Cap. 2– Cálculo Integral

Novembro 2019

2.1 Primitivas

Até agora...

- Dada uma função derivável

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida num intervalo I, determinar uma função

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g(x) = f'(x), \quad \forall x \in I\,.$$

Problema

- Dada uma função $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, determinar uma função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável e tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I\,.$$

- Este problema diz-se problema da primitivação da função f, no intervalo I.

Definição de primitiva

- [Função primitiva] Uma função derivável $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se função primitiva de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

- Neste caso
  - Diz-se que f é primitivável em I.
  - F diz-se uma primitiva (ou antiderivada) de f em I;
  - F é uma primitiva de $f \iff f$ é a derivada de F.

Exemplo

1. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;

2. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$$

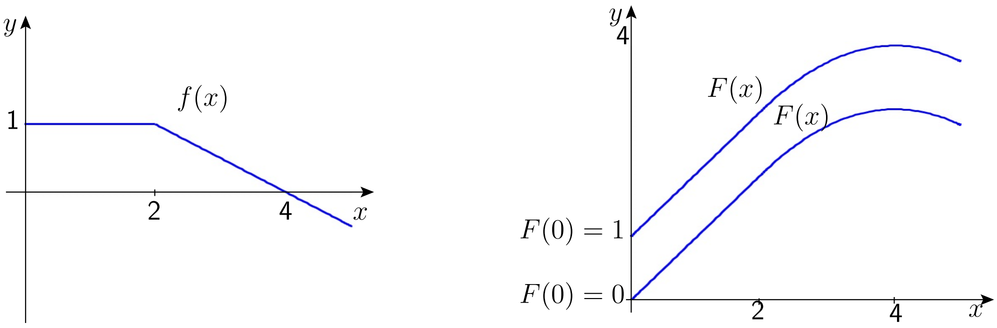
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

3. Nem todas as funções admitem primitiva. Por exemplo, a função

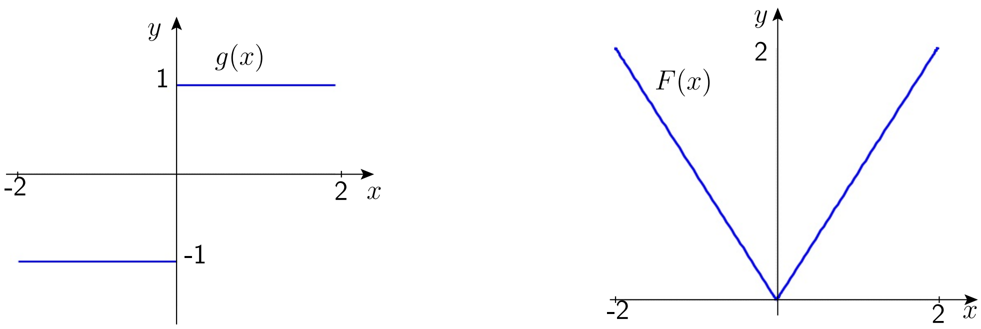
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$ porque não é a derivada de nenhuma função (c.f. Teorema de Darboux).

4. Gráfico de f e de duas possíveis funções primitivas F:



5. Gráfico de g e de F:



F não é uma primitiva de g porque F não é derivável em $I = [-2, 2]$.

Consequências da definição

- Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função definida por

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I,$$

com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f.

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \ x \in I.$

- Não existem outras primitivas de f para além das que têm a forma

$$F(x) + \mathcal{C}, \ \ x \in I,$$

com F uma primitiva conhecida de f em I e $\mathcal{C}$ uma constante arbitrária.

Notação

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

onde

- $\int$ é um "S" alongado;
- dx é uma partícula que, em particular, especifica a variável independente;
- $\int f(x)\,dx$ diz-se integral indefinido da função f.

Primitivas fundamentais

Reescreva-se a tabela de derivadas de forma a ler-se uma tabela de primitivas fundamentais ($k \in \mathbb{R}$)

Função	Derivada
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
x^k	$k\,x^{k-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$

Função	Primitivas
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$-\operatorname{sen} x$	$\cos x + \mathcal{C}$
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}, k \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + \mathcal{C}$

Exemplo

1. $\displaystyle\int 1\,dx =$

2. $\displaystyle\int 2x\,dx =$

3. $\displaystyle\int e^x\,dx =$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx =$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx =$

Observação

1. Foi visto que o problema da primitivação pode não ter solução.

2. No que se segue serão estudadas técnicas que irão permitir resolver o problema de primitivação em muitas situações.
(Primitivação de funções elementares)

3. As técnicas a estudar não permitem determinar primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo é a função Gaussiana definida por
$$e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
que é primitivável em qualquer intervalo I não sendo possível obter uma sua primitiva recorrendo às técnicas que agora se passa a estudar.
(Este problema será abordado na UC de Análise .)

