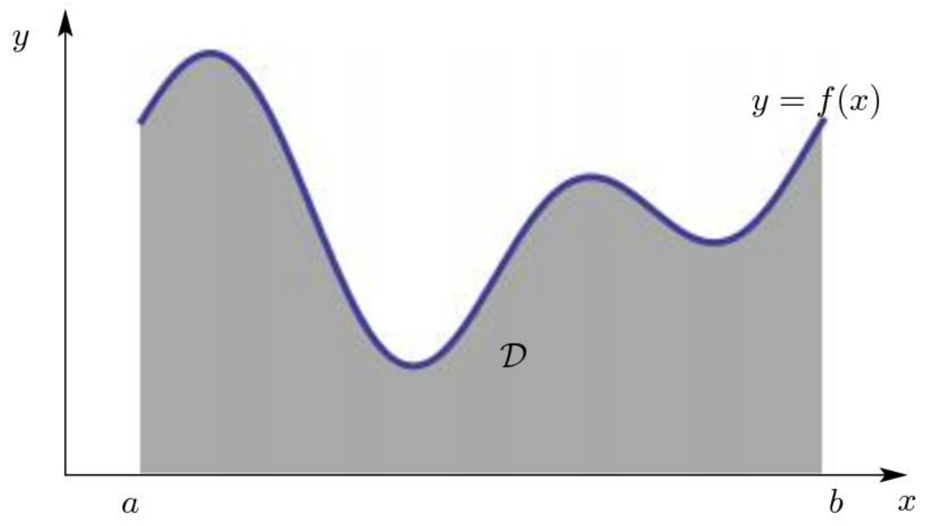
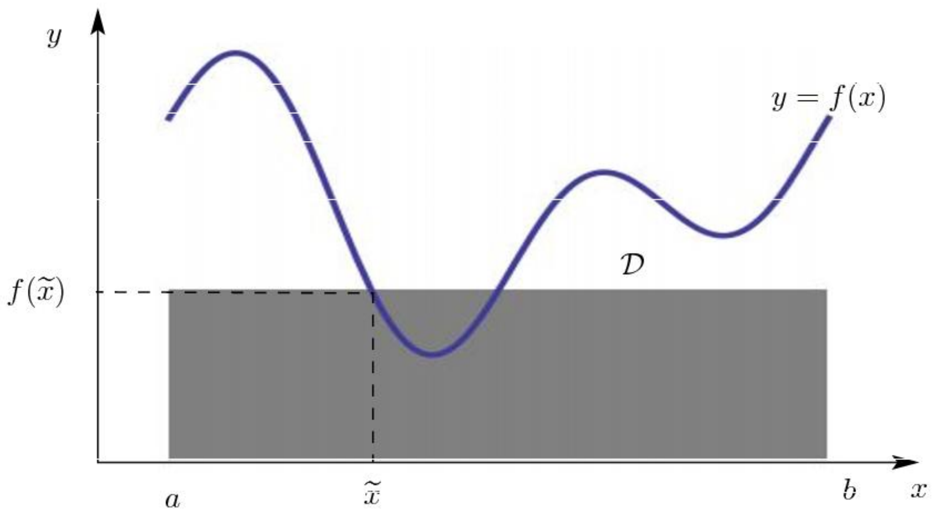
2.2 Integral de Riemann e aplicações

Motivação

Calcular a área sob o gráfico da função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$.



