tópicos de matemática discreta | MIEInf

cláudia mendes araújo | suzana mendes gonçalves

UM | 2019/2020

relações binárias

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

definição 5.1

Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos **relação binária de A em B** a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Quando $A = B$, dizemos que R é uma relação binária em A.

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a **está relacionado com** b **por R** e escrevemos $a\,R\,b$.

Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not{R}\, b$ e dizemos que a **não está relacionado com** b **por R**.

relações binárias

exemplo 5.2

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. São exemplos de relações binárias de A em B os conjuntos

i. $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7)\}$;

ii. $S = \{(2, 3)\}$;

iii. $\emptyset$;

iv. $A \times B$.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$. Então, $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a\, R\, b \quad \leftrightarrow \quad b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

relações binárias

3 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Então,

i. $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ não é uma relação binária de A em B, visto que $S \not\subseteq A \times B$.

4 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$.

Se R é a relação binária de A em B definida por $a\,R\,b$ se e só se $a|b$ (ou seja, a divide b), então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}$$

Facilmente verificamos que $2 \not R\, 9$, pois $2 \nmid 9$. No entanto, $(2, 9) \in A \times B$. Por outro lado, apesar de $5|10$, temos que $5 \not R\, 10$, pois $(5, 10) \notin A \times B$.

relações binárias

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n \times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{n \times m}$ elementos. Assim, **existem $2^{n \times m}$ relações binárias de A em B**.

Os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

definição 5.3

Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(a,a) : a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x,y) : x,y \in A\}$$

são relações binárias em A. A id_A chamamos **relação identidade em A** e a ω_A chamamos **relação universal em A**.

relações binárias

definição 5.4

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chamamos **domínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b \in B}\ (a, b) \in R\};$$

Chamamos **imagem** ou **contradomínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a \in A}\ (a, b) \in R\}.$$

exemplo 5.5

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Então,

i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$;

ii. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$;

iii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

relações binárias

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

exemplo 5.6

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Seja R a relação de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$ e seja $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

i. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\} = \mathrm{Dom}(S)$;
ii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Im}(S)$;
iii. $(2, 5) \in R$ mas $(2, 5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

relações binárias

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

exemplo 5.7

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e as relações $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ e $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

i. $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

iii. $R \setminus S = \{(2, 5)\}$ é uma relação binária de A em B.

relações binárias

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

definição 5.8

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chama-se **relação inversa de** R, e representa-se por R^{-1}, a relação de B em A definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

exemplo 5.9

Consideremos, de novo, os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Uma vez que $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

relações binárias

proposição 5.10

Sejam A, B conjuntos e R e S relações binárias de A em B. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

2 | $(R^{-1})^{-1} = R$.

3 | Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

definição 5.11

Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D. Chama-se **relação composta de S com R**, e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de A em D definida por

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \ ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, então $S \circ R = \emptyset$.

relações binárias

exemplo 5.12

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, 2, 3, 4\}$ e $D = \{0, 1, 3, 5\}$. Consideremos as relações binárias

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(0, 1), (3, 0), (3, 3), (3, 5), (4, 0)\} \subseteq C \times D.$$

Tem-se

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0)\}$$

e

$$R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}.$$

Do exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

relações binárias

proposição 5.13

Sejam R, S e T relações binárias. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

3 | $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

demonstração

1 | Comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.
Dado $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z.
Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \mathrm{Dom}(R)$.
De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

relações binárias

2 | Seja $(x,y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in T \circ S$ para algum z. De $(z,y) \in T \circ S$ segue que $(z,w) \in S$ e $(w,y) \in T$ para algum w. Ora, como $(x,z) \in R$ e $(z,w) \in S$, temos que $(x,w) \in S \circ R$. Assim, $(x,w) \in S \circ R$ e $(w,y) \in T$, pelo que $(x,y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$. De modo análogo prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3 | Para todo o objeto (x,y),

