

## Tópicos de Matemática Discreta

————— exame de recurso — 12 de fevereiro de 2014 ————— duração: 2 horas

**exercício 1.** Considere a fórmula proposicional  $\varphi : ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ . Diga, justificando, se são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (a) A fórmula  $\varphi$  é uma tautologia.
- (b)  $\varphi$  toma o valor lógico verdadeiro sempre que  $p \rightarrow q$  toma o valor lógico falso.

**exercício 2.** Considere os conjuntos  $A = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ é não vazio e todo o seu elemento é par}\}$ ,  $B = \{1, 2, 4\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \in B\}$ .

- (a) Determine, justificando,  $C$ .
- (b) Determine, justificando,  $(B \setminus C) \times C$ .
- (c) Determine, justificando,  $\mathcal{P}(B) \setminus A$ .

**exercício 3.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Mostre que  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ .

**exercício 4.** Prove, por indução, que  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**exercício 5.** Considere a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida da seguinte forma

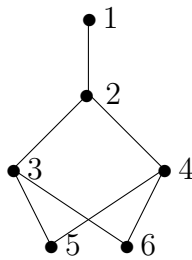
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

- (a) Determine  $f(\{1, 2, 4, 6, 8\})$ . Justifique.
- (b) Determine  $f^{\leftarrow}(\{-2\})$  e  $f^{\leftarrow}(\mathbb{N})$ . Justifique a sua resposta.
- (c) Diga, justificando, se  $f$  é sobrejetiva.

**exercício 6.** Seja  $A = \{1, 3, 6, 8, 9, 11\}$  e considere a relação de equivalência  $R$  em  $A$  definida por  $a R b$  se  $a$  e  $b$  têm o mesmo número de divisores naturais.

- (a) Determine  $A/R$ .
- (b) Quantas relações de equivalência em  $A$  têm uma classe de equivalência com 5 elementos? Justifique.

**exercício 7.** Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $X = \{2, 3, 4\}$  e  $Y = \{3, 4, 6\}$ . Considere o c.p.o.  $(A, \leq)$  com o seguinte diagrama de Hasse associado:



- (a) Indique os elementos maximais e minimais de  $A$ .
- (b) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de  $X$  em  $A$ .
- (c) Indique, caso existam, o supremo e o máximo de  $Y$  em  $A$ .

**exercício 8.** Dê exemplo, caso exista, de:

- (a) conjuntos não vazios  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais que  $(A \setminus B) \cap C = A \cap C$ ;
- (b) subconjuntos não vazios  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{Z}$  tais que a proposição  $\forall_{a \in A} (a > 0 \rightarrow (\exists_{b \in B} 2^b < a))$  seja verdadeira;
- (c) um grafo que não seja bipartido e que contenha um caminho elementar de comprimento 6;
- (d) um grafo não conexo com 3 vértices, dos quais um é um vértices de grau 2.

**Cotação:**

- |                |                  |                  |                |
|----------------|------------------|------------------|----------------|
| 1. (2 valores) | 2. (3 valores)   | 3. (1,5 valores) | 4. (2 valores) |
| 5. (3 valores) | 6. (2,5 valores) | 7. (3 valores)   | 8. (3 valores) |