Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 - $\boxed{\text{A}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

31 outubro 2018 Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que $C = AB$, tem-se $a = 2$, $b = 3$ e $c = 2$.

Como $AB = \begin{pmatrix} 1 & ac & 1 & -1 \\ 0 & c & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & ac & 2 & -1 \end{pmatrix}$, tem-se $C = AB \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 4 \\ c = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$.

b) A característica da matriz C é: 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Quando $c = 2$, a matriz com a forma em escada reduzida equivalente por linhas a B é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) O sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se a e b satisfizerem a condição $ab = -1$.

O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se car $A < 3$; mas

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & ab+1 \\ 0 & 0 & ab+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & ab+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, tem-se car $A < 3 \iff ab + 1 = 0 \iff ab = -1$.

2. Indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira ou falsa, apresentando uma pequena justificação.

a) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = i$, se $i \geq j$ e $a_{ij} = 0$, se $i < j$. Então, tem-se $\det A = n!$.

A afirmação é verdadeira, porque A é uma matriz triangular inferior (uma vez que $a_{ij} = 0$ para $i < j$) cujos elementos na diagonal são $a_{11} = 1, a_{22} = 2, \ldots, a_{nn} = n$; como o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal, tem-se $\det A = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

b) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$ e seja $M = -2(AB)^{-1}A^{\mathsf{T}}B$. Então, tem-se $\det M = -2$.

A afirmação é falsa porque

$$\begin{aligned}\det M &= \det(-2(AB)^{-1}A^{\mathsf{T}}B) = (-2)^3 \det((AB)^{-1}A^{\mathsf{T}}B) = -8\det((AB)^{-1})\det(A^{\mathsf{T}})\det B \\ &= -8\frac{1}{\det(AB)}\det A \det B = -8\frac{1}{\det A \det B}\det A \det B = -8 \neq -2.\end{aligned}$$

c) Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ $(m \geq 5)$ e B uma matriz de ordem $n \times p$. Se a primeira e quinta linhas de A são iguais, então também são iguais a primeira e quinta linhas de AB.

A afirmação é verdadeira, porque como sabemos, se $\ell_i(M)$ designar a linha i de uma matriz M, tem-se $\ell_i(AB) = \ell_i(A)B$ (ver slides das aulas, pg. 32); então, será $\ell_1(AB) = \ell_1(A)B = \ell_5(A)B = \ell_5(AB)$.

d) Se um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é possível e determinado, então tem-se sempre $\operatorname{car} A = m$.

A afirmação é falsa, porque , por exemplo, se considerarmos o sistema cuja matriz ampliada é $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$, tem-se $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ou seja, tem-se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 = n$ (número de incógnitas), o que mostra que o sistema é possível e determinado e, no entanto, $\operatorname{car} A \neq 3$ (sendo 3 o número de linhas de A).

3. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right)$.

a) O sistema tem uma única solução se e só se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 2$, sendo essa solução: $\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-2)(\alpha+1)}, -\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+1)}, \frac{1}{\alpha+1}\right)$.

b) O sistema é impossível se e só se $\alpha = -1$ ou $\alpha = 2$.

c) O sistema tem uma infinidade de soluções se e só se $\alpha = 1$; duas dessas soluções são: $(1, 0, 0)$ e $(-1, 1, 1)$.

d) A matriz simples do sistema é invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 2$.

- Se $\alpha - 2 \neq 0$ e $\alpha^2 - 1 \neq 0$, ou seja, se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$, tem-se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 3$ (número de incógnitas) e o sistema é possível e determinado. Tem-se, neste caso

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ (\alpha-2)y + z = 0 \\ (\alpha^2-1)z = \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ (\alpha-2)y + z = 0 \\ z = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ y = -\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \\ z = \frac{1}{\alpha+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \\ y = -\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \\ z = \frac{1}{\alpha+1} \end{cases}$$

- Quando $\alpha = 2$, tem-se
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Como car $A <$ car$(A|b)$, o sistema é impossível.
- Quando $\alpha = -1$, tem-se a seguinte matriz ampliada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$
Como car $A <$ car$(A|b)$, o sistema é impossível.
- Quando $\alpha = 1$, tem-se a seguinte matriz ampliada do sistema,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Como car $A =$ car$(A|b) = 2 < 3$ (onde 3 é o número de incógnitas), o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a 1. Neste caso, temos
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=1 \\ y=z \\ z \ \text{ arbitrário} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2z \\ y=z \\ z \ \text{ arbitrário} \end{cases},$$
pelo que é solução do sistema qualquer terno da forma $(1-2k, k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$; assim, duas possíveis soluções são: $(1, 0, 0)$ e $(-1, 1, 1)$.
- Os valores de α para os quais a matriz simples do sistema é invertível são aqueles para os quais o sistema admite uma e uma só solução; logo, essa matriz é invertível se e só se $\alpha \neq -1, \alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 2$.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o valor do determinante de A.

