



**Problemas 4**

---

**Problemas 4**  
**Física Quântica**

(Os problemas assinalados com *Griffiths* são retirados do livro *Revolutions in Twentieth Century Physics*, David J. Griffiths, Cambridge University Press (2013); os problemas assinalados com *Scarani* são retirados do livro *Six Quantum Pieces*, Valerio Scarani, World Scientific (2010).

**Quantização e comprimento de onda de de Broglie**

1. (*Griffiths, Cap. 3, P1*) Os lasers de hélio-néon emitem luz com um comprimento de onda de  $6.338 \times 10^{-7}$  m. Qual é a energia de um fóton do feixe de luz deste laser?

[Sol.:  $3.14 \times 10^{-19}$  J]

2. (*Griffiths, Cap. 3, P2*) Quantos fótons são emitidos por uma lâmpada de 100 W num minuto? Admita que a lâmpada emite luz monocromática, amarela, de frequência  $5 \times 10^{14}$  Hz.

[Sol.:  $1.81 \times 10^{22}$ ]

3. (*Griffiths, Cap. 3, P3*) Luz com comprimento de onda de  $4.5 \times 10^{-7}$  m incide num pedaço de metal, provocando a extração de eletrões por efeito fotoelétrico. A função de trabalho (energia necessária para arrancar um eletrão) deste metal vale  $2 \times 10^{-19}$  J.

a) Qual é a energia de um fóton incidente?

b) Qual é a energia (máxima) de cada um dos eletrões extraídos?

[Sol.: a)  $4.42 \times 10^{-19}$  J; b)  $2.42 \times 10^{-19}$  J]

4. (*Griffiths, Cap. 3, P5*) Determine o comprimento de onda de de Broglie de uma bola de beisebol de massa 2 kg que se desloca à velocidade de 33 m/s.

[Sol.:  $1.00 \times 10^{-35}$  m]

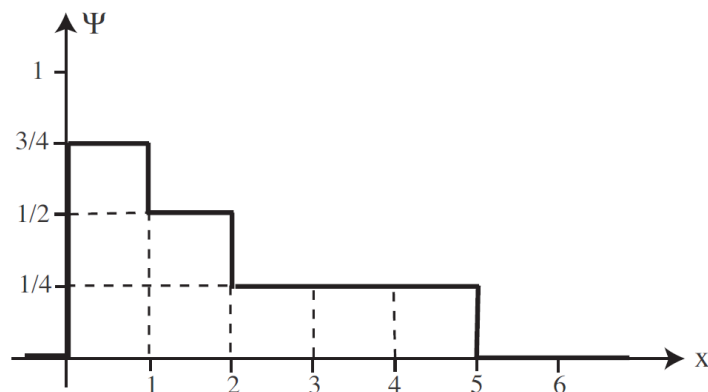
5. (*Griffiths, Cap. 3, P6*) Um eletrão desloca-se a uma velocidade tal que o seu comprimento de onda é igual ao da luz amarela (consulte a tabela 1.1 do livro). Qual é a sua velocidade?

[Sol.: 1230 m/s]

## Problemas 4

### Função de onda e probabilidade

6. (Griffiths, Cap. 1, P11) Considere a função de onda de uma partícula apresentada na figura seguinte ( $x$  é uma distância expressa em unidades arbitrárias).



- a) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre  $x = 1$  e  $x = 2$ ?  
b) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre  $x = 0$  e  $x = 5$ ?

[Sol.: a)  $1/4$  ; b)  $1$ ]

7. Considere um eletrão descrito pela função de onda

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{\pi}, & \text{se } x = 0 \\ \psi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

- a) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão na posição  $x = 0$ .  
b) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão na posição  $x = 5$ .

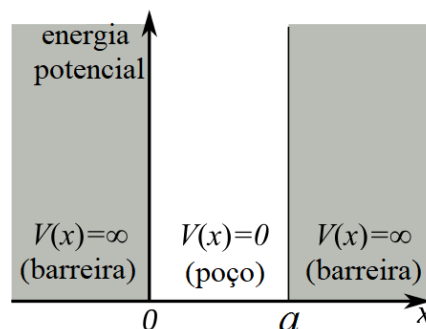
[Sol.: a)  $1/\pi^2$ ; b)  $0.00372$ ]

8. Considere uma partícula constrangida a movimentar-se numa região entre  $x = 0$  e  $x = a$ , circunstância normalmente designada por partícula numa caixa rígida (ou poço de potencial infinito) a uma dimensão. Esta situação física pode ser representada por uma função energia potencial dada por

**Problemas 4**

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \text{ e } x > a) \\ 0 & (0 < x < a) \end{cases}$$

e representada na figura.



Nestas condições a função de onda da partícula é dada por:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

em que  $A$  é uma constante de normalização e  $n$  é um inteiro ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

a) Indique quais são as condições de fronteira a que deve obedecer a função de onda. Confirme que a função de onda acima verifica essas condições.

b) Qual é o valor da constante de normalização  $A$ ?

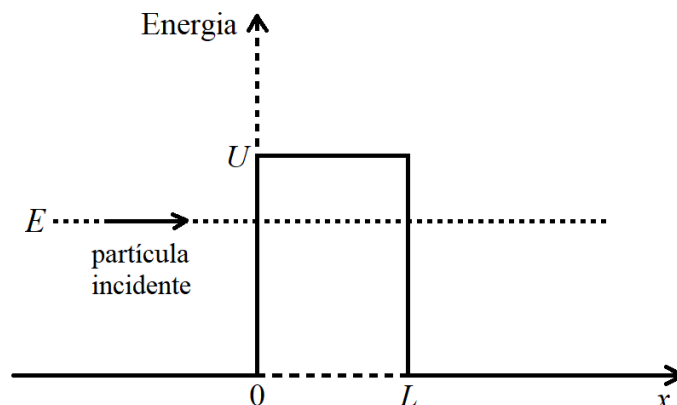
[Note que  $\int \sin^2(kx)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2kx)$ ]

c) Qual é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição  $x = a/2$ , para cada  $n$ ?

d) Use a relação de de Broglie e a aproximação clássica para determinar a expressão da energia cinética da partícula.

[Sol.: a)  $\psi(0) = \psi(a) = 0$ ; b)  $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ ; c)  $\frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ; d)  $\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  ]

**9.** Classicamente uma partícula de energia  $E$  que incide numa barreira de potencial de valor  $U > E$  (ver figura) não pode atravessá-la.



## Problemas 4

Contudo, a análise do problema de acordo com a física quântica permite concluir que a função de onda se pode estender para além dos limites clássicos do movimento da partícula. Por isso, ocorre um fenómeno designado por penetração da barreira de potencial (ou efeito túnel). A probabilidade de a partícula atravessar esta barreira é dada por

$$P = e^{-2\alpha L}$$

em que  $L$  é a largura da barreira e

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U - E)}{\hbar^2}}$$

Qual é a probabilidade de um eletrão de 0.5 eV de energia atravessar uma barreira de potencial de 3 eV e 1 nm de espessura?

[Sol.:  $8.7 \times 10^{-8}$ ]

## Relações de incerteza

**10.** (*Griffiths, Cap. 3, P12*) Um eletrão (massa de  $9 \times 10^{-31}$  kg) está localizado numa região de 1 mm de largura. Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

[Sol.: 0.0579 m/s]

**11.** (*Griffiths, Cap. 3, P13*) Sabe-se que uma bola de beisebol, de massa 0.5 kg, está no interior de uma caixa de sapatos, fechada, com 30 cm de comprimento.

a) Qual é a incerteza (mínima) do seu momento linear?

b) Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

c) A esta velocidade quanto tempo demoraria a bola a ir de uma extremidade à outra da caixa?

d) Tendo em consideração este resultado, discuta qual é a relevância do princípio de incerteza para objetos macroscópicos.

[Sol.: a)  $1.76 \times 10^{-34}$  kg m/s; b)  $3.52 \times 10^{-34}$  m/s; c)  $8.53 \times 10^{-32}$  s; d) irrelevante]

**12.** Para uma partícula livre, o princípio de incerteza pode ser escrito como

$$(\Delta\lambda)(\Delta x) = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Se  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$  para um fóton, qual o correspondente valor de  $\Delta x$  para:

a)  $\lambda = 5.00 \times 10^{-4}$  Å (raios gama)

b)  $\lambda = 5.00$  Å (raios x)

c)  $\lambda = 5000$  Å (luz visível)

[Sol.: a) 397.9 Å; b)  $3.979 \times 10^6$  Å; c)  $3.979 \times 10^9$  Å]

## Problemas 4

13. Considere um feixe laser com um comprimento de onda de  $800 \pm 5$  nm. Pode-se provar que

$$(\Delta\lambda)(\Delta t) = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

Determine a duração do pulso laser em fs.

[Sol.: 33.9 fs]

## Transições

14. (Griffiths, Cap. 3, P8) Um átomo de hidrogénio sofre uma transição eletrónica do estado  $n = 4$  para o estado  $n = 1$ .

- a) Qual é a energia inicial do átomo?
- b) Qual é a energia final do átomo?
- c) Qual é a energia do fóton emitido?
- d) Qual é a frequência do fóton emitido?
- e) Este fóton pertence à região visível do espectro eletromagnético? Se não, qual é a região espectral a que pertence?

[Sol.: a) -0.851 eV; b) -13.61 eV; c) 012.76 eV; d)  $3.09 \times 10^{15}$  Hz; e) não; ultravioleta]

15. (Griffiths, Cap. 3, P9) Um eletrão de um átomo de hidrogénio transita do estado  $n = 4$  para o estado  $n = 2$  emitindo um fóton. Determine, para este fóton:

- a) energia; b) a frequência; c) o comprimento de onda.

[Sol.: a) 2.55 eV; b)  $6.16 \times 10^{14}$  Hz; c)  $4.87 \times 10^{-7}$  m]

16. Os níveis energéticos de um poço de potencial infinito são dados por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que  $a$  é a largura do poço, e  $n$  é um inteiro.

Determine as frequências dos fótons emitidos quando um eletrão transita do estado em que  $n = 4$  para os estados  $n = 3$  e  $n = 2$ , quando  $a = 1$  nm.

[Sol.:  $f_{4-3} = 6.38 \times 10^{14}$  Hz;  $f_{4-2} = 1.09 \times 10^{15}$  Hz]

17. Um sistema físico com importantes aplicações é o oscilador harmónico. O seu estudo fornece informações sobre as vibrações atómicas em moléculas e sólidos, uma vez que, em primeira aproximação, podemos admitir que o movimento relativo dos átomos é uma oscilação harmónica. Num oscilador harmónico os níveis de energia obtidos são particularmente simples:

## Problemas 4

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

em que  $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$  ( $K$  é uma constante e  $m$  é a massa) é igual à frequência de oscilação de um oscilador clássico com as mesmas características.

a) Verifique que a energia mínima do oscilador harmónico (energia do ponto zero) é  $\frac{1}{2} \hbar \omega_c$ .

b) Verifique que os níveis de energia adjacentes do oscilador harmónico são todos igualmente espaçados de  $\Delta E = \hbar \omega_c$ .

c) Como se altera  $\Delta E$  se se duplica a massa da partícula?

[Sol.: c)  $\Delta E' = \Delta E / \sqrt{2}$ ]

## Sobreposição de estados e entrelaçamento

**18.** (Scarani, Cap. 1, Ex. 1.3) Seja

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |H\rangle + \sin \alpha |V\rangle$$

$$|\alpha^\perp\rangle = \sin \alpha |H\rangle - \cos \alpha |V\rangle$$

a) Prove que  $\{|\alpha\rangle, |\alpha^\perp\rangle\}$  constitui uma base para qualquer  $\alpha$ .

b) Seja  $|\beta\rangle = \cos \beta |H\rangle + \sin \beta |V\rangle$ . Calcule as probabilidades de, dado  $\beta$ , encontrar  $\alpha$  ( $P(\alpha|\beta)$ ) ou  $\alpha^\perp$  ( $P(\alpha^\perp|\beta)$ ).

