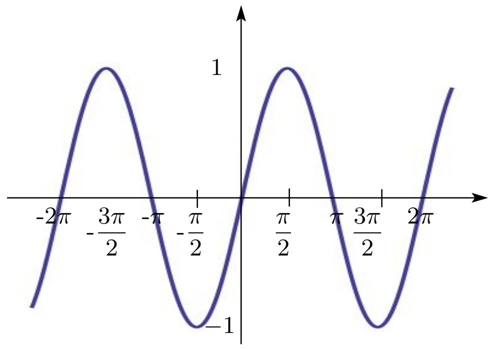
1.4 Algumas funções importantes

Funções trigonométricas

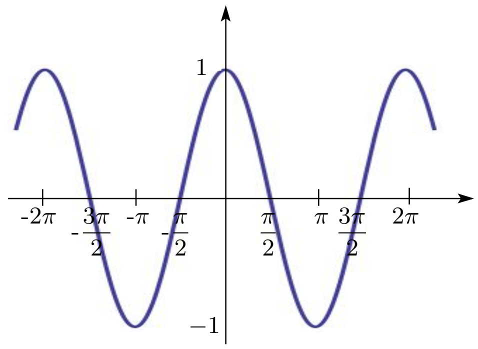
Seno

$y = \text{sen}\, x$,
$\text{D}_{\text{sen}} = \mathbb{R}$,
$\text{CD}_{\text{sen}} = [-1, 1]$



Cosseno

$y = \cos x$,
$\text{D}_{\cos} = \mathbb{R}$,
$\text{CD}_{\cos} = [-1, 1]$



Tangente

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

$\mathrm{D}_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

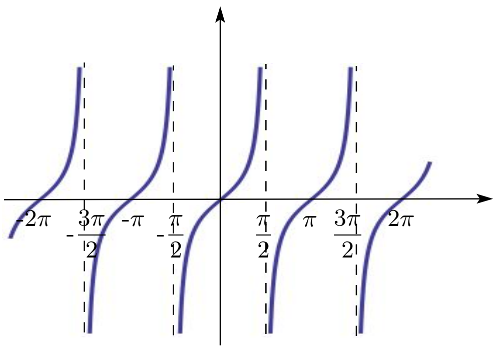
$\mathrm{CD}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R}$

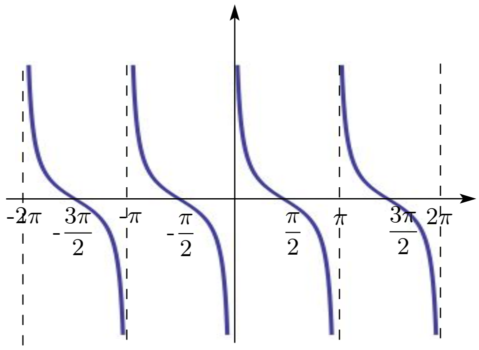
Cotangente

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

$\mathrm{D}_{\mathrm{cotg}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$\mathrm{CD}_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$





- [Propriedades das funções trigonométricas]
  - As funções seno, cosseno, tangente e cotagente são contínuas;
  - As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π;
  - As funções tangente e cotangente são periódicas de período π;
  - A função cosseno é par;
  - As funções seno, tangente e cotangente são ímpares.

- Para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}$ tem-se

  (a) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1;$ (fórmula fundamental da trigonometria)

  (b) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

  (c) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad x \neq k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

  (d) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\, \cos y + \operatorname{sen} y\, \cos x;$ (fórmula da adição para o seno)

  (e) $\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} y.$ (fórmula da adição para o cosseno)

  Em particular

  (f) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x\, \cos x;$ (fórmula da duplicação para o seno)

  (g) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x;$ (fórmula da duplicação para o cosseno)

  (h) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\, \cos y - \operatorname{sen} y\, \cos x;$

  (i) $\cos(x-y) = \cos x\, \cos y + \operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} y.$

Recorde que

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Funções trigonométricas inversas

- As funções seno, cosseno, tangente e cotangente são funções não bijetivas pelo que não possuem inversa.