Regras de primitivação

- [Primitivação por decomposição]

  Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha\,, \beta\, \in \mathbb{R}$ constantes. Então

  $$\int [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

  - Esta regra resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra da derivada do produto de uma função por uma constante.

Exemplo

1. $\displaystyle\int (\,\operatorname{sen} x + 2\cos x\,)\, dx \;=$

2. $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\, dx \;=$

3. $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 2)^2\, dx \;=$

- [Primitivação imediata]

Sejam funções $u : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida. Então

$$\int g'(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int [g(u(x))]'\, dx = g(u(x)) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

- Esta regra resulta da regra da derivada da função composta.

Exemplo

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\, dx =$

2. $\displaystyle\int (2x+10)^{20}\, dx =$

3. $\displaystyle\int x^4 (x^5+10)^9\, dx =$

4. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\, dx =$

5. $\int \cos x \,(\operatorname{sen} x)^3 \, dx$ é uma primitiva imediata.

De facto, $\quad [g \circ u]'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) \quad$ pelo que

$$\int g'(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = (g \circ u)(x)$$

Neste caso, $u(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x^4$, então

$$(g \circ u)(x) = g(u(x)) = g(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^4$$

e

$$[(\operatorname{sen} x)^4]' = 4\,(\operatorname{sen} x)^3 \, \cos x$$

donde

$$\int \cos x \,(\operatorname{sen} x)^3 \, dx = \frac{1}{4} \int 4 \cos x \,(\operatorname{sen} x)^3 \, dx = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} x)^4 + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

- [Primitivação por partes]

Sejam funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis. Então

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx.$$

- Esta regra resulta da regra da derivada do produto de duas funções.
- Como o produto é comutativo, na primitivação por partes
  - escolhe-se para f' a função da qual se conhece a primitiva;
  - escolhe-se para g a função que, por derivação, simplifica a expressão.

Exemplo

1. $\displaystyle\int x\cos x\,dx =$

2. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx =$

3. $\displaystyle\int \ln x\,dx =$

- [Primitivação por substituição]

  Seja $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $f : J \longrightarrow I$ uma função bijectiva e derivável cuja derivada nunca se anula. Então

  $$\int g(x)\,dx = \left[\int g(f(t))\,f'(t)\,dt\right]_{t=f^{-1}(x)}.$$

  - Esta regra também resulta da regra de derivação de uma função composta.
  - Procedimento
    1. fazer a substituição $x = f(t)$;
    2. calcular a primitiva $\displaystyle\int g(f(t))\,f'(t)\,dt$;
    3. voltar à variável x fazendo $t = f^{-1}(x)$.

Exemplo

1. Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ tomando $x = t^2+1$.

I) Aqui $g(x) = x\sqrt{x-1}$ e $x = t^2+1 = f(t)$.
Como f tem de ser uma função bijetiva cuja derivada não se anula tome-se

$$f :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[, \qquad f(t) = t^2+1.$$

Então

$$g(f(t)) = (t^2+1)\sqrt{t^2+1-1} = (t^2+1)\,t \quad \text{e} \quad f'(t) = 2t.$$

II) Assim

$$\begin{aligned}\int g(f(t))\,f'(t)\,dt &= \int 2t^2(t^2+1)\,dt \\ &= 2\int (t^4+t^2)\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+\mathcal{C}, \\ &= 2t^3\left(\frac{t^2}{5}+\frac{1}{3}\right)+\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

III) Tem-se f bijetiva e $x = f(t) = t^2+1$ então

$$t = \sqrt{x-1} = f^{-1}(x)$$

pelo que

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\int g(f(t))\,f'(t)\,dt\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

$$= \left[2t^3\left(\frac{t^2}{5}+\frac{1}{3}\right)+\mathcal{C}\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

$$= 2(\sqrt{x-1})^3\left(\frac{x-1}{5}+\frac{1}{3}\right)+\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

Primitivação de funções racionais

- A primitivação das funções racionais reduz-se à primitivação de
  - polinómios e
  - frações simples
- [Função racional] Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se função racional quando

$$f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}\,, \quad x \in U = \{x \in \mathbb{R} : D(x) \neq 0\}\,,$$

onde P e D são dois polinómios.

