Universidade do Minho MIEInf
Departamento de Matemática

Análise

Folha 5 — 2019/20

Interpretação geométrica do vetor gradiente; planos tangentes e retas normais

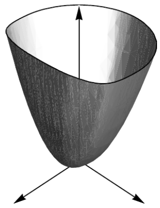
1. Para a função f, real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y) = y^2/x$, e no ponto de coordenadas $(2,4)$, determine

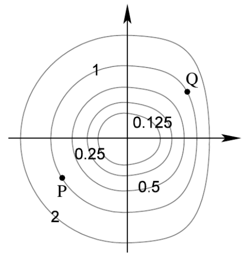
   (a) uma direção de variação máxima;

   (b) uma direção em que a variação seja nula.

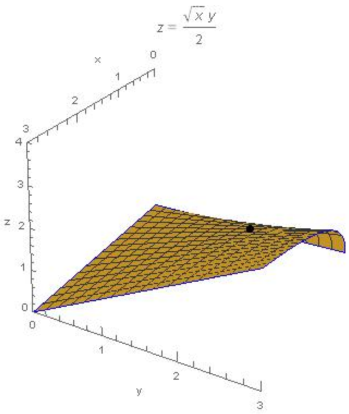
2. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $v = (1,1)$.

3. Na figura estão representados o gráfico e um diagrama de nível de uma função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Indique quais os sinais de $\nabla f(P) \cdot \vec{e}_1$ e $\nabla f(Q) \cdot \vec{e}_2$





4. Na figura, relativa ao gráfico da função real de duas variáveis reais definida por $f(x,y) = \dfrac{1}{2} y\sqrt{x}$, destaca-se o ponto de coordenadas $(1, 2, f(1,2))$.



   (a) Use o gráfico para representar uma sua conjetura sobre o vetor gradiente de f em $(1,2)$, recordando que este apontará na direção e no sentido do máximo crescimento da função no ponto dado.

   (b) Determine o vetor gradiente e compare-o com a sua conjetura da alínea anterior.

   (c) Em que direção e sentido a função f diminuiria mais, no ponto $(1,2)$?

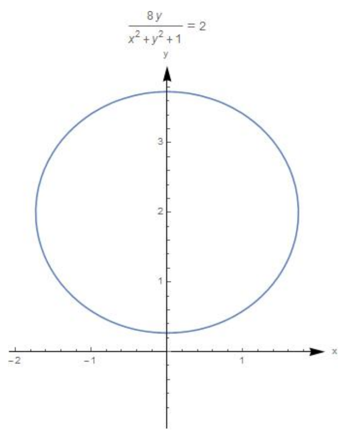
5. A figura representa a curva de nível 2 da função $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}.$$

   (a) Verifique, analiticamente, que a curva é uma circunferência.

   (b) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3}, 2)$ da curva de nível, esboce o vetor gradiente.

   (c) No ponto de coordenadas $(\sqrt{3}, 2)$ da curva de nível, esboce um vetor cuja derivada direcional seja zero.



6. Determine o plano tangente ao elipsoide definido por

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

no ponto de coordenadas $(2, 2, 1)$.

7. Considere a superfície de nível $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.

   (a) Determine equações para a reta normal e o plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto de coordenadas $(2, 2, 1)$.

   (b) Verifique se a reta encontrada na alínea anterior interseta o eixo das cotas (Oz).

8. A interseção das superfícies definidas por $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ e $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ é uma curva que passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1, 2)$.

   Determine os respetivos planos tangentes às superfícies, nesse ponto.