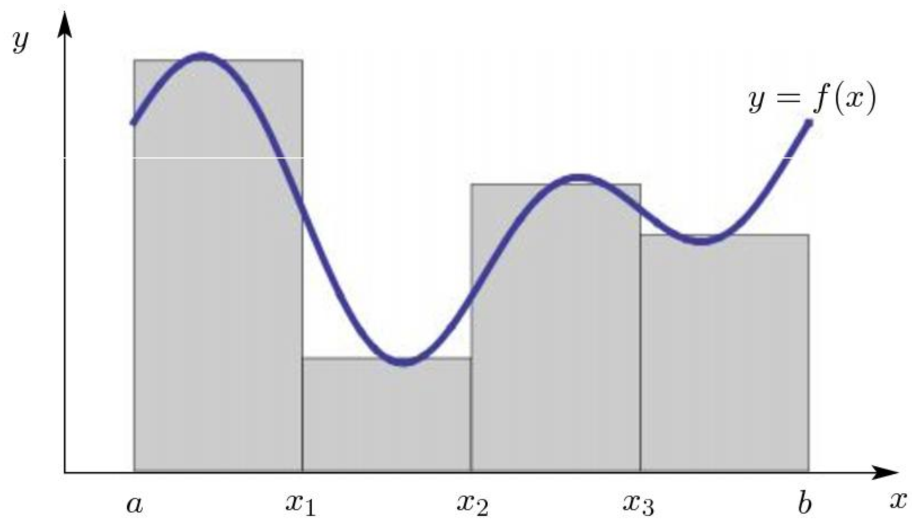
Uma aproximação para a área de $\mathcal{D}$ é, por exemplo, a área do retângulo cuja base mede $b - a$ e cuja altura mede $f(\widetilde{x})$, sendo $\widetilde{x}$ um qualquer ponto de $[a, b]$



Neste caso

$$\text{área do retângulo} = f(\widetilde{x})(b - a)$$

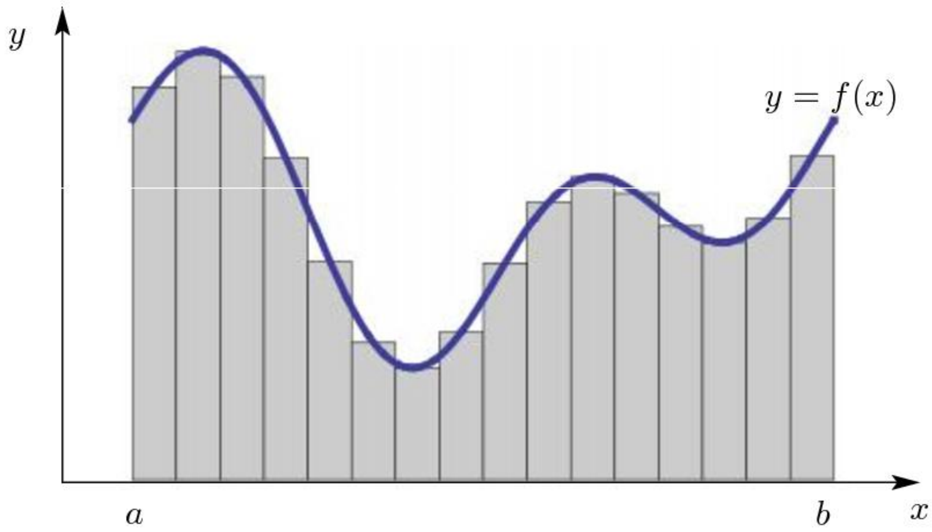
A aproximação anterior pode ser significativamente melhorada, por exemplo



A área a sombreado é,

$$f(\widetilde{x_0})(x_1 - a) + f(\widetilde{x_1})(x_2 - x_1) + f(\widetilde{x_2})(x_3 - x_2) + f(\widetilde{x_3})(b - x_3)$$

Uma outra (ainda melhor) aproximação à área de $\mathcal{D}$ é



A área a sombreado é, agora,

$$f(\widetilde{x_0})(x_1-a)+f(\widetilde{x_1})(x_2-x_1)+\cdots+f(\widetilde{x_{14}})(x_{15}-x_{14})+f(\widetilde{x_{15}})(b-x_{15})$$

Integral de Riemann: definição

Seja $f\ :\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função limitada.

