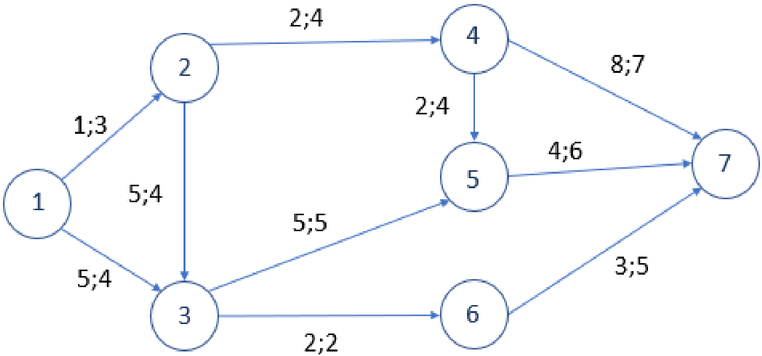
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Aula Prática 3: Variantes e extensões do problema do caminho mais curto

Elementos de Engenharia de Sistemas

2019/2020

Caminhos disjuntos nos nodos



Rede com (comprimento; duração) nos arcos.

Caminhos disjuntos nos nodos

- **Objetivo:** determinar dois caminhos disjuntos nos nodos (cada nodo, exceto o de origem e destino, faz parte de, no máximo, um caminho) entre o nodo o e o nodo d, de forma a minimizar a distância total.

- O modelo de PI vai ser semelhante ao que foi definido para o problema dos caminhos disjuntos nos arcos: o conjunto de restrições, a função objetivo e as restrições de conservação de fluxo para cada caminho mantêm-se.

Caminhos disjuntos nos nodos

- Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall ij \in A$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall ij \in A$$

Caminhos disjuntos nos nodos

- Função objetivo e restrições de conservação de fluxo para cada um dos caminhos:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min} \quad & z = x_{12} + 5x_{13} + \ldots + 3x_{67} + y_{12} + 5y_{13} + \ldots + 3y_{67} && (1)\\
& x_{12} + x_{13} = 1 && (2)\\
& -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 && (3)\\
& \vdots && \\
& -x_{45} - x_{57} - x_{65} = -1 && (4)\\
& y_{12} + y_{13} = 1 && (5)\\
& -y_{12} + y_{23} + y_{24} = 0 && (6)\\
& \vdots && \\
& -y_{45} - y_{57} - y_{65} = -1 && (7)
\end{aligned}
$$

Caminhos disjuntos nos nodos

- Finalmente, adicionam-se as restrições que garantem que num nodo passa, no máximo, um caminho.

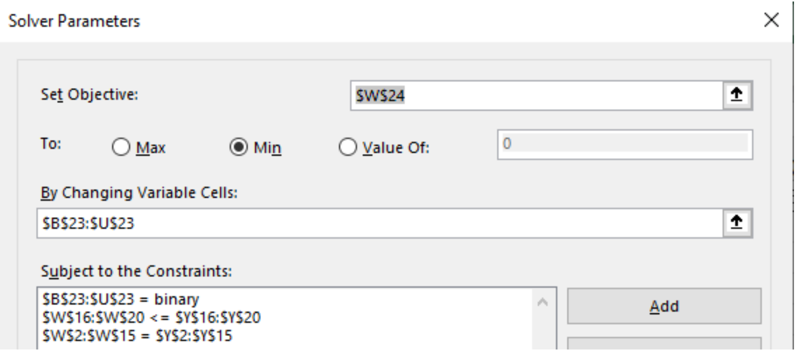
$$x_{23} + x_{24} + y_{23} + y_{24} \leq 1 \tag{8}$$
$$x_{35} + x_{36} + y_{35} + y_{36} \leq 1 \tag{9}$$
$$x_{45} + x_{46} + y_{45} + y_{46} \leq 1 \tag{10}$$
$$x_{57} + y_{57} \leq 1 \tag{11}$$
$$x_{67} + y_{67} \leq 1 \tag{12}$$
$$x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A. \tag{13}$$

