ANÁLISE
Cap. 4 – Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Abril 2020

4. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

4.4 Mudança de variáveis em integrais triplos

- Transformações de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$
  - Sistema de coordenadas cilíndricas
  - Sistema de coordenadas esféricas
- Mudança de coordenadas em integrais triplos
  - Coordenadas cilíndricas
  - Coordenadas esféricas

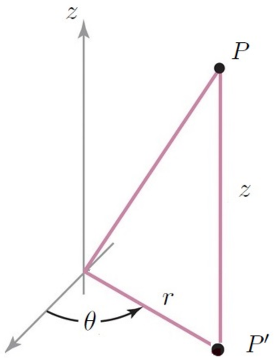
4.4 Mudança de variáveis em integrais triplos

Sistema de coordenadas cilíndricas

- [Definição]

  Coordenadas cilíndricas de $P = (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$:

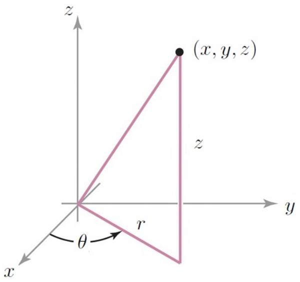
  - r e θ coordenadas polares de P', a projeção de P no plano horizontal;
  - z igual à coordenada vertical das coordenadas cartesianas



- [Coordenadas cartesianas vs coordenadas cilíndricas]

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas cilíndricas

$P = (r, \theta, z)$

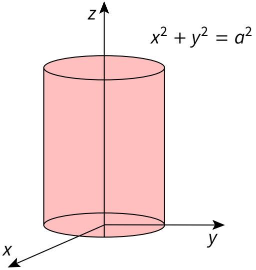
- Relação entre coordenadas cilíndricas e cartesianas

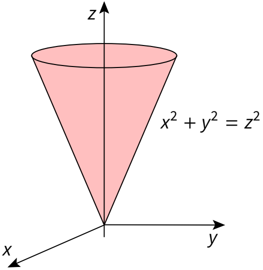
$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta, & r \in [0, +\infty[\\ y = r\,\operatorname{sen}\theta, & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = z, & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observação

- Tal como no caso das coordenadas polares, a descrição de um ponto diferente da origem em coordenadas cilíndricas não seria única sem a restrição de θ ao intervalo $[0, 2\pi[$.

- As coordenadas cilíndricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente ao eixo dos zz.





- [Mudança de coordenadas cilíndricas para cartesianas]

  Considere-se a função vetorial $T : D^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

  $$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta,\ z)$$

  onde $D^* = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

  A função T é de classe C^1, a sua matriz Jacobiana é

  $$J\,T(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  e $\det J\,T(r, \theta, z) = r$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas em $r\theta z$.

Exemplo

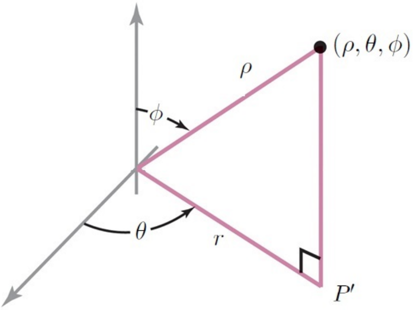
- As coordenadas cartesianas de $\left(7, \frac{\pi}{3}, 5\right)$ são $\left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, 5\right)$, isto é
$$T\left(7, \frac{\pi}{3}, 5\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, 5\right);$$
- As coordenadas cilíndricas de $(3, 3, 1)$ são $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$, isto é
$$T^{-1}(3, 3, 1) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right);$$
- O cilindro de equações $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações
$$r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$
- O cone de equações $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações
$$r \leq z, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

Sistema de coordenadas esféricas

- [Definição]

  Coordenadas esféricas de $P = (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$:

  - ρ distância de P à origem do referencial;
  - ϕ ângulo entre a parte positiva do eixo vertical e $\overline{OP}$;
  - θ ângulo (orientado) entre a parte positiva do eixo dos xx e $\overline{OP'}$, onde P' é a projeção ortogonal de P no plano $z = 0$.



