Universidade do Minho | MiEInf
Dep. Matemática | 2018/2019

Lógica EI

Exame de recurso — 19 de junho de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $(p_1 \wedge p_2)[\varphi/p_1]$ tem pelo menos 3 subfórmulas.	□	□
2.	Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \vee \psi$ é contradição, então φ e ψ são ambas contradições.	□	□
3.	Para qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é inconsistente, então, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existem derivações em DNP de φ a partir de Γ.	□	□
4.	Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de relação binário R, x_0 é livre para qualquer termo em $\exists x_0 \mathsf{R}(x_0, x_0) \wedge \exists x_1 \neg \mathsf{R}(x_1, x_2)$.	□	□
5.	Para todo o tipo de linguagem L e todo o conjunto não vazio e finito D, se L contém duas constantes, então o número de estruturas de tipo L com domínio D é par.	□	□
6.	Para todo o tipo de linguagem L contendo o símbolo de relação binário $=$, a fórmula $x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$ é válida em qualquer estrutura cujo domínio é um conjunto singular.	□	□

Grupo II

Responda a cada uma das 4 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, sem apresentar justificações.

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \times\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(\times) = 2$ $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}, \overline{\ })$ a estrutura de tipo L tal que:

$$\begin{array}{ll} \overline{\mathsf{c}} = 2 & \overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\} \\ \overline{\mathsf{s}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n) = n + 1 & \overline{=} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m = n\} \\ \overline{\times} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\times}(m, n) = m \times n & \end{array}$$

1. Dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente 3 subtermos.

   Resposta:

2. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 3i$. Indique $\mathsf{s}(x_0) \times \mathsf{s}(x_2 \times \mathsf{c})\ [a]$.

   Resposta:

3. Considere a fórmula do Cálculo Proposicional $\varphi = \neg p_2 \vee ((p_1 \wedge \neg p_3) \leftrightarrow p_2)$. Dê exemplo de uma valoração v tal que $v(\varphi) = 0$.

   Resposta:

4. Seja φ a fórmula do Cálculo Proposicional $(p_1 \vee \neg p_2) \to p_3$. Indique uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula φ.

   Resposta:

Grupo III

Responda às 5 questões deste grupo na folha de exame.

1. Considere as seguintes afirmações:

   - Se Joana é engenheira, então usa óculos.
   - Joana gosta de computadores se e só se: não usa óculos ou é engenheira.
   - Joana não gosta de computadores mas usa óculos.

   (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

   (b) A afirmação "Joana não é engenheira" é ou não uma consequência das três afirmações acima? Justifique.

2. Considere a função $f : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ definida recursivamente por:

   (i) $f(p_i) = p_i \vee \perp \quad (i \in \mathbb{N}_0)$. (ii) $f(\perp) = \perp$.

   (iii) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$. (iv) $f(\varphi \square \psi) = (f(\varphi) \wedge f(\varphi)) \square f(\psi) \quad (\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\})$.

   (a) Determine $f(p_1 \to \neg p_5)$. Justifique.

   (b) Prove, por indução estrutural, que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$.

3. Construa uma derivação que mostre que $(p_1 \leftrightarrow p_2) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_2)$ é um teorema de DNP.

4. Considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \times\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ e a estrutura $E = (\mathbb{N}, \overline{\ })$ de tipo L do Grupo II. Seja φ a fórmula $\mathsf{P}(x_4) \vee \forall x_0 \, (\mathsf{P}(x_0) \to \exists x_1 \, (x_0 = \mathsf{c} \times x_1))$ de tipo L.

   (a) Prove que φ é válida em E.

   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.

5. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\varphi)$. Prove que $\varphi \wedge \exists x \psi \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Cotações	I	II	III
	6	1+1+1+1	2,5+2,5+1,5+2,5+1