Cap 3 : Propriedades da diferencial e da matriz jacobiana

Exercícios pag 51

① Neste exemplo $h = f \circ g$ onde $g(x,y,z) = (xz, xy)$ e
$f(u,v) = u^2 + v$

Tem-se

- f é uma função Real e
$$\nabla f(u,v) = (2u, 1)$$

pelo que
$$\nabla f(g(x,y,z)) = \nabla f(\underbrace{xz}_{u}, \underbrace{xy}_{v}) = (2xz, 1)$$

- g é uma função vetorial e
$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xz)}{\partial x} & \frac{\partial(xz)}{\partial y} & \frac{\partial(xz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(xy)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial y} & \frac{\partial(xy)}{\partial z} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Da Regra da cadeia
$$\nabla h(x,y,z) = \nabla f(g(x,y,z)) \cdot Jg(x,y,z)$$
$$= (2xz, 1) \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$
$$= (2xz^2 + y, x, 2x^2 z)$$

② Neste exemplo

$u(x,y) = xy$ $\qquad$ $w(x,y) = e^x$ $\qquad$ e

$v(x,y) = x + y$ $\qquad$ $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z$

E
$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)).$$

Observe-se que escrevendo $f(u,v,w) = u^2 v + v^2 w$.

A função h pode ser descrita como

$$h(x,y) = f(g(x,y))$$

onde $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma função (vetorial) auxiliar definida por

$$g(x,y) = (u(x,y),\ v(x,y),\ w(x,y))$$
$$= (xy,\ x+y,\ e^x)$$

Isto é $h = f \circ g$ e pela regra da cadeia

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(g(x,y))\, \mathcal{J}g(x,y).$$

Ora

- f é uma função real e

$$\nabla f(u,v,w) = (2uv,\ w^2+2vw,\ v^2)$$

pelo que

$$\nabla f(g(x,y)) = \nabla f(\underbrace{xy}_{u},\ \underbrace{x+y}_{v},\ \underbrace{e^x}_{w})$$

$$= (2xy(x+y),\ (xy)^2 + 2(x+y)e^x,\ (x+y)^2)$$

- g é uma função vetorial e

$$\mathcal{J}g(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Assim

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(g(x,y)) \cdot \mathcal{J}g(x,y)$$

$$= (2xy(x+y),\ (xy)^2 + 2(x+y)e^x,\ (x+y)^2) \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy^2(x+y) + (xy)^2 + 2(x+y)e^x + (x+y)^2 e^x \\ 2x^2y(x+y) + (xy)^2 + 2(x+y)e^x \end{pmatrix}^T$$

obs: Por uma questão de falta de espaço, é apresentado ∇h^T (transposto do vetor gradiente) em vez de ∇f.

③ $f(x,y,z) = x^2y - xz \quad , a \in \mathbb{R}$

a) $df(1,0,0)(1,2,2)$

A funç f é uma funç real diferenciável logo a diferencial de f, df, é definida para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$

$$df(x,y,z)(v) = \nabla f(x,y,z) \cdot v \qquad \text{cf cap 3.2}$$

Ora

$$\nabla f(x,y,z) = (2xy - z \; , \; x^2 \; , \; -x)$$

e

$$\nabla f(1,0,0) = (0 \; , \; 1 \; , \; -1)$$

pelo que

$$df(1,0,0)(1,2,2) = \nabla f(1,0,0) \cdot (1,2,2)$$
$$= (0,1,-1)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$$

b) $g(t) = f(at^2, at, t^3)$

A funç g pode ser escrita como

$$g(t) = f(h(t))$$

onde $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma função vetorial diferenciável definida por

$$h(t) = (at^2, at, t^3).$$

Então, pela Regra da cadeia

$$dg(t) = df(h(t)) \circ dh(t).$$

Ora

- f é uma funç real pelo que $df \leftrightarrow \nabla f$ onde
$$\nabla f(x,y,z) = (2xy - z \; , \; x^2 \; , \; -x) \quad \text{por a)}$$

pelo que

$$\nabla f(h(t)) = \nabla f(\underbrace{at^2}_{x}, \underbrace{at}_{y}, \underbrace{t^3}_{z})$$
$$= \left(2a^2t^3 - t^3 \; , \; (at^2)^2 \; , \; -at^2\right)$$

- h é uma funç vetorial pelo que $dh \leftrightarrow Jh$ e
$$Jh(t) = \begin{pmatrix} 2at \\ a \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

T2.2

Assim,

$$g'(t) = \nabla f(h(t))\, \nabla h(t)$$
$$= (2at^3 \cdot t^3,\ a^2t^4,\ -at^2) \begin{pmatrix} 2at \\ a \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$
$$= 4a^2t^4 - 2at^4 + a^3t^4 - 3at^4$$
$$= (4a^2 - 5a + a^3)\, t^4$$

Para que $g'(t)=0$ para todo o t deve-se ter

$$4a^2 - 5a + a^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a[4a - 5 + a^2] = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a^2 + 4a - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = 1 \ \vee\ a = -5.$$

Observe-se que g é uma função real de variável real logo a sua derivada é a "derivada usual" de Cálculo (cf pag 46 e 47 dos apontamentos).

