Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Aula Prática 2: Variantes e extensões do problema do caminho mais curto

Elementos de Engenharia de Sistemas

2019/2020

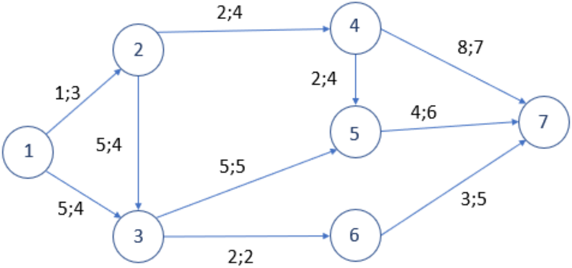
Caminho mais curto com restrição temporal

- **Objetivo:** determinar o caminho mais curto entre o nodo o e o nodo d, de tal forma que este não exceda um número predefinido de unidades de tempo.

- Cada arco $ij \in A$ passa a ter duas etiquetas associadas: c_{ij}, relativa ao comprimento e t_{ij}, relativa à duração.
- É definido um parâmetro adicional T - número de unidades de tempo que o caminho selecionado não pode exceder.

Caminho mais curto com restrição temporal

- **Exemplo:** Considerando a rede da figura, apresente o modelo de PI para o problema do caminho mais curto, de tal forma que a duração do caminho não exceda as 15 unidades de tempo.



Rede com (comprimento; duração) nos arcos.

Caminho mais curto com restrição temporal

- Para o modelo do problema do caminho mais curto **sem** restrição temporal, definimos as variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- para cada arco $ij \in A$.

Caminho mais curto com restrição temporal

- O modelo de programação inteira é

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min} \quad & z = x_{12} + 5x_{13} + 5x_{23} + 2x_{24} + 5x_{35} + 2x_{36} + 2x_{45} + \\
& + 8x_{47} + 4x_{57} + 3x_{67} && (1)\\
\text{S.a.} \quad & x_{12} + x_{13} = 1 && (2)\\
& -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 && (3)\\
& -x_{13} + x_{35} + x_{36} = 0 && (4)\\
& -x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 && (5)\\
& -x_{35} + x_{57} = 0 && (6)\\
& -x_{36} + x_{67} = 0 && (7)\\
& -x_{47} - x_{57} - x_{67} = -1 && (8)\\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall ij \in A. && (9)
\end{aligned}
$$

Caminho mais curto com restrição temporal

- Para o modelo do problema do caminho mais curto **com** restrição temporal, mantemos o modelo anterior e adicionamos a seguinte restrição:

$$3x_{12} + 4x_{13} + 4x_{23} + 4x_{24} + 5x_{35} + 2x_{36} + 4x_{45} + 7x_{47} + 6x_{57} + 5x_{67} \leq 15 \tag{10}$$

- que nos permite garantir que a duração do caminho não excede as 15 unidades de tempo.

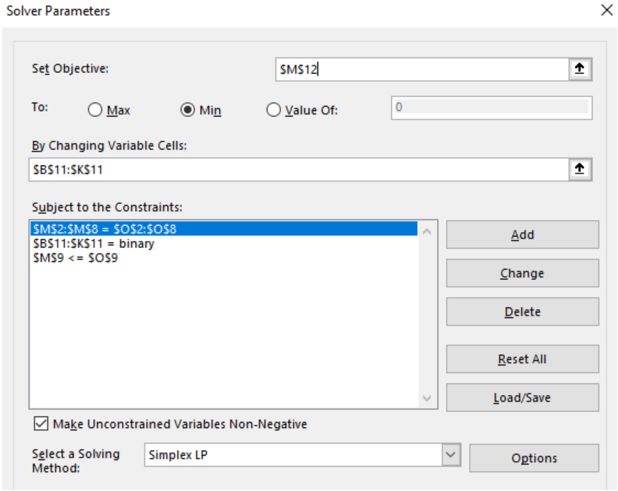
Caminho mais curto com restrição temporal

- No Excel, adicionamos uma linha com as durações de cada arco à matriz dos coeficientes, bem como uma célula ao LHS e outra ao RHS.
- No RHS, vai estar o parâmetro T, neste caso definido como 15 (apenas esta **constante**).
- No LHS, teremos de fazer o SUMPRODUCT entre a linha das durações dos arcos e a linha das variáveis de decisão.

Caminho mais curto com restrição temporal

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										0	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		0	=	-1
9	tempo	3	4	4	4	5	2	4	7	6	5		0	<=	15
10															
11	x_ij												Z		
12	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0		

Caminho mais curto com restrição temporal



Caminho mais curto com restrição temporal

- Uma solução ótima para o problema do caminho mais curto **sem** restrição de tempo é o caminho 1-2-4-5-7, que tem comprimento 9. No entanto, a duração deste caminho é 17, o que o torna **não admissível** para o problema do caminho mais curto **com** restrição de tempo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		-1	=	-1
9	tempo	3	4	4	4	5	2	4	7	6	5		17	<=	15
10															
11	x_ij	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0		Z		
12	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		9		

Caminho mais curto com restrição temporal

- Uma solução ótima para o problema do caminho mais curto com restrição de tempo é o caminho 1-3-6-7, com comprimento 10 e duração 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1	=	1
3	2	-1		1	1								0	=	0
4	3		-1	-1		1	1						0	=	0
5	4				-1			1	1				0	=	0
6	5					-1		-1		1			0	=	0
7	6						-1				1		0	=	0
8	7								-1	-1	-1		-1	=	-1
9	tempo	3	4	4	4	5	2	4	7	6	5		11	<=	15
10															
11	x_ij	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		Z		
12	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		10		

Caminhos disjuntos nos arcos

- **Objetivo:** determinar dois caminhos disjuntos nos arcos (cada arco faz parte, no máximo, de um caminho) entre o nodo o e o nodo d, de forma a minimizar a distância total.

