Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Álgebra Linear EI

MIEINF

Maria Irene Falcão :: Maria Joana Soares

2019/2020

1. MATRIZES

1.1 Conceitos básicos

Definição:

① Uma matriz é um quadro de números dispostos em m linhas e n colunas.

② Os $m \times n$ elementos contidos na matriz são chamados os elementos da matriz e representam-se entre parênteses curvos ou retos.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Definição:

① Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se de ordem m por n e escreve-se $m \times n$.

② Uma matriz diz-se real (complexa) se todos os seus elementos são números reais (complexos).

③ O conjunto das matrizes reais (complexas) de ordem $m \times n$ denota-se por $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$).

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real de ordem 3×4, i.e., $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Genericamente, uma matriz A de ordem $m \times n$ pode escrever-se como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou ainda (dependendo do contexto) $A = (a_{ij})$.

O elemento a_{ij} está na posição (linha i, coluna j) da matriz A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad a_{12} = 3 \qquad a_{33} = 6$$

- Qual a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ tal que $a_{ij} = i + j$?

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

① Se $m \neq n$, A diz-se uma matriz retangular.

② Se $m = n$, A diz-se uma matriz quadrada (de ordem n).

③ Se $m = 1$, A diz-se uma matriz linha.

④ Se $n = 1$, A diz-se uma matriz coluna.

Exemplo: As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \pi & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma matriz retangular de ordem 3×2, a matriz B é uma matriz quadrada de ordem 3×3 (ou simplesmente de ordem 3) e a matriz $\boldsymbol{x}$ é uma matriz linha.[1]

[1] As matrizes linha ou coluna, são usualmente representadas por letras minúsculas a negrito e os seus elementos são identificados usando apenas um índice.

Definição: Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem n.

1. A diagonal principal de A (ou os elementos diagonais de A ou a diagonal de A) são os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
2. A diagonal secundária de A são os elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 \\ -2 & \boxed{5} & 4 \\ 1 & 1 & \boxed{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & \boxed{0} \\ -2 & \boxed{5} & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal Diagonal secundária:

Definição: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ diz-se

① **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, i.e.,
$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

② **triangular superior** se todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, i.e.,
$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

③ **triangular inferior** se todos os elementos acima da diagonal são nulos, i.e.,
$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal — Triangular superior — Triangular inferior

Definição:

① Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se matriz nula. A matriz nula de ordem $m \times n$ é representada por $\mathbf{0}_{m\times n}$ ou simplesmente $\mathbf{0}$.

② Uma matriz diagonal de ordem n cujos elementos são todos iguais a 1 chama-se matriz identidade e representa-se por I_n ou simplesmente I.

$$\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes da mesma ordem. Diz-se que A é igual a B, se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

$A = B$

1.2 Operações com matrizes

Soma de matrizes

Se duas matrizes têm a mesma ordem, a sua soma é a matriz que se obtém adicionando os elementos homólogos das matrizes dadas.

Exemplo:

+ 1+2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. A **soma de A e B** é uma matriz $C = (c_{ij})$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

$$C = A + B$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. $A - B$ significa $A + (-B)$ sendo $-B = (-b_{ij})$.

Teorema: Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então:

1. $A + B = B + A$. *Comutatividade*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$. *Associatividade*
3. $A + \mathbf{0} = A$. *Elemento neutro*
4. $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$. *Elemento simétrico*

Demonstração: *Ao cuidado dos alunos*

Multiplicação escalar

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número (ou escalar). O produto de α por A é a matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\; j = 1, \ldots, n.$$

$$\boxed{C = \alpha\, A}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 4A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Teorema: Propriedades da multiplicação escalar

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β escalares.

① $(\alpha\,\beta)A = \alpha(\beta\,A)$. — *Associatividade mista*

② $(\alpha + \beta)A = \alpha\,A + \beta\,A$. — *Distributividade - adição escalares*

③ $\alpha(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$. — *Distributividade - adição matrizes*

④ $1\,A = A$. — *Elemento identidade*

⑤ $0\,A = \mathbf{0}$. — *Elemento absorvente*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos

Multiplicação de duas matrizes

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz de ordem $l \times n$. O **produto de A por B** é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\boxed{C = AB}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}_{m \times l} \begin{pmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}_{l \times n} = \begin{pmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

Exemplos (continuação)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 5} =$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & \square & 2 & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Teorema: Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam A, B e C matrizes e α um número. Então:

① $(AB)C = A(BC)$. *Associatividade*

② $A(B+C) = AB + AC$. *Distributividade à direita*

③ $(A+B)C = AC + BC$. *Distributividade à esquerda*

④ $\alpha(AB) = (\alpha\, A)B = A(\alpha\, B)$ *Associatividade mista*

⑤ $AI = IA = A$ *Elemento identidade*

⑥ $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$ *Elemento absorvente*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

donde se conclui:

- $AB \neq BA$;
- $AB = \mathbf{0}$ e $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$;
- $A \neq \mathbf{0}$ e $AB = AC$, com $B \neq C$.

