Exercício 9.1 Considere α, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Mostre que:

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha\, dx = \alpha\,(b-a)$;   b) $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\,(b^2-a^2)$.

Exercício 9.2 Sem resolver o integral, mostre que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

Exercício 9.3 Sem efetuar cálculos, identifique o sinal de cada um dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3\, dx$;   b) $\displaystyle\int_0^\pi x\,\cos x\, dx$;   c) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

Exercício 9.4 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então existe $c \in \,]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exercício 9.5 Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida em $\mathbb{R}$ por:

a) $\displaystyle F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\, dt$;

b) $\displaystyle F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$;

c) $\displaystyle F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt$.

Exercício 9.6 Sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo, calcule f em cada um dos seguintes casos:

a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = x^2(1+x)$;   b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x^3 e^x - x^4$.

Exercício 9.7 Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\, dt.$$

Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que

$$P(0) = F(0),\ P'(0) = F'(0),\ P''(0) = F''(0).$$

Exercício 9.8 Calcule os integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2-2x^5)\, dx$;   c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x}+2)^2\, dx$;   d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\,\operatorname{sen}(x^2)\, dx$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;

f) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^\pi x \text{ sen } x\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^\pi (x+2)\cos x\,dx$;

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x\,dx$;

j) $\displaystyle\int_0^2 x^3\, e^{x^2}\,dx$;

k) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$;

l) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \text{arcsen } x\,dx$;

m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, onde
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se} \quad 1 < x \le 2; \end{cases}$$

n) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x\,|\,dx$;

o) $\displaystyle\int_{-3}^5 |x-1|\,dx$;

p) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$, onde
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1; \end{cases}$$

q) $\displaystyle\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\,dx$.

Exercício 9.9 Usando a substituição indicada, calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad x = \operatorname{sen} t$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx, \quad x = \operatorname{sen} t$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad t = \operatorname{sen} t$;

d) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx, \quad x = 3 \operatorname{sen} t$;

e) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad x = \operatorname{sh} t$;

f) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx, \quad t^2 = x-1$;

g) $\displaystyle\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad x = \frac{t^2-1}{2}$;

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx, \quad t = e^x$.

Exercício 9.10 Seja $a > 0$ e $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique que:

a) se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$;

b) se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.

Exercício 9.11 Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 3$, calcule:

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} f(2t)\,dt$; b) $\displaystyle\int_0^1 f(1-t)\,dt$; c) $\displaystyle\int_1^{3/2} f(3-2t)\,dt$.

Exercício 9.12 Usando a substituição $x = 2\operatorname{arctg} t$, calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$.

Exercício 9.13 Considere a seguinte definição de função logaritmo:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Nestas condições, usando a substituição $s = x\,t$, mostre que $\ln x + \ln y = \ln(xy)$