- Considere-se uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a,b]$, isto é uma subdivisão do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_k,x_{k+1}]$ cuja reunião é $[a,b]$ e cujos extremos $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n$ tais que

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

- Chama-se soma de Riemann de f no intervalo $[a,b]$ para $\mathcal{P}$ a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,(x_{k+1}-x_k)$$

onde cada $\widetilde{x_k}$ é escolhido arbitrariamente em $[x_k,x_{k+1}]$ ou

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\,x_{k+1}, \qquad \text{onde} \quad \Delta\,x_{k+1}=x_{k+1}-x_k\,.$$

- [Função integrável] Diz-se que f é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[a,b]$ quando existe

$$I = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\, \Delta\, x_{k+1}$$

para toda a escolha dos pontos $\widetilde{x_0}$, $\widetilde{x_1}$,..., $\widetilde{x}_{n-1}$.

  - A I chama-se integral definido de f em $[a,b]$ e representa-se

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

  - Observe-se que $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$.

Terminologia

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

- $[a,b]$ é o intervalo de integração;
- a e b são, respetivamente, o limite inferior e o limite superior de integração;
- f é a função integranda;
- x é a variável de integração;
- I é a medida da área da região do plano limitada pelo eixo dos x, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o gráfico da função f quando $f \geq 0$.

- [Definição alternativa]
  - Em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ de $\mathcal{P}$ a função f admite um supremo M_k e um ínfimo m_k .
  - Chama-se soma superior de f para $\mathcal{P}$ ao número

$$U_f(\mathcal{P}) = M_0\,\Delta x_1 + M_1\,\Delta x_2 + \cdots + M_{n-1}\,\Delta x_n$$

  - Chama-se soma inferior de f para $\mathcal{P}$ ao número

$$L_f(\mathcal{P}) = m_0\,\Delta x_1 + m_1\,\Delta x_2 + \cdots + m_{n-1}\,\Delta x_n$$

  - Prova-se que existe um único número real I que, para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ satisfaz a desigualdade

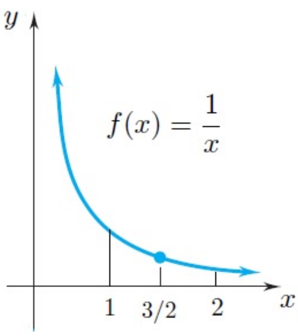
$$L_f(\mathcal{P}) \le I \le U_f(\mathcal{P})$$

  - Este número real define-se como sendo o integral definido de f em $[a, b]$.

Exemplo

1. Seja $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $\mathcal{P} = \{1, 3/2, 2\}$ uma partição de $[1, 2]$ tem-se
   - $U_f(\mathcal{P}) = f(1)\Delta x_1 + f(\frac{3}{2})\Delta x_2 = \frac{5}{6}$
   - $L_f(\mathcal{P}) = f(\frac{3}{2})\Delta x_1 + f(2)\Delta x_2 = \frac{7}{12}$

   Assim, $\dfrac{7}{12} \le I \le \dfrac{5}{6}$.



2. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha\,(b - a).$$

Propriedades do integral definido

1. Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$.

   Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathbf{c}} f(x)\,dx + \int_{\mathbf{c}}^b f(x)\,dx.$$

- Por convenção
  - $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0,$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
  - $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,,$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x),\ \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

3. Se f é integrável em $[a, b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

4. Se f é limitada em $[a,b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a,b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a,b]$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

5. Se f é integrável em $[a,b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a,b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. [Caracterização das funções integráveis]

   Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f é

   - contínua então f é integrável em $[a,b]$;
   - é monótona então f é integrável em $[a,b]$;
   - é limitada possuindo apenas um número finito de pontos de descontinuidade então f é integrável em $[a,b]$.

Exemplos

1. A função de Dirichlet $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

embora limitada em $\mathbb{R}$ não é integrável em algum $[a, b]$.

2. A função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

possui um número infinito de pontos de descontinuidade (todos os pontos da forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$). No entanto f é integrável por ser monótona.

Observação

- A função f não ser integrável em $[a, b]$ não implica que $|f|$ não seja integrável nesse intervalo.

Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

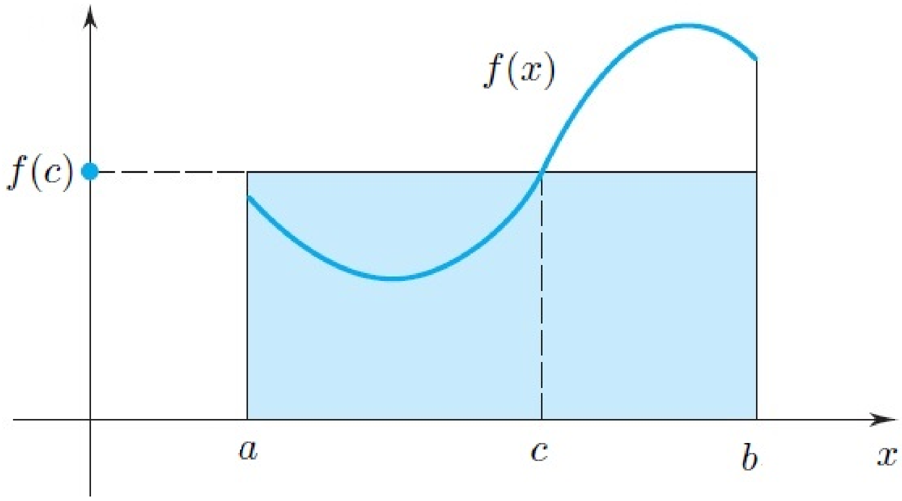
não é integrável em nenhum intervalo, contudo $|f|$ é integrável em qualquer intervalo.

Teoremas clássicos do cálculo integral

- [Teorema do valor médio do cálculo integral]

  Seja f contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(c)(b-a).$$



- [Teorema fundamental do cálculo]

  Seja $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

  1) A função $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

  é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

  2) (Fórmula de Barrow) Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(t)\;dt = F(t)\Big|_a^b \overset{def}{=} F(b) - F(a).$$

Exemplo

1. Calcular F' quando $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt\,.$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx.$

► [Consequências do TFC: derivação sob o sinal de integral]

Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ derivável.

- Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\varphi(x))\,.$$

- Pelo teorema da derivação da função composta vem

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$

- Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$

- [Caso geral]

  Sendo $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ funções deriváveis, tem-se

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,.$$

  Basta notar que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

  e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.

Exemplo

1. Calcular $G'(x)$ quando $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\,dt.$

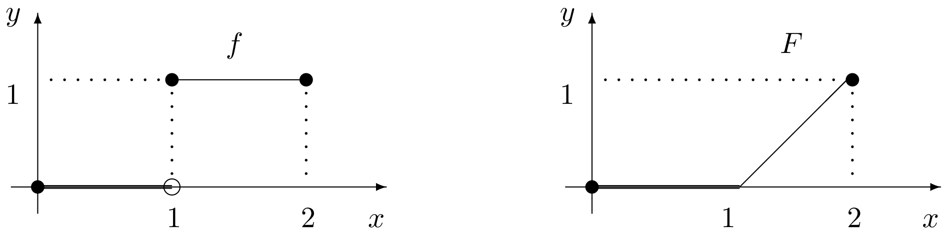
Observação

- A função
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
em geral possuí melhores propriedades do que f.

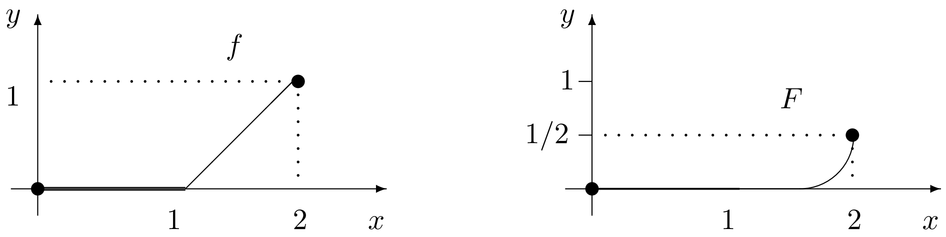
  Em particular, mostra-se que
  - F é contínua em $[a,b]$;
  - Se f é contínua em $[a,b]$ então F é derivável em $[a,b]$.

Exemplos

1. f é limitada e possui uma descontinuidade (logo é integrável). F é limitada e contínua (logo é também integrável).