1.3 Inversa de uma matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que A é uma matriz invertível,[2] se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$X\,A = A\,X = I_n.$$

A matriz X diz-se inversa de A.

Teorema: *Se A for invertível, a sua inversa é única.*

Demonstração: Suponhamos que X e Y são inversas de A, i.e., $X\,A = A\,X = I_n$ e $Y\,A = A\,Y = I_n$. Como

$$Y\,A\,X = Y(A\,X) = Y\,I_n = Y$$

$$Y\,A\,X = (Y\,A)X = I_n\,X = X,$$

conclui-se que $X = Y$.

A inversa de uma matriz A é denotada por A^{-1}.

[2] ou regular ou não singular

Exemplo: As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

satisfazem

$$X\,A = A\,X = I_3.$$

Assim, $X = A^{-1}$ (e $A = X^{-1}$), i.e., as matrizes A e X são invertíveis.

A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

não é invertível (Verifique!).

Teorema: *Sejam A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Então,*

① A^{-1} *é invertível, sendo* $(A^{-1})^{-1} = A$.

② $A\,B$ *é invertível, sendo* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração:

① *Imediato, por definição de inversa.*

② *Pretende-se mostrar que* $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.*Como*

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

o resultado fica provado.

1.4 Transposta e conjugada de uma matriz

Definição: Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente, diz-se a matriz transposta de A e representa-se por A^T.

A matriz $B = A^T$ é de ordem $n \times m$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

$B = A^T$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Teorema: *Sejam, A e B matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

① $(A^T)^T = A$,

② $(A+B)^T = A^T + B^T$,

③ $(\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$,

④ $(A\,B)^T = B^T\, A^T$,

⑤ *Se A é invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração:

①+②+③ *Ao cuidado dos alunos.*

④ *Se $A = (a_{ij})_{m\times l}$ e $B = (b_{ij})_{l\times n}$ então $(AB)^T = (c_{ij})_{n\times m}$ e $B^T A^T = (d_{ij})_{n\times m}$. Além disso,*

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = c_{ij}.$$

⑤ $(A^{-1})^T A^T \underset{④}{=} (AA^{-1})^T = I^T = I$. *Analogamente,* $A^T (A^{-1})^T = I$.

Definição: Seja A uma matriz quadrada.

- A diz-se simétrica se e só se $A^T = A$, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$.
- A diz-se antissimétrica se e só se $A^T = -A$, i.e., $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo:

$$\begin{array}{cccc}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{simétrica} & \text{não simétrica} & \text{não antissimétrica} & \text{antissimétrica}
\end{array}$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz obtida de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado diz-se a matriz conjugada de A e representa-se por $\overline{A}$.

A matriz $B = \overline{A}$ é de ordem $m \times n$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

$$\boxed{B = \overline{A}}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix}$ então $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -i & 3 \\ i & 1+i & 4 \end{pmatrix}$

Teorema: *Sejam A, B e C matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

1. $\overline{\overline{A}} = A$,
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$,
3. $\overline{\alpha\, A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$,
4. $\overline{A\, C} = \overline{A}\,\overline{C}$,
5. *Se A é invertível, então $\overline{A}$ é invertível e $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.*

Demonstração: *Ao cuidado dos alunos.*

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A transposta da matriz conjugada de A diz-se a matriz transconjugada de A e representa-se por A^*.

A matriz $B = A^*$ é de ordem $n \times m$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

$$\boxed{B = A^*}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix}$ então $A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & i \\ -i & 1+i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Teorema: *Sejam, A e B matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

1. $(A^*)^* = A$,
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$,
3. $(\alpha\, A)^T = \overline{\alpha}\, A^*$,
4. $(A\, B)^* = B^*\, A^*$,
5. *Se A é invertível, então A^* é invertível e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Demonstração: *Consequência imediata dos dois teoremas anteriores.*

Definição: Seja A uma matriz quadrada.

