TMD
Exame da época especial
1. set. 2015

1.

a)

p_0	p_1	$\neg p_1$	$p_0 \wedge p_1$	$p_0 \Rightarrow \neg p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$(p_0 \Rightarrow \neg p_1) \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge p_1)$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1

Atendendo a que $(p_0 \Rightarrow \neg p_1) \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge p_1)$ é uma tautologia (como podemos comprovar na tabela), as fórmulas $(p_0 \Rightarrow \neg p_1)$ e $\neg(p_0 \wedge p_1)$ são logicamente equivalentes. A afirmação é V.

b) A afirmação é falsa. É preciso, também, provar que se p é falsa, então q é falsa.

Consideremos $p = p_0$ e $q = p_0 \vee p_1$.
Temos que se p é verdadeira então q é verdadeira. Mas não é verdade que $p \Leftrightarrow q$.

2.

a) $2n < 5 \Leftrightarrow n < \frac{5}{2} \Leftrightarrow n < 2,5$

$B = \{n^2 \mid n = 1 \vee n = 2\} = \{1^2, 2^2\} = \{1, 4\}$

$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$= \{(1,1), (1,4), (\{4\},1), (\{4\},4)\}$

b) $A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\} = \{\{4\}\}$

$\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\emptyset, \{\{4\}\}\}.$

3. a) Consideremos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ e $C = \{1,4\}$.

Temos que $A \cap B = \{1\} \subseteq C$

No entanto, $A \nsubseteq C$ e $B \nsubseteq C$.

b) Admitamos que $A \subseteq C \vee B \subseteq C$.

Caso 1 : $A \subseteq C$

Seja $x \in A \cap B$. Então, $x \in A$ e $x \in B$.
Como $x \in A$ e $A \subseteq C$, podemos afirmar que $x \in C$.

Caso 2 : $B \subseteq C$

Seja $x \in A \cap B$. Temos que $x \in A$ e que $x \in B$.
Dado que $B \subseteq C$, podemos concluir que $x \in C$.

Em ambos os casos mostrámos que

$$\forall x \, (x \in A \cap B \rightarrow x \in C).$$

Logo, $A \cap B \subseteq C$.

4. Seja $P(n)$ o predicado $n! \geq 2^n$.

① $n = 4$

$4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$

$2^4 = 16$ Logo, $P(4)$ é válido.

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 4$ e $P(k)$. Então,

$$k! \geq 2^k. \quad (HI)$$

Pretendemos mostrar que $(k+1)! \geq 2^{k+1}$

Temos que

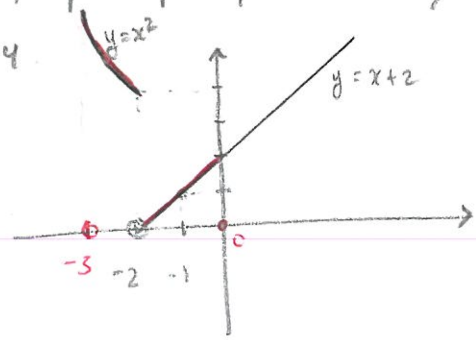
$$(k+1)! = (k+1) \times k! \underset{HI}{\geq} (k+1) \cdot 2^k \underset{k \geq 4 \Rightarrow k+1 \geq 2}{\geq} 2 \times 2^k = 2^{k+1}.$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução Natural, $n! \geq 2^n$, para todo $n \geq 4$

5.

a)



$$f(\,]-3,0]\,) = \{ f(x) \,:\, x \in \,]-3,0] \}$$
$$= \{ f(x) \,:\, -3 < x \leq 0 \}$$
$$= \,]0,2] \cup [4,9[$$

$$f^{\leftarrow}(\{-4,0,4\}) = \{ x \in \mathbb{R} \,:\, f(x)=-4 \vee f(x)=0 \vee f(x)=4 \}$$

$x^2 = -4$ é impossível

$x+2 = -4 \iff x = -6$ mas $-6 \not> -2$

$x^2 = 0 \iff x = 0$ mas $0 \not\leq -2$

$x+2 = 0 \iff x = -2$ mas $-2 \not> -2$

$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ $\quad -2 \leq -2$ mas $2 \not\leq -2$

$x+2 = 4 \iff x = 2$ $\quad 2 > -2$

Logo, $f^{\leftarrow}(\{-4,0,4\}) = \{-2,2\}$

b) $f(-2) = f(2) = 4$

Logo, f não é injetiva.

6.

	-3	1	2	3	5	11
-3	0	-4	-5	-6	-8	-14
1	4	0	-1	-2	-4	-10
2	5	1	0	-1	-3	-9
3	6	2	1	0	-2	-8
5	8	4	3	2	0	-6
11	14	10	9	8	6	0

$[3]_R = \{-3,3\} = [-3]_R$

$[1]_R = \{1\}$

$[2]_R = \{2,5,11\} = [5]_R = [11]_R$

$A/_R = \{\{-3,3\}, \{1\}, \{2,5,11\}\}$.

b) Sejam $x, y \in A$ t.q. xRy.

Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ t.q. $x-y = 3q$.

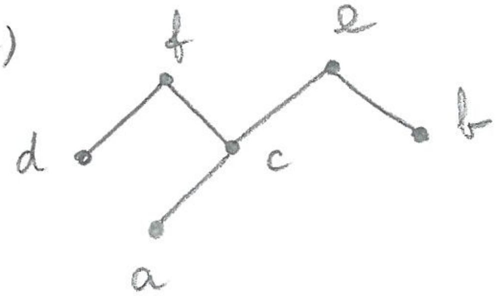
Logo,
$$y - x = 3(-q).$$

Como $-q \in \mathbb{Z}$, $y-x$ é múltiplo de 3 e, portanto, yRx.

Assim, R é simétrica.

7.

a)

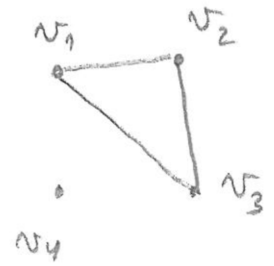


b) $\{a, c\}$.

c) $Y = \{a, c, e\}$. Como os elementos de Y são todos comparáveis entre si, Y é um reticulado.

8.

a)



b)

grau(v_1) = 2

grau(v_2) = 2

grau(v_3) = 2

grau(v_4) = 0

c) G contém um ciclo e não é conexo

Logo, G não é uma árvore