Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Exame A :: 27 de janeiro de 2020

Nome [ ] Número [ ]

As respostas às questões do grupo I são dadas na folha de exame e devem ser convenientemente justificadas.
As respostas às alíneas do grupo II são dadas na folha de enunciado.

I

Questão 1. [3 valores] Considere a seguinte função real de variável real:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x + 2x + 1 \end{array}$$

a) Calcule $f(0)$.

b) Mostre que a função f possui pelo menos um zero.

c) Determine a função derivada de f.

d) Estude a monotonia da função f.

e) Justifique que a função f possui inversa.

f) Determine $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Questão 2. [3 valores] Considere a função f definida por $f(x) = \operatorname{arcsen} |x^2 - 1|$.

a) Determine o domínio da função f.

b) Determine o contradomínio da função f.

c) Estude a paridade da função f.

d) A função f é injetiva? Justifique.

Questão 3. [3 valores] Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x}\, dx$.

Questão 4. [2,5 valores] Considere a região do plano

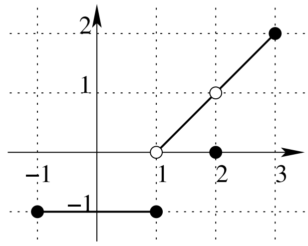
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq y + 2,\ y \geq 0\right\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Calcule a área da região R.

Questão 5. [2,5 valores] Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$.

Questão 6. [2 valores] Considere a função $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa e seja $F : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.



a) Determine $F(-1)$ e $F(2)$.

b) Determine o conjunto dos zeros da função F.

c) Determine, caso existam, $F'(0)$ e $F'(2)$.

d) Apresente, ou justifique que não existe, uma primitiva da função f.

II

Neste grupo cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada -0,25 valores.

[4 valores] Em cada uma das alíneas seguintes, indique a afirmação verdadeira.

a) Se $X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ então:

- ○ $0 \in X$;
- ○ $X' = \emptyset$;
- ○ X é um conjunto fechado;
- ○ $X' = \{0\}$.

b) O valor de $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccotg} \frac{5\pi}{4}\right)$ é:

- ○ $\dfrac{4}{\pi}$;
- ○ $\dfrac{4}{5\pi}$;
- ○ $\dfrac{\pi}{4}$;
- ○ 1.

c) Seja f uma função de classe $\mathscr{C}^3(\mathbb{R})$ cujo polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de 1 é $\mathcal{P}_{3,1}(x) = x^3 + x^2 + x$. O polinómio de Taylor de f de ordem 2 em torno de 1 é:

- ○ $(x-1)^2 + (x-1)$;
- ○ $x^2 + x$;
- ○ $4(x-1)^2 + 6(x-1) + 3$;
- ○ $8(x-1)^2 + 6(x-1) + 3$.

d) A identidade $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\ln(4x)}\, dx = k \int_a^b \frac{1}{\ln t}\, dt$ verifica-se quando:

- ○ $a = 4,\ b = 12,\ k = \frac{1}{4}$;
- ○ $a = 4,\ b = 12,\ k = 1$;
- ○ $a = 1,\ b = 3,\ k = \frac{1}{4}$;
- ○ $a = 1,\ b = 3,\ k = 1$.