

# tópicos de matemática discreta | MIEInf

cláudia mendes Araújo | suzana mendes gonçalves

UM | 2019/2020

## conceitos básicos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as ciências da computação.

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

### definição 2.1

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

## conceitos básicos

## exemplo 2.2

*São exemplos de conjuntos as coleções de:*

*i | unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos do MIEInf;*

*ii | pessoas presentes numa festa;*

*iii | estações do ano;*

*iv | todos os números naturais.*

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ , eventualmente com índices.

Os elementos de um conjunto são habitualmente representados por letras minúsculas  $a, b, c, \dots, x, y, z$ , também eventualmente com índices.

## conceitos básicos

## definição 2.3

Sejam  $A$  um conjunto e  $x$  um objeto.

Dizemos que  $x$  **pertence a**  $A$ , e escrevemos  $x \in A$ , se  $x$  é um dos objetos de  $A$ .

Caso  $x$  não seja um dos objetos de  $A$ , dizemos que  $x$  **não pertence a**  $A$  e escrevemos  $x \notin A$ .

## exemplo 2.4

*Sejam  $A$  o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e  $B$  o conjunto de todas as soluções da equação  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .*

*Temos, por exemplo, que  $3 \in A$  e  $1 \in B$ .*

*Por outro lado,  $1 \notin A$  e  $3 \notin B$ .*

## conceitos básicos

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas.

## definição de um conjunto por extensão

Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

## exemplo 2.5

*Se  $A$  é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e  $B$  o conjunto de todas as soluções da equação  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , então  $A$  e  $B$  podem ser descritos por extensão do seguinte modo:*

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\};$$

$$B = \{-4, 1\}.$$

## conceitos básicos

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

## exemplo 2.6

*O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

*O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação:*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

## conceitos básicos

## definição de um conjunto por compreensão

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado  $p(x)$ , com domínio de variação  $U$  para a variável  $x$ , tal que os valores possíveis  $a$  em  $U$  para os quais  $p(a)$  é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

## exemplo 2.7

*O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por  $\{1, 2, 3, 4\}$ .*

*Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue:*

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}.$$

## conceitos básicos

## exercício 2.8

Seja  $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$ . Indique os elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

i |  $\{x \in X : x \in \mathbb{N}\};$

ii |  $\{x \in X : |x| < 2\};$

iii |  $\{x \in X : \sqrt{x} \in X\};$

iv |  $\{x \in X : x^2 \in X\};$

v |  $\{x^2 : x \in X\}.$



## conceitos básicos

## definição 2.9

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por  $\emptyset$  ou por  $\{\}$ .

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo,

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\} = \{x : x \neq x\}.$$

## subconjuntos

## definição 2.10

Dois conjuntos  $A$  e  $B$  dizem-se **iguais**, e escreve-se  $A = B$ , se têm os mesmos elementos, ou seja, se

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então  $A$  e  $B$  dizem-se **diferentes**.

## exemplo 2.11

**1** | O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto  $A = \{1, 2, 4\}$  e também é igual ao conjunto  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$ .

**2** | Os conjuntos  $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$  e  $D = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$  são diferentes, pois  $3 \in C$  e  $3 \notin D$ .

## subconjuntos

## definição 2.12

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Diz-se que  $A$  **está contido em**  $B$  ou que  $A$  é um **subconjunto de**  $B$ , e escreve-se  $A \subseteq B$ , se todo o elemento de  $A$  é também elemento de  $B$ , ou seja, se

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Se existir um elemento de  $A$  que não é elemento de  $B$ , ou seja, se  $\exists x \in A \ x \notin B$ , diz-se que  $A$  **não está contido em**  $B$  ou que  $A$  **não é um subconjunto de**  $B$ , e escreve-se  $A \not\subseteq B$ .

## exemplo 2.13

**1** |  $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$ , uma vez que tanto  $-1$  como  $1$  são soluções da equação.

