ANÁLISE
Cap. 4 – Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Abril 2020

4. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

Motivação

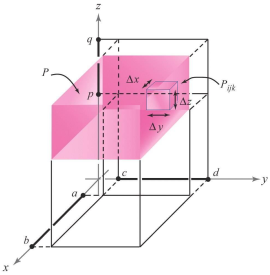
- [Recordar] A massa de um sólido de volume V e densidade constante ρ é $m = \rho V$.

- Seja P o paralelepípedo

$$[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

de um material cuja densidade é dada pela função contínua $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) \geq 0 \qquad \text{em} \quad P.$$



- [Problema] Determinar a massa do paralelepípedo P.

Definição de integral triplo

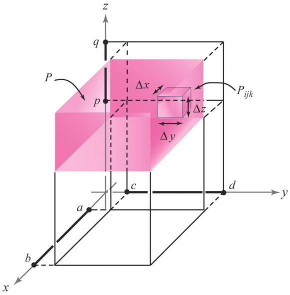
Seja $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de P em $n \times m \times l$ paralelepípedos

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}].$$

- O volume de P_{ijk} é

$$\Delta V_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$



- Para cada P_{ijk} escolha-se um $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)$;

- A massa de P_{ijk} pode ser aproximada por $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}$

- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de P é

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}.$$

[Definição]

Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral triplo de f em P e denota-se

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV \text{ ou } \iiint_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \text{ ou } \iiint_P f(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

- Se existir o integral triplo de f em P, diz-se que f é integrável em P.
- Toda a função contínua definida num paralelepípedo fechado é integrável.

Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\ g : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

1. $\displaystyle\iiint_P f(x,y,z) + g(x,y,z)\,dV = \iiint_P f(x,y,z)\,dV + \iiint_P g(x,y,z)\,dV$

2. $\displaystyle\iiint_P \lambda\ f(x,y,z)\,dV = \lambda \iiint_P f(x,y,z)\,dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. Se $P = P_1 \cup P_2$ e $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ então
$$\iiint_P f(x,y,z)\,dV = \iiint_{P_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{P_2} f(x,y,z)\,dV\,;$$

4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iiint_P f(x,y,z)\,dV \geq \iiint_P g(x,y,z)\,dV.$
   - $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iiint_P f(x,y,z)\,dV \geq 0;$

5. $\displaystyle\left|\iiint_P f(x,y,z)\,dV\right| \leq \iiint_P |f(x,y,z)|\ dV.$

6. [Teorema de Fubini]

Sendo P o paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ então

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z)\, dz \right] dy \right] dx$$

e é igual aos outros 5 integrais iterados[1] que se obtêm trocando a ordem de integração.

[1] $dx\, dy\, dz$ ou $dx\, dz\, dy$ ou $dy\, dx\, dz$ ou $dy\, dz\, dx$ ou $dz\, dx\, dy$ ou $dz\, dy\, dx$

Exemplo

- Sendo $P = [0,2]^3$, calcule-se $\displaystyle\iiint_P (x+y+z)\,dV$.
  - O domínio de integração é um paralelepípedo e a função integranda é uma função contínua por ser uma função polinomial.
  - Usando o teorema de Fubini e a ordem de integração *dz dy dx*, o integral triplo pode ser calculado como três integrais simples iterados. Os integrais iterados calculam-se sempre "de dentro para fora".

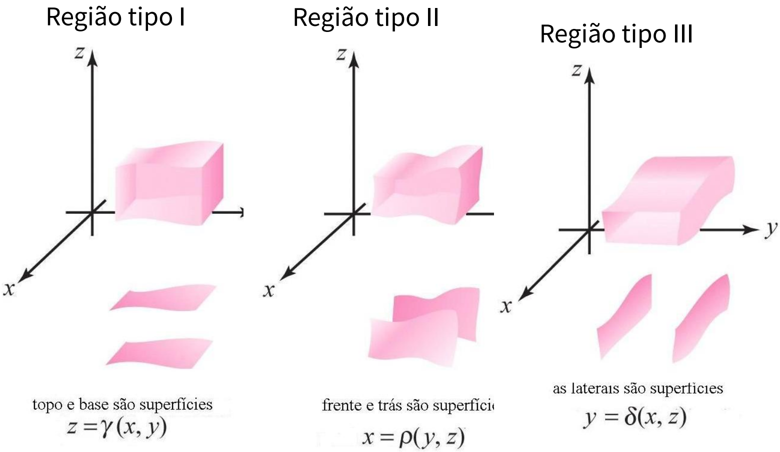
$$
\begin{aligned}
\iiint_P (x+y+z)\,dV &= \int_0^2 \left[\int_0^2 \left[\int_0^2 (x+y+z)\,dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\bigg|_{z=0}^{2} \right. dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 (2x+2y+2-0)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 (2x+2y+2)\,dy\right] dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 (2x + 2y + 2)\, dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[2xy + y^2 + 2y \Big|_{y=0}^{2} \right. dx \\
&= \int_0^2 (4x + 4 + 4 - 0)\, dx \\
&= \int_0^2 (4x + 8)\, dx \\
&= 2x^2 + 8x \Big|_{x=0}^{2} = 24.
\end{aligned}
$$

- Note-se que o resultado seria o mesmo caso se tivesse optado por qualquer uma das restantes 5 possibilidades de ordem de integração:

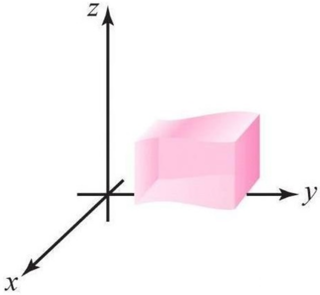
$$dy\,dz\,dx, \quad dx\,dz\,dy, \quad dz\,dx\,dy, \quad dx\,dy\,dz \quad \text{ou} \quad dy\,dx\,dz$$

Integração em regiões gerais



Regiões elementares de $\mathbb{R}^3$

- [Região do tipo I]



- $D \subset \mathbb{R}^2$ região elementar do plano XOY
- topo e base de S são superfícies $z = \gamma(x, y)$
- $(x, y) \in D$
- $\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$

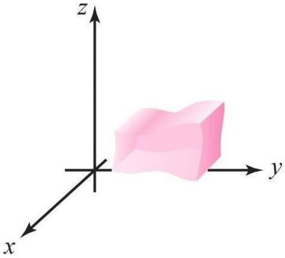
- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano XOY e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D, \ \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy$$

- [Região do tipo II]



- D é uma região elementar do plano YOZ
- frente e trás são superfícies $x = \rho(y, z)$
- $(y, z) \in D$
- $\rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)$

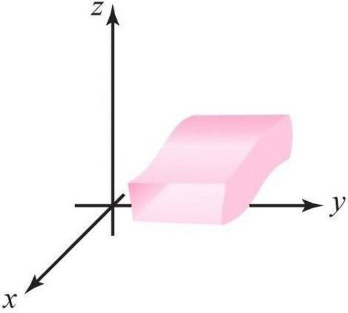
- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano YOZ e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (y, z) \in D, \ \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dy\, dz$$

[Região do tipo III]



- D é uma região elementar do plano XOZ
- as laterais são superfícies $y = \delta(x, z)$
- $(x, z) \in D$
- $\delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)$

- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano XOZ e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, z) \in D, \ \delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\delta_1(x,z)}^{\delta_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dx\, dz$$

- [Região do tipo IV] $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo IV de $\mathbb{R}^3$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I, do tipo II e do tipo III.

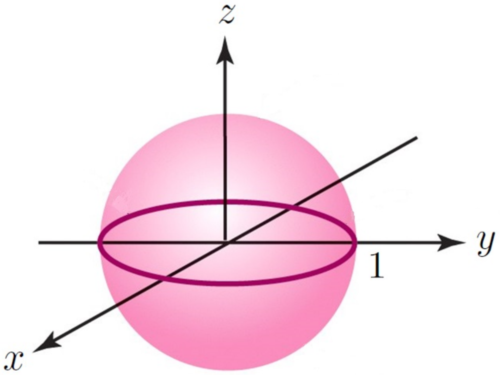
Exemplo

1. [A esfera como região elementar de $\mathbb{R}^3$]

   Descrever a esfera unitária

   $$\mathcal{E}: \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

   em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$.



Existem 6 formas diferentes de descrever a esfera unitária

$$\mathcal{E} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$ introduzidas anteriormente. Vejamos a mais intuitiva: região do tipo I.

- Considere-se a interseção de $\mathcal{E}$ com o plano horizontal. Aqui $z = 0$ pelo que a intersecção é o círculo unitário $D:\; x^2 + y^2 \leq 1$.
- O círculo pode ser descrito como o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{gathered} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\,. \end{gathered}$$

- Para cada $(x, y) \in D$ verifica-se que

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

- A esfera pode, então, ser descrita como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$
\begin{aligned}
-1 &\leq x \leq 1 \\
-\sqrt{1 - x^2} &\leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\
-\sqrt{1 - x^2 - y^2} &\leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}
\end{aligned}
$$

Integração tripla e volume

- Se S é uma região limitada de $\mathbb{R}^3$, o volume de S é dado por
$$\text{vol}(S) = \iiint_S 1\, dV.$$

- Para uma função arbitrária $f : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV$$
não tem uma interpretação geométrica intuitiva, mas tem diversas interpretações, por exemplo, na física.

Integração tripla: aplicações à física

- Se $\rho(x, y, z)$ é a função densidade em qualquer ponto (x, y, z), em massa por unidade de volume, de um objeto sólido que ocupa a região $S \subset \mathbb{R}^3$ então a massa do sólido é

$$m = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dV.$$

- Se a carga elétrica está distribuída sobre uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ e a densidade de carga, em unidades de carga por volume, é dada por $\sigma(x, y, z)$ em qualquer ponto (x, y, z), então a carga total Q é

$$Q = \iiint_S \sigma(x, y, z)\, dV.$$

Exemplo

- [Volume de uma esfera]

  Recorrendo a integrais iterados, escreva um integral que permita calcular o volume da esfera unitária

  $$\mathcal{E}\,:\ x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

  - O volume de uma esfera unitáriapode ser calculado recorrendo a um integral triplo

    $$\iiint_{\mathcal{E}} 1\,dV$$

    onde $\mathcal{E}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}\,.$
  - Recorrendo a integrais iterados ter-se-á, por exemplo[2]

    $$\iiint_{\mathcal{E}} 1\,dV=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\right]dy\right]dx$$

    (calculando este integral, obter-se-ia o valor $\frac{4}{3}\pi$).

[2] Atendendo ao exemplo anterior