6. Valores e vetores próprios

6.1 Introdução

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que o escalar λ é um valor próprio de A se existir um vetor não nulo $\boldsymbol{x}$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

O vetor $\boldsymbol{x}$ chama-se vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(1,0)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio 2.

Cálculo de valores próprios

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem n. Então, λ é valor próprio de A se e só se*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Demonstração: *Por definição, λ é valor próprio de A, se e só se*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

ou seja se e só se

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

$$\downarrow$$

sistema homogéneo com soluções além da nula.

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{car}(A - \lambda I) < n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A - \lambda I) = 0.$$

$\lambda = 0$?

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. A equação

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

chama-se a equação característica de A.

Exemplo: A equação característica da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, é

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Os valores próprios da matriz A são as raízes da sua equação característica, tendo-se neste caso

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. Ao polinómio em λ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

chama-se polinómio característico de A.

Exemplo: O polinómio característico da matriz anterior é

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda)(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda.$$

Observação: Se A é uma matriz quadrada de ordem n, o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do seu polinómio característico e consequentemente A terá n valores próprios, eventualmente complexos e não distintos.

Se nada for dito em contrário, dada uma matriz real estamos interessados em determinar apenas os seus valores próprios reais e vetores próprios em $\mathbb{R}^n$.

Se λ é um zero do polinómio característico com multiplicidade k, diz-se que o valor próprio λ tem multiplicidade algébrica k e escreve-se $\mathrm{ma}(\lambda) = k$.

Exemplo: Uma matriz A cujo polinómio característico seja

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^3(\lambda - 4)(\lambda^2 + 1),$$

tem 3 valores próprios reais distintos:

- 1, sendo $\mathrm{ma}(1) = 5$;
- -2, sendo $\mathrm{ma}(-2) = 3$;
- 4, sendo $\mathrm{ma}(4) = 1$.

A matriz A tem ordem 11 e admite ainda 2 valores próprios complexos i e $-i$.

Cálculo de vetores próprios

Os vetores próprios associados ao valor próprio λ obtêm-se resolvendo o sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

e considerando as soluções não nulas desse sistema.

Exemplo: Calculemos os vetores próprios associados ao valor próprio 1 da matriz A do exemplo da pg. 165. Temos de resolver o sistema homogéneo

$$(A - I)\,\boldsymbol{x} = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto das soluções deste sistema é $\{(0,0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 são todos os vetores da forma $(0,0,\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o conjunto

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$
$$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

contém, para além do vetor nulo, todos os vetores próprios da matriz A associados ao valor próprio λ. Este conjunto V_λ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (porquê?) e designa-se por subespaço próprio associado ao valor próprio λ.

A dimensão do subespaço vetorial V_λ designa-se por multiplicidade geométrica do valor próprio λ e denota-se por $\mathrm{mg}(\lambda)$.

Teorema: *Sendo λ um valor próprio de uma matriz A quadrada de ordem n, tem-se:*

1. $\mathrm{mg}(\lambda) = n - \mathrm{car}(A - \lambda I)$;
2. $\mathrm{mg}(\lambda) \geq 1$;
3. $\mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda)$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tem como valores próprios:

- 1 , sendo $\mathrm{ma}(1) = 2$;
- 3, sendo $\mathrm{ma}(3) = 1$;
- 4, sendo $\mathrm{ma}(4) = 1$.

Subespaço próprio associado a cada valor próprio:

- $V_1 = \langle(1, 0, 0, 0)\rangle$. Logo $\mathrm{mg}(1) = 1$;
- $V_3 = \langle(3, 0, 2, 0)\rangle$. Logo, $\mathrm{mg}(3) = 1$;
- $V_4 = \langle(10, 0, 6, 3)\rangle$. Logo, $\mathrm{mg}(4) = 1$.

6.2 Propriedades

Teorema: *Seja λ um valor próprio de uma matriz A e seja $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a λ. Então:*

1. *$\alpha\lambda$ é um valor próprio de αA, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio;*
2. *$\lambda - p$ é um valor próprio de $A - pI$, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio;*
3. *λ^k ($k \in \mathbb{N}$) é valor próprio de A^k, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio.*

Demonstração: *ver folhas de exercícios.*

Teorema: *Dada uma matriz quadrada A, tem-se:*

1. *A é invertível se e só se A não tem zero como valor próprio.*
2. *Se λ é um valor próprio de uma matriz invertível A e se $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio associado a λ, então λ^{-1} é um valor próprio de A^{-1} e $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio associado a esse valor próprio.*

Demonstração:

1. Como λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$, conclui-se que $\lambda = 0$ é v.p. de A se e só se $\det A = 0$ ou seja se e só se A é singular.