- A diz-se hermiteana ou hermítica se e só se $A^* = A$, i.e., $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
- A diz-se anti-hermiteana ou anti-hermítica se e só se $A^* = -A$, i.e., $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 2+i & 6 & 4 \\ 3-i & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2-i & 3+i \\ -2-i & 0 & 4 \\ -3+i & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

hermítica — anti-hermítica

1.5 Produto de matrizes fracionadas em blocos

Suponhamos que duas matrizes A e B estão "fracionadas" em blocos:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{array}\right),$$

e que:

- o número de "colunas de blocos" de A é igual ao número de "linhas de blocos" de B
- os blocos que formam cada linha de blocos têm todos o mesmo número de linhas
- os blocos que formam cada coluna de blocos têm todos o mesmo número de colunas
- o número de colunas de cada bloco A_{ik} é igual ao número de linhas de cada bloco B_{kj}.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ir} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{sr} \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1j} & \ldots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2j} & \ldots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rj} & \cdots & B_{rt} \end{array}\right)$$

O produto AB pode formar-se combinando os blocos exatamente da mesma forma como combinamos os escalares no produto usual.
Isto é, o bloco na posição (i, j) de AB é obtido usando a fórmula

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}.$$

Exemplo: Se A e B são as matrizes

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right),$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right),$$

então:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2C & C \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Consideremos o produto de duas matrizes $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$.

Fracionemos A nos m blocos que são as suas linhas $\mathbf{l}_1(A), \mathbf{l}_2(A), \dots, \mathbf{l}_m(A)$ e consideremos B como um só bloco. Tem-se, então:

$$AB = \left(\begin{array}{c} \mathbf{l}_1(A) \\ \hline \mathbf{l}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{l}_m(A) \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c} \mathbf{l}_1(A)\, B \\ \hline \mathbf{l}_2(A)\, B \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{l}_m(A)\, B \end{array}\right).$$

Se designarmos por $\mathbf{l}_1(AB), \dots, \mathbf{l}_m(AB)$ as m linhas de AB, vemos que

$$\mathbf{l}_i(AB) = \mathbf{l}_i(A)\, B,$$

ou seja, temos:

Para obtermos uma determinada linha i do produto AB, teremos apenas de multiplicar a linha i da matriz A pela matriz B, não sendo necessário calcular toda a matriz AB.

Se designarmos por $\mathbf{c}_1(B), \ldots, \mathbf{c}_n(B)$ as colunas da matriz B, tem-se

$$AB = A\big(\mathbf{c}_1(B) \mid \mathbf{c}_2(B) | \cdots \mid \mathbf{c}_n(B)\big) = \big(A\mathbf{c}_1(B) \mid A\mathbf{c}_2(B) \mid \cdots \mid A\mathbf{c}_n(B)\big)$$

ou seja, tem-se:

$$\mathbf{c}_j(AB) = A\,\mathbf{c}_j(B).$$

Assim:

Para obtermos uma dada coluna j da matriz produto AB, bastará multiplicar A pela coluna j de B.

Notação: Sendo A uma determinada matriz $m \times n$, usaremos a notação $\boldsymbol{a}_j$ (a letra minúscula correspondente à letra usada para a matriz, em negrito, indexada por j) para designar a sua j-ésima coluna. Assim,

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

será o fracionamento de A nas suas colunas (por simplicidade, dispensaremos o uso dos traços indicadores da partição)

Uma exceção à regra referida é o caso da matriz identidade de ordem n cujas colunas são, geralmente, designadas por $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, isto é,

$$I_n = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n)$$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Então o produto $A\boldsymbol{c}$ pode ser obtido do seguinte modo, usando o fracionamento de A nas suas n colunas e o fracionamento de $\boldsymbol{b}$ nas suas linhas (cada uma apenas com um elemento)

$$A\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n.$$

1.6 Operações elementares sobre as linhas/colunas de uma matriz

Definição: Uma operação elementar sobre uma linha (coluna) de uma matriz A é uma operação de um dos seguintes tipos:

OL$_1$ (OC$_1$): Troca de duas linhas (colunas).

$$L_i \leftrightarrow L_j \qquad (C_i \leftrightarrow C_j)$$

OL$_2$ (OC$_2$): Multiplicação de uma linha (coluna) por um número diferente de zero.

$$L_i \leftarrow \alpha L_i \qquad (C_i \leftarrow \alpha C_i)\ , \ \ \alpha \neq 0.$$

OL$_3$ (OC$_3$): Substituição de uma linha (coluna) pela sua soma com um múltiplo de outra linha (coluna).