4. $\frac{\partial w}{\partial p}$ $\frac{\partial w}{\partial q}$ $w = r^2 + s^2$ $r = pq^2$ $s = p^2 \operatorname{sen} q$.

Note-se que este exercício está posto numa forma diferente dos exemplos da pág 51. Vamos resolver este exercício por 2 processos diferentes

1.º Processo

Como $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2$ $s = p^2 \operatorname{sen} q$ pode-se escrever

$$w \equiv w(p,q) = (pq^2)^2 + (p^2 \operatorname{sen} q)^2$$
$$= p^2q^4 + p^4 \operatorname{sen}^2 q$$

Logo

$$\frac{\partial w}{\partial p}(p,q) = \frac{\partial}{\partial p}\left[p^2q^4 + p^4 \operatorname{sen}^2 q\right] = 2pq^4 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial q}(p,q) = \frac{\partial}{\partial q}\left[p^2q^4 + p^4 \operatorname{sen}^2 q\right] = 4p^2q^3 + 2p^4 \cos q \operatorname{sen} q.$$

2º Processo cf pag 48

Considerem-se as funções

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(r,s) = r^2 + s^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g(p,q) = (p q^2, p^2 \operatorname{sen} q)$$

Nestas condições pode-se considerar

$$w = f \circ g$$

pelo que, da regra da cadeia vem

$$\nabla w(p,q) = \nabla f(g(p,q))\, Jg(p,q)$$

Ora

- $\nabla f(r,s) = (2r \quad 2s)$

$$\nabla f(g(p,q)) = \nabla f(pq^2, p^2 \operatorname{sen} q)$$

$$= (2pq^2, 2p^2 \operatorname{sen} q)$$

e

- $Jg(p,q) = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq \\ 2p \operatorname{sen} q & p^2 \cos q \end{pmatrix}$

pelo que

$$\nabla w(p,q) = \nabla f(g(p,q))\, Jg(p,q)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial p}, \frac{\partial w}{\partial q}\right) = (2pq^2, 2p^2 \operatorname{sen} q) \begin{pmatrix} q^2 & 2pq \\ 2p \operatorname{sen} q & p^2 \cos q \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial p}, \frac{\partial w}{\partial q}\right) = \begin{pmatrix} 2pq^4 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q \\ 4p^2 q^3 + 2p^4 \cos q \operatorname{sen} q \end{pmatrix}$$

Isto é

$$\frac{\partial w}{\partial p}(p,q) = 2pq^4 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q$$

$$\frac{\partial w}{\partial q}(p,q) = 4p^2 q^3 + 2p^4 \cos q \operatorname{sen} q$$

tal como obtido pelo 1º processo.

Exercício 2 pag 58

5 $x^2 + xy + y^2 = 3$

a) A curva dada pode ser vista como a curva de nível 3 de uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

isto é

$$\Sigma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 3\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 3\}$$

Um vetor normal à curva em $(-1,-1)$ será $\nabla f(-1,-1)$:
Tem-se

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, \; x + 2y)$$

e

$$\nabla f(-1,-1) = (-3, -3)$$

Um vetor tangente à curva em $(-1,1)$ será um vetor perpendicular a $\nabla f(-1,-1)$, por exemplo

$$v = (3, -3)$$

(obs $\nabla f(-1,-1) \cdot v = 0$)

b) Uma equação da reta normal à curva Σ_3 em $(-1,-1)$ é

$$(x,y) = (-1,-1) + \lambda \nabla f(-1,-1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (-1,-1) + \lambda(-3,-3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

6 $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ $\quad P = (6,2,1)$

O elipsoide dado pode ser visto como a superfície de nível 1 da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3}$$

ou seja, o elipsoide é o conjunto

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z): f(x,y,z) = 1\}$$

Uma equação do plano tangente a Σ_1 em P é

$$\nabla f(2,2,1) \cdot (x-2, y-2, z-1) = 0$$

Ora

$$\nabla f(x,y,z) = \left(x/6 \,,\, y/6 \,,\, \frac{2z}{3}\right),$$

$$\nabla f(2,2,1) = \left(1/3 \,,\, 1/3 \,,\, 2/3\right)$$

pelo que a equação pedida são

$$\left(1/3, 1/3, 2/3\right) \cdot \left(x-2, y-2, z-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} + \frac{y-2}{3} + \frac{2(z-1)}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2z = 6$$