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in (S \circ R)^{-1} & \leftrightarrow & (y,x) \in S \circ R \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ ((y,z) \in R \wedge (z,x) \in S) \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ ((z,y) \in R^{-1} \wedge (x,z) \in S^{-1}) \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ ((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1}) \\ & \leftrightarrow & (x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{array}$$

$\square$

funções & relações binárias

observação 5.14

1 | Dados A, B conjuntos, uma relação binária R de A em B **total** (ou seja, $Dom(R) = A$) e **unívoca** (ou seja, para quaisquer $a \in A, b_1, b_2 \in B$, se $(a, b_1) \in R$ e $(a, b_2) \in R$, então $b_1 = b_2$) determina uma função $\mathcal{F}_R$ de A em B tal que, para todo $a \in A$, $\mathcal{F}_R(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in R$.

2 | Reciprocamente, dados A, B conjuntos, uma função $f : A \to B$ determina uma relação binária de A em B, designada por **gráfico de f**, notada por $\mathcal{G}_f$ e dada por $\mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$, que é total e unívoca.

3 | Estes dois processos são inversos e, para R e f nas condições anteriores, tem-se

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_R} = R \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{G}_f} = f.$$

4 | Na verdade, no âmbito da Teoria de Conjuntos, o conceito de função não é primitivo: o conceito de função surge do conceito de relação como indicado em 1.

propriedades das relações binárias

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caraterizar algumas classes especiais de relações binárias.

definição 5.15

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Dizemos que

1 | R é **reflexiva** quando $\forall_{a \in A}\, (a, a) \in R$;

2 | R é **simétrica** quando $\forall_{a,b \in A}\, ((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$;

3 | R é **antissimétrica** quando $\forall_{a,b \in A}\, (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to a = b)$;

4 | R é **transitiva** quando $\forall_{a,b,c \in A}\, (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R)$.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b \in A}\, (((a, b) \in R \wedge a \neq b) \to (b, a) \notin R).$$

propriedades das relações binárias

exemplo 5.16

Seja A um conjunto.

1 | A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.

2 | A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.

3 | A relação $\emptyset$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.

4 | Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$, então:

i. uma vez que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$, a relação R é reflexiva;

propriedades das relações binárias

ii. o par $(1,2)$ é elemento de R, mas $(2,1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;

iii. como não existem elementos distintos $a, b \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;

iv. R é transitiva, visto que

$$\begin{array}{l}
((1,1) \in R \wedge (1,1) \in R) \to (1,1) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,2) \in R) \to (1,2) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \to (1,3) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \to (1,2) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \to (1,3) \in R \\
((1,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \to (1,3) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \to (2,2) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \to (2,3) \in R \\
((2,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \to (2,3) \in R \\
((3,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \to (3,3) \in R \\
((4,4) \in R \wedge (4,4) \in R) \to (4,4) \in R
\end{array}$$

e o antecedente da implicação $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \to (a,c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c.

propriedades das relações binárias

proposição 5.17

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então

1 | R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

2 | R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

3 | R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

4 | R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

demonstração | exercício.

relações de equivalência

definição 5.18

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em** A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

exemplo 5.19

1 | Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,

i. R é reflexiva uma vez que

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii. R é simétrica pois

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii. R é transitiva porque

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii., R é uma relação de equivalência em A.

relações de equivalência

3 | Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x \, R_f \, y \quad \leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

i. R_f é reflexiva: $\forall_{x \in A} \; f(x) = f(x)$;

ii. R_f é simétrica: $\forall_{x,y \in A} \; (f(x) = f(y) \to f(y) = f(x))$;

iii. R_f é transitiva: $\forall_{x,y,z \in A} \; ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \to f(x) = f(z))$.

relações de equivalência

4 | Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\,R\,b \quad \leftrightarrow \quad a-b \;\text{ é divisível por 3.}$$

Facilmente verificamos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

i. para todo o $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, pelo que $a\,R\,a$. Portanto, R é reflexiva;

ii. para todos os $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b\,R\,a$ e, assim, R é simétrica;

iii. para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a\,R\,c$. Logo, R é transitiva.

