Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 - $\boxed{\text{A}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

31 outubro 2018 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ________

Grupo I

*Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** apresentar os seus cálculos.*

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que $C = AB$, tem-se $a =$ ________, $b =$ ________ e $c =$ ________.

b) A característica da matriz C é: ________.

c) Quando $c = 2$, a matriz com a forma em escada reduzida equivalente por linhas a B é:

d) O sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se a e b satisfizerem a condição ________.

2. Indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira ou falsa, apresentando uma pequena justificação.

a) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = i$, se $i \geq j$ e $a_{ij} = 0$, se $i < j$. Então, tem-se $\det A = n!$.

A afirmação é ____________, porque

b) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$ e seja $M = -2(AB)^{-1}A^{\mathsf{T}}B$. Então, tem-se $\det M = -2$.

A afirmação é ____________, porque

c) Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ $(m \geq 5)$ e B uma matriz de ordem $n \times p$. Se a primeira e quinta linhas de A são iguais, então também são iguais a primeira e quinta linhas de AB.

A afirmação é ____________, porque

d) Se um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é possível e determinado, então tem-se sempre $\operatorname{car} A = m$.

A afirmação é ____________, porque

(continua no verso)

3. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right)$

a) O sistema tem uma única solução se e só se α ____________________, sendo essa solução:

____

b) O sistema é impossível se e só se α ____________________.

c) O sistema tem uma infinidade de soluções se e só se α ________________; duas dessas soluções são:

____.

d) A matriz simples do sistema é invertível se e só se α ________________.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o valor do determinante de A.

b) Sendo $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, justifique que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma só solução e, sem resolver o sistema, diga, justificando, se essa solução é $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

c) Justifique que A^T é invertível e calcule a terceira linha de $(A^\mathsf{T})^{-1}$.

2. Calcule a expressão do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} a+2 & a & a & a \\ b & b+2 & b & b \\ c & c & c+2 & c \\ d & d & d & d+2 \end{vmatrix}.$$

3. Relembre que uma matriz X quadrada de ordem n se diz idempotente se $X^2 = X$.

a) Mostre que, se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz idempotente, então o mesmo sucede com a matriz $B = I_n - A$.

b) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é tal que

$$A^2(I_n - A) = A(I_n - A)^2 = \mathbf{O}_n,$$

onde $\mathbf{O}_n$ designa a matriz nula de ordem n, então A é uma matriz idempotente.

Cotação: $\boxed{\textbf{I}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 4 valores ; **3.** 5 valores; $\boxed{\textbf{II}}$ - **1.** 3 valores; **2.** 2 valores; **3.** 2 valores.