Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Aula Prática 1: Problema do Caminho Mais Curto

Elementos de Engenharia de Sistemas

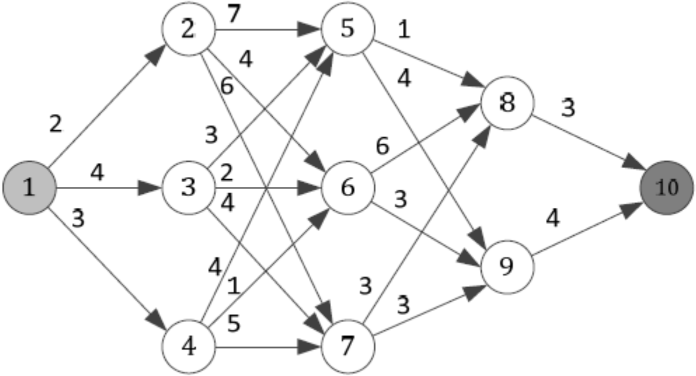
2019/2020

Problema do caminho mais curto

- **Objetivo:** Determinar o caminho mais curto entre dois pontos.
- Parâmetros do problema:
  - $G = (N, A)$, grafo orientado.
  - o, nodo de origem.
  - d, nodo de destino.
  - c_{ij}, comprimento do arco $ij \in A$.

Problema do caminho mais curto

- Consideremos o grafo $G = (N, A)$ da figura seguinte. Pretendemos determinar o caminho mais curto entre o nodo $o = 1$ e $d = 10$.



Problema do caminho mais curto

- Vamos construir um modelo de programação inteira (PI) para representar este problema.
- Começamos por definir as variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- para cada arco $ij \in A$.

Problema do caminho mais curto

- O modelo de programação inteira é constituído por:
  1. **Função objetivo**.
  2. **Conjunto de restrições**.

- A função objetivo exprime o comprimento do caminho em função dos arcos escolhidos, sendo dada por:

$$\begin{aligned}\textbf{Min} \quad z = & 2x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 7x_{25} + 4x_{26} + 6x_{27} + 3x_{35} + 2x_{36} + \\ & + 4x_{37} + 4x_{45} + x_{46} + 5x_{47} + x_{58} + 4x_{59} + 6x_{68} + 3x_{69} + \\ & + 3x_{78} + 3x_{79} + 3x_{8,10} + 4x_{9,10} \end{aligned} \tag{1}$$

Problema do caminho mais curto

- Seguidamente, são definidas as **restrições de conservação de fluxo**. Haverá tantas destas restrições quantos os nodos na rede.

1. Para o nodo de origem, 1, é necessário escolher exatamente um arco com origem nesse nodo.

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

2. Para o nodo de destino, 10, é necessário escolher exatamente um arco com destino nesse nodo.

$$-x_{8,10} - x_{9,10} = -1$$

Problema do caminho mais curto

3. Para os restantes nodos, o número de arcos escolhidos que têm origem num nodo tem de ser igual ao número de arcos escolhidos que têm destino nesse nodo.
   - **Exemplo:** analisando o nodo 2, se o arco 12 for escolhido para o caminho mais curto, então um dos arcos 25, 26 ou 27 terá de ser escolhido a seguir. Por outro lado, se o arco 12 não for escolhido, nenhum dos arcos 25, 26 ou 27 poderá ser escolhido. A restrição para o nodo 2 fica então igual a:

$$-x_{12} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 0.$$

   - De forma análoga, será definida uma restrição para cada um dos restantes nodos.
   - Finalmente, são declaradas as restrições de domínio:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A.$$

Problema do caminho mais curto

- Desta forma, o conjunto de restrições é dado por:

$$
\begin{align}
x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \tag{2}\\
-x_{12} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 0 \tag{3}\\
-x_{13} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 0 \tag{4}\\
-x_{14} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 0 \tag{5}\\
-x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{58} + x_{59} = 0 \tag{6}\\
-x_{26} - x_{36} - x_{46} + x_{68} + x_{69} = 0 \tag{7}\\
-x_{27} - x_{37} - x_{47} + x_{78} + x_{79} = 0 \tag{8}\\
-x_{58} - x_{68} - x_{78} + x_{8,10} = 0 \tag{9}\\
-x_{59} - x_{69} - x_{79} + x_{9,10} = 0 \tag{10}\\
-x_{8,10} - x_{9,10} = -1 \tag{11}\\
x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall ij \in A. \tag{12}
\end{align}
$$

Problema do caminho mais curto

- No Excel, o modelo será dividido em diferentes componentes: valor da função objetivo, matriz dos coeficientes, linha das variáveis de decisão (x_{ij}), linha dos comprimentos dos arcos (c_{ij}), lado esquerdo das restrições (Lhs) e lado direito (Rhs).