relações de equivalência

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 1\,R\,a &\leftrightarrow 1 - a = 3k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow a = 3k + 1, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $2\,R\,a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0\,R\,a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

relações de equivalência

definição 5.20

Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de** x **módulo** R ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de** x, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x\, R\, y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de** A **módulo** R e representamo-lo por A/R, ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

exemplo 5.21

1 | Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{array}{l} [0]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ [1]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+1\} \\ [2]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+2\} \end{array}$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

relações de equivalência

2 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência id_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A \mid y \,\mathrm{id}_A\, x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y \,\omega_A\, x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

relações de equivalência

Em todos os casos do exemplo anterior, as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto A.

definição 5.22

Sejam A um conjunto e $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$. Diz-se que Π é uma **partição do conjunto** A se:

1 | para todo $X \in \Pi$, $X \neq \emptyset$;

2 | para todos $X, Y \in \Pi$, $(X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset)$;

3 | para todo $a \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $a \in X$.

relações de equivalência

exemplo 5.23

Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e

$$\Pi_1 = \{\{1,2\},\{\},\{3,4,5\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{1,2\},\{4,5\}\}, \quad \Pi_4 = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}.$$

Nenhum dos conjuntos Π_1, Π_2, Π_3 é uma partição de A. Com efeito,
[Π_1] $\emptyset \in \Pi_1$ e, portanto, o conjunto Π_1 não verifica a condição 1 | da definição anterior.
[Π_2] o conjunto Π_2 não satisfaz a condição 2 |: $X = \{1,2\} \in \Pi_2$, $Y = \{2,3\} \in \Pi_2$, $X \neq Y$ e $X \cap Y \neq \emptyset$.
[Π_3] no caso do conjunto Π_3 falha a condição 3 |: $3 \in A$ e não existe $X \in \Pi_3$ tal que $3 \in X$.
No que diz respeito ao conjunto Π_4, é simples verificar que qualquer uma das condições 1 |-3 | da definição anterior é satisfeita e, portanto, Π_4 é uma partição de A.

relações de equivalência

exemplo 5.24

Consideremos de novo as relações referidas no exemplo 5.20 e os respetivos conjuntos quociente.

1 | O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a\,R\,b \;\leftrightarrow\; a-b$ é divisível por 3, é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A.

3 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A.

4 | Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$, então $A/R = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1,2,3,4\}$.

relações de equivalência

Tal como se estabelece no resultado seguinte, a cada relação de equivalência definida num conjunto A está associada uma partição de A.

proposição 5.25

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, A/R é uma partição de A.

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

proposição 5.26

Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e $\mathcal{R}_\Pi$ a relação binária em A definida por

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \text{se e só se} \quad \text{existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

relações de equivalência

exemplo 5.27

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Pi = \quad & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), \\ & (4,4), (6,6), (4,6), (6,4), (5,5)\}. \end{aligned}$$

2 | Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \leftrightarrow \quad x - y \text{ é divisível por } 3.$$

relações de equivalência

observação 5.28

Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A. Então,

1 | A/R é uma partição de A e
$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 | $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A e
$$A/(\mathcal{R}_\Pi) = \Pi.$$

relações de ordem parcial

definição 5.29

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em** A quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

exemplo 5.30

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

1 | (A, id_A), onde A é um conjunto e $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que $\leq$ é transitiva).

3 | $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.

4 | $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

relações de ordem parcial

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(A, \leq)$.

notação

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos
$a \leq b$ e lemos "a é menor ou igual a b" ou "a precede b" para representar $(a, b) \in \leq$;

$a \not\leq b$ e lemos "a não é menor ou igual a b" se $(a, b) \notin \leq$;

$a < b$ e lemos "a é menor do que b" ou "a precede propriamente b" se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a << b$ e lemos "b é sucessor de a" ou "a é sucedido por b" ou "b cobre a" ou "a é coberto por b" se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$.

relações de ordem parcial & diagrama de Hasse

definição 5.31

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, dizemos que a, b são **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$. Por outro lado, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, dizemos que a e b são **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