**2** |  $\{0, -1, 1\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$ , uma vez que  $0$  não é solução da equação.

## subconjuntos

## definição 2.14

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Diz-se que  $A$  **está propriamente contido em**  $B$  ou que  $A$  **é um subconjunto próprio de**  $B$ , e escreve-se  $A \subsetneq B$  ou  $A \subset B$ , se  $A \subseteq B$  e  $A \neq B$ , ou seja, se

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B} x \notin A.$$

## exemplo 2.15

$\{-1, 1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$ , uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação.

## subconjuntos

## proposição 2.16

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos. Então,

- 1 |  $\emptyset \subseteq A$ ;
- 2 |  $A \subseteq A$ ;
- 3 | Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$  então  $A \subseteq C$ ;
- 4 |  $A = B$  se e só se  $(A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$ .

## demonstração

1 | Mostremos, por redução ao absurdo, que  $\emptyset \subseteq A$ . Nesse sentido, assumamos que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Então, existe um elemento de  $\emptyset$  que não pertence a  $A$ . Ora,  $\emptyset$  não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo,  $\emptyset \subseteq A$ .

2 | Dado um elemento arbitrário  $a$  de  $A$ , é claro que  $a \in A$ . Logo,  
 $\forall_x (x \in A \rightarrow x \in A)$ , ou seja,  $A \subseteq A$ .

## subconjuntos

3 | Suponhamos que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , ou seja,

$$(*) \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad (**) \forall x (x \in B \rightarrow x \in C).$$

Pretendemos mostrar que  $A \subseteq C$ , isto é,  $\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$ . Seja  $x \in A$ . Por (\*), podemos concluir que  $x \in B$ . Logo, de (\*\*), vem que  $x \in C$ . Assim, todo o elemento de  $A$  é elemento de  $C$ , ou seja,  $A \subseteq C$ .

4 | Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência  $A = B$  se e só se ( $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ ). Iremos fazê-lo provando as duas implicações.

## subconjuntos

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $A = B$ . Então,

$$\forall_x (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall_x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)).$$

Logo,  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ . Então, todo o elemento de  $A$  é elemento de  $B$  e todo o elemento de  $B$  é elemento de  $A$ . Por outras palavras,  $A$  e  $B$  têm exatamente os mesmos elementos, ou seja,  $A = B$ .  $\square$

## operações com conjuntos

## definição 2.17

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$  (dito o **universo**). Chama-se **união** ou **reunião de  $A$  com  $B$** , e representa-se por  $A \cup B$ , o conjunto cujos elementos são os elementos de  $A$  e os elementos de  $B$ , ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

## exemplo 2.18

1 | Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4, 5\}$ . Então,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

2 | Sejam  $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Então,  $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$ .



## operações com conjuntos

## definição 2.19

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Chama-se **interseção de  $A$  com  $B$** , e representa-se por  $A \cap B$ , o conjunto cujos elementos pertencem a ambos os conjuntos  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

## exemplo 2.20

1 | Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4, 5\}$ . Então,  $A \cap B = \{3\}$ .

2 | Sejam  $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Então,  $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

## operações com conjuntos

## definição 2.21

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Chama-se **complementar de  $B$  em  $A$** , e representa-se por  $A \setminus B$ , o conjunto cujos elementos pertencem a  $A$  mas não pertencem a  $B$ , ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O complementar de  $B$  em  $A$  também se designa por **diferença de  $A$  com  $B$**  e representa-se por  $A - B$ .

Quando  $A$  é o universo  $X$ , o conjunto  $A \setminus B = X \setminus B$  diz-se o **complementar de  $B$**  e representa-se por  $\overline{B}$  ou  $B'$ .

## operações com conjuntos

## exemplo 2.22

1 | Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4, 5\}$ . Então,  $A \setminus B = \{1, 2\}$ .

2 | Sejam  $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Então,  $C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par} \wedge n > 10\}$  e  $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$ .

3 | Dados os subconjuntos  $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$  e  $F = ] - \infty, 3]$  de  $\mathbb{R}$ , temos:

i |  $E \cup F = ] - \infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$ ;

ii |  $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$ ;

iii |  $E \setminus F = \{\pi, 7\}$ ;

iv |  $\overline{E \cup F} = [3, \pi[ \cup ]\pi, 7[ \cup ]7, +\infty[$ .

## operações com conjuntos

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

## proposição 2.23

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Então,

- 1 |  $A \subseteq A \cup B$  e  $B \subseteq A \cup B$ ;
- 2 |  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 3 |  $A \cup A = A$ ;
- 4 |  $A \cup X = X$ ;
- 5 |  $A \cup B = B \cup A$ ;
- 6 |  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;
- 7 | se  $A \subseteq B$  então  $A \cup B = B$ .

## operações com conjuntos

## demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que  $A \subseteq A \cup B$ , ou seja, que

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in A \cup B).$$

Seja  $x \in A$ . Então, é verdadeira a proposição  $x \in A \vee x \in B$ , pelo que  $x \in A \cup B$ . Logo,  $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$  e, portanto,  $A \subseteq A \cup B$ .

A prova de  $B \subseteq A \cup B$  é análoga.

2 | Mostremos que  $A \cup \emptyset = A$ . Da propriedade 1, vem que  $A \subseteq A \cup \emptyset$ . Resta, pois, provar que  $A \cup \emptyset \subseteq A$ .

## operações com conjuntos

Seja  $x \in A \cup \emptyset$ . Então,  $x \in A \vee x \in \emptyset$ .

Ora, a proposição  $x \in \emptyset$  é falsa, pois  $\emptyset$  não tem elementos. Logo, podemos concluir que  $x \in A$  e, portanto,

$$x \in A \cup \emptyset \rightarrow x \in A.$$

Por outras palavras,  $A \cup \emptyset \subseteq A$ .

Assim,  $A \cup \emptyset = A$ .

**4 |** Provemos agora que  $A \cup X = X$ . Da propriedade 1, vem que  $X \subseteq A \cup X$ . Basta mostrar que  $A \cup X \subseteq X$ .

Seja  $x \in A \cup X$ . Então,  $x \in A \vee x \in X$ . Pretendemos mostrar que  $x \in X$ . Podemos dividir a prova em dois casos: (I)  $x \in A$ ; (II)  $x \in X$ .

No caso (I), como  $A$  é um subconjunto de  $X$ , temos que todo o elemento de  $A$  é também elemento de  $X$ . Portanto,  $x \in X$ . No caso (II), é imediato que  $x \in X$ .

Logo,  $x \in A \cup X \rightarrow x \in X$ , donde  $A \cup X \subseteq X$  e, assim,  $A \cup X = X$ .

## operações com conjuntos

6 | Mostremos que  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . Por definição de união de conjuntos,

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C.$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção (ver proposição 1.32), temos que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C).$$

Logo,  $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ , pelo que  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

## operações com conjuntos

7 | Admitamos que  $A \subseteq B$  e mostremos que  $A \cup B = B$ . Da propriedade 1, vem que  $B \subseteq A \cup B$ . Falta, pois, provar que  $A \cup B \subseteq B$ .

Seja  $x \in A \cup B$ . Então,  $x \in A \vee x \in B$ . Podemos dividir a prova em dois casos: (I)  $x \in A$ ; (II)  $x \in B$ .

No caso (I), como  $A$  é um subconjunto de  $B$ , sabemos que todo o elemento de  $A$  é também elemento de  $B$ . Portanto,  $x \in B$ . No caso (II), é imediato que  $x \in B$ .

Assim,  $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$ .

Logo,  $A \cup B \subseteq B$ , pelo que  $A \cup B = B$ . □



## operações com conjuntos

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

## proposição 2.24

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Então,

- 1 |  $A \cap B \subseteq A$  e  $A \cap B \subseteq B$ ;
- 2 |  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- 3 |  $A \cap A = A$ ;
- 4 |  $A \cap X = A$ ;
- 5 |  $A \cap B = B \cap A$ ;
- 6 |  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- 7 | se  $A \subseteq B$  então  $A \cap B = A$ .

## operações com conjuntos

## demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que  $A \cap B \subseteq A$ , ou seja, que

$$\forall_x (x \in A \cap B \rightarrow x \in A).$$

Seja  $x \in A \cap B$ . Então, por definição de interseção de conjuntos,  $x \in A \wedge x \in B$ .

Logo, são verdadeiras ambas as proposições  $x \in A$  e  $x \in B$ .

Em particular,  $x \in A$  é uma proposição verdadeira.

Logo,  $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$  e, portanto,  $A \cap B \subseteq A$ .

A prova de  $A \cap B \subseteq B$  é análoga.

## operações com conjuntos

2 | Mostremos que  $A \cap \emptyset = \emptyset$ . Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que  $A \cap \emptyset \neq \emptyset$ .

Então, existe um objeto  $x$  tal que  $x \in A \cap \emptyset$ .

Logo,  $x \in A \wedge x \in \emptyset$ . Em particular,  $x \in \emptyset$ . Mas  $\emptyset$  não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que  $A \cap \emptyset \neq \emptyset$ .

Assim,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

7 | Admitamos que  $A \subseteq B$  e mostremos que  $A \cap B = A$ . Da propriedade 1, vem que  $A \cap B \subseteq A$ . Falta, pois, provar que  $A \subseteq A \cap B$ .

Seja  $x \in A$ . Então, como  $A \subseteq B$ , podemos concluir que  $x \in B$ .

Logo, temos  $x \in A \wedge x \in B$ . Vimos, portanto, que  $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ , ou seja,  $x \in A \rightarrow x \in A \cap B$ .

Assim,  $A \subseteq A \cap B$ . □

## operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

## proposição 2.25

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Então,

- 1 |  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  e  $A \cup \bar{A} = X$ ;
- 2 |  $A \setminus \emptyset = A$  e  $A \setminus X = \emptyset$ ;
- 3 | se  $A \subseteq B$ , então  $A \setminus B = \emptyset$ ;
- 4 |  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ;
- 5 |  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ;
- 6 |  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;
- 7 |  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;
- 8 |  $\overline{(\bar{A})} = A$ .

## operações com conjuntos

**demonstração** Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1 | Começemos por mostrar que  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe  $x \in A \cap \bar{A}$ .

Então,

$$x \in A \wedge x \in \bar{A}.$$

Logo, por definição de complementar de um conjunto,

$$x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A).$$

Chegamos, desta forma, a uma contradição,  $x \in A \wedge x \notin A$ , que resultou de supormos que  $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Portanto,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

## operações com conjuntos

Verifiquemos, agora, que  $A \cup \bar{A} = X$ .

Dado  $x \in A \cup \bar{A}$ , temos  $x \in A \vee x \in \bar{A}$ . Temos, deste modo, dois casos a considerar: (I)  $x \in A$ ; (II)  $x \in \bar{A}$ . Como  $A$  e  $\bar{A}$  são subconjuntos de  $X$ , os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de  $X$ . Assim, em ambos os casos podemos afirmar que  $x \in X$ .

Portanto,  $A \cup \bar{A} \subseteq X$ .

Resta mostrar que  $X \subseteq A \cup \bar{A}$ . Nesse sentido, tomemos  $x \in X$ .

É claro que a proposição  $x \in A \vee x \notin A$  é verdadeira. Ora, se  $x \in X$  e  $x \notin A$ , então  $x \in \bar{A}$ .

