Álgebra Linear

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{A}}$

9 janeiro 2019 Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 9 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

as quais se sabe serem equivalentes por linhas.

a) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: ______________________.

b) As três primeiras colunas de A são vetores de $\mathbb{R}^4$ linearmente ______________________.

c) $\dim \mathcal{N}(A) =$ ______________________.

d) Sendo $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz é A, uma base para $\operatorname{Im} T$ é:

______________________.

2. Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe(m):

a) dois vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes tais que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$;

b) uma matriz A tal que $(1,0) \in \mathcal{N}(A)$ e $(0,1) \in \mathcal{C}(A)$;

c) uma aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ injetiva e tal que $\varphi(1,0,0) = (1,0,0,0)$ e $\varphi(0,1,0) = (1,1,0,0)$;

d) uma matriz A cujo polinómio característico seja $p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ e que seja semelhante à matriz $B = A + 2I$.

(continua no verso)

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_4 = -2x_2\}$$

$$V = \langle (1, 0, -1, 1), (1, -2, 1, 4), (1, 2, -3, -2) \rangle.$$

a) Determine uma base e indique qual a dimensão de cada um desses subespaços.

b) Verifique se $(1, 1, 1, 1) \in V$.

c) Dê um exemplo, caso exista, de um vetor não nulo que pertença a ambos os subespaços.

2. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $\varphi(x, y, z, w) = (x - z, -x + y + z, -x - y + w)$.

a) Determine a matriz da aplicação φ.

b) Indique, justificando, qual a dimensão de $\operatorname{Nuc} \varphi$.

c) Conclua que $\mathbf{v} = (1, -1, 1) \in \operatorname{Im} \varphi$ e determine o conjunto dos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ tais que $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

3. Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determine os valores de α para os quais a matriz A_α tem um valor próprio duplo.

b) Existe algum valor de α para o qual a matriz A_α seja semelhante à matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$? Justifique.

c) Determine os valores próprios de A_1 e os respetivos subespaços próprios.

d) Diga, justificando convenientemente, se a matriz A_1 é ou não diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz que a diagonaliza.

4. Sejam V e W dois espaços vetoriais reais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Sendo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ tais que $(T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k))$ é uma base de W e sabendo que T é injetiva, mostre que $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ é uma base de V.

Cotação: $\boxed{\textbf{I}}$ - **1.** 3 valores; **2.** 3 valores ; $\boxed{\textbf{II}}$ - **1.** 4.5 valores; **2.** 3 valores; **3.** 4.5 valores; **4.** 2 valores.