Folha 6

1. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^4$;

   (b) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$;

   (c) $f(x,y) = xy$;

   (d) $f(x,y) = x^2y^2$.

b. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$. Observamos que f é de classe C^1 porque é polinomial.

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-2x, -2y)$. $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Portanto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

Temos que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow 2 - x^2 - y^2 \leq 2$

Como $f(0,0) = 2 \geq f(x,y)$ então $(0,0)$ é maximizante (global) e $f(0,0) = 2$ é máximo de f.

c. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Observamos que f é de classe C^1 porque é polinomial.

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)$. $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Portanto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f. Vejamos que se trata de um ponto de sela.

Seja $\varepsilon > 0$. Consideramos o ponto $\left(\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right)$, então $\left(\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right) \in B((0,0), \varepsilon)$ e

$f\left(\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right) = \varepsilon/4 > 0 = f(0,0)$. Considerando agora o ponto $\left(-\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right)$, então

$\left(-\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right) \in B((0,0), \varepsilon)$ e $f\left(-\sqrt{\varepsilon}/2, \sqrt{\varepsilon}/2\right) = -\varepsilon/4 < 0 = f(0,0)$.

De forma mais informal: existem pontos arbitrariamente próximos de $(0,0)$ cuja imagem é positiva e também pontos cuja imagem é negativa.

Portanto, $(0,0)$ não é maximizante nem minimizante, logo é ponto de sela.

3. Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto de sela:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$;

(b) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$;

(c) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

(d) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$;

(e) $f(x,y) = y + x \operatorname{sen} y$;

(f) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

(g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$;

(h) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

c: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Observamos que f é de classe C^2 porque é polinomial.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(6x^2 + y^2 + 10x,\ 2xy + 2y\right)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+y^2+10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 6x^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x(3x+5) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto f tem 4 pontos críticos: $(0,0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1,2)$ e $(-1,-2)$.

Para classificar os pontos críticos vamos recorrer à matriz Hessiana de f.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ valores próprios: $\lambda_1 = 12 > 0$ e $\lambda_2 = 2 > 0$

Logo $(0,0)$ é minimizante e $f(0,0) = 0$ é mínimo.

$$Hf(-5/3, 0) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$ valores próprios: $\lambda_1 = -10 < 0$ e $\lambda_2 = -4/3 < 0$

Logo $(-5/3, 0)$ é maximizante e $f(-5/3, 0) = \left(\frac{5}{3}\right)^3$ é máximo.

$$Hf(-1,2) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(Hf(-1,2)) = -16 < 0$$

Logo $(-1,2)$ é ponto de sela.

$$Hf(-1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(Hf(-1,-2)) = -16 < 0$$

Logo $(-1,-2)$ é ponto de sela.

f. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ que é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Observamos que f é a soma de um polinómios e de dois quocientes de polinómios logo f é uma função de classe C^2.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\right).$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y^4 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \underset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y^3 = 1 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

O ponto $(1,1)$ é o único ponto crítico de f.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Menores principais: $M_1 = 2 > 0 \quad M_2 = 3 > 0$

Logo $(1,1)$ é minimizante e $f(1,1) = 3$ é mínimo.

h. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$. Observamos que f é de classe C^2 por se tratar da composta da função exponencial com um polinómio.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 2e^{x^2+y^2+z^2}(x,y,z).$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$$

Portanto, $(0,0,0)$ é o único ponto crítico de f.

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = e^{x^2+y^2+z^2} \begin{bmatrix} 2+4x^2 & 4xy & 4xz \\ 4xy & 2+4y^2 & 4yz \\ 4xz & 4yz & 2+4z^2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 > 0$

Logo $(0,0,0)$ é minimizante e $f(0,0,0) = 1$ é mínimo.

4. Para cada uma das funções f que verificam as condições enunciadas, classifique o ponto crítico (x_0, y_0) ou indique que as informações prestadas são insuficientes para essa classificação:

(a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$;

(b) $f_{xx}(x_0, y_0) = -3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 2$;

(c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$;

(d) $f_{xx}(x_0, y_0) = 25$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$.

Usamos a notação $M_1 = f_{xx}(x_0,y_0)$ e $M_2 = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$.

a. Como $M_2 = 0$ nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico (x_0,y_0).

b. Como $M_1 = -3$ e $M_2 = 20$, podemos concluir que o ponto crítico (x_0,y_0) é maximizante (local) e $f(x_0,y_0)$ é máximo (local).