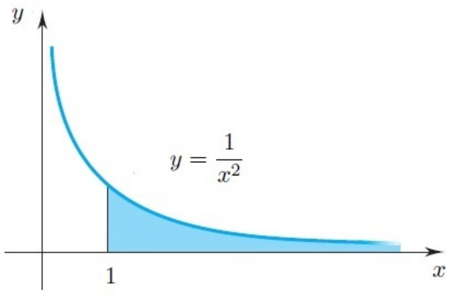
2.3 Integrais impróprios

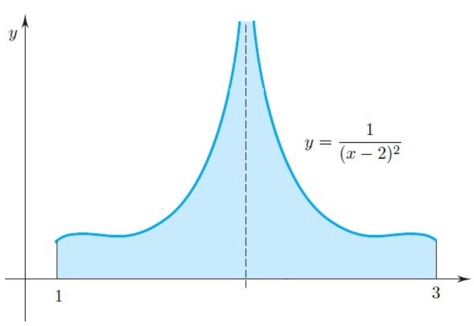
Integrais em intervalos ilimitados

Integrais de funções ilimitadas

Motivação

- Qual a área limitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{x^2}$, quando $x \geq 1$?





- Qual a área limitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, quando $1 \leq x \leq 3$?

Integrais impróprios

- [1.ª espécie] Integrais em intervalos ilimitados: sendo $a, b \in \mathbb{R}$

$$]-\infty, a] \qquad \text{ou} \qquad [b, +\infty[\qquad \text{ou} \qquad]-\infty, +\infty[$$

- [2.ª espécie] Integrais de funções ilimitadas em algum ponto do intervalo de integração. Por exemplo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx.$$

[1.ª espécie] Integrais em intervalos ilimitados

- Seja f definida em $[a, +\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, c]$ com $[a, c] \subset [a, +\infty[$. Define-se o integral impróprio de f em $[a, +\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

  - Se o limite for finito, diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.
  - Se o limite não existir ou for infinito, diz-se que o integral impróprio é divergente.

- Seja f definida em $]-\infty, b]$ e integrável em qualquer intervalo $[c, b]$ com $[c, b] \subset]-\infty, b]$. Define-se o integral impróprio de f em $]-\infty, b]$ por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx.$$

  - Se o limite for finito, diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.
  - Se o limite não existir ou for infinito, diz-se que o integral impróprio é divergente.

- Seja f definida em $\mathbb{R}$ e integrável em em qualquer intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Define-se o integral impróprio de f em $\mathbb{R}$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

com $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, desde que os integrais do $2.^{\circ}$ membro sejam convergentes.

Exemplo

1. É divergente o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$$

De facto,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln x\Big]_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

2. É convergente o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

De facto,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty} (-\frac{1}{t} + 1) = 1.$$

- [Teorema] Sejam f e g contínuas em $[a, +\infty[$
  - i) Se $|f(x)| \leq g(x)$ para todo o $x \geq a$ tem-se

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

  - ii) Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \geq a$ tem-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{diverge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$

- [Critério de comparação] Sejam $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que
  - $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$;
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ existem para cada $b \geq a$.

  Suponha-se que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

  Então
  - i) se $\ell \neq 0$ os integrais $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ têm a mesma natureza;
  - ii) se $\ell = 0$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Nota: existem resultados análogos para os integrais impróprios $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Exemplos

1. Os integrais abaixo são úteis na aplicação dos resultados anteriores:

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } r > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } r \leq 1. \end{cases}$$

- $$\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } r > 0 \\ \text{diverge} & \text{se } r \leq 0. \end{cases}$$

Observação

- Se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

não convergem então a natureza do integral impróprio da soma $f + g$ pode ser convergente ou divergente.

- [Exemplos]

  1. Se $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x}$ o integral resultante é divergente;

  2. Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ o integral resultante é convergente.

[2.ª espécie] Integrais de funções ilimitadas

- Seja $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a,c]$ com $[a,c] \subset [a,b[$ e ilimitada quando $x \to b$. Define-se o integral impróprio de f em $[a,b[$ por
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$
- Seja $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[c,b]$ com $[c,b] \subset]a,b]$ ilimitada quando $x \to a$. Define-se o integral impróprio de f em $]a,b]$ por
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$
  - Se o limite for finito diz-se que o integral impróprio é convergente.
  - Se o limite não existir ou for infinito diz-se que o integral impróprio é divergente.

Exemplo

1. Determine, se possível, o valor de
$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx.$$

- A função integranda está definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Assim, há que escrever
$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$
e estudar separadamente cada um dos integrais impróprios do 2.ª espécie.
- Mas
$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{1-x}\right]_{x=0}^{t} = \lim_{t\to 1^-} [-1+\frac{1}{1-t}]$$
Como o limite não existe, este integral é divergente.
- Uma vez que um dos integrais do 2.º membro é divergente, o integral dado é divergente.

Observação

- Para os integrais impróprios mantêm-se válidas as propriedades de linearidade e aditividade.

- Para os integrais da 2.ª espécie valem resultados de convergência análogos aos apresentados para integrais da 1.ª espécie, com as devidas adaptações.

- Pode-se falar em integrais impróprios da 3.ª espécie quando são simultaneamente da 1.ª espécie e da 2.ª espécie.

  - É da 3.ª espécie o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x}\, dx. \qquad \text{Porquê?}$$