Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2019/2020

Exercício 10.1 Seja $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$. Determine o valor médio da função e, se possível, o valor $c \in [-1,2]$ tal que $f(c)$ é o valor médio da função.

Exercício 10.2 Seja f uma função real contínua tal que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = 8$. Mostre que a função f toma o valor 4 em pelo menos um ponto do intervalo $[1,3]$.

Exercício 10.3 Determine a área da região limitada por $y = \sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x = 4$ e pelo eixo das ordenadas.

Exercício 10.4 Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva de $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \le y \le -x + 2\}$.

c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y = -x^2 + \frac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2 - 1$.

d) A é o conjunto de todos os pontos (x,y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \le y \le x + 1$.

Exercício 10.5 Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

a) $x = 0,\ x = 1,\ y = 3x,\ y = -x^2 + 4;$

b) $x = 0,\ x = \pi/2,\ y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x;$

c) $x = -1,\ y = |x|,\ y = 2x,\ x = 1;$

d) $y = -x^3,\ y = -(4x^2 - 4x);$

e) $x = 0,\ x = 2 - y - y^2;$

f) $y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2.$

Exercício 10.6 Defina a reta horizontal ($y = k$) que divide a área da região entre $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

Exercício 10.7 Seja A a área limitada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b, b > 1$. Calcule A e $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} A$.

Exercício 10.8 Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos A e B indicados:

a) $y = \frac{2}{3}x^{2/3},\ A = (1, \frac{2}{3}),\ B = (8, \frac{8}{3});$

b) $y = 5 - \sqrt{x^3},\ A = (1,4),\ B = (4,-3);$

c) $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1,\ A = (-1,7),\ B = (-8,25);$

d) $y = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3},\ A = (2, \frac{67}{24}),\ B = (3, \frac{109}{12}).$

Exercício 10.9 Considere a curva definida por $y = x^{2/3}$.

a) Esboce o arco desta curva, entre $x = -1$ e $x = 8$.

b) Calcule o comprimento da curva da alínea a.

Exercício 10.10 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$; c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$; e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$; g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln x}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$; d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$; f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$; h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Exercício 10.11 Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ é convergente se $r > 1$ e é divergente se $r \leq 1$.

Exercício 10.12 Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx$ é convergente se $r > 0$ e divergente se $r \leq 0$. (Sug.: comece por estudar o caso $r = 0$.)

Exercício 10.13 Seja $\mathcal{D}$ a região definida por $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ e o eixo das abcissas.

a) Esboce $\mathcal{D}$ e calcule, se possível, a área de $\mathcal{D}$.

b) Determine, se possível, o comprimento da curva que limita $\mathcal{D}$ superiormente.

Exercício 10.14 Indique, justificando, se cada um dos seguintes integrais é convergente ou divergente.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

Exercício 10.15 Seja f uma função tal que $\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$. O que se pode, nestas condições, dizer sobre $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$?

Exercício 10.16 Estude a natureza dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^1 x\,\ln x\,dx$; f) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

Exercício 10.17 Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Indique o domínio de f e estude a natureza do integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Exercício 10.18 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Sendo $a > 0$, indique, justificando, quais dos seguintes integrais é convergente:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,f(x)\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a+x)\,dx$;

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a\,x)\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} [a+f(x)]\,dx$.