Caminhos disjuntos nos nodos

- No Excel, temos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1																				0	=	1
3	2	-1		1	1																		0	=	0
4	3		-1	-1		1	1																0	=	0
5	4				-1			1	1														0	=	0
6	5					-1		-1		1													0	=	0
7	6						-1				1												0	=	0
8	7								-1	-1	-1												0	=	-1
9	1											1	1										0	=	1
10	2											-1		1	1								0	=	0
11	3												-1	-1		1	1						0	=	0
12	4														-1			1	1				0	=	0
13	5															-1		-1		1			0	=	0
14	6																-1				1		0	=	0
15	7																		-1	-1	-1		0	=	-1
16	2			1	1									1	1								0	<=	1
17	3					1	1									1	1						0	<=	1
18	4							1	1									1	1				0	<=	1
19	5									1										1			0	<=	1
20	6										1										1		0	<=	1
21																									
22		x_ij										y_ij													
23	VD																						Z		
24	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0		

Caminhos disjuntos nos nodos



Parâmetros no Solver.

Caminhos disjuntos nos nodos

- Uma solução ótima para este problema é constituída pelos caminhos 1-2-4-5-7 e 1-3-6-7, com distância total igual a 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs
21																							
22		x_ij										y_ij											
23	VD	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		Z
24	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		19

k caminhos mais curtos

- **Objetivo:** determinar os k caminhos mais curtos entre o nodo o e o nodo d.
- Consideremos $k = 3$. Este problema vai ser resolvido iterativamente: na 1ª iteração, será obtido o caminho mais curto de acordo com o modelo PI já construído.

k caminhos mais curtos

- Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- para cada arco $ij \in A$.

k caminhos mais curtos

- O modelo de PI é:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min} \quad & z = x_{12} + 5x_{13} + 5x_{23} + 2x_{24} + 5x_{35} + 2x_{36} + 2x_{45} + \\
& \quad + 8x_{47} + 4x_{57} + 3x_{67} && (14) \\
& x_{12} + x_{13} = 1 && (15) \\
& -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 && (16) \\
& -x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} = 0 && (17) \\
& -x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 && (18) \\
& -x_{35} + x_{57} = 0 && (19) \\
& -x_{36} + x_{67} = 0 && (20) \\
& -x_{45} - x_{57} - x_{65} = -1 && (21) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A. && (22)
\end{aligned}
$$

k caminhos mais curtos

- Através do Solver, é obtido o caminho 1-2-4-5-7, com comprimento 9. Na 2ª iteração, vamos acrescentar uma restrição ao modelo que exclua o caminho 1-2-4-5-7 das possíveis soluções.
- A restrição seguinte garante que na 2ª iteração só podem ser escolhidos, no máximo, 3 dos 4 arcos do atual caminho.

$$x_{12} + x_{24} + x_{45} + x_{57} \leq 3 \tag{23}$$

k caminhos mais curtos

- No Excel, acrescenta-se uma linha à matriz dos coeficientes e uma restrição ao Solver, obtendo o caminho 1-3-6-7, com comprimento 10.
- Para obter o 3º caminho mais curto, avançamos para a 3ª iteração e excluímos também o caminho 1-3-6-7 (para além do 1-2-4-5-7 excluído anteriormente) das possíveis soluções, acrescentando ao modelo a restrição

$$x_{13} + x_{36} + x_{67} \leq 2 \tag{24}$$

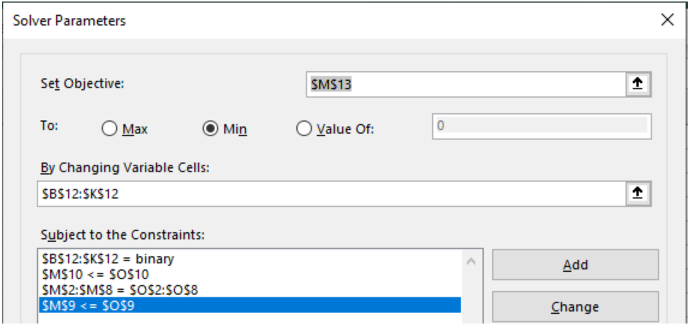
- que garante que, dos 3 arcos da actual solução, só podem ser escolhidos para o 3º caminho mais curto, no máximo, 2.

