Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Lic. Engenharia Informática
2014/2015

Tópicos de Matemática Discreta

exame da época especial — 1 de setembro de 2015 — duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira:
   (a) As fórmulas proposicionais $p_0 \to \neg p_1$ e $\neg(p_0 \wedge p_1)$ são logicamente equivalentes.
   (b) Para quaisquer proposições p e q, para provar que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, basta provar que se p é verdadeira, então q é verdadeira.

2. Considere os conjuntos $A = \{1, \{4\}\}$ e $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge 2n < 5\}$. Justificando,
   (a) determine $A \times B$;
   (b) determine $\mathcal{P}(A \setminus B)$.

3. (a) Dê um exemplo de conjuntos A, B e C de tal modo que a afirmação $A \cap B \subseteq C$ seja verdadeira e, no entanto, a afirmação $A \subseteq C \vee B \subseteq C$ seja falsa. Justifique.
   (b) Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq C \vee B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $n! \geq 2^n$, para todo $n \geq 4$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x+2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$
   (a) Indique, sem justificar, $f\big(]-3,0]\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{-4,0,4\})$.
   (b) Diga, justificando, se f é injetiva.

6. Seja R a relação de equivalência em $A = \{-3, 1, 2, 3, 5, 11\}$ definida por: xRy se e só se $x - y$ é múltiplo de 3, para quaisquer $x, y \in A$.
   (a) Indique, sem justificar, $[3]_R$ e A/R.
   (b) Mostre que, de facto, R é uma relação simétrica.

7. Sejam $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $X = \{e, f\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ em que
$$\leq = \{(a,a),(a,c),(a,e),(a,f),(b,b),(b,e),(c,c),(c,e),(c,f),(d,d),(d,f),(e,e),(f,f)\}.$$
   (a) Represente o c.p.o. $(A, \leq)$ através de um diagrama de Hasse.
   (b) Indique, sem justificar, o conjunto dos minorantes de X.
   (c) Dê exemplo, caso exista, de um subconjunto próprio Y de A tal que $(Y, \leq)$ tenha pelo menos 3 elementos e seja um reticulado. Justifique a sua resposta.

8. Seja $G = (V, E)$ um grafo que admite $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ como matriz de adjacência.
   (a) Desenhe G.
   (b) Indique, sem justificar, o grau de cada um dos vértices de G.
   (c) Diga, justificando, se a afirmação "G é uma árvore" é verdadeira.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	1,75+1,75	1 +1	1,5 +1,5	1,75	1+1	1,25+1	1+0,75+1	1+0,75+1