Exemplos

1. São exemplo de funções racionais as seguintes leis definidas em domínios apropriados

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

b) $g(s) = \dfrac{21}{s^3 - 4s^2 + 3s - 8}$

c) $h(t) = \dfrac{t^6 + 4t^2 - 3}{7t^5 + 3t}$

- [Frações simples] Frações simples são frações da forma

$$\frac{1}{(x-\alpha)^n} \qquad \text{e} \qquad \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$$

com $A, B, \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}$.

- Estudam-se 6 casos para a primitivação destas frações
  - Caso 1: $\dfrac{1}{x-\alpha}$;
  - Caso 2: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$;
  - Caso 3: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}$;
  - Caso 4: $\dfrac{1}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$;
  - Caso 5: $\dfrac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta}$;
  - Caso 6: $\dfrac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]^n}$

Exemplo

1. $\displaystyle\int \frac{3}{x-2}\,dx =$ (Caso 1)

2. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^5}\,dx =$ (Caso 2)

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx =$ (Caso 3 com $\alpha = 1$ e $\beta = 4$)

- [Primitivação de funções racionais] A determinação de

$$\int \frac{P(x)}{D(x)}\,dx$$

P, D polinómios, $D \neq 0$, divide-se nas seguintes etapas:

1. Escrever $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ usando a divisão euclidiana
2. Calcular os zeros de D e decompor D em fatores irredutíveis.
3. Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples.
4. Determinar as primitivas das frações simples.
5. Adicionar a primitiva de Q e as primitivas das frações simples: como resultado obtêm-se as primitivas de $\frac{P(x)}{D(x)}$.

- [Decomposição em frações simples] O passo 3 do algoritmo anterior é feito com base nos zeros de D
  - cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui com k frações simples da forma

    $$\frac{A_1}{(x-a)^k}\,,\quad \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{A_k}{x-a}\,,$$

    onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são constantes reais a determinar;
  - cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm i\,b$, com multiplicidade m, contribui com m frações simples da forma

    $$\frac{B_1x+C_1}{[(x-a)^2+b^2]^m}\,,\quad \frac{B_2x+C_2}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1}}\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{B_mx+C_m}{(x-a)^2+b^2}$$

    onde $B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_m, C_m$ são constantes reais a determinar.
  - As constantes A_i, B_i, C_i calculam-se recorrendo à igualdade de polinómios ou outras regras.

Exemplo

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx\,.$

Sejam

$$P(x) = 7x-1, \qquad D(x) = (x+1)(x+2)(x-3) \qquad \text{e} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

1. Como $\operatorname{grau} P < \operatorname{grau} D$ não é necessário fazer a divisão de polinómios.

2. Os zeros de $D(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$ são

   $x = -1$, real de multiplicidade 1;
   $x = -2$, real de multiplicidade 1;
   $x = 3$, real de multiplicidade 1;

3. A fração f decompõe-se numa soma de três frações simples, cada uma delas associada a cada um dos zeros:

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

onde A, B, C são constantes reais a determinar.
Da equação anterior, reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$\begin{aligned} 7x-1 &= A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A2B+3C)x + (-6A-3B+2C) \end{aligned}$$

donde, pela igualdade de polinómios,

$$A+B+C=0, \qquad -A2B+3C=7, \qquad -6A-3B+2C=-1$$

e, resolvendo o sistema anterior,

$$A=2, \qquad B=-3, \qquad C=1.$$

Pode-se, agora, escrever

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-3}{x+2} + \frac{1}{x-3}.$$

4. Primitivando cada uma das frações simples anteriores

$$\int \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x+1| + \mathcal{C}_1$$
$$\int \frac{-3}{x+2}\,dx = -3\ln|x+2| + \mathcal{C}_2$$
$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + \mathcal{C}_3$$

onde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \in \mathbb{R}$.

5. Assim, a primitiva pedida é

$$\int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x+1| + \mathcal{C}_1 - 3\ln|x+2| + \mathcal{C}_2 + \ln|x-3| + \mathcal{C}_3$$

$$= 2\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + \ln|x-3| + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$