5. Transformações lineares

5.1 Introdução

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais reais e seja $f : E \to F$ uma aplicação de E em F. Diz-se que f é uma transformação linear ou aplicação linear se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E,\ f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$;
2. $\forall \boldsymbol{u} \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u})$.

Exemplos de transformações lineares

- $f : E \to F$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_F$ — aplicação nula
- $f : E \to E$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ — aplicação identidade

Exemplos de transformações lineares (continuação)

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + z, -4y)$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$,

  A matriz real de ordem $m \times n$

Exemplos de aplicações que não são lineares

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, x + y + 1)$
- $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \det A$

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais e $f : E \to F$ uma transformação linear. Então:*

1. $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
2. $\forall \boldsymbol{u} \in E, f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$
3. $\forall \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in E,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R},\ f(\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(\boldsymbol{u}_i)$

Demonstração:

1. $f(\mathbf{0}_E) = f(0.\mathbf{0}_E) = 0.f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

2. $f(-\boldsymbol{u}) = f((-1)\boldsymbol{u}) = (-1)f(\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$.

3. Indução sobre k.

5.2 Imagem e núcleo

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais reais e seja $f : E \to F$ uma transformação linear.

Chama-se núcleo de f, e representa-se por $\operatorname{Nuc} f$, ao conjunto

$$\operatorname{Nuc} f = \{\boldsymbol{u} \in E : f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F\}.$$

Chama-se imagem de f (ou contradomínio de f), e representa-se por $\operatorname{Im} f$, ao conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in E\}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$f(x, y, z, w) = (x + y, y - z, x + w)$$

- f é uma transformação linear (Prove!)
- $$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : f(x, y, z, w) = (0, 0, 0)\} \\ &= \cdots = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{(x + y, y - z, x + w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle\end{aligned}$$

base=?

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais e $f : E \to F$ uma transformação linear. Então:*

1. $\mathrm{Nuc}\, f$ *é um subespaço vetorial de* E*;*
2. $\mathrm{Im}\, f$ *é um subespaço vetorial de* F*.*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

5.3 Representação matricial de transformações lineares

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a transformação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ é uma transformação linear. (exemplo pg. 146)

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, então

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 8x_3 \\ 2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

A transformação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + 8x_3, 2x_1 + 5x_3)$$

é uma transformação linear.

Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma matriz $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que*

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{M}_f \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}$. Sejam $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ as imagens por f dos vetores de $\mathcal{B}$, i.e. $\boldsymbol{a}_1 = f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \boldsymbol{a}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$. Consideremos a matriz cujas colunas são $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ i.e.

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}.$$

Então, $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Acabamos de construir uma matriz $\mathcal{M}_f$ cujas colunas são as imagens por f dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ e que satisfaz $\mathcal{M}_f \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$. Esta matriz chama-se a matriz da transformação f ou a representação matricial de f.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y + 5z, x + y + z, 9x + 2y + 5z, 4y).$$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (3,1,9,0) \\ f(0,1,0) &= (2,1,2,4) \\ f(0,0,1) &= (5,1,5,0) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Obter $f(1,1,1)$ a partir de $\mathcal{M}_f$

Teorema: *Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n)$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Se $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ são as coordenadas de $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ nessa base, i.e., se $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n$, então*

$$f(\boldsymbol{x})=\alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+\alpha_n f(\boldsymbol{u}_n).$$

Demonstração: *imediata.*

$\Rightarrow$ Uma transformação linear está totalmente definida se soubermos as imagens dos vetores de uma base.

Exemplo: Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $f(1,2,1)=(5,-1)$, $f(-1,5,1)=(0,4)$ e $f(3,1,4)=(2,3)$. Calcular $f(8,-3,5)$.

- $((1,2,1),(-1,5,1),(3,1,4))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (verifique!)
- $(8,-3,5)=3(1,2,1)-2(-1,5,1)+(3,1,4)$ (verifique!)
- $f(8,-3,5)=3f(1,2,1)-2f(-1,5,1)+f(3,1,4)=(17,-8)$

Teorema: *Seja $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matriz de uma dada transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Então*

① *O núcleo de f é igual ao espaço nulo de $\mathcal{M}_f$, i.e.*

$$\operatorname{Nuc} f = \mathcal{N}(\mathcal{M}_f)$$

② *O espaço imagem de f coincide com o espaço das colunas de $\mathcal{M}_f$, i.e.*

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{C}(\mathcal{M}_f)$$

Demonstração: ao cuidado dos alunos.

Corolário:

1. $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{car}(\mathcal{M}_f)$
2. $\dim \operatorname{Nuc} f = n - \operatorname{car}(\mathcal{M}_f)$
3. $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = n$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de uma aplicação linear f.

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Nuc}\, f = \mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$
- $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{C}(A) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle$$

$$\dim \mathrm{Nuc}\, f = 1 \qquad \dim \mathrm{Im}\, f = 3 \qquad n = 4 = 1 + 3$$

5.4 Aplicações injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição: Seja $f : E \to F$ uma aplicação linear. Diz-se que

① f é uma aplicação injetiva se e só se

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E,\ f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

② f é uma aplicação sobrejetiva se e só se

$$\forall \boldsymbol{v} \in F\ \exists \boldsymbol{u} \in E,\ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$

② f é uma aplicação bijetiva se e só se f é injetiva e sobrejetiva.

Teorema: *Seja $f : E \to F$ uma aplicação linear. Então:*

1. *f é injetiva se e só se $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$;*
2. *f é sobrejetiva se e só se $\operatorname{Im} f = F$.*

Demonstração:

1. ($\Rightarrow$) Seja f injetiva e seja $u \in \operatorname{Nuc} f$. Então $f(u) = 0_F = f(0_E)$. Como f é injetiva, conclui-se que $u = 0_E$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ e que $f(x) = f(y)$, i.e. $f(x) - f(y) = 0_F$. Então, $f(x - y) = 0_F$, o que significa que $x - y \in \operatorname{Nuc} f$, donde se conclui que $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. A aplicação f é, por isso injetiva.

2. imediata

Exemplo: Relativamente à aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ do exemplo anterior

$$\operatorname{Nuc} f = \mathcal{N}(A) = \langle (-1,1,1,1) \rangle$$

e

$$\operatorname{Im} f = \langle (1,0,1),(1,1,0),(0,-1,0) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Conclui-se que f não é injetiva, mas é sobrejetiva.

Em termos de matrizes, podemos concluir que, se $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é a matriz da aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então

1. f é injetiva se e só se $\operatorname{car} \mathcal{M}_f = n$;
2. f é sobrejetiva se e só se $\operatorname{car} \mathcal{M}_f = m$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Recordando que:

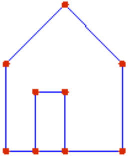
- $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = n$
- f injetiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Nuc} f = 0$
- f sobrejetiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = m$

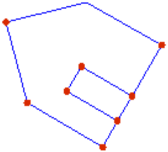
conclui-se que:

1. se $n < m$, f não é sobrejetiva;
2. se $n > m$, f não é injetiva;
3. se $n = m$ são equivalentes as afirmações
   - f é injetiva;
   - f é sobrejetiva;
   - f é bijetiva;
   - a matriz de f é invertível.

Aplicações (G. Strang)

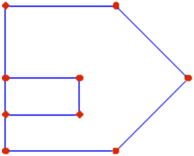
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

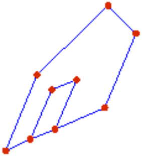




$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

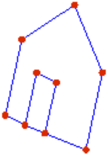
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

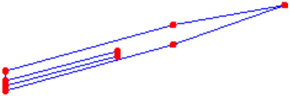




$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$