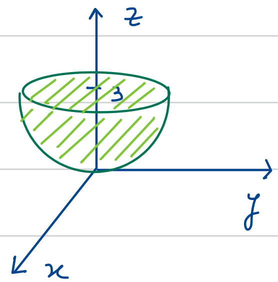
Folha 8

Os exercícios 1.a), 8.a), 9 e 13 encontram-se resolvidos nos diapositivos.
Segue-se a resolução dos exercícios propostos.

1. Calcule os seguintes integrais:

   (d) $\iiint_{\mathcal{D}} x\, dV$, com $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.



Consideramos a interseção de $\mathcal{D}$ com o plano $z=3$:
esta interseção é o círculo $x^2+y^2 \leq 3$ com cota 3.
Este círculo pode ser descrito como o conjunto:

(x,y): $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3-y^2} \leq x \leq \sqrt{3-y^2}$

Portanto, $\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3},\ -\sqrt{3-y^2} \leq x \leq \sqrt{3-y^2} \text{ e } x^2+y^2 \leq z \leq 3 \right\}$

Logo: $$\iiint_{\mathcal{D}} x\, dV = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{3} x \, dz\, dx\, dy =$$

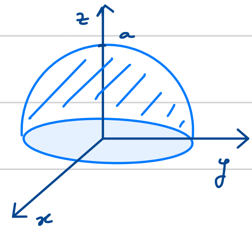
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} xz \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=3} dx\, dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} x\,(3-(x^2+y^2))\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} 3x - x^3 - y^2 x \, dx\, dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-y^2)\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-\sqrt{3-y^2}}^{x=\sqrt{3-y^2}} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 0 \, dy = 0.$$

Note que era expectável que $\iiint_D x\,dv = 0$, uma vez que a região de integração é simétrica em relação ao plano $x=0$ e $f(x,y,z) = x$ é tal que $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$.

2. Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z = a - x^2 - y^2$, com $a > 0$, e pelo plano XOY.



Seguindo um raciocínio semelhante ao do exercício anterior podemos escrever:

$S: \; 0 \le z \le a - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 \le a$

$0 \le z \le a - x^2 - y^2, \quad -\sqrt{a-x^2} \le y \le \sqrt{a-x^2}$ e $-\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$

Logo: $\text{vol}(S) = \iiint_S 1\,dv = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} 1 \; dz\,dy\,dx.$

5. Calcule, mudando se necessário a ordem de integração,

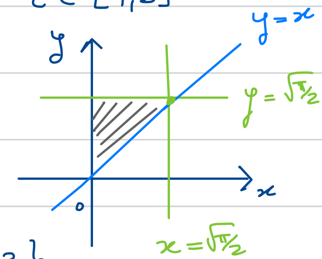
$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 \; dz\,dy\,dx.$$

Seja $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le x \le \sqrt{\pi/2}, \; x \le y \le \sqrt{\pi/2}, \; 1 \le z \le 3 \}$ o domínio de integração.

A função $g(y) = \operatorname{sen}(y^2)$ tem primitiva (pois é contínua) mas tal primitiva não é combinação de funções elementares.

Para calcular $\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen}(y^2)\, dV$ é então necessário trocar a ordem de integração.

Basta analisar a variação de (x,y) mantendo $z \in [1,3]$.



$$0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2} \quad e \quad x \leq y \leq \sqrt{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\pi/2} \quad e \quad 0 \leq x \leq y$$

Logo:

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\ 0 \leq x \leq y,\ 1 \leq z \leq 3 \right\}.$$

Assim:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen}(y^2)\, dV = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \int_1^{3} \operatorname{sen}(y^2)\, dz\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} 2 \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = \underline{1}.$$

7. Considerando $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0,\ \sqrt{x+y} + 1 \leq z \leq 2\right\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ (u, v, w) &\longmapsto (u^2, v^2, w) \end{aligned}$$

Começamos por identificar o conjunto $\mathcal{D}^*$ tal que $\Phi(\mathcal{D}^*) = \mathcal{D}$

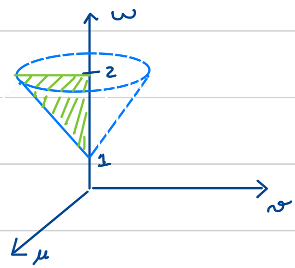
Como estamos a fazer $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w$ então:

$u \geq 0$, $v \geq 0$ e $\sqrt{u^2+v^2}+1 \leq w \leq 2$

Observamos que: $w \geq 1$ e $w = 1+\sqrt{u^2+v^2} \iff (w-1)^2 = u^2+v^2$

Portanto: $D^* = \{(u,v,w) : u \geq 0,\ v \geq 0,\ (w-1)^2 \geq u^2+v^2 \text{ e } w \leq 2\}$

A aplicação Φ é claramente injetiva e de classe C^1



$$J\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det J\Phi(u,v) = 4uv$

Assim $\det J\Phi(u,v) = 4uv \iff u=0 \vee v=0$

Portanto $\det J\Phi(u,v) \neq 0$ no interior de D^*.

