínio D é 144.	□	□
4. Para todo o tipo de linguagem L e toda a fórmula φ de tipo L, se φ é universalmente válida, então o conjunto $\{\neg\varphi\}$ é inconsistente.	□	□
5. Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q, não existem modelos de $\{\forall x_0(\mathsf{R}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0)), \exists x_1(\neg\mathsf{R}(x_1) \wedge \neg\mathsf{Q}(x_1))\}$.	□	□
6. Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \vee \psi, \psi \vee \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$	□	□

Grupo II

Responda a cada uma das questões deste grupo no espaço disponibilizado a seguir à questão, sem apresentar justificações.

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{s}, +\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{0}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$ $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a estrutura de tipo L tal que:

$\overline{\mathsf{0}} = 0$

$\overline{\mathsf{s}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\overline{\mathsf{s}}(z) = -z$

$\overline{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tal que $\overline{+}(z_1, z_2) = z_1 + z_2$

$\overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$

$\overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}$

1. Dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente 3 subtermos.

   Resposta:

2. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i + 2$. Indique $\mathsf{s}(x_1 + \mathsf{s}(x_3 + \mathsf{0}))\ [a]$.

   Resposta:

3. Indique uma fórmula de tipo L válida em E que represente a afirmação: A soma de um número qualquer com o seu simétrico é nula.

   Resposta:

4. Seja φ a fórmula $(\neg \exists x_1\, \mathsf{s}(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2\, \mathsf{P}(x_2))$ de tipo L. Indique uma fórmula de tipo L que seja logicamente equivalente a φ e esteja em forma normal prenexa.

   Resposta:

Grupo III

1. Construa uma derivação que mostre que $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ é um teorema de DNP.
2. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, então Γ é sintaticamente inconsistente.
3. Considere o tipo de linguagem L do Grupo II. Seja ψ a fórmula $\mathsf{P}(x_2) \to \forall x_1\, \mathsf{P}(x_1 + x_2)$ de tipo L.
   (a) Mostre que x_2 está livre para $\mathsf{s}(0)$ em ψ.
   (b) Indique, justificando, quais são as variáveis que estão livres para $x_1 + x_2$ em ψ.
4. Considere de novo o tipo de linguagem L e a estrutura $E = (\mathbb{Z}, {}^{-})$ de tipo L do Grupo II. Seja φ a fórmula $\forall x_0\, (\neg \mathsf{P}(x_0) \to (x_0 = 0 \vee \mathsf{P}(\mathsf{s}(x_0))))$ de tipo L.
   (a) Prove que φ é válida em E.
   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.
5. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\varphi)$. Prove que $\forall x(\varphi \vee \psi) \models (\varphi \vee \forall x\, \psi)$.

Cotações	I	II	III
	6	1+1+1+1	2+1,5+1,5+3,5+1,5