k caminhos mais curtos

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										0	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		0	=	-1
9	1ºcmc	1			1			1		1			0	<=	3
10	2ºcmc		1				1				1		0	<=	2
11															
12	x_ij												Z		
13	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0		

Dados do modelo no Excel na 3ª iteração.

k caminhos mais curtos



Dados do modelo no Solver na 3ª iteração.

k caminhos mais curtos

- Assim, o 3º caminho mais curto é 1-2-4-7, com comprimento 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		-1	=	-1
9	1ºcmc	1			1			1		1			2	<=	3
10	2ºcmc		1				1				1		0	<=	2
11															
12	x_ij	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0		Z		
13	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		11		

Objetivo minmax

- **Objetivo:** determinar o caminho entre o nodo o e o nodo d cujo arco mais longo é o menor possível.
- Será definida uma variável de decisão adicional, além das variáveis binárias definidas anteriormente.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall ij \in A$$

u – comprimento do arco mais longo do caminho selecionado

Objetivo minmax

- A função objetivo passa a ser **apenas** u, uma vez que se pretende minimizar o comprimento do arco mais longo.

$$\textbf{Min} \quad u \tag{25}$$

$$x_{12} + x_{13} = 1 \tag{26}$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 \tag{27}$$

$$-x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} = 0 \tag{28}$$

$$-x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 \tag{29}$$

$$-x_{35} + x_{57} = 0 \tag{30}$$

$$-x_{36} + x_{67} = 0 \tag{31}$$

$$-x_{45} - x_{57} - x_{65} = -1 \tag{32}$$

Objetivo minmax

- Além das restrições de conservação de fluxo, é necessário acrescentar restrições que garantam que u corresponde efetivamente ao comprimento do arco mais longo do caminho selecionado.

$$u \geq x_{12} \tag{33}$$
$$u \geq 5x_{13} \tag{34}$$
$$u \geq 5x_{23} \tag{35}$$
$$\vdots$$
$$u \geq 4x_{57} \tag{36}$$
$$u \geq 3x_{67} \tag{37}$$
$$u \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall ij \in A \tag{38}$$

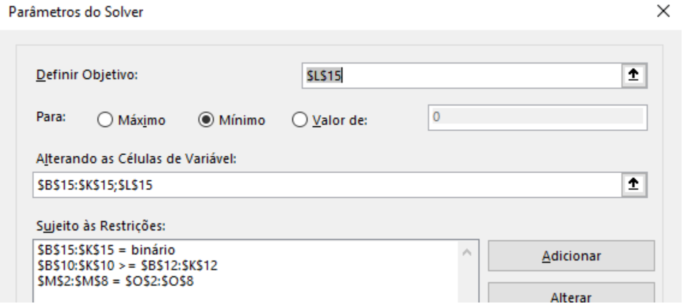
Objetivo minmax

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										0	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		0	=	-1
9															
10	Lhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
11		>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=				
12	Rhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
13															
14	VD	x_ij										u			
15															
16	custo	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3				

Dados do modelo no Excel.

Objetivo minmax

- **Nota:** No Solver, é necessário adicionar u às variáveis de decisão.



Parâmetros no Solver.

Objetivo minmax

- Uma solução ótima é o caminho 1-2-4-5-7, com valor 4 (ou seja, o arco mais longo tem comprimento 4, e os arcos mais longos dos restantes caminhos têm comprimento igual ou superior a 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		-1	=	-1
9															
10	Lhs	3	4	4	2	4	4	2	4	0	4				
11		>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=				
12	Rhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
13															
14	VD						x_ij					u			
15		1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	4			
16	custo	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3				