Pelo teorema de mudança de variável para integrais temos

$$\iiint_D f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_{D^*} (f \circ \Phi)(u,v,w)\, |\det J\Phi(u,v)|\, d(u,v,w)$$

$$= \iiint_{D^*} \sqrt{u^2v^2}\; 4uv\, d(u,v,w) = \iiint_{D^*} 4u^2v^2\, d(u,v,w)$$

Para o cálculo deste integral recorremos a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} u = R\cos\theta \\ v = R\operatorname{sen}\theta \\ w = w \end{cases}$$

Por observação da figura vemos que:

$0 \leq R \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

e que w verifica: $1+R \leq w \leq 2$

Logo: $$\iiint_{D^*} 4u^2v^2\, d(u,v,w) = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{1+R}^2 4\,(R\cos\theta)^2(R\operatorname{sen}\theta)^2 R\; dw\, dR\, d\theta =$$

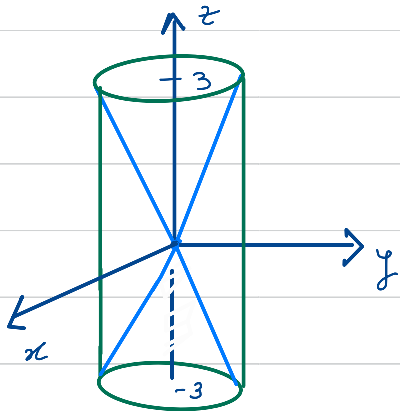
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\, R^5(1-R)\,dR = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\left[\frac{R^6}{6}-\frac{R^7}{7}\right]_{R=0}^{R=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = -\frac{1}{42}\int_0^{\pi/2}\cos^2(2\theta)-1\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{42}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(4\theta)+1}{2}-1\,d\theta = -\frac{1}{84}\int_0^{\pi/2}\cos(4\theta)-1\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{84}\left[\frac{\mathrm{sen}(4\theta)}{4}-\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{168}.$$

12. Seja $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2+y^2 \le 9\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.



O sólido apresentado:

- é interior ao cilindro $x^2+y^2=9$
- é exterior ao (duplo) cone $z^2=x^2+y^2$
- verifica $-3\le z\le 3$ (pois $z^2\le 9$)

Este sólido é simétrico em relação ao plano $z=0$ pelo que basta calcular o volume de $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2\le x^2+y^2\le 9 \text{ e } z\ge 0\}$.

Coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z\end{cases}$$

De $z^2 \le x^2+y^2 \le 9$ e $z \geq 0$ obtemos: $z \le R \le 3$.

Logo $W = \{ (R,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3,\ z \le R \le 3 \}$

Portanto:

$$\text{vol}(W) = \iiint_W 1 \, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_z^3 R \, dR\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left.\frac{R^2}{2}\right|_{R=z}^{R=3} dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{9}{2} - \frac{z^2}{2} \, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left.\frac{9}{2}z - \frac{z^3}{6}\right|_{z=0}^{z=3} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{27}{2} - \frac{9}{2}\, d\theta = 18\pi.$$

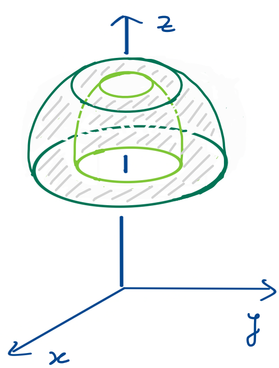
Finalmente: $\text{vol}(V) = 2\,\text{vol}(W) = 36\pi$.

14. Seja a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas condições $1 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{3}$.

 (a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

 (b) Calcule $\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} d(x,y,z)$.

a Fixado $\rho = \rho_0$ com $1 \le \rho_0 \le 2$, a região $\rho = \rho_0$ como $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{3}$ corresponde à porção da superfície esférica $\rho = \rho_0$ compreendida entre os "paralelos" $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\phi = \frac{\pi}{3}$.



b. Recordando que em coordenada esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

então $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ e $|\det J_T| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$ temos que:

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} d(x,y,z) = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{\rho^3}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{\rho^3}\Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\pi/3} d\theta\, d\rho = \int_1^2\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{\rho^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) d\theta\, d\rho$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\, 2\pi \int_1^2 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \frac{\sqrt{3}-1}{3}\pi \int_1^2 3\rho^2 e^{\rho^3} d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{3}\pi \; e^{\rho^3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-1)(e^8-e).$$

17. Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^3$ de raio $r > 0$.

Seja $\mathcal{E}_R$ a esfera de centro na origem e raio R.
Em coordenadas esféricas $\mathcal{E}_R$ escreve-se

$$\mathcal{E}_R = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi\}$$

Logo: $\operatorname{vol}(\mathcal{E}_R) = \iiint_{\mathcal{E}_R} 1 \, dV =$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \int_0^R \int_0^{2\pi} -\rho^2 \cos\phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2\rho^2 \, d\theta \, dR = \int_0^R 4\pi \rho^2 \, d\rho = 4\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3 .$$