

Lógica EI

Exame de Recurso — 26 de junho de 2018 — duração: 2 horas

nome: _____ número _____

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,5 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é tautologia, então $\varphi \vee \psi$ é tautologia. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. $p_0 \rightarrow \neg p_1, \neg p_0 \rightarrow p_1 \models p_0 \leftrightarrow \neg p_1$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Para quaisquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é semanticamente consistente e $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, então $\varphi \notin \Gamma$ ou $\neg\psi \notin \Gamma$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. A fórmula $s(x_0) + x_1 < x_0 + x_1$ de tipo Arit é satisfazível. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário Q , a fórmula $(\forall x_0 Q(x_0)) \rightarrow (\exists x_1 Q(x_1))$ é universalmente válida. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

1. Considere o conjunto $X \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

- (1) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $p_i \in X$;
- (2) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\neg p_i \in X$;
- (3) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \in X$ e $\psi \in X$, então $\varphi \wedge \psi \in X$.

- (a) Sem justificar, dê exemplo de uma fórmula de X com pelo menos três ocorrências de conetivos.
- (b) Prove, por indução estrutural em X , que nenhum elemento de X é tautologia.

2. Indique, justificando, uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $\neg((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow \perp) \rightarrow p_2))$.
3. Construa uma derivação em DNP que mostre que $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \vdash ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$.
4. Prove que, para quaisquer fórmulas φ, ψ e σ do Cálculo Proposicional e qualquer conjunto de fórmulas Γ do Cálculo Proposicional, se $\varphi \vee \sigma$ é um teorema de DNP e $\Gamma, \varphi \models \psi$, então $\Gamma \vdash \sigma \vee \psi$.

Grupo III

(Nas seguintes questões, exceto na 6(a), apresente cada resposta no espaço disponibilizado para o efeito.)

Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \times\}, \{\mathbb{Q}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(\mathbb{Q}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$. Seja $E = (\mathbb{R}, \bar{})$ a estrutura de tipo L tal que:

$\bar{0}$ é o número zero $\bar{\mathbb{Q}}$ é o predicado “é racional” em \mathbb{R}
 $\bar{\times}$ é a multiplicação em \mathbb{R} $\bar{<}$ é a relação “menor do que” em \mathbb{R}

1. Sem justificar, dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente duas ocorrências do símbolo \times e quatro subtermos.
2. Sem justificar, dê exemplo de um termo t de tipo L tal que $x_1 \in \text{VAR}(t)$ e \bar{t}_α não depende da atribuição α em E .
3. Defina, por recursão estrutural, a função $f : \mathcal{T}_L \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada termo t faz corresponder o número de ocorrências de constantes em t .
4. Seja α a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(x_i) = i - 2$. Indique, sem justificar, $\overline{((x_1 \times x_3) \times x_1)}_\alpha$.
5. Sem justificar, apresente uma fórmula de tipo L , verdadeira em E , que represente a seguinte afirmação: O produto de dois racionais positivos é um racional positivo.
6. Seja φ a fórmula $\forall x_0 \neg(x_0 \times x_0 < 0)$.
 - (a) Prove que φ é verdadeira em E .
 - (b) Indique, sem justificar, uma estrutura E' de tipo L que seja diferente de E apenas na interpretação de algum dos símbolos de função de L e tal que φ não seja verdadeira em E' .

Cotações	I	II	III
	5	4,5+2,5+2+1,5	0,5+0,5+1+0,5+0,5+1,5