2. f é contínua, logo é integrável, mas não é derivável. F é contínua e derivável (logo, é também integrável).



Observação

- Pela fórmula de Barrow, o integral definido de f é calculado à custa da primitiva da função.
  - Contudo, há funções integráveis em $[a, b]$ que não são primitiváveis neste intervalo.

    Exemplo: Função de Heaveside.

  - Há funções primitiváveis em $[a, b]$ mas não integráveis neste intervalo.

    Exemplo: A função

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x\,\text{sen}(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x^2}), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é primitivável em $[0, 1]$ com $F(x) = x^2\,\text{sen}(\frac{1}{x^2}) + \mathcal{C}, x > 0$ e $F(0) = 0$ mas não é integrável em nenhum intervalo que contenha zero pois, aí, não é uma função limitada .

Métodos de integração

- Integração por decomposição
- Integração imediata
- Integração por partes
- Integração por substituição

[Integração por decomposição]

Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\alpha\,, \beta\, \in \mathbb{R}$ constantes.
Então

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

- Exemplo
  $$\int_0^\pi \left[\sqrt{2}\, x^2 + 2\, \operatorname{sen} x\right] dx$$

[Integração imediata]

Sejam funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida.
Então

$$\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_a^b [g(f(x))]'\, dx = g(f(b)) - g(f(a)).$$

- Exemplo
  $$\int_{\pi/4}^\pi \cos x\, (\operatorname{sen} x)^3\, dx$$

▶ [Integração por partes]

Sejam funções $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathscr{C}^1$. Então

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

- Exemplo
$$\int_0^\pi x\, \cos x\, dx$$

▶ [Integração por substituição]

Sejam $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo, $f : I \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathscr{C}^1$ e $\alpha, \beta \in I$ tais que

$$f(\alpha) = a \qquad \text{e} \qquad f(\beta) = b.$$

Então
$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(f(t))\, f'(t)\, dt.$$

- O método de integração por substituição também é referido como método de integração por mudança de variáveis.

Exemplo

1. Calcular $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ fazendo $x = 3\,\operatorname{sen} t$.

Aqui g é a função $g : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{9-x^2}$. Considere-se

$$f\ :\ [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,3] \qquad \text{dada por} \qquad f(t) = 3\,\operatorname{sen} t.$$

A função $f \in \mathscr{C}^1$, $f'(t) = 3\,\cos t$, $f(0) = 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 3$. Além disso,

$$g(f(t)) = \sqrt{9 - 9\,\operatorname{sen}^2 t} = 3\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = 3\,\sqrt{\cos^2 t} = 3\,|\cos t| = 3\,\cos t$$

pois $t \in [0, \pi/2]$. Então,

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} g(f(t))\,f'(t)dt = \int_0^{\pi/2} 9\,\cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} 1+\cos(2t)\,dt$$
$$= \frac{9}{2}\left[t + \frac{1}{2}\,\operatorname{sen}(2t)\right|_0^{\pi/2} = \frac{9}{4}\pi\,.$$

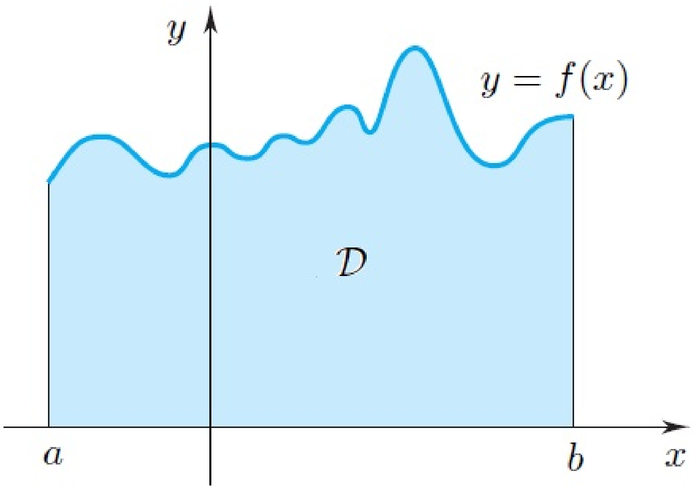
Aplicações

- Cálculo de áreas de domínios planos
- Cálculo do comprimento de uma curva plana