- Considerando nas funções trigonométricas o conjunto de chegada igual ao contradomínio e restrições apropriadas é possível definir as chamadas funções trigonométricas inversas.

- [Arco-seno] Para a função seno a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x\,. \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-seno – lê-se arco (cujo) seno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsen} y\,, \end{array}$$

onde $\operatorname{arcsen} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y. Assim,

$$x = \operatorname{arcsen} y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \operatorname{sen} x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- [Arco-cosseno] Relativamente à função cosseno, a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \cos : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x\,. \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cosseno – lê-se arco (cujo) cosseno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccos} : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccos}\, y, \end{array}$$

onde $\operatorname{arccos} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a y. Assim

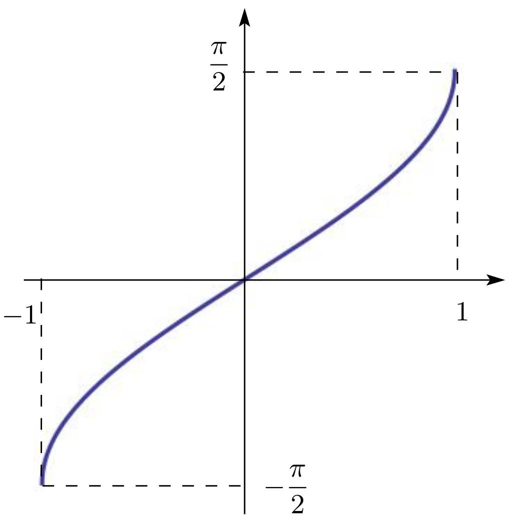
$$x = \operatorname{arccos} y\,,\ y\in[-1,1] \iff y=\cos x\,,\ x\in\ [0,\pi]\,.$$

Arco-seno

$y = \operatorname{arcsen} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arcsen}} = [-1,1],$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

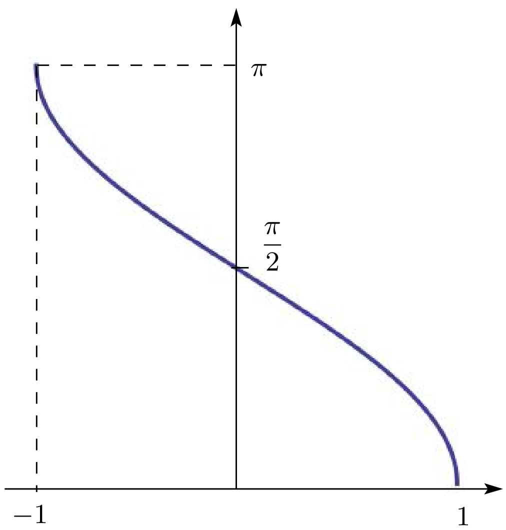


Arco-cosseno

$y = \operatorname{arccos} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arccos}} = [-1,1],$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arccos}} = [0,\pi]$



- [Arco-tangente] Para a função tangente considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tg}: & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x\,. \end{array}$$

A sua inversa, designada por arco-tangente – lê-se arco (cuja) tangente – é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{arctg}\, y, \end{array}$$

onde $\mathrm{arctg}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y. Assim

$$x = \mathrm{arctg}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \mathrm{tg}\, x\,,\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[.$$

- [Arco-cotangente] Relativamente à função cotangente, considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cotg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{cotg}\, x, \end{array}$$

cuja inversa é a função arco-cotangente – lê-se arco (cuja) cotangente – definida por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arccotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{arccotg}\, y, \end{array}$$

onde $\mathrm{arccotg}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $]0,\pi[$ cuja cotangente é igual a y. Então

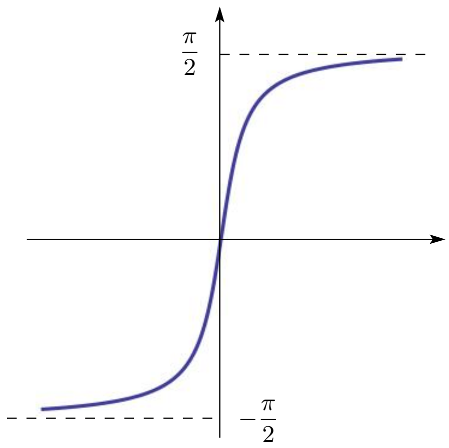
$$x = \mathrm{arccotg}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \mathrm{cotg}\, x\,,\ x \in]0,\pi[\,.$$

Arco-tangente

$y = \operatorname{arctg} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arctg}} = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

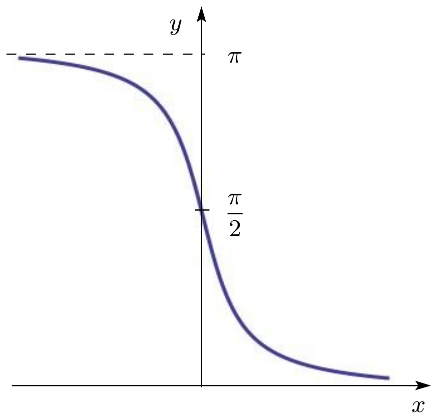


Arco-cotagente

$y = \operatorname{arccotg} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$

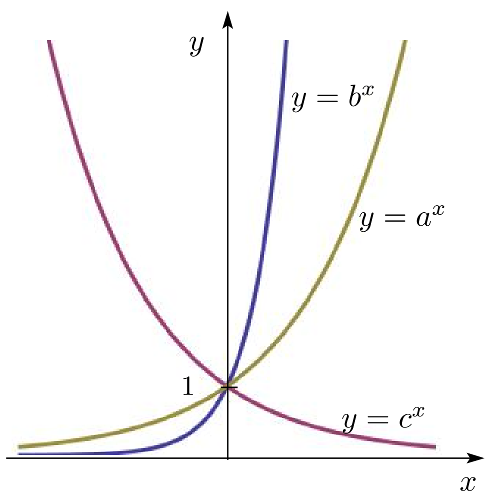
$\mathrm{CD}_{\operatorname{arccotg}} =]0, \pi[$



Funções exponenciais e logarítmicas

- [Propriedades da função exponencial]
  Para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$, a função exponencial de base a, a^x, $a > 0$ verifica

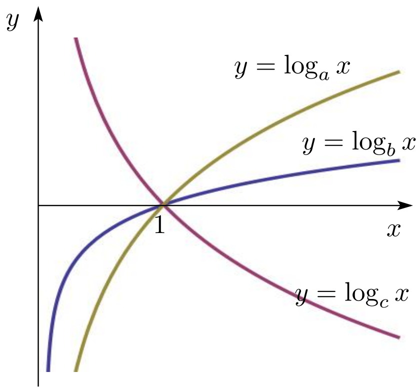
  - $a^{x+z} = a^x\, a^z$;
  - $(a^x)^z = a^{xz}$;
  - se $b > 0$, $(a\,b)^x = a^x\, b^x$;
  - se $a > 1$, é crescente;
  - se $a = 1$, é constante;
  - se $0 < a < 1$, é decrescente;
  - é uma função contínua.



$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

- [Logaritmo na base a] Para todo[1] o $y \in]0, +\infty[$ e $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, define-se a função logaritmo na base a, denotando-se $\log_a y$, como a função inversa da função exponencial de base a, isto é

$$x = \log_a y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^x = y \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$



$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

[1]Para $a = 1$ a função a^x não é bijetiva, logo não admite inversa.

- [Propriedades da função logaritmo]

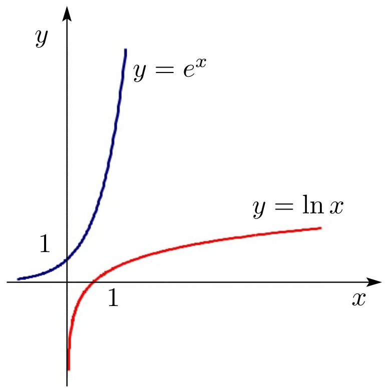
  Para quaisquer $x > 0$, $z > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a função logaritmo de base a, $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ verifica

  - $\log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$;
  - $\log_a \dfrac{x}{z} = \log_a x - \log_a z$;
  - $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
  - é uma função contínua.