1 | cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

$\bullet a$

2 | se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

diagrama de Hasse

exemplo 5.32

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial definida por

$$x|y \quad \leftrightarrow \quad \exists_{k\in\mathbb{N}}\ y = kx.$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

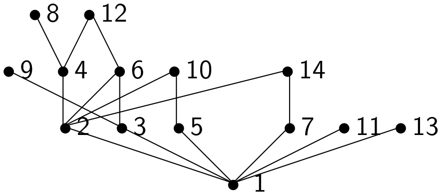
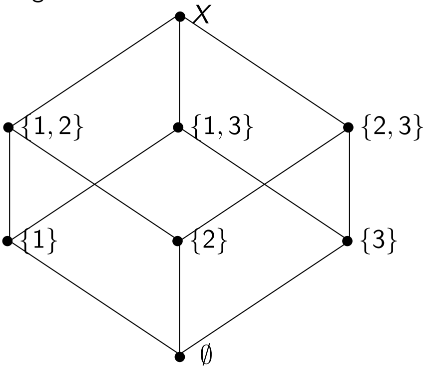


diagrama de Hasse

2 | Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



elementos especiais de um c.p.o.

Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

definição 5.33

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

1 | um **elemento maximal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;

2 | um **elemento minimal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$;

3 | **majorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;

4 | **minorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;

5 | **supremo de** X quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;

6 | **ínfimo de** X quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;

7 | **máximo de** X quando m é majorante de X e $m \in X$;

8 | **mínimo de** X quando m é minorante de X e $m \in X$.

elementos especiais de um c.p.o.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

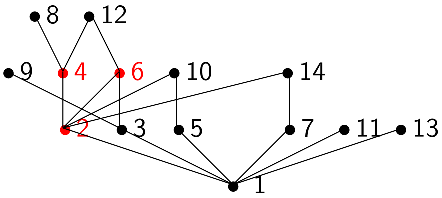
Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

exemplo 5.34

Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$ do exemplo 5.30.
Os elementos maximais de A são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de A. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(A)=\{1\}, & \mathrm{Maj}(A)=\emptyset, & \inf(A)=1, \\ \min(A)=1, & \sup(A) \text{ não existe}, & \max(A) \text{ não existe}. \end{array}$$

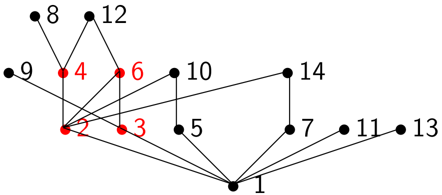
elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = \{2, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}, & \mathrm{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 2, \\ \min(X) = 2, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$

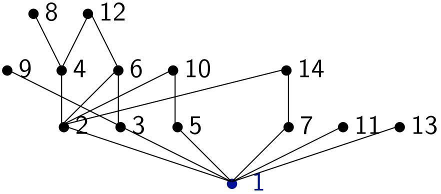
elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de X. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \{12\}$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X) = 12$,	$\max(X)$ não existe.

elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = A \setminus \{1\}$, então os elementos maximais de X são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de X são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \emptyset$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X)$ não existe,	$\max(X)$ não existe.

elementos especiais de um c.p.o.

proposição 5.35

Num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1 | $a \leq b$;

2 | $\sup\{a, b\} = b$;

3 | $\inf\{a, b\} = a$.

reticulados

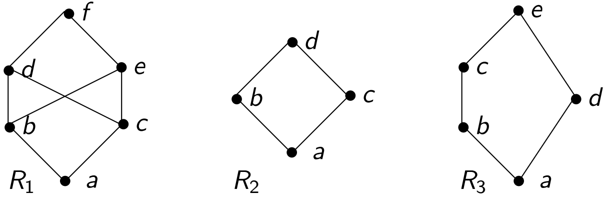
Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

definição 5.36

Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

exemplo 5.37

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados.
R_1 não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de $\{b, c\}$.

cadeias

definição 5.38

Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** $(A, \leq)$ ou um **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

exemplo 5.39

1 | $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

observação 5.40

Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica.