ANÁLISE
Cap. 4 – Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

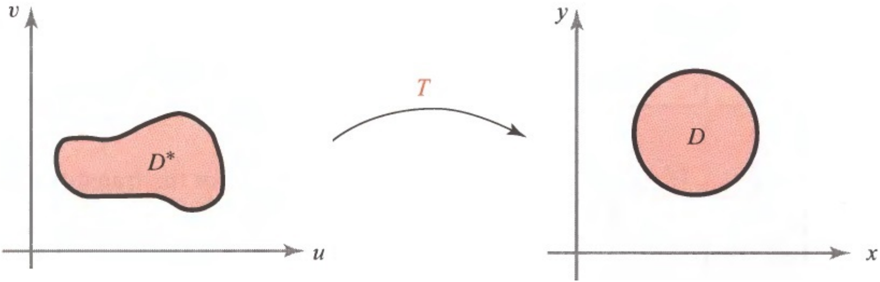
Dep. Matemática UMinho

Abril 2020

4. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

4.2 Mudança de variáveis em integrais duplos

Transformações de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$



- D^* um subconjunto $\mathbb{R}^2$;
- $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação injetiva e diferenciável;
- $T(D^*) = D$, isto é, para cada $(x, y) \in D$ existe $(u, v) \in D^*$ tal que $T(u, v) = (x, y)$.
- Como é que T "deforma" D^*?

- [Mudança de coordenadas]

  Seja $D^* \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma função (vetorial)

  $$T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

  é uma mudança de coordenadas em D^* se verificar as seguintes condições:

  - T é de classe $\mathcal{C}^1$;
  - T é injetiva (exceto eventualmente na fronteira de D^*);
  - $\det JT(t) \neq 0$ (exceto eventualmente na fronteira de D^*).

Propriedades

1. Se $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma mudança de coordenadas (injetiva e verificando $\det JT \neq 0$ em D^*) então T transforma a fronteira de D^* na fronteira de $D = T(D^*)$.

2. Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear

$$T(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

   onde A é uma matriz real tal que[1] $\det A \neq 0$ então T é uma mudança de coordenadas e transforma paralelogramos em paralelogramos e vértices em vértices.

[1] A transformação T é bijectiva se e só se $\det A \neq 0$

Exemplo

- Seja $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando

$$T(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right).$$

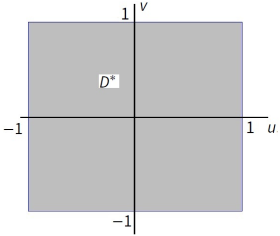
A transformação T é linear e pode ser escrita na forma

$$T(u, v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Temos $\det A = -\frac{1}{2} \neq 0$. Logo T é uma mudança de coordenadas. Além disso, como T é linear, transforma paralelogramos em paralelogramos e vértices em vértices.

Para determinar a imagem do quadrado D^* determinamos a imagem dos 4 vértices:

$$T(-1,-1) = (-1,0), \qquad T(1,-1) = (0,1),$$
$$T(1,1) = (1,0), \qquad T(-1,1) = (0,-1).$$



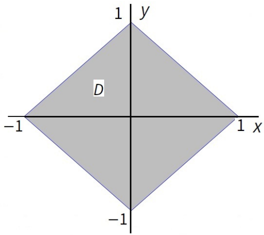


Figura: Representação geométrica de D^* e $D = T(D^*)$

Exemplo

- Seja $D^* = [0,1] \times [0,1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando

$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

A aplicação T é de classe $\mathcal{C}^1$ e é injetiva em D^*.
No entanto $\det JT(u,v) \neq 0$ se e só se $(u,v) \neq (0,0)$. Mas $(0,0) \in \mathrm{fr}(D^*)$.
Portanto T é uma mudança de coordenadas.