Observação

- Fala-se em função exponencial natural quando a base da função exponencial é o número de Euler e: e^x.
- O logaritmo natural de y, denotado $\ln y$, é função inversa da função e^x, isto é

$$x = \ln y \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x = y \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R};$$



Funções exponencial e logarítmica de base e

Funções hiperbólicas

- [Seno hiperbólico] A função seno hiperbólico é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{sh}\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

- [Cosseno hiperbólico] A função cosseno hiperbólico é a função real de variável real definida por

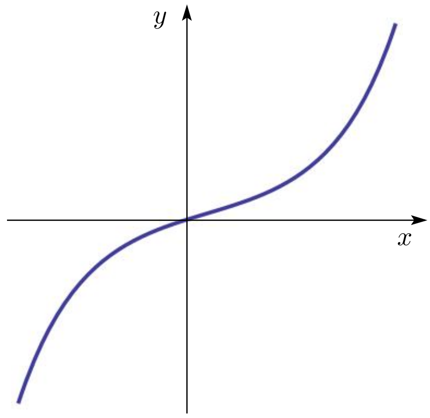
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Seno hiperbólico

$y = \operatorname{sh} x,$

$\mathrm{D}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}\,,$

$\mathrm{CD}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$

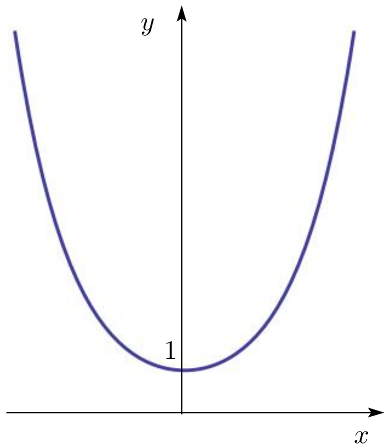


Cosseno hiperbólico

$y = \operatorname{ch} x,$

$\mathrm{D}_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}\,,$

$\mathrm{CD}_{\mathrm{ch}} = [1, +\infty[$



A função seno hiperbólico é

- contínua;
- ímpar;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$.

A função cosseno hiperbólico é

- contínua;
- par;
- não monótona mas
  - estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$;
  - estritamente crescente em $[0, +\infty[$;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{ch}} = [1, +\infty[$.

- [Tangente hiperbólica] A função tangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

- [Cotangente hiperbólica] A função cotangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

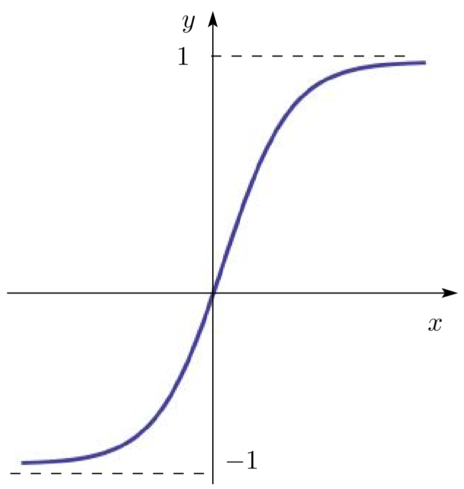
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{coth}: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{coth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{array}$$

Tangente hiperbólica

$y = \mathrm{th}\, x,$

$\mathrm{D}_{\mathrm{th}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\mathrm{th}} =]-1, 1[$

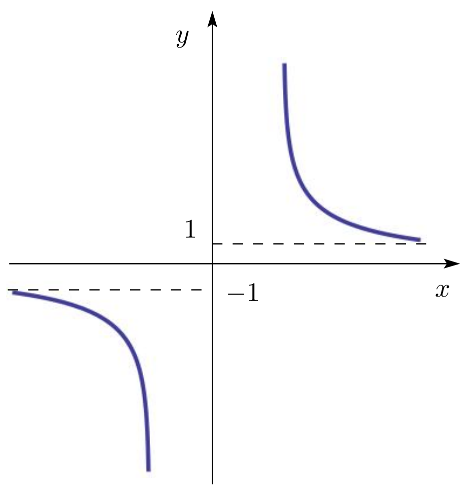


Cotangente hiperbólica

$y = \mathrm{coth}\, x,$

$\mathrm{D}_{\mathrm{coth}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\mathrm{CD}_{\mathrm{coth}} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$



A função tangente hiperbólica é

- contínua;
- ímpar;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D_{th}} = \mathbb{R}$
- $\mathrm{CD_{th}} =]-1, 1[$.

