Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2019/2020

Exercício 6.1 Verifique se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1\\ 2-x, & x>1\end{cases},$$

é derivável em $x=1$.

Exercício 6.2 Estude a derivabilidade da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Exercício 6.3 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$.

a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1;

c) Escreva uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

Exercício 6.4 Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável em $x=2$ tal que $f(2)=3$ e $f'(2)=1$. Calcule $f(-2)$ e $f'(-2)$ quando:

a) f é par;

b) f é ímpar.

Exercício 6.5 Considere a função $g:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3+x^2}{\operatorname{sen} x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\,.\end{cases}$$

a) Calcule $g'(0)$;

b) Justifique que g é uma função derivável;

c) Identifique a função derivada g';

d) Justifique que g é uma função contínua.

Exercício 6.6 Para cada uma das funções f que se segue, identifique os pontos a onde f é derivável e obtenha uma expressão para obter a derivada de f nos pontos identificados:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$;

c) $f(x) = x \ln x$;

d) $f(x) = x^3$;

e) $f(x) = 3^x$;

f) $f(x) = x^x$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

i) $f(x) = x^3 e^x$;

j) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$;

k) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

l) $f(x) = \sqrt{x} + x^\pi$;

m) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$;

n) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

o) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$;

p) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

Exercício 6.7 Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções, indicando os respetivos domínios:

a) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$;

b) $f(x) = \arccos x + \operatorname{argsh} x$;

c) $f(x) = \cos(\ln x)$;

d) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$;

e) $f(x) = \operatorname{ch}(3x)$;

f) $f(x) = \operatorname{sh}(x^2 + 1)$;

g) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$;

h) $f(x) = \ln(\operatorname{ch}(x + 1))$;

i) $f(x) = \ln \sqrt{1 + \cos^2 x}$;

j) $f(x) = \arccos(\operatorname{sh} x)$;

k) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$;

l) $f(x) = \operatorname{argsh}(\cos x)$

m) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

n) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$;

o) $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

p) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;

q) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

r) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

Exercício 6.8 Identifique funções f e g deriváveis tais que a derivada da função composta $h = g \circ f$ seja:

a) $h'(x) = 2xe^{x^2+1}$;

b) $h'(x) = -3\operatorname{sen} x(\cos x)^2$.