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$$
$$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$$

Exemplos

① $$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\3&-1&3\\2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\leftarrow L_2+3L_1]{\mathbf{OL_3}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&5&0\\2&1&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+2L_1]{\mathbf{OL_3}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&5&0\\0&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_2]{\mathbf{OL_3}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B$$

② $$A\xrightarrow[C_1\leftrightarrow C_2]{\mathbf{OC_1}}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&3&3\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftarrow C_2-2C_1]{\mathbf{OC_3}}\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&5&3\\2&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-3C_1]{\mathbf{OC_3}}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&5&6\\2&-5&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftarrow -\frac{1}{5}C_2]{\mathbf{OC_2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&6\\2&1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3+6C_2]{\mathbf{OC_3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=C$$

Definição: Diz-se que A é uma matriz equivalente por linhas (por colunas) a uma matriz B, se esta matriz se pode obter a partir de A, através de um número finito de operações elementares sobre as linhas (colunas) de A. Neste caso, usa-se a notação

$$A \xrightarrow[linhas]{} B \qquad \left(A \xrightarrow[colunas]{} B\right)$$

Exemplo: Relativamente às matrizes A, B e C do exemplo anterior, tem-se

$$A \xrightarrow[linhas]{} B \quad \text{e} \quad A \xrightarrow[colunas]{} C$$

Facilmente se prova que (resultados análogos para colunas):

① $A \xrightarrow[linhas]{} A$

② Se $A \xrightarrow[linhas]{} B$ então $B \xrightarrow[linhas]{} A$

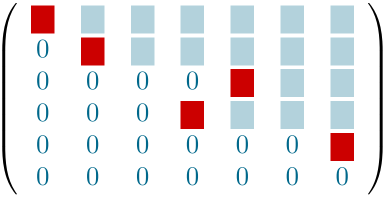
③ Se $A \xrightarrow[linhas]{} B$ e $B \xrightarrow[linhas]{} C$ então $A \xrightarrow[linhas]{} C$

Definição: O elemento a_{ik} de uma matriz $A = (a_{ij})$ diz-se um **pivô** se é o primeiro elemento não nulo da sua linha, i.e.,

$$a_{ik} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0,\ j = 1\ldots, k-1.$$

Uma linha nula não tem pivôs.

Exemplo:



elementos não nulos
pivôs

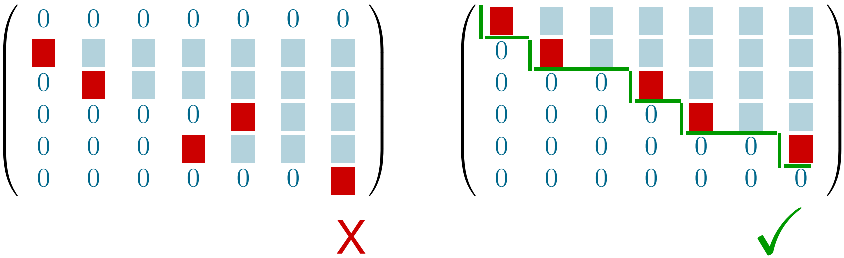
podem ser ou
não nulos

Definição: Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma **matriz em escada** ou tem a **forma em escada**, se:

① Não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.

② Se o pivô da linha i estiver na coluna k, então todos os elementos abaixo da posição i, nas colunas $1, \ldots, k$ são nulos.

Exemplo:



Teorema: *Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente, por linhas, a uma matriz em escada.*

Processo de redução de uma matriz A à forma em escada

Passo 1: Se A é a matriz nula ou uma matriz linha, então A está na forma em escada e o processo termina.

Passo 2: Por troca de linhas, se necessário, construímos uma matriz B cuja primeira linha tem um pivô ${b_{1k}}$[3] com índice de coluna mínimo.

$$A \xrightarrow{\mathbf{OL_1}} B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
k

[3]Note-se que tal pivô existe, dado que estamos a supor $A \neq \mathbf{0}$.