Determine-se a imagem de cada um dos segmentos de reta que constituem a fronteira de D^*:

$$\begin{aligned}
L_1^* &: v = 0, \quad 0 \leq u \leq 1 \\
L_2^* &: u = 1, \quad 0 \leq v \leq 1 \\
L_3^* &: v = 1, \quad 0 \leq u \leq 1 \\
L_4^* &: u = 0, \quad 0 \leq v \leq 1
\end{aligned}$$

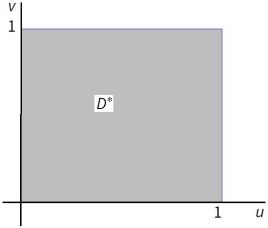
Da definição de T tem-se $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$. Então, a imagem de cada uma das linhas L_i^* por T é

$$L_1 \;:\; x = u^2, y = 0 \text{ ou seja } y = 0,\; 0 \leq x \leq 1$$

$$L_2 \;: x = 1 - v^2, y = 2v \text{ ou seja } x = 1 - \frac{y^2}{4},\; 0 \leq y \leq 2$$

$$L_3 \;:\; x = u^2 - 1, y = 2u \text{ ou seja } x = \frac{y^2}{4} - 1,\; 0 \leq y \leq 2$$

$$L_4 \;:\; x = -v^2, y = 0 \text{ ou seja } y = 0,\; -1 \leq x \leq 0$$



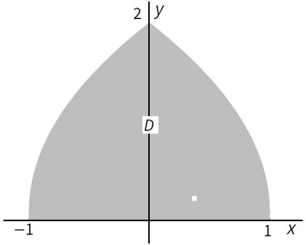
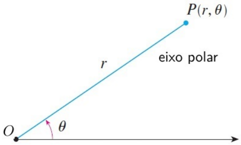


Figura: Representação geométrica de D^* e $D = T(D^*)$

Sistema de coordenadas polares

- [Definição] Seja $P \in \mathbb{R}^2$ com $P \neq (0,0)$. Consideramos:



  - a origem O do referencial;
  - um semi-eixo de origem O a que chamamos semi-eixo horizontal;
  - o semi-eixo de origem O incidente em P a que chamamos semi-eixo polar;
  - r a distância a O;
  - θ o ângulo entre o semi-eixo polar e o semi-eixo horizontal.

- Ao par (r, θ) chamamos as coordenadas polares do ponto P.

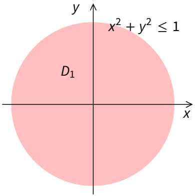
[Exemplo] Marcar os pontos de coordenadas polares $(1, \pi)$ e $(2, \pi/2)$.

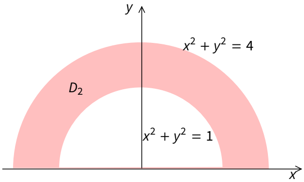
Observação

1. A descrição de um ponto em coordenadas polares não é única. Por isso toma-se $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$.
   Observe ainda que se $P = (0, 0)$ então $r = 0$ mas θ pode tomar qualquer valor.
2. No sistema de coordenadas polares, considera-se:

$$r \in \; [0, \; +\infty[\quad \text{e} \quad \theta \in \; [\,0, 2\pi\,[\,.$$

3. As coordenadas polares são indicadas para descrever regiões circulares (no plano)

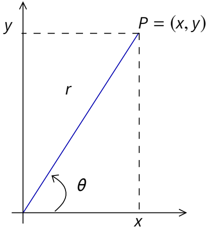




Coordenadas cartesianas vs coordenadas polares

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y)$



Coordenadas polares

$P = (r, \theta)$

- Da trigonometria do retângulo vem

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0 + \infty[\\ \theta \in [0, +\infty[. \end{array}$$

- Como determinar r:

$$x^2 + y^2 = (r\ \cos\theta)^2 + (r\ \text{sen}\,\theta)^2 = r^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Como determinar θ:

$$\begin{array}{ll} \text{Para } x \neq 0, & \frac{y}{x} = \tan\theta; \\ \text{Para } x = 0 \text{ e } y > 0, & \theta = \frac{\pi}{2}; \\ \text{Para } x = 0 \text{ e } y < 0, & \theta = \frac{3\pi}{2}. \end{array}$$

- [Mudança de coordenadas polares para cartesianas]

Seja $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função vetorial definida por

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

onde $D^* = [0,+\infty[\times[0,2\pi[$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,+\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

A função T é de classe $\mathcal{C}^1$ e a sua matriz Jacobiana é

$$JT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e $\det JT(r,\theta) = r$.

- A função T define uma mudança de coordenadas de coordenadas no plano.
  [Observe que as condições de injetividade e determinante da matriz jacobiana falham apenas quando $r = 0$, ou seja, na fronteira de D^*.]