Temos
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Nota: Existem, naturalmente, muitos outros processos de cacular o valor de det A.

b) Sendo $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, justifique que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma só solução e, sem resolver o sistema, diga, justificando, se essa solução é $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Como det $A \neq 0$, podemos concluir que a matriz A é invertível, o que garante que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

Para verificar se $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ é ou não solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, teremos apenas de multiplicar a matriz A por $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ e verificar se o resultado é ou não igual a $\mathbf{b}$.

Como

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 4\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

concluímos que $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ é solução do sistema.

c) Justifique que A^T é invertível e calcule a terceira linha de $(A^\mathsf{T})^{-1}$.

Como $\det A^\mathsf{T} = \det A = -8 \neq 0$, podemos concluir que A^T é invertível.

Como $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$, é imediato concluir que os elementos que formam a terceira linha da matriz $(A^\mathsf{T})^{-1}$ são os que formam a terceira coluna da matriz A^{-1}, os quais, como sabemos, se podem obter resolvendo o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$, onde $\mathbf{e}_3$ designa a terceira coluna da matriz I_4. Resolvendo o sistema cuja matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

obtém-se que a sua solução é $\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\end{pmatrix}$, pelo que concluímos que a terceira linha de $(A^\mathsf{T})^{-1}$ é: $(\frac{3}{4}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{8}\ \frac{1}{8})$.

2. Calcule a expressão do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix}a+2 & a & a & a\\ b & b+2 & b & b\\ c & c & c+2 & c\\ d & d & d & d+2\end{vmatrix}.$$

Tem-se (justifique as passagens!)

$$\begin{vmatrix}a+2 & a & a & a\\ b & b+2 & b & b\\ c & c & c+2 & c\\ d & d & d & d+2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+b+c+d+2 & a+b+c+d+2 & a+b+c+d+2 & a+b+c+d+2\\ b & b+2 & b & b\\ c & c & c+2 & c\\ d & d & d & d+2\end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ b & b+2 & b & b\\ c & c & c+2 & c\\ d & d & d & d+2\end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 8(a+b+c+d+2).$$

3. Relembre que uma matriz X quadrada de ordem n se diz idempotente se $X^2 = X$.

a) Mostre que, se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz idempotente, então o mesmo sucede com a matriz $B = I_n - A$.
Temos

$$(I_n - A)^2 = (I_n - A)(I_n - A) = I_n I_n - AI_n - I_n A + AA = I_n - A - A + A^2 = I_n - 2A + A^2. \quad (1)$$

Sendo A idempotente, ou seja, sendo $A^2 = A$, vem, então

$$(I_n - A)^2 = I_n - 2A + A = I_n - A,$$

o que mostra que $B = I_n - A$ é idempotente.

b) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é tal que

$$A^2(I_n - A) = A(I_n - A)^2 = \mathbf{O}_n,$$

onde $\mathbf{O}_n$ designa a matriz nula de ordem n, então A é uma matriz idempotente.
Temos

$$A^2(I_n - A) = \mathbf{O}_n \Rightarrow A^2 - A^3 = \mathbf{O}_n \Rightarrow A^2 = A^3. \quad (2)$$

Por outro lado

$$A(I_n - A)^2 = \mathbf{O}_n \underset{\text{(usando (1))}}{\Rightarrow} A(I_n - 2A + A^2) = \mathbf{O}_n \Rightarrow A - 2A^2 + A^3 = \mathbf{O}_n \Rightarrow A = 2A^2 - A^3.$$

Como $A^2 = A^3$ (ver (2)), segue-se que $A = 2A^2 - A^2$, ou seja que $A = A^2$, o que mostra que A é idempotente.

Cotação: $\boxed{\text{I}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 4 valores ; **3.** 4 valores; $\boxed{\text{II}}$ - **1.** 4.5 valores; **2.** 1.5 valores; **3.** 2 valores.