Cálculo de áreas

- Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$ então a medida da área da região sob o gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$ e a acima do eixo das ordenadas é determinada por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



- [Problema] Sejam f e g funções contínuas em $[a,b]$ e

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Então se

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

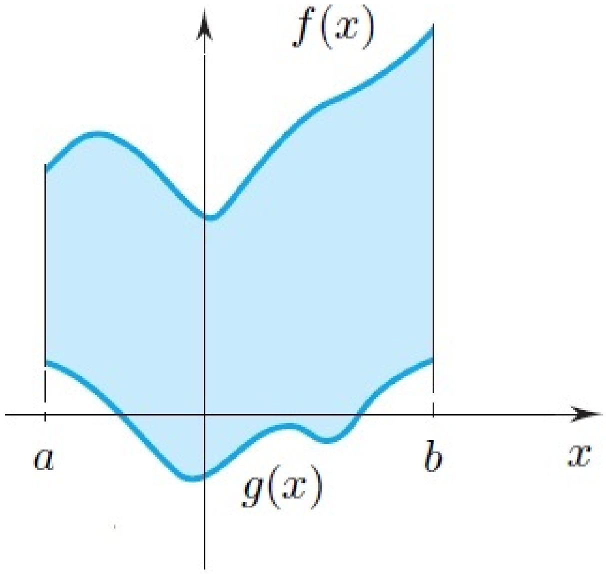
a medida da área, A, da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e lateralmente por entre $x = a$ e $x = b$ é

$$\begin{aligned} A &= \text{“área abaixo de } f\text{”} - \text{“área abaixo de } g\text{”} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx. \end{aligned}$$

Observação

- A fórmula anterior estende-se aos casos em que f e g não são necessariamente positivas desde que

$$f(x) \geq g(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$



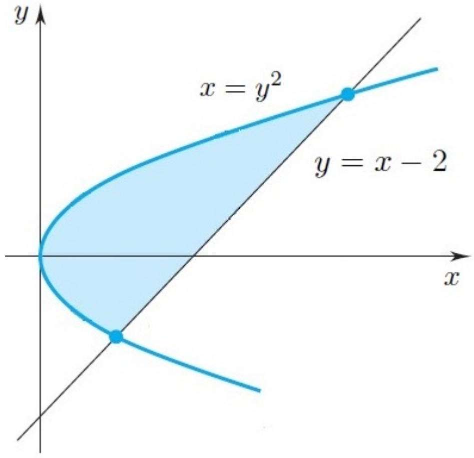
Exemplo

1. Calcular a medida da área da região limitada pelas curvas seno e cosseno quando x está entre 0 e $\dfrac{\pi}{4}$.

Observação

1. Quando a região é menos simples, é possível encontrar alguns entraves.

Exemplo: Qual a medida da área limitada na figura?



2. Se a região for limitada por curvas definidas por

$$x = w(y), \qquad x = v(y), \qquad \text{com} \quad y \in [c, d]$$

procede-se de modo idêntico ao exposto anteriormente trocando os papéis de x e y.

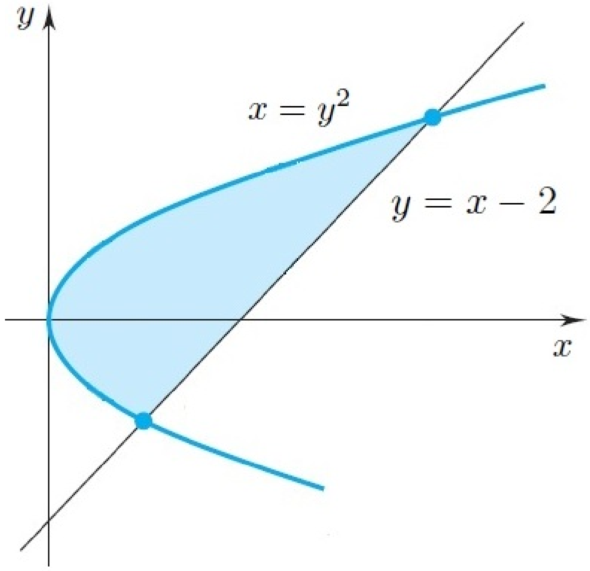
3. A escolha entre usar um integral em ordem a x ou um integral em ordem a y é ditada pela forma da região de integração.