2. Sendo A invertível, temos

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$\Leftrightarrow I\,\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}).$$

Como $\lambda \neq 0$ (por 1.), segue-se que $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ ou seja que

$$A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Teorema: *As matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.*

Demonstração: *Imediata, porque os polinómios característicos de A e A^T são iguais,*

$$\det(A-\lambda I)=\det((A-\lambda I)^T)=\det(A^T-\lambda I^T)=\det(A^T-\lambda I).$$

Teorema: *Os valores próprio de uma matriz diagonal ou triangular, são os seus elementos diagonais.*

Demonstração: *imediata.*

Teorema: *Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem n e sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ os n valores próprios de A. Então:*

1. $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\det A$;
2. $\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr} A$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $p_\lambda = -4 + 4\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$;
- valores próprios: 2 (duplo), -1 e 1 (simples);
- $\det A = -4$;
- $\operatorname{tr} A = 4.$

Teorema: *Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios distintos de uma matriz A e sejam $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_1 e $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$ vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_2. Então, os vetores*

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$$

são linearmente independentes.

Demonstração: *Consideremos a combinação linear nula*

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r + \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s \boldsymbol{y}_s = \mathbf{0} \qquad (*)$$

(pretende-se provar que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$). Multiplicando ambos os membros de (*), à esquerda, pela matriz A e usando propriedades do produto de matrizes, obtém-se

$$\alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r A\boldsymbol{x}_r + \beta_1 A\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s A\boldsymbol{y}_s = \mathbf{0},$$

ou, atendendo a que $A\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \boldsymbol{x}_k; k = 1, \ldots, r$ e $A\boldsymbol{y}_\ell = \lambda_2 \boldsymbol{y}_\ell; \ell = 1, \ldots, s$:

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_1 \boldsymbol{x}_r + \beta_1 \lambda_2 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s \lambda_2 \boldsymbol{y}_s = \mathbf{0}. \qquad (**)$$

Demonstração (cont.): *Por outro lado, se multiplicarmos (*) por λ_2, vem*

$$\lambda_2\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_2\alpha_r\boldsymbol{x}_r+\lambda_2\beta_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\lambda_2\beta_s\boldsymbol{y}_s=\mathbf{0}. \qquad (***)$$

Subtraindo (***) de (**), obtém-se

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0},$$

o que implica que $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$, uma vez que $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ são linearmente independentes e $\lambda_1\neq\lambda_2$. Mas, sendo $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$, a equação (*) reduz-se a

$$\beta_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\beta_s\boldsymbol{y}_s=\mathbf{0},$$

o que, tendo em conta que $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_s$ são vetores linearmente independentes, implica que $\beta_1=\cdots=\beta_s=0$.

O teorema anterior generaliza-se para mais do que dois valores próprios.

Em particular, temos que vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

Exemplo: Consideremos novamente a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- $(1, 0, 0, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1;
- $(3, 0, 2, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3;
- $(10, 0, 6, 3)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 4.

Os vetores $(1, 0, 0, 0)$, $(3, 0, 2, 0)$ e $(10, 0, 6, 3)$ são linearmente independentes.

6.3 Matrizes diagonalizáveis

Definição: Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que A é semelhante a B se existe uma matriz P de ordem n, invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Note-se que, se A é semelhante a B, também B é semelhante a A (porquê?) e, por isso, também dizemos que A e B são semelhantes.

Teorema: *Se A e B são matrizes semelhantes, então têm o mesmo conjunto de valores próprios.*

Demonstração: *Seja P uma matriz não singular tal que $B = P^{-1}AP$. Então*

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda). \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que Ae B têm o mesmo polinómio característico, logo os mesmos valores próprios.

Exemplo: Consideremos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donde, os valores próprios de A são -2 e 4, sendo este último de multiplicidade 2.

Definição: Uma matriz quadrada A diz-se diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D uma matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que P diagonaliza A.

Teorema: *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:*

1. *A é diagonalizável, se e só se A tiver n vetores próprios linearmente independentes.*
2. *Se A tiver n vetores próprios linearmente independentes $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (não necessariamente distintos) e se for P a matriz cujas colunas são os vetores próprios $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, então P diagonaliza A; mais precisamente, tem-se*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Corolário: *Se uma matriz A quadrada de ordem n tiver n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.*

Note-se que este corolário estabelece uma condição suficiente, mas não necessária, para que A seja diagonalizável.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem os valores próprios 0 (simples) e 1 (duplo). Além disso, tem-se (verifique)

- $V_0 = \langle (1,0,0) \rangle$
- $V_1 = \langle (1,1,0), (2,0,1) \rangle$ e $(1,1,0), (2,0,1)$ são l.i.

Então, A tem três vetores próprios l.i.: $(1,0,0), (1,1,0), (2,0,1)$ e é, portanto, diagonalizável. A matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A.

Corolário: *Uma matriz quadrada de ordem n cujos valores próprios sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (distintos dois a dois) é diagonalizável se e só se*

$$\mathrm{mg}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{mg}(\lambda_r) = n.$$

Exemplo: No exemplo anterior, tínhamos uma matriz quadrada de ordem 3 com dois valores próprios distintos, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, sendo

$$\mathrm{mg}(\lambda_1) + \mathrm{mg}(\lambda_2) = 1 + 2 = 3.$$