		Arcos																						
		12	13	14	25	26	27	35	36	37	45	46	47	58	59	68	69	78	79	8,10	9,10	Lhs		Rhs
Nodos	1	1	1	1																		0	=	1
	2	-1			1	1	1															0	=	0
	3		-1					1	1	1												0	=	0
	4			-1							1	1	1									0	=	0
	5				-1			-1			-1			1	1							0	=	0
	6					-1			-1			-1				1	1					0	=	0
	7						-1			-1			-1					1	1			0	=	0
	8													-1		-1		-1		1		0	=	0
	9														-1		-1		-1		1	0	=	0
	10																			-1	-1	0	=	-1
	x_ij																					Z		
	c_ij	2	4	3	7	4	6	3	2	4	4	1	5	1	4	6	3	3	3	3	4	0		

Dados do modelo no Excel.

Problema do caminho mais curto

- Para cada uma das restrições, define-se uma célula para o 1º membro (LHS - left-hand side) e outra para o 2º membro (RHS - right-hand side).
- **Exemplo:** Para a restrição $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$ 2, o LHS é igual a $x_{12} + x_{13} + x_{14}$ (**expressão**), e o RHS é igual a 1 (**constante**).
- A expressão $x_{12} + x_{13} + x_{14}$ pode ser obtida como o produto da linha dos coeficientes pela linha das variáveis de decisão:

$$[1, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0] \cdot [x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{25}, x_{26}, \ldots, x_{8,10}, x_{9,10}]^T =$$
$$[1 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 0 \cdot x_{25} + 0 \cdot x_{26} + \ldots + 0 \cdot x_{9,10}] =$$
$$[x_{12} + x_{13} + x_{14}]$$

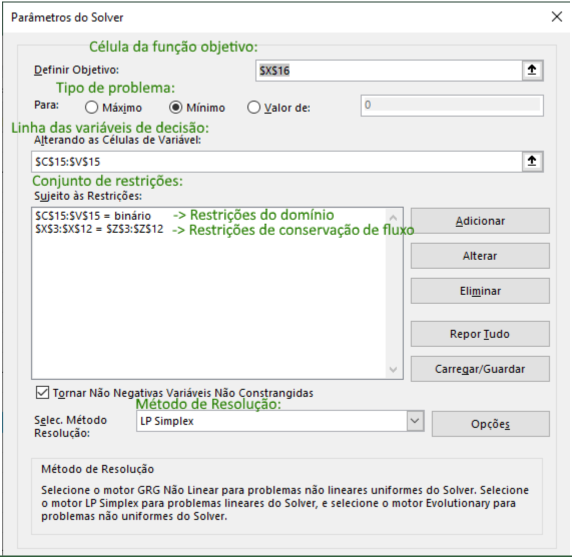
Problema do caminho mais curto

- No Excel, será usada a fórmula "SUMPRODUCT" (ou "SOMARPRODUTO", em português) para obter a mesma expressão.
- Por exemplo, a célula X3 vai conter a fórmula =SUMPRODUCT(C3:V3;$C$15:$V$15), correspondendo à "multiplicação" da 1ª linha da matriz dos coeficientes pela linha das variáveis de decisão.
- Assim, para obter o LHS de cada uma das restrições 2-11, é necessário determinar o SUMPRODUCT da linha de coeficientes apropriada pela linha das variáveis de decisão.
- **Nota:** as células das variáveis de decisão são deixadas em branco. É nestas células que será escrita a solução ótima.

Problema do caminho mais curto

- Analogamente, a função objetivo z é obtida como o SUMPRODUCT da linha dos comprimentos pela linha das variáveis de decisão: =SUMPRODUCT(C16:V16;C15:V15).
- Estando "declarado" o modelo numa folha de cálculo, este será resolvido através do *Solver* (encontra-se no separador "Data"; pode ser instalado através de "File > Options > Add-ins > Manage: Excel Add-ins (Go...) > Solver").

Problema do caminho mais curto



Problema do caminho mais curto

- A solução retornada pelo Solver é lida na linha das variáveis de decisão. Assim, uma solução ótima é o caminho 1-3-5-8-10, com distância 11.

		Arcos																						
		12	13	14	25	26	27	35	36	37	45	46	47	58	59	68	69	78	79	8,10	9,10	Lhs		Rhs
Nodos	1	1	1	1																		1	=	1
	2	-1			1	1	1															0	=	0
	3		-1					1	1	1												0	=	0
	4			-1							1	1	1									0	=	0
	5				-1			-1			-1			1	1							0	=	0
	6					-1			-1			-1				1	1					0	=	0
	7						-1			-1			-1					1	1			0	=	0
	8													-1		-1		-1		1		0	=	0
	9														-1		-1		-1		1	0	=	0
	10																			-1	-1	-1	=	-1
	x_ij	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	Z		
	c_ij	2	4	3	7	4	6	3	2	4	4	1	5	1	4	6	3	3	3	3	4	11		