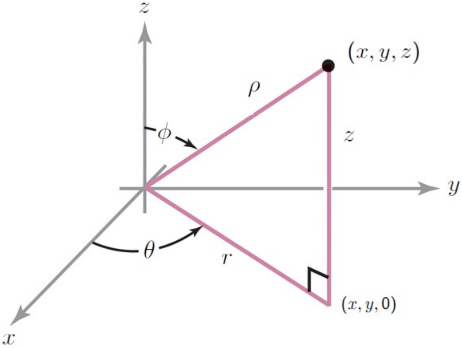
Observação

- A designação dos ângulos θ e ϕ bem como a sua definição não é consensual
  - Neste curso define-se θ como o ângulo entre a parte positiva do eixo dos x e $\overline{OP'}$ e ϕ como o ângulo entre a parte positiva do eixo dos z e $\overline{OP}$;
  - Em geografia, por exemplo, a latitude, isto é, o ângulo ϕ é o ângulo entre o plano horizontal e $\overline{OP}$.
- As coordenadas esféricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente a um ponto.

▶ [Coordenadas cartesianas vs coordenadas esféricas]

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas esféricas

$P = (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = |OP|$

- Da trigonometria do triângulo retângulo vem $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ e

$$\begin{cases} x = r \cos\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\\ \phi \in [0, \pi]. \end{array}$$

- Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, & \rho \in [0, +\infty[\\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = \rho \cos\phi, & \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$

- [Mudança de coordenadas esféricas para cartesianas]

  Considere-se a função vetorial $T : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

  $$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

  onde $S = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$. A função T é de classe C^1, a sua matriz Jacobiana é

  $$JT(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{pmatrix}$$

  e $\det JT(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas no espaço $\rho\, \theta\, \phi$.

Exemplo

- As coordenadas cartesianas do ponto $\left(2, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ são $(0, -2, 0)$, isto é
$$T\left(2, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right) = (0, -2, 0)$$

- As coordenadas esféricas do ponto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ são $\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, isto é
$$T^{-1}\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right) = \left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

- As equações de uma esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio R em coordenadas esféricas são
$$\rho \leq R, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in [0, \pi].$$

Mudança de coordenadas em integrais triplos

Sejam

- S^* e S regiões elementares do espaço uvw e do espaço xyz respetivamente;
- T uma transformação injetiva em $\text{int}(S^*)$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que
  - $\det JT(u, v, w) \neq 0$ para todo $(u, v, w) \in \text{int}(S^*)$;
  - transforma[1] a região S^* na região S:

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w));$$

- f uma função contínua em S.

  Então

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{S^*} (f \circ T)(u, v, w) \, |\det JT(u, v, w)| \, du\, dv\, dw.$$

[1] Isto é, $T(S^*) = S$

Observação

- Sendo $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ o Jacobiano de T é
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

- De forma análoga ao caso no plano, o Jacobiano de T, $\det JT$, mede como a transformação T deforma o volume do seu domínio.

Exemplo

- Calcule o volume de S quando

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + 2y + z \leq 2,\ 0 \leq x + y - z \leq \frac{4}{\pi},\ 0 \leq z \leq 1 \right\} .$$

Para determinar este volume há que calcular o integral

$$\iiint_S 1 \, dV .$$

A função integranda é a função contínua definida em S por $f(x, y) = 1$.
Da definição de S, parece natural considerar uma mudança de coordenadas definida por

$$u = x + 2y + z, \qquad v = x + y - z, \qquad w = z .$$

ou ainda, resolvendo o sistema anterior em ordem a x, y, z,

$$x = 3w + 2v - u, \qquad y = -2w - v + u, \qquad z = w .$$

Assim, ter-se-á $S^* :\ 1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq \frac{4}{\pi}$ e $0 \leq w \leq 1$.

A aplicação linear $T : S^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$T(u,v,w) = (-u+2v+3w, u-v-2w, w)$ é de classe C^1, injetiva,

$$JT(u,v,w) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det JT(u,v,w) = -1 \neq 0\,.$$

Logo T é uma mudança de coordenadas em S^* que é a pré-imagem de S, ou seja a imagem de S por T^{-1}:

$$S^* = \left\{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq \frac{4}{\pi},\ 0 \leq w \leq 1 \right\}\,.$$

Observe-se que S^* é um paralelepípedo. Da definição de f e T segue que $(f \circ T)(u,v,w) = 1\,.$
Usando o resultado sobre "Mudança de variáveis num integral triplo" vem (omitem-se os passos intermédios)

$$\iiint_S 1\, dV = \iiint_{S^*} (f \circ T)(u,v,w)\, |\det JT(u,v,w)|\, dudvdw$$
$$= \iiint_{S^*} 1\, du\, dv\, dw = \int_1^2 \left[\int_0^{4/\pi} \left[\int_0^1 1\, dw \right] dv \right] du = \frac{4}{\pi}.$$

