Cap. 1– Funções reais de variável real

Setembro 2019

1.1 O conjunto $\mathbb{R}$

Valor absoluto de um número real

Conjuntos limitados

Distância

Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Valor absoluto

- Dado $x \in \mathbb{R}$, chama-se valor absoluto de x ao maior dos números x e $-x$. Escreve-se

$$|x| = \max\{\, x, -x \,\}$$

  - Sai de imediato que $|0| = 0$ e que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- [Propriedades do valor absoluto]

  Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$. Então:
  - $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ sse $x = 0$;
  - $|-x| = |x|$;
  - $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$;
  - $-|x| \leq x \leq |x|$;
  - $|x| \leq a$ sse $-a \leq x \leq a$;
  - $|x| \geq a$ sse $x \geq a \ \vee \ x \leq -a$;
  - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$;
  - $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Conjuntos limitados

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é

- majorante de X se $\forall x \in X \quad x \leq a$;
- minorante de X se $\forall x \in X \quad a \leq x$;
- máximo de X se a é majorante de X e $a \in X$;
- mínimo de X se a é minorantes de X e $a \in X$;
- ínfimo de X se é o maior dos minorante de X;
- supremo de X se é o menor dos majorantes de X.

Notação

Usam-se as notações

- $\max X$ para o máximo de X
- $\min X$ para o mínimo de X
- $\sup X$ para o supremo de X
- $\inf X$ para o ínfimo de X

Exemplo

1. Se $X =]0, \pi]$ então
   - majorantes de X: $[\pi, +\infty[$;
   - minorantes de X: $]-\infty, 0]$;
   - $\sup X = \pi$ e $\pi \in X$, então $\max X = \pi$;
   - $\inf X = 0$ e $0 \notin X$ então X não tem mínimo.
2. Se $X = [0, \pi] \cap \mathbb{Q}$ então
   - majorantes de X: $[\pi, +\infty[$;
   - minorantes de X: $]-\infty, 0]$;
   - $\sup X = \pi$ e $\pi \notin X$, então X não tem máximo;
   - $\inf X = 0$ e $0 \in X$ então $\min X = 0$.

- [Conjunto limitado] Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se que X é
  - limitado inferiormente ou minorado se possui algum minorante;
  - limitado superiormente ou majorado se possui algum majorante;
  - limitado quando X é, simultaneamente, limitado inferiormente e limitado superiormente.

Distância

- [Distância] Dados $x, y \in \mathbb{R}$, chama-se distância de x a y ao número $d(x, y)$ definido por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

- [Propriedades]

  Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então

  - $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$;
  - $d(x, y) = d(y, x)$
  - $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdade triangular)

Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Seja $X \subset \mathbb{R}$ qualquer.

- [Ponto interior] $x \in \mathbb{R}$ é ponto interior de X se

$$\exists r > 0 \quad]x - r, x + r[\subset X;$$

  - Ao conjunto dos pontos interiores de X chama-se interior de X e representa-se por

$$\text{int } X \qquad \text{ou} \qquad \mathring{X}\,.$$

- [Conjunto aberto] Se $\mathring{X} = X$ diz-se que X é um conjunto aberto.

Exemplo

1. Se $A = [0,1[$ então $\mathring{A} =]0,1[$; A não é aberto.
2. Se $B =]0,1[$ então $\mathring{B} =]0,1[$; B é aberto.
3. Se $C = \mathbb{R}$ então $\mathring{C} = \mathbb{R}$; C é aberto.
4. Se $D = \emptyset$ então $\mathring{D} = \emptyset$; D é aberto.
5. Se $E =]0,1] \cap \mathbb{Q}$ então $\mathring{E} = \emptyset$; E não é aberto.

- [Ponto aderente] $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente de X se

$$\forall r > 0 \quad]x-r, x+r[\cap X \neq \emptyset$$

  - Ao conjunto dos pontos aderentes de X chama-se aderência de X e representa-se por

$$\overline{X} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{ad} X.$$

- [Conjunto fechado] Se $\operatorname{ad} X = X$ diz-se que X é um conjunto fechado.

Exemplo

1. Se $A = [0,1[$ então $\operatorname{ad} A = [0,1]$; A não é fechado.
2. Se $B = [0,1]$ então $\operatorname{ad} B = [0,1]$; B é fechado.
3. Se $C = \mathbb{R}$ então $\operatorname{ad} C = \mathbb{R}$; C é fechado.
4. Se $D = \emptyset$ então $\operatorname{ad} D = \emptyset$; D é fechado.
5. Se $E =]0,1[\cap \mathbb{Q}$ então $\operatorname{ad} E = [0,1]$; E não é fechado.

- [Ponto fronteiro] $x \in \mathbb{R}$ é ponto fronteiro de X se

  $$\forall r > 0 \quad]x-r, x+r[\cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad]x-r, x+r[\cap (\mathbb{R} \backslash X) \neq \emptyset$$

  - Ao conjunto dos pontos de fronteira de X chama-se fronteira de X e representa-se por

  $$\operatorname{fr} X \qquad \text{ou} \qquad \partial X \, .$$

- [Exemplo]
  1. Se $A = [0,1[$ então $\partial A = \{0,1\}$.
  2. Se $B = [0,2[\backslash \{1\}$ então $\partial B = \{0,1,2\}$.
  3. Se $C =]0,1[\cap \mathbb{Q}$ então $\partial C = [0,1]$.

- [Ponto de acumulação] $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se

$$\forall r > 0 \ \ (]x-r, x+r[\setminus \{x\}) \ \cap \ X \neq \emptyset$$

  - $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação à direita de X se

$$\forall r > 0 \ ]x, x+r[\ \cap X \ \neq \emptyset \, .$$

  - $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação à esquerda de X se

$$\forall r > 0 \ ]x-r, x[\ \cap X \ \neq \emptyset \, .$$

  - Ao conjunto dos pontos de acumulação de X chama-se derivado de X e representa-se por

$$X'$$

- [Ponto isolado] $x \in \mathbb{R}$ é um ponto isolado de X quando $x \in X$ mas $x \notin X'$,

- [Notação] Usam-se as notações
  - X'_+ o conjuntos dos pontos de acumulação à direita de X;
  - X'_- o conjuntos dos pontos de acumulação à esquerda de X.

- [Exemplo]
  1. Se $A = ([0,3[\setminus \{1\}) \cup \{4\}$ então $A' = [0,3]$ e 4 é o único ponto isolado de A.
  2. Se $B =]0,3[\cap \mathbb{Q}$ então $B' = [0,3]$ e B não possui pontos isolados.