A função cotangente hiperbólica é

- contínua;
- ímpar;
- não monótona mas
  - estritamente descrescente em $]-\infty, 0[$
  - estritamente descrescente em $]0, +\infty[$
- $\mathrm{D_{coth}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
- $\mathrm{CD_{coth}} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$.

Observação

- Para a função seno hiperbólico, sh, também se usa a notação senh;
- De modo análogo, para a função cosseno hiperbólico, ch, também se usa a notação cosh;

- [Propriedades das funções hiperbólicas]

  Para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

  - $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$;
  - $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; (análogo à fórmula fundamental da trigonometria)
  - $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
  - $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;
  - $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

  Em particular

  - $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; (fórmula da duplicação para o seno hiperbólico)
  - $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$; (fórmula da duplicação para o cosseno hiperbólico)
  - $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$;
  - $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

Funções hiperbólicas inversas

- Argumento do seno hiperbólico
- Argumento da cosseno hiperbólico
- Argumento do tangente hiperbólica
- Argumento do cotangente hiperbólica

- [Argumento do seno hiperbólico] A função seno hiperbólico é bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{sh}\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

  - A sua inversa, que se designa por argumento do seno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{argsh}\, y, \end{array}$$

    Assim,

$$x = \mathrm{argsh}\, y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff \mathrm{sh}\, x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

    e

$$\mathrm{argsh}\, y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

1. Qual a lei de argsh?

Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}\, x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ &\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \\ \Leftrightarrow \ e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ \Rightarrow \ e^x \ = y \pm \sqrt{y^2+1}\,. \end{aligned}$$

equação do 2.º grau em e^x

A solução com o sinal $+$ é a única admissível, pois

$$e^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad y - \sqrt{y^2+1} < 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

donde

$$\mathrm{argsh}\, y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

▶ [Argumento do cosseno hiperbólico] A função cosseno hiperbólico não é bijetiva mas é possível considerar função bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{ch:} & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \operatorname{ch} x \end{array}$$

- A inversa desta função, que se designa por argumento do cosseno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{argch:} & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{argch} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argch} y,\ \ y \in [1,+\infty[\iff \operatorname{ch} x = y,\ \ x \in [0,+\infty[$$

e

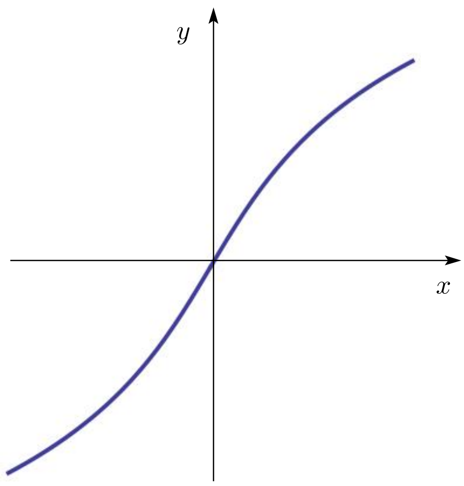
$$\operatorname{argch} y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\,\right),\ y \in \ [1,+\infty[$$

Argumento do seno hiperbólico

$y = \operatorname{argsh} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argsh}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argsh}} = \mathbb{R}$

