Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 A :: 2 de novembro de 2019

Nome

Número

I

Questão 1. [3 valores] Considere o conjunto $A =]-1,1[\setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Identifique o interior, a aderência, a fronteira e o conjunto dos majorantes de A. Caso existam, identifique o supremo e o máximo de A.

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : [-2,3] \to]-1,4]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2,1] \\ x-2, & x \in]1,3] \end{cases}.$$

a) Estude a injetividade e a sobrejetividade de f;

b) Justifique que f não é contínua em $x = 1$;

c) Identifique os máximos e os mínimos locais de f;

d) Existe alguma função $g :]-1,4] \to \mathbb{R}$ tal que $g \circ f$ é injetiva? Justifique.

Questão 3. [3 valores] Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen} x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{e^x - 1}$.

Questão 4. [2 valores] Obtenha, em $\mathbb{R}$, a solução da equação $\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh} x) = \cos(\operatorname{arcsen} x)$.

Questão 5. [2 valores] Considere a função bijetiva $f : [0,+\infty[\to]0,1]$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. Determine a função inversa de f.

Questão 6. [3 valores] Em cada alínea, apresente um exemplo ou justifique porque não existe:

a) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ em que $A \subset \operatorname{fr}(A)$ e $A \neq \operatorname{fr}(A)$

b) Um conjunto cujo interior seja $\{1\}$;

c) Um conjunto minorado que não tenha mínimo;

d) Uma função $f : [0,1] \to [0,1[$ sobrejetiva;

e) Uma função não monótona cuja restrição a qualquer intervalo seja decrescente;

f) Uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua cujo contradomínio seja o conjunto $\{1,2\}$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. A função $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos(e^x)$ é uma função:

- ◯ limitada e não monótona;
- ◯ injetiva e não monótona;
- ◯ par e periódica;
- ◯ limitada e periódica.

Questão 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ x^2 - 1, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ e seja $A = \{a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} f(x) = a^2\}$. Então:

- ◯ $A = \emptyset$;
- ◯ $A = \mathbb{R}$;
- ◯ $A = \mathbb{Z}$;
- ◯ $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Questão 3. O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right)$ é:

- ◯ $\frac{\pi}{6}$;
- ◯ $-\frac{\pi}{6}$;
- ◯ $\frac{5\pi}{6}$;
- ◯ $-\frac{5\pi}{6}$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$. Então:

- ◯ f é contínua em 3;
- ◯ f é a função identidade;
- ◯ $\lim_{x \to 3} f(x) = 3$;
- ◯ f é a função constante igual a 3.