- [Caso particular: coordenadas cilíndricas]

  Seja S^* uma região do espaço $r\,\theta\,z$ e S uma região do espaço xyz. Considere-se a mudança de coordenadas definida por

  $$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z).$$

  Se $T(S^*) = T(S)$ então

  $$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S^*} (f\circ T)(r,\theta,z)\,r\ \,dr\,d\theta\,dz.$$

Exemplo

- Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$

Dos integrais iterados, observa-se que

$$0 \le z \le 1,\ \ -1 \le y \le 1,\ \ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\,.$$

Isto é, o domínio de integração é a região cilíndrica

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \le z \le 1,\ \ -1 \le y \le 1,\ \ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$$

que pode ser descrita em coordenadas cilíndricas por

$$S^* = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

Para a mudança de coordenadas $T : S^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z)$ tem-se $\det JT(r,\theta,z) = r$.

A função integranda é a função contínua definida em S por $f(x,y,z) = z\,(x^2+y^2)$. Assim, $(f\circ T)(r,\theta,z) = z\,r^2$.

Fazendo, então, a mudança de variáveis no integral triplo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,(x^2+y^2)\ dx\,dy\,dz &= \iiint_S z\,(x^2+y^2)\ dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{S^*} (f\circ T)(r,\theta,z)\,r\ dr\,d\theta\,dz \\
&= \iiint_{S^*} z\,r^3\ dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\int_0^1 z\,r^3\ dr\right] dz\,d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\int_0^1 z\,r^3\ dr\right] dz\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\left[\int_0^1 r^3\ dr\right] dz\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^1 dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\,\frac{1}{4}\,dz\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 z\,dz\right] d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{8}\,\theta\Big|_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

- [Caso particular: coordenadas esféricas]

  Seja S^* uma região do espaço $\rho\theta\phi$ e S uma região do espaço xyz. Considere-se a mudança de coordenadas definida por

$$T(\rho,\theta,\phi) = (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

  Se $T(S^*) = S$, então

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S^*} (f\circ T)(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\;\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

  uma vez que

$$|\det JT(\rho,\theta,\phi)| = \left|-\rho^2 \operatorname{sen}\phi\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

(sen $\phi \geq 0$, já que $\phi \in [0,\pi]$).

Exemplo

- Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ e à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

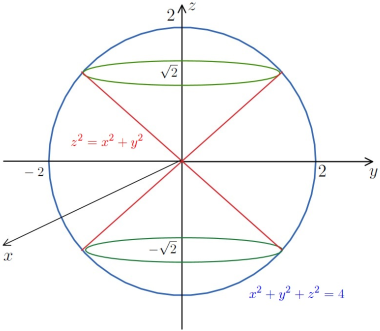
Seja S o sólido descrito no enunciado. O seu volume é dado, recorrendo a integrais triplos, por

$$Vol(S) = \iiint_S 1\, dV\,.$$

Antes de calcular o integral, procure-se visualizar qual é o sólido S. Determine-se a intersecção da esfera e do cone:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow 2z^2 = 4 \Longrightarrow z^2 = 2 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

Assim, a interseção das duas superfícies são duas circunferências de equação $x^2 + y^2 = 2$, uma à cota $z = -\sqrt{2}$ e outra à cota $z = \sqrt{2}$.



O sólido S é a região interior ao cone e limitada superior e inferiormente pela superfície esférica.

Este sólido é simétrico relativamente ao plano horizontal, pelo que bastará calcular o volume do sólido acima (ou abaixo) deste plano. Seja C o sólido acima do plano e calcule-se o volume de C recorrendo a coordenadas esféricas.
Usando este sistema de coordenadas, C pode ser descrito por

$$C^* : \; 0 \leq \rho \leq 2, \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \,.$$

Do resultado sobre “Mudança de variáveis num integral triplo” e o teorema de Fubini vem (omitem-se os passos intermédios)

$$
\begin{aligned}
Vol(C) &= \iiint_C 1\, dV = \iiint_{C^*} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\int_0^2 \rho^2\, d\rho\right] d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{2} d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\, \frac{8}{3}\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\right] d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right] d\theta = \frac{8-4\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = (16-8\sqrt{2})\frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$Vol(S) = 2\,Vol(C) = (32-16\sqrt{2})\frac{\pi}{3}\,.$$