1.3 Limite e continuidade

Limite de uma função

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D'$.

- [Limite] O número real ℓ é o limite segundo Cauchy de $f(x)$, quando x tende para a, e escreve-se

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

quando

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \; (x \in D \;\wedge\; 0 < |x-a| < \varepsilon) \Longrightarrow \; |f(x) - \ell| < \delta.$$

Observação

- $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell| < \delta$
  ler-se-á, por exemplo, "dado um número positivo δ,

  arbitrariamente pequeno, existe um número real positivo ε, suficientemente pequeno, tal que, se $x \in D$, $x \neq a$ se a distância de x a a é menor do que ε, então a distância do correspondente $f(x)$ a ℓ é menor do que δ".
- A definição de limite apresentada permite calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ com $a \in D' \setminus D$, ou seja, o ponto a pode não pertencer ao domínio de f.
- Caso $a \in D \cap D'$, o $\lim_{x \to a} f(x)$ não tem de ser $f(a)$; o valor que f toma em a é irrelevante no cálculo do limite, já que só são considerados pontos do domínio de f próximos de a mas diferentes de a.

Resultados sobre limites

Teorema (Unicidade do limite)

Sejam $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \ell_2 \qquad \text{então} \qquad \ell_1 = \ell_2 \,.$$

Teorema

Seja $a \in \mathbb{R}$.

- Se k é uma constante então $\lim\limits_{x \longrightarrow a} k = k$;
- $\lim\limits_{x \longrightarrow a} x = a$.

Teorema

Sejam $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e f é limitada em $D \setminus \{a\}$ então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Teorema (Enquadramento)

Sejam $f, g, h\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$ tais que

$$h(x) \le f(x) \le g(x)\,, \quad \forall x \in D\backslash\{a\}.$$

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ então também

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell\,.$$

Teorema (Aritmética dos limites)

Sejam f, g: $D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Suponha-se que existem

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{e} \quad m = \lim_{x\to a} g(x).$$

Então:

- $\lim\limits_{x\to a} (f \pm g)(x) = \ell \pm m;$
- $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \ell m;$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m}\,,$ desde que $m \neq 0$.

Limites laterais

Seja f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Seja $a \in D'_+$. O número real ℓ diz-se o limite lateral à direita de $f(x)$ quando x tende para a (por valores superiores a a) e escreve-se
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$
quando
$$\forall \delta > 0\,,\ \exists \varepsilon > 0 :\ (\,x \in D \wedge 0 < x - a < \varepsilon\,) \implies |f(x) - \ell\,| < \delta$$
- Seja $a \in D'_-$. O número real ℓ diz-se o limite lateral à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a (por valores inferiores a a) e escreve-se
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$
quando
$$\forall \delta > 0\,,\ \exists \varepsilon > 0 :\ (\,x \in D \wedge -\varepsilon < x - a < 0\,) \implies |f(x) - \ell\,| < \delta$$

Teorema

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in (D'_- \cap D'_+)$. Então

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x)$$

se e só se existem e são iguais a ℓ os correspondentes limites laterais, isto é,

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \iff \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \right)$$

- Para os limites laterais valem, com as devidas adaptações, os resultados anteriores sobre o limite.

Exemplo

1. Não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

   De facto, os limites laterais são diferentes pois

   $$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

   e

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

   pelo que o limite proposto não existe.

Obervação

- São exemplos de casos em que não existe

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

  - $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

  - $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional;} \\ 0, & x \text{ é irracional} \end{cases} \qquad \text{e} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Limites no infinito e limites infinitos

Seja $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- O que acontece se D for ilimitado, à direita ou à esquerda, e se fizer $x \in D$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$?
  Qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell?$$

- Dado $a \in D'$, qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty?$$

- [Limites no infinito] Seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se D é um conjunto não majorado, diz-se que:

  - $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $+\infty$, e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

    quando

    $$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (\, x \in D \,\wedge\, x > A\,) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta$$

  - $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $-\infty$, e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell,$$

    quando

    $$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (\, x \in D \,\wedge\, x < -A\,) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta$$

- [Limites infinitos] Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Diz-se que:

  - $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$$

    quando

    $$\forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 :\ (x \in D \,\wedge\, 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies\ f(x) > A$$

  - $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para a, e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$$

    quando

    $$\forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 :\ (x \in D \,\wedge\, 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies\ f(x) < -A$$

- [Indeterminações] Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty,$$

o que se pode dizer sobre o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]?$$

  - Diz-se que $+\infty + (-\infty)$ é uma indeterminação.

  - Outras indeterminações são:

$$0 \cdot \infty, \; \frac{\infty}{\infty}, \; \frac{0}{0}, \; 1^{\infty}, \; 0^0, \; \infty^0.$$

Continuidade

- [Função contínua] Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$.
A função f é contínua em $a \in D$ quando
  - ★ a é ponto isolado de D
  ou
  - ★ $a \in D'$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

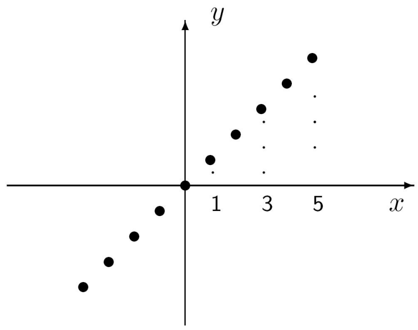
- A função f é contínua à direita em $a \in D$ quando $a \in D'_+$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

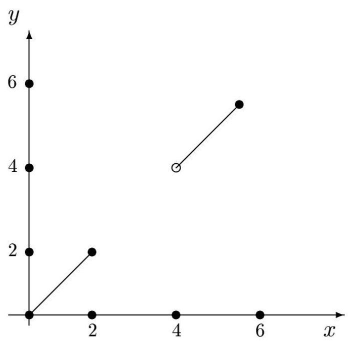
- A função f é contínua à esquerda em $a \in D$ quando $a \in D'_-$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo

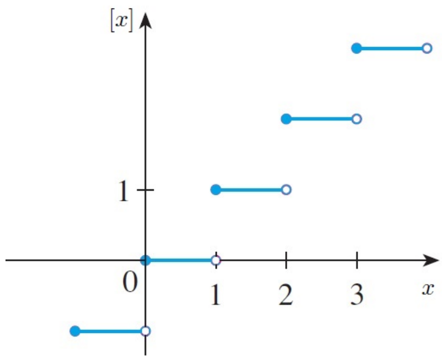
1. As funções a seguir são contínuas.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [0,2] \cup \,]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





2. [Função característica] A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ e denotada por $[x]$



- A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Para cada inteiro $z \in \mathbb{Z}$, a função é contínua à direita e descontínua à esquerda.

- Diz-se que:
  - $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a quando $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$;
  - $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b quando $f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$;
  - $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em D quando f é contínua em todo $x \in D$.

Descontinuidades

Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Diz-se que $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de f, ou que f possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$, quando se verificar uma das duas condições seguintes:
  - $a \in D'$ e não existe $\lim_{x\to a} f(x)$;
  - $a \in D'$ existe $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ e $\ell \neq f(a)$.

Destacam-se dois tipos particulares de descontinuidade:

- descontinuidade removível, quando

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a)\,;$$

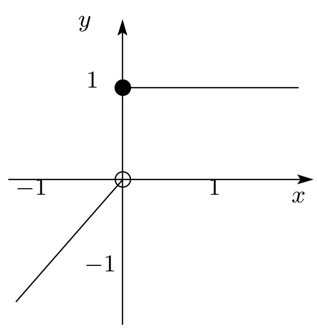
- descontinuidade de essencial, quando não existe limite. Em particular, diz-se que uma descontinuidade essencial é de salto quando

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2\,.$$

Exemplo: descontinuidades

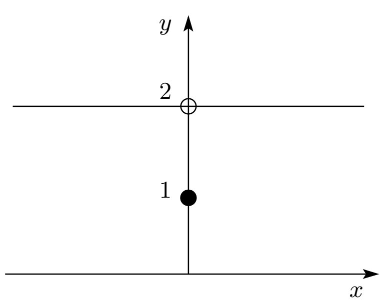
Descontinuidade de salto na origem

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0 \\ x, \ x < 0 \end{cases}$$



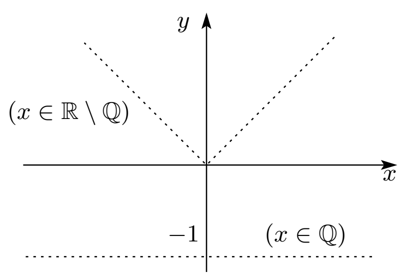
Descontinuidade removível na origem

$$g(x) = \begin{cases} 2, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$$



Descontinuidade na origem que nem é de salto nem removível

$$h(x) = \begin{cases} |x|, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -1, \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



Resultados sobre continuidade pontual

- [Aritmética das funções contínuas]
  Sejam $f,\, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então as funções
  - $f+g$, $\alpha\, f$ e fg são contínuas em a;
  - $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a desde que $g(a) \neq 0$.

- [Continuidade da função composta]
  Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D) \subset B$.
  Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

- [Continuidade da função inversa]
  Se I e J são intervalos reais e $f : I \longrightarrow J$ é uma função bijetiva e contínua, então f^{-1} existe e é contínua.

Exemplo

Aqui $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Composição de duas funções contínuas:: $g \circ f$ é contínua:

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^3 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 8x^3, \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Composição de uma função contínua, f, e uma função descontínua, g:: $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Composição de uma função descontínua, f, e uma função contínua, g:: $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = 5 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Composição de duas funções descontínuas:: $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) \neq 5 \\ 0, & f(x) = 5 \end{cases} = 1, \text{ pois } f(x) \neq 5 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

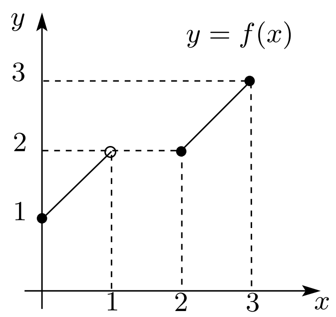
Exemplo

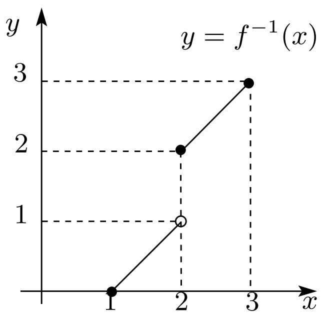
1. Haverá contradição com o teorema da continuidade da função inversa?

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

f é contínua

f^{-1} é descontínua





Resultados sobre funções contínuas

Teorema (de Cantor)

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se D é fechado e limitado então $f(D)$ é fechado e limitado.

Teorema (de Weierstrass)

Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e D é fechado e limitado então f é limitada e atinge os seus extremos em D, isto é,

$$\exists\, a, b \in D : \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,, \quad \forall x \in D$$

Teorema (de Bolzano)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f([a, b])$ contém o intervalo fechado de extremos $f(a)$ e $f(b)$.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então

$$\exists\, c \in \,]a, b[\; : \quad f(c) = 0$$