Logo,

$$x \in X \rightarrow (x \in A \vee x \in \bar{A}),$$

ou seja,

$$x \in X \rightarrow x \in A \cup \bar{A}.$$

Portanto,  $X \subseteq A \cup \bar{A}$  e a igualdade pretendida segue.

## operações com conjuntos

2 | Começemos por mostrar que  $A \setminus \emptyset = A$ .

Por definição,  $A \setminus \emptyset$  é o conjunto de todos os elementos de  $A$  que não pertencem a  $\emptyset$ . Ora, nenhum elemento pertence a  $\emptyset$ .

Logo,  $A \setminus \emptyset$  é o conjunto de todos os elementos de  $A$ , ou seja,  $A \setminus \emptyset = A$ .

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que  $A \setminus X = \emptyset$ , tomemos  $x \in A \setminus X$ .

Então,  $x$  é tal que  $x \in A \wedge x \notin X$ .

Como  $A$  é um subconjunto de  $X$ ,

$$x \in A \rightarrow x \in X.$$

Portanto,  $x$  é tal que  $x \in X \wedge x \notin X$ , uma contradição. Assim,  $A \setminus X = \emptyset$ .

## operações com conjuntos

5 | Pretendemos mostrar que  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Precisamos, pois, de mostrar que  $x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica  $\wedge$  em relação à operação  $\vee$ , temos que

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
 &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
 &\leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
 &\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

Logo,  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . □



## operações com conjuntos

**observação** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é usualmente notada por  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  e a interseção por  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ . Assim,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}.$$

## operações com conjuntos

Vejamos, agora, outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos dados.

## definição 2.26

Seja  $A$  um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de  $A$**  ou **conjunto potência de  $A$** , que representamos por  $\mathcal{P}(A)$ , ao conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ , ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

## exemplo 2.27

Sejam  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{1, \{2\}\}$  e  $D = \emptyset$ . Então,

- 1 |  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 2 |  $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- 3 |  $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$
- 4 |  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

## operações com conjuntos

## proposição 2.28

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Então,

- 1 |  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  e  $A \in \mathcal{P}(A)$ ;
- 2 | se  $A \subseteq B$ , então  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ;
- 3 | se  $A$  tem  $n$  elementos, então  $\mathcal{P}(A)$  tem  $2^n$  elementos.

## demonstração

- 1 | Para qualquer conjunto  $A$ , temos que  $\emptyset \subseteq A$  e  $A \subseteq A$ , pelo que  $\emptyset$  e  $A$  são elementos de  $\mathcal{P}(A)$ .

## operações com conjuntos

2 | Suponhamos que  $A \subseteq B$ . Pretendemos mostrar que  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ , ou seja,

$$\forall X (X \in \mathcal{P}(A) \rightarrow X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja  $X \in \mathcal{P}(A)$ . Então,  $X \subseteq A$ .

Pela proposição 2.16.3, como  $X \subseteq A$  e  $A \subseteq B$ , podemos concluir que  $X \subseteq B$ .

Logo,  $X \in \mathcal{P}(B)$  e, portanto,  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ .

3 | consultar bibliografia adequada.

## operações com conjuntos

Dados dois objetos  $a$  e  $b$ , os conjuntos  $\{a, b\}$  e  $\{b, a\}$  são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não interessa.

Em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorreremos ao conceito de par ordenado.

Dados dois objetos  $a$  e  $b$ , o **par ordenado de  $a$  e de  $b$**  será denotado por  $(a, b)$ . Dois pares ordenados  $(a, b)$  e  $(c, d)$  dizem-se **iguais**, escrevendo-se  $(a, b) = (c, d)$ , quando  $a = c$  e  $b = d$ .

Note-se que, dados dois objetos  $a$  e  $b$ , se  $a \neq b$ , então  $(a, b) \neq (b, a)$ .