Deve-se optar

- pelo integral que requer menos seccionamentos
- pelo integral que apresente a primitivação mais simples

Exemplo

1. Calcular a medida da área da região limitada curvas definidas por $y^2 = x$ e $y = x - 2$.

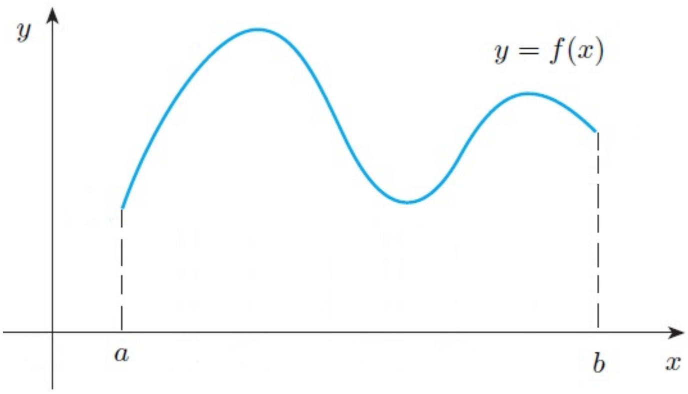


Comprimento de curvas planas

- Seja f uma função definida e derivável no intervalo $[a, b]$.
  - Qual o comprimento da curva definida por

$$y = f(x)$$

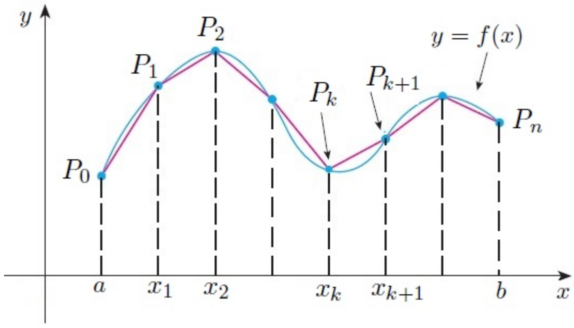
entre $x = a$ e $x = b$.



Sejam

- f de classe $\mathscr{C}^1$ em $[a, b]$;
- $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- P_k o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k))$$

- A medida do comprimento da linha poligonal definida pelos pontos P_k é a soma da medida dos comprimentos dos segmentos de reta $\overline{P_k P_{k+1}}$, isto é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange (Cap. 1.5), existe $\widetilde{x_k} \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)$$

pelo que

$$\begin{aligned}[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1} - x_k]^2 + [f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1} - x_k)^2 \left(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2\right).\end{aligned}$$

- Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 (1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2}\ (x_{k+1} - x_k)\end{aligned}$$

- Mas
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\widetilde{x_k}))^2}\ (x_{k+1}-x_k)$$
é a soma de Riemann para a função
$$g(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

- A função $g(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ é contínua logo integrável.

- Fazendo $n\to\infty$, a medida do comprimento da linha poligonal (soma de Riemann) tende para a medida do comprimento da curva (integral).

- [Comprimento de uma curva] Seja f de classe $\mathscr{C}^1$ em $[a,b]$.

  A medida, L, do comprimento da curva definida pelo gráfico de f do ponto $(a,f(a))$ ao ponto $(b,f(b))$ é dado por
$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Exemplo

1. Calcular a medida do comprimento da curva

$$f(x) = (x-1)^{3/2} \qquad \text{quando} \quad x \in [1,2]$$

Tem-se

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}.$$

Com $x - 1 > 0$ para $x \in [1,2]$ vem

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x-1}\right]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}$$

Assim,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, d = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{18}\frac{2}{3}(9x-5)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$