Passo 3: Adicionando múltiplos convenientes da linha 1 às linhas $2, \ldots, m$, anulamos todos os elementos da coluna k, situados abaixo da posição 1.

$$B \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i - \frac{b_{ik}}{b_{1k}} L_1]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \color{red}\blacksquare & \color{teal}\blacksquare & \cdots & \color{teal}\blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Passo 4: "Repetir" o processo, considerando as linhas $2, \ldots, m$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \color{red}\blacksquare & \color{teal}\blacksquare & \cdots & \color{teal}\blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Exemplo: Reduzir a matriz A à forma em escada.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 1: A não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2:

$$A \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{\mathbf{OL_1}} B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 3:

$$B \xrightarrow[\substack{L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftrightarrow L_5 - 2L_1}]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4: Vamos repetir o processo, considerando as linhas 2 a 5 da matriz C.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A'

Passo 1': A' não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2':

$$A \xrightarrow[linhas]{} B' = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3':

$$B' \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{\mathbf{OL_3}} C' = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4': Vamos repetir o processo, considerando as linhas 3 a 5 da matriz C'.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A''}$$

Passo 1": A'' não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2":

$$A \xrightarrow[linhas]{} C' \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3":

$$C'' = B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4': Vamos repetir o processo, considerando a linhas 4 e 5 da matriz C''.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'''$$

Passo 1"': A''' é uma matriz nula, logo C'' é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A.

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e seja E uma matriz em escada, equivalente por linhas a A. Chama-se característica de A ao número de linhas não nulas (número de pivôs) de E e denota-se por $\mathrm{car}(A)$.

Exemplo:

$$\mathrm{car}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{car}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Observação: Pode provar-se que se duas matrizes em escada E_1 e E_2 são equivalente por linhas a uma dada matriz A, então E_1 e E_2 têm necessariamente o mesmo numero de linhas não nulas.

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então $\mathrm{car}(A) \leq m$ e $\mathrm{car}(A) \leq n$.

Exercício: Qual é a característica das seguintes matrizes 3×3?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição: Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma matriz em escada reduzida ou que tem a forma em escada reduzida, se:

① A matriz é uma matriz em escada.

② Os pivôs são todos 1.

③ Os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{X} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{X} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{X} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

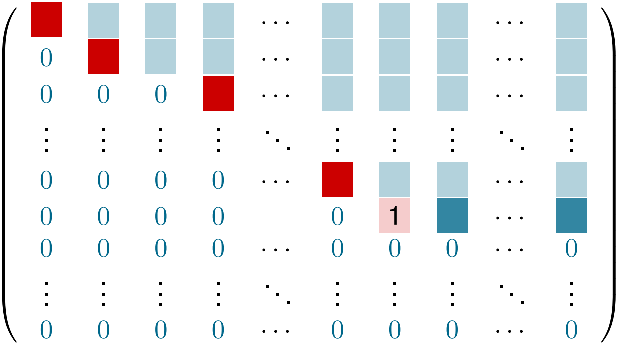
Teorema: *Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente, por linhas, a uma única matriz em escada reduzida.*

Processo de redução de uma matriz em escada, não nula, à forma em escada reduzida

$$A = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
\blacksquare & \square & \square & \square & \cdots & \square & \square & \square & \cdots & \square \\
0 & \blacksquare & \square & \square & \cdots & \square & \square & \square & \cdots & \square \\
0 & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \square & \square & \square & \cdots & \square \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \blacksquare & \square & \square & \cdots & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \blacksquare & \square & \cdots & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow l \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & & k & & & \end{array} &
\end{array}$$

Passo 1: Seja l a última linha não nula da matriz em escada A e seja a_{lk} o seu pivô. Se $a_{lk} \neq 1$, multiplicar a linha l por $\frac{1}{a_{lk}}$ (para que o pivô $a_l k$ seja =1). Se $l = 1$, o processo termina.

$$A \xrightarrow[L_l \leftarrow \frac{1}{a_{lk}} L_l]{\mathbf{OL_2}} B =$$



Passo 2: Adicionando múltiplos convenientes da linha l às linhas $1, \ldots, l-1$, anulamos todos os elementos da coluna k, situados acima da posição l.

$$B \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i - a_{ik} L_l]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3: "Repetir" o processo, considerando as linhas $1, \ldots, l-1$.

.

$$\begin{pmatrix}
 & & & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\
0 & & & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Exemplo: Reduzir a matriz (em escada) à forma em escada reduzida

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow[L_3\leftarrow\frac{1}{3}L_3]{\mathbf{OL_2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-6L_3\\ L_1\leftarrow L_1-L_3}]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2\leftarrow\frac{1}{1}L_2]{\mathbf{OL_2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_1\leftarrow L_1+L_2]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$