Caminhos disjuntos nos arcos

- Será definido um conjunto de variáveis de decisão para o caminho 1 e outro conjunto para o caminho 2.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall ij \in A$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall ij \in A$$

- A função objetivo minimiza o comprimento total, ou seja, a soma dos comprimentos dos dois caminhos.

Caminhos disjuntos nos arcos

$$\begin{aligned}\textbf{Min} \quad z = & x_{12} + 5x_{13} + 5x_{23} + 2x_{24} + 5x_{35} + 2x_{36} + 2x_{45} + \\ & + 8x_{47} + 4x_{57} + 3x_{67} + y_{12} + 5y_{13} + 5y_{23} + 2y_{24} + \\ & + 5y_{35} + 2y_{36} + 2y_{45} + 8y_{47} + 4y_{57} + 3y_{67} \end{aligned} \tag{11}$$

- Para cada um dos caminhos, são definidas as restrições de conservação de fluxo.

$$x_{12} + x_{13} = 1 \tag{12}$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 \tag{13}$$

$$-x_{13} + x_{35} + x_{36} = 0 \tag{14}$$

$$-x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 \tag{15}$$

$$-x_{35} + x_{57} = 0 \tag{16}$$

Caminhos disjuntos nos arcos

$$-x_{36} + x_{67} = 0 \tag{17}$$

$$-x_{47} - x_{57} - x_{67} = -1 \tag{18}$$

$$y_{12} + y_{13} = 1 \tag{19}$$

$$-y_{12} + y_{23} + y_{24} = 0 \tag{20}$$

$$-y_{13} + y_{35} + y_{36} = 0 \tag{21}$$

$$-y_{24} + y_{45} + y_{47} = 0 \tag{22}$$

$$-y_{35} + y_{57} = 0 \tag{23}$$

$$-y_{36} + y_{67} = 0 \tag{24}$$

$$-y_{47} - y_{57} - y_{67} = -1 \tag{25}$$

Caminhos disjuntos nos arcos

- Finalmente, acrescentamos as restrições que garantem que um arco faz parte, no máximo, de um caminho.

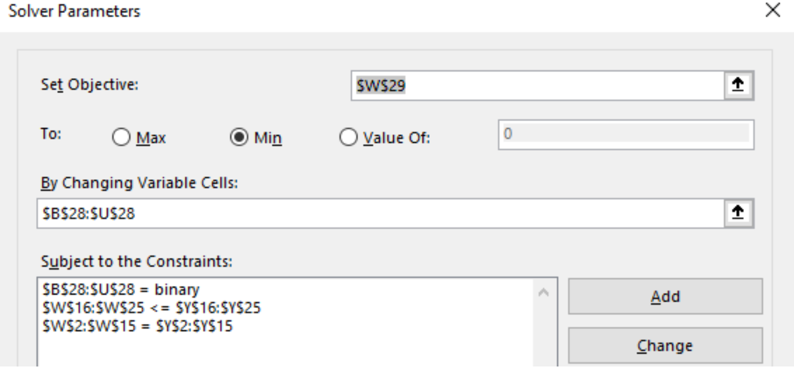
$$x_{12} + y_{12} \leq 1 \tag{26}$$
$$x_{13} + y_{13} \leq 1 \tag{27}$$
$$x_{23} + y_{23} \leq 1 \tag{28}$$
$$x_{24} + y_{24} \leq 1 \tag{29}$$
$$\vdots$$
$$x_{57} + y_{57} \leq 1 \tag{30}$$
$$x_{67} + y_{67} \leq 1 \tag{31}$$
$$x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A. \tag{32}$$

Caminhos disjuntos nos arcos

- No Excel, temos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1																				0	=	1
3	2	-1		1	1																		0	=	0
4	3		-1	-1		1	1																0	=	0
5	4				-1			1	1														0	=	0
6	5					-1		-1		1													0	=	0
7	6						-1				1												0	=	0
8	7								-1	-1	-1												0	=	-1
9	1											1	1										0	=	1
10	2											-1		1	1								0	=	0
11	3												-1	-1		1	1						0	=	0
12	4														-1			1	1				0	=	0
13	5															-1		-1		1			0	=	0
14	6																-1				1		0	=	0
15	7																		-1	-1	-1		0	=	-1
16	12	1										1											0	<=	1
17	13		1										1										0	<=	1
18	23			1										1									0	<=	1
19	24				1										1								0	<=	1
20	35					1										1							0	<=	1
21	36						1										1						0	<=	1
22	45							1										1					0	<=	1
23	47								1										1				0	<=	1
24	57									1										1			0	<=	1
25	67										1										1		0	<=	1
26																									
27						x_ij										y_ij									
28	VD																						Z		
29	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0		

Caminhos disjuntos nos arcos



Caminhos disjuntos nos arcos

- Uma solução ótima para este problema é constituída pelos caminhos 1-2-4-5-7 e 1-3-6-7, com distância total igual a 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs
26																							
27		x_ij										y_ij											
28	VD	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		Z
29	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		19