



Exercício 4.1 Determine, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-6x+9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

f) $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x+5|}{x+5}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x}{1-\cos x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

k) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x)$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^4}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \sin \frac{1}{x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(4x)}$

w) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 4 \\ x, & x = 4 \end{cases}$

x) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

y) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Exercício 4.2 Apresente um exemplo de uma função f tal que:

1. $f(1) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$;

2. $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Exercício 4.3 Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um possível gráfico de g , em cada um dos seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ e $D_g = \mathbb{R}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $D_g = [-1, 4]$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty$ e $D_g =]-1, 4[$.

Exercício 4.4 Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diga, justificando se são verdadeiras ou falsas cada uma das seguintes afirmações:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2x_0} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
 b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(2x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 2x_0} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(2x)$.

Exercício 4.5 Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $0 \leq f(x) \leq |x|$ para $0 < |x| < 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercício 4.6 Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $1 \leq f(x) \leq (x-3)^2 + 1$, para $x \neq 3$, calcule $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Exercício 4.7 Mostre, por definição, que:

- a) toda a função constante é contínua;
 b) a função identidade, $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, é contínua.

Exercício 4.8 Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x < -1 \\ ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

é contínua.

Exercício 4.9 Estude a continuidade, em todos os pontos do domínio, de cada uma das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \sin x & \text{se } x > 2 \end{cases}$
 b) $f(x) = \frac{1}{x}$;
 c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
 d) $f(x) = \log |x|$.
 e) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 f) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
 g) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 h) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ x^3, & x \leq 2 \end{cases}$
 i) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
 j) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Exercício 4.10 Defina, ou justifique que não existem, funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

- a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
- b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
- c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Exercício 4.11 Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de uma função f tal que:

- a) f é contínua em 0, mas $|f|$ é descontínua em 0;
- b) $|f|$ é contínua em 0, mas f é descontínua em 0;
- c) f tem domínio \mathbb{R} , é contínua em 1 e descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- d) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Exercício 4.12 Considere a função contínua $f : [0, 1[\cup [2, 3] \rightarrow [1, 3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- a) A função f é bijetiva. Justifique.
- b) Determine a função inversa de f . A função f^{-1} é contínua?
- c) Porque é que não se pode aplicar o teorema da continuidade da função inversa à função f ?

Exercício 4.13 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e f e g funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = g(x)$.

Exercício 4.14 Dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $D \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que $x \in D$ é uma raiz de f se for solução da equação:

$$f(x) = 0.$$

Mostre que cada uma das funções que se segue possui pelo menos uma raiz:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - 3x + 1; \quad g(x) = \sin^3 x + \cos^3 x; \quad h(x) = \operatorname{tg} x + x - 1.$$

Exercício 4.15 Considere a função $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui mínimo mas não possui máximo. Qual o motivo pelo qual não se pode aplicar o teorema de Weierstrass à função g ?

Exercício 4.16 Mostre que cada uma das seguintes equações possui pelo menos uma solução no intervalo indicado:

- a) $x^3 - x + 3 = 0$, $]-2, -1[$
- b) $x = \cos x$, $[0, \pi/2]$
- c) $x - 1 = -\ln(x + 1)$, $]0, 1[$
- d) $2 + x = e^x$, $]0, 2[$.