Exemplo

- Seja $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Da definição de T vem $x = r\ \cos\theta$ e $y = r\ \mathrm{sen}\,\theta$. Então, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria vem

$$x^2 + y^2 = r^2\ .$$

Para cada r, esta é uma equação de uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio r. Como $0 \leq r \leq 1$, $T(D^*)$ está contido no círculo de centro $(0,0)$ e raio 1.
Para determinar se se trata de todo o círculo ou só um seu setor, consideramos a variação do ângulo θ. Como $\theta \in [0,2\pi]$, então a imagem da região D^* é, de facto, o círculo unitário centrado na origem.

Mudança de variáveis num integral duplo

Sejam

- D^* e D regiões elementares (do tipo I ou do tipo II) do plano.
- $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que:
  - transforma a região D^* na região D, isto é, $T(D^*) = D$;
  - T é injetiva em $\text{int}(D^*)$;
  - $\det JT(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in \text{int}(D^*)$.
- f uma função contínua em D.

Então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} (f \circ T)(u,v)\,|\det JT(u,v)|\,du\,dv.$$

Exemplo

- Seja P o paralelogramo definido por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Fazendo a mudança de variáveis definida $x = u - v$, $y = 2u - v$ calcule o integral
$$\iint_P xy\, dx\, dy.$$

A função integranda é a função definida em P por $f(x, y) = xy$, que, por ser uma função polinomial, é contínua.

A transformação T é definida por $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$. Esta é uma transformação linear cuja matriz Jacobiana é

$$JT(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta é uma transformação de classe C^1, injetiva e tal que $\det JT(u, v) = 1$.

Da definição de f e T segue que

$$(f \circ T)(u,v) = f(u - v, 2u - v) = (u - v)(2u - v) = 2u^2 - 3uv + v^2\,.$$

É necessário determinar a imagem de P pela inversa de T: T^{-1} .
Para tal há que resolver, em ordem a u e v, o sistema

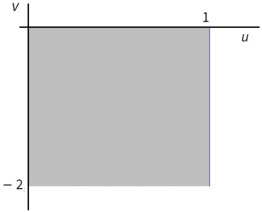
$$\begin{cases} x = u - v \\ y = 2u - v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = y - x \\ v = y - 2x \end{cases} .$$

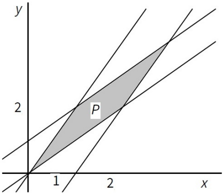
Concluí-se que $T^{-1}(x, y) = (y - x, y - 2x)$.
Como T^{-1} é linear e P um paralelogramo, basta determinar a imagem dos seus vértices:

$$T^{-1}(0,0) = (0,0), \qquad T^{-1}(2,2) = (0,-2),$$
$$T^{-1}(3,4) = (1,-2), \qquad T^{-1}(1,2) = (1,0)$$

Assim, P^* é o retângulo do plano definido por

$$0 \leq u \leq 1, \quad -2 \leq v \leq 0 .$$





Finalmente, usando o resultado sobre “Mudança de variáveis num integral duplo” vem (omitem-se os passos intermédios)

$$
\begin{aligned}
\iint_P xy\,dx\,dy &= \iint_{P^*} (f \circ T)(u,v)\,|\det JT(u,v)|\,du\,dv \\
&= \iint_{P^*} (2u^2 - 3uv + v^2)\,|1|\,du\,dv \\
&= \int_0^1 \left[\int_{-2}^0 (2u^2 - 3uv + v^2)\,dv\right] du \\
&= \int_0^1 \left[4u^2 + 6u + \frac{8}{3}\right] du = \frac{21}{3}
\end{aligned}
$$

[Observação 1] Note-se que da descrição de P resulta

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x - 2 \\ y = x \\ y = x + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - 2x = -2 \\ y - x = 0 \\ y - x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = -2 \\ u = 0 \\ u = 1 \end{cases}$$

Estas são equações das retas que delimitam P^* nas coordenadas (u, v).

[Observação 2] Note também que $f(x, y) = xy > 0$ em P pelo que necessariamente

$$\iint_P xy\, dx\, dy > 0.$$

- [Caso particular: coordenadas polares]

  Sejam D^* e D duas regiões elementares do plano.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

