Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Teste 1 :: 21 de março de 2019
[duração 2h]

ANÁLISE

Nome completo:	Nº:

I

Resolva as questões deste grupo na FOLHA DE TESTE e JUSTIFIQUE convenientemente todas as suas respostas

1. [3 valores] Considere a função definida por $f(x,y) = \left(\ln(1-x^2-(y+1)^2), \dfrac{1}{x^2-y-1}\right)$.

(a) Determine o domínio $\mathscr{D}$ da função f e represente-o graficamente.

(b) Indique a aderência e a fronteira de $\mathscr{D}$ (pode fazer um esboço de cada um dos conjuntos).

(c) Indique, justificando, se $\mathscr{D}$ é um conjunto aberto.

2. [5 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} + x + 1, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(-1,1)$.

(c) Calcule $Df\big((0,0);(1,1)\big)$.

(d) Indique se f é derivável em $(0,0)$.

3. [2 valores] Determine uma equação do plano tangente à superfície definida pela equação $xy + xz + yz = 11$ no ponto de coordenadas $(1,2,3)$.

II

Assinale, neste ENUNCIADO, a ÚNICA afirmação verdadeira. NÃO apresente qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.25 valores.

1. Considere o conjunto $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 \leq 25\}$ e o ponto $P = (2,-1,3)$. Então

- ◯ P é ponto fronteiro de $\mathscr{S}$.
- ◯ P dista 5 unidades da origem do referencial.
- ◯ P é ponto interior de $\mathscr{S}$.
- ◯ nenhuma das anteriores.

2. Se $\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0$ então

○ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

○ $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0.$

○ nada se pode concluir sobre o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$

○ nenhuma das anteriores.

3. O gráfico da função real de duas variáveis reais definida por $f(x,y) = -x^2 - y^2$ é

○ um paraboloide hiperbólico.

○ um paraboloide circular.

○ um cilindro elíptico.

○ nenhuma das anteriores.

4. Se $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $f(1,1) = g(1,1) = 2$, $\nabla f(1,1) = \nabla g(1,1) = (2,2)$ e $h(x,y) = f(x,y)g(x,y)$ então

○ $\nabla h(1,1) = (2,2).$

○ $\nabla h(1,1) = (4,4).$

○ $\nabla h(1,1) = (8,8).$

○ nenhuma das anteriores.

5. Sejam $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funções tais que $\boldsymbol{f}(x,y) = (x+2y, e^x, y)$, $\boldsymbol{g}(1,1) = (0,2)$ e $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Designando por $\boldsymbol{h}$ a função composta $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$, a matriz jacobiana de $\boldsymbol{h}$ no ponto $(1,1)$ é

○ $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ e & 3e \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

○ $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

○ $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 3e & 2 \end{bmatrix}.$

○ nenhuma das anteriores.

III

Assinale, neste ENUNCIADO, se a afirmação é FALSA ou é VERDADEIRA. NÃO apresente qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.5 valores.

	F	V
1. Dada uma função f, real de duas variáveis reais, se $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, então $x_0 = x_1$ e $y_0 = y_1$.	○	○
2. Se qualquer interseção do gráfico de uma função f real de duas variáveis reais, x e y, com os planos definidos por $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) for uma reta, então o gráfico de f é um plano.	○	○
3. O gráfico da função, real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$, é o mesmo que a superfície de nível 0 da função, real de três variáveis reais, definida por $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.	○	○
4. Se $f(1,2) = 3$, então $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 3$.	○	○
5. Se $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathscr{C}^1$ tais que $f(1,1) = g(2,1) = 2$ e $\nabla f(1,1) = \nabla g(2,1) = (1,2)$, então o plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,2)$ também é tangente ao gráfico de g em $(2,1,2)$.	○	○