## operações com conjuntos

Num par ordenado  $(a, b)$ , o objeto  $a$  é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto  $b$  é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

## definição 2.29

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a \in A$  e  $b \in B$  diz-se o **produto cartesiano de  $A$  por  $B$**  e representa-se por  $A \times B$ . Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

## operações com conjuntos

## exemplo 2.30

1 | Sejam  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Então,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

É claro que  $A \times B \neq B \times A$ .

2 | Sejam  $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ . Então,

$$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

3 | Sejam  $E = F = \mathbb{R}$ . Os elementos de  $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

## operações com conjuntos

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

## definição 2.31

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos ( $n \geq 2$ ). O *produto cartesiano* de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , notado por  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , é o conjunto dos  $n$ -úplos ordenados  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  em que  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ , ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Se  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , escrevemos  $A^n$  em alternativa a  $A \times A \times \dots \times A$ .



## operações com conjuntos

## observação

Dois  $n$ -úplos ordenados  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  são iguais se e somente se  $a_1 = b_1$  e  $a_2 = b_2$  e  $\dots$  e  $a_n = b_n$ .

## exemplo 2.32

Sejam  $A = \{4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  e  $C = \{7\}$ . Temos que

$$A \times B \times C = \{(4, 1, 7), (4, 2, 7), (4, 3, 7), (5, 1, 7), (5, 2, 7), (5, 3, 7)\}$$

e

$$A^2 = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.$$

## operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

## proposição 2.33

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  conjuntos. Então,

$$1 \mid A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A;$$

$$2 \mid \text{sendo os conjuntos não vazios, } (A \times B) \subseteq (C \times D) \text{ se e só se } A \subseteq C \text{ e } B \subseteq D;$$

$$3a \mid C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

$$3b \mid (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$4a \mid C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B);$$

$$4b \mid (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$5a \mid C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B);$$

$$5b \mid (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

## operações com conjuntos

## demonstração

2 | Admitamos que todos os conjuntos são não vazios. Pretendemos mostrar que  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$  se e só se  $A \subseteq C$  e  $B \subseteq D$ .

$(\Rightarrow)$  Suponhamos que  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$  e procuremos provar que  $A \subseteq C$  e  $B \subseteq D$ .

Sejam  $a \in A$  e  $b \in B$ . Então, por definição de produto cartesiano,  $(a, b) \in A \times B$ .

Por hipótese, todo o elemento de  $A \times B$  é elemento de  $C \times D$ .

Portanto,  $(a, b) \in C \times D$ , pelo que  $a \in C$  e  $b \in D$ .

Provámos, assim, que

$$\forall_a (a \in A \rightarrow a \in C) \quad \text{e} \quad \forall_b (b \in B \rightarrow b \in D),$$

ou seja,  $A \subseteq C$  e  $B \subseteq D$ .

## operações com conjuntos

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, admitamos que  $A \subseteq C$  e  $B \subseteq D$  e mostremos que  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ .

Seja  $(a, b) \in A \times B$ . Então, por definição de produto cartesiano,  $a \in A$  e  $b \in B$ .

Por hipótese, todo o elemento de  $A$  é elemento de  $C$  e todo o elemento de  $B$  é elemento de  $D$ .

Logo,  $a \in C$  e  $b \in D$  e, portanto,  $(a, b) \in C \times D$ . Assim,

$$\forall_{a,b} ((a, b) \in A \times B \rightarrow (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto,  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ .

## operações com conjuntos

5a | Pretendemos mostrar que  $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$ .

Dado um par ordenado  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) &\leftrightarrow (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \notin C \times B \\
 &\leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
 &\leftrightarrow ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
 &\quad \vee ((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
 &\leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
 &\leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
 &\leftrightarrow x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
 &\leftrightarrow (x, y) \in C \times (A \setminus B)
 \end{aligned}$$

A demonstração das restantes propriedades fica ao cuidado dos alunos. □

**observação** Se os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  têm  $p_1, p_2, \dots, p_n$  elementos, respetivamente, o produto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  tem  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$  elementos.