Exercícios dos apontamentos

Cap 3.2 pág 29

1

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Por definição $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é, caso o limite exista dada por

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[t^2\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{t^2}} \right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(t\ \text{sen}\ \frac{1}{|t|} \right) = 0 \text{ pois}$$

$t \to 0$ e $\text{sen}\ 1/|t|$ é uma função limitada em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f_x(0,0) = 0$$

De modo análogo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[t^2\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{t^2}} \right] = 0$$

$$= f_y(0,0)$$

b) f_x e f_y são, respectivamente, a "função derivada parcial de f em ordem a x" e a "função derivada parcial de f em ordem a y":

$$f_x : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_y : B \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Da a) sabe-se que

$$f_x(0,0) = 0 \quad e \quad f_y(0,0) = 0$$

Há que determinar a lei destas funções para $(x,y) \neq (0,0)$, isto é, no conjunto aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ora, para $(x,y) \neq (0,0)$, f é definida pelo produto de uma função polinomial e uma função trigono-

T1.1

métrica, pelo que existem as derivadas parciais e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude-se a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ em $(0,0)$. Por definição, a função será contínua em $(0,0)$ se existir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

mas este limite não existe, pois usando limites trajectoriais na 2.ª parcela do limite anterior vem

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x}{\sqrt{2x^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2x^2}} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{|x|} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}\,|x|} \right]$$

e este limite não existe.

Assim, não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

pelo que a função $\partial f/\partial x$ não é contínua em $(0,0)$.

De modo análogo, $\partial f/\partial y$ também não é contínua em $(0,0)$. Note-se a simetria das variáveis x, y na lei de $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

Cap 3.2 pág 31

② Aqui $f(x,y) = x^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

A função f é uma função polinomial logo diferenciável em $(3,1)$, pelo que uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(3,1, f(3,1))$ será

$$z = f(3,1) + \nabla f(3,1) \bullet (x-3, y-1)$$

Tem-se, $f(3,1) = 10$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$$

pelo que o vector gradiente de f em $(3,1)$ é

$$\nabla f(3,1) = (6,3).$$

A equação do plano será, então

$$z = 10 + (6,3) \bullet (x-3, y-1)$$

$$\Leftrightarrow z = 10 + 6(x-3) + 3(y-1)$$

Cap 3.3 pág 33

① $f(x,y) = \cos(xy^2)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

A função é definida por uma função trigonométrica, logo admite as derivadas de 1ª ordem:

Th2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(xy^2)\right] = -(xy^2)_x \ \text{sen}(xy^2)$$
$$= -y^2 \ \text{sen}(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(xy^2)\right] = (xy^2)_y \ \text{sen}(xy^2)$$
$$= -2yx \ \text{sen}(xy^2)$$

Para determinar as derivadas parciais de 2ª ordem de f é necessário derivar cada uma das funções anteriores em ordem a x e com ordem a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-y^2 \ \text{sen}(xy^2)\right]$$

$$= -y^2 (xy^2)_x \cos(xy^2) = -y^4 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-y^2 \ \text{sen}(xy^2)\right]$$

$$= -(y^2)_y \ \text{sen}(xy^2) - y^2 \left[\text{sen}(xy^2)\right]_y$$

$$= -2y \ \text{sen}(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy \ \text{sen}(xy^2)\right)$$
$$= -2y \ \text{sen}(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2yx \ \text{sen}(xy^2)\right)$$

$$= -2x \ \text{sen}(xy^2) - 4x^2y^2 \cos(xy^2)$$

Observe-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Será coincidência?

Cap 3.3 pag 36

2 $f(x,y) = x e^y + x^2 y$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

A função f é definida pela soma de um polinómio com o produto de um polinómio por uma função exponencial, pelo que existem e são contínuas todas as suas derivadas parciais. Em particular, f é uma função de classe C^2.

As derivadas de 1.ª ordem de f são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x e^y + x^2 y\right] = e^y + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x e^y + x^2 y\right] = x e^y + x^2$$

A função f verifica o Teorema de Schwarz pois

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

já que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x e^y + x^2\right] = e^y + 2x$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^y + 2xy\right] = e^y + 2x$$

$\neq$

3 Não pode existir uma função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 cujas derivadas de 1.ª ordem sejam

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y + x$$

pois, neste caso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^3\right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 y + x\right] = 2xy + 1$$

$\neq$

o que contradiz o Teorema de Schwarz.

Cap 3 4 pag 40

1) $f(x,y) = \left(y + e^{x+y}, x + xy^2, \operatorname{sen}(x+y) \right)$

a) As funções componentes de f são

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = y + e^{x+y}$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x,y) = x + xy^2$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$

b) As funções f_1, f_2 e f_3 admitem todas as derivadas parciais e

$$\nabla f_1(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) = \left(e^{x+y}, 1 + e^{x+y} \right)$$

$$\nabla f_2(x,y) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \right) = \left(1 + y^2, 2xy \right)$$

$$\nabla f_3(x,y) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\cos(x+y) \quad \cos(x+y) \right)$$

c) A matriz jacobiana de f é, por b),

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & 1 + e^{x+y} \\ 1+y^2 & 2xy \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

d) Cada uma das funções componentes de f é uma função diferenciável. Assim f é uma função diferenciável e a sua diferencial no ponto $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e a aplicação linear

$$df(A) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definida para cada vetor $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ por

T1. 4

$$df(A)(v) = Jf(A) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Em particular, para $A = (0,0)$ vem, por c),

$$df(0,0)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

e) Atendendo à alínea d), para $v = (1,1)$ vem

$$df(0,0)(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x,y)$

Cada uma das duas funções componentes de f admite as duas derivadas parciais e

$f_1(x,y) = x$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1$ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0$

$f_2(x,y) = y$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0$ $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1$

pelo que

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe-se que a matriz jacobiana de f, neste caso, é uma matriz constante, é a matriz identidade.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

Cada uma das três funções componentes de f admite as duas derivadas parciais!

Tem-se

$f_1(x,y) = x e^y + \cos y$, $\nabla f_1(x,y) = \left(e^y , x e^y - \operatorname{sen} y\right)$

$f_2(x,y) = x$, $\nabla f_2(x,y) = (1, 0)$

$f_3(x,y) = x + e^y$, $\nabla f_3(x,y) = (1, e^y)$

Assim, a matriz jacobiana de f é

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & x e^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$$

③ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y) = (2x^2, 3y, 2xy)$

a) As funções componentes de f são funções polinomiais pelo que admitem as duas derivadas parciais. Assim

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 0 & 3 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

b) As funções componentes de f admitem todas as derivadas de 1ª ordem e estas são contínuas. Logo as três funções componentes de f são diferenciáveis, pelo que f é diferenciável. Então a sua diferencial no ponto $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ é a aplicação linear

$$df(A) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida para cada vetor $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ por

$$df(A)(v) = Jf(A) \cdot v$$
$$= \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 3 \\ 2b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Em particular, para $A = (1,1)$ é

T1.5

$$df(1,1)(v) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 3\beta \\ 2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

c) $df(1,1)(\underbrace{2}_{\alpha}, \underbrace{3}_{\beta}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$