[Sol.:  $P(\alpha|\beta) = \cos^2(\alpha - \beta)$ ;  $P(\alpha^\perp|\beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$ ]

**19.** Uma determinada partícula está num estado quântico definido pelo vetor estado

$$|\psi\rangle = 0.1|\leftarrow\rangle + 0.3i|\uparrow\rangle + 0.5|\rightarrow\rangle - 0.4|\downarrow\rangle + a|\leftrightarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de a partícula, ao se efetuar uma medida, ficar no estado  $|\leftrightarrow\rangle$  ?

[Sol.: 0.49]

**20.** Um protão encontra-se no estado de spin descrito por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\downarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de, ao efetuar uma medida, encontrar o protão no estado  $|\uparrow\rangle$  e qual a probabilidade de o encontrar no estado  $|\downarrow\rangle$  ?

[Sol.:  $P_\uparrow = 0.25$ ;  $P_\downarrow = 0.75$ ]



## Problemas 4

**21.** Se tivermos duas partículas em que a primeira pode estar nos estados  $|A\rangle$  ou  $|B\rangle$ , e a segunda pode estar nos estados  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$ ,  $|\leftarrow\rangle$  ou  $|\rightarrow\rangle$ , quais são os estados possíveis das duas partículas?

[Sol.:  $|A\uparrow\rangle$ ,  $|A\downarrow\rangle$ ,  $|A\leftarrow\rangle$ ,  $|A\rightarrow\rangle$ ,  $|B\uparrow\rangle$ ,  $|B\downarrow\rangle$ ,  $|B\leftarrow\rangle$ ,  $|B\rightarrow\rangle$ ]

**22.** Considere um trio de partículas que podem, cada uma, estar num estado  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ .

O seu vetor estado é dado por:

$$|\psi\rangle = 0.1|000\rangle + 0.3535(1+i)|001\rangle + 0.2|010\rangle - 0.1|100\rangle + 0.5|011\rangle - 0.361|101\rangle + 0.55|111\rangle$$

a) Qual é o estado mais provável, após uma medida?

b) Se fizer 200 medidas em 200 sistemas idênticos a este, quantas vezes espera obter o estado  $|010\rangle$ ?

c) Se fizer 20 medidas no mesmo sistema, quantas vezes espera obter o estado  $|010\rangle$ ?

d) Qual é a probabilidade de, ao medir apenas a primeira das três partículas, a encontrar no estado  $|0\rangle$ ?

e) Há alguma combinação de medidas que nunca aconteça?

[Sol.: a)  $|111\rangle$ ; b) 8; c) 20 ou zero; d) 0.55; e) sim:  $|110\rangle$ ]

**23.** (Scarani, Cap. 1, Ex. 1.4) Considere os seguintes estados de dois fótons

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle),$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle),$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(|VH\rangle + |VV\rangle),$$

$$|\psi_4\rangle = \cos\theta|HH\rangle + \sin\theta|VV\rangle.$$

a) Verifique que todos os estados estão normalizados.

b) Quais são os estados não entrelaçados? Exprima-os como um produto explícito de estados com um só fóton.

[Sol.: b) estado não entrelaçado,  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = |\alpha = \pi/4\rangle \otimes |\beta = \pi/4\rangle$ ]

**24.** (Scarani, Cap. 1, Ex. 1.5) Considere  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha^\perp\rangle$ , tal como definidos no problema 18.

Verifique que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha^\perp\rangle|\alpha^\perp\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle)$$

O que é que acontece se as polarizações dos dois fótons que se encontram neste estado forem medidas na mesma base?

[Sol.: as polarizações dos dois fótons são sempre iguais (estão perfeitamente correlacionadas)]