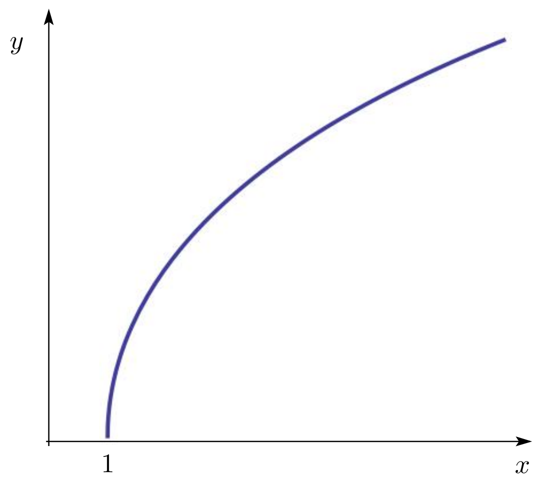


Argumento do cosseno hiperbólico

$y = \operatorname{argch} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argch}} = [1,+\infty[$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argch}} = [0,+\infty[$



A função argumento do seno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{argsh}} = \mathbb{R}$
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{argsh}} = \mathbb{R}$.

A função argumento do cosseno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{argch}} = [1, +\infty[$;
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{argch}} = [0, +\infty[$.

- [Argumento da tangente hiperbólica] A função tangente hiperbólica não é sobrejetiva mas é possível considerar a função bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}\, x \end{array}$$

  - A inversa da função anterior, que se designa por argumento da tangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{argth}\, y \end{array}$$

onde

$$x = \mathrm{argth}\, y,\ \ y \in\,]-1,1[\iff \mathrm{th}\, x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathrm{argth}\, y \ = \ \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),\ y \in\,]-1,1[\,.$$

- [Argumento da cotangente hiperbólica] A função $\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva mas é possível considerar a função bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \coth\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

  - A inversa da função anterior, que se designa por argumento da cotangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcoth}\colon & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcoth} y \end{array}$$

    onde

$$x = \operatorname{argcoth} y,\ \ y \in \mathbb{R}\setminus[-1,1] \iff \coth x = y,\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

    e

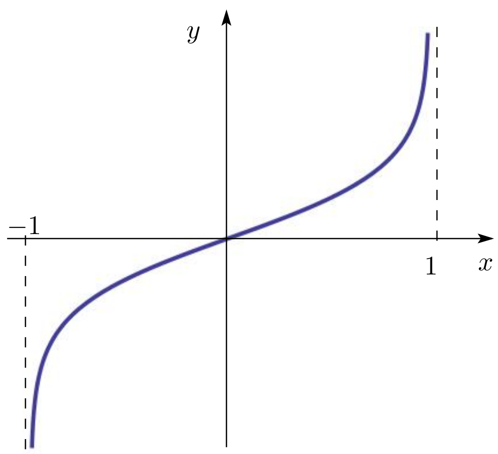
$$\operatorname{argcoth} y = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),\ \ y \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$$

Argumento da tangente hiperbólica

$y = \operatorname{argth} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argth}} =]-1,1[,$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argth}} = \mathbb{R}$

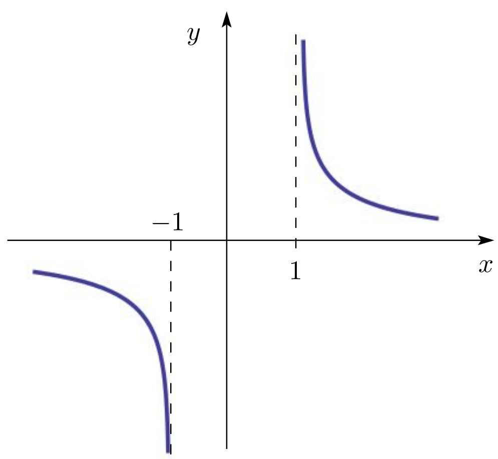


Argumento da cotangente hiperbólica

$y = \operatorname{argcoth} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argcoth}} = \mathbb{R}\setminus[-1,1]\,,$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argcoth}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



A função argumento da tangente hiperbólica é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{argth}} =]-1,1[$
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{argth}} = \mathbb{R}$.

A função argumento da cotangente hiperbólica é

- contínua;
- não monótona mas
  - estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$
  - estritamente decrescente em $]0, +\infty[$;
- $\mathrm{D}_{\mathrm{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;
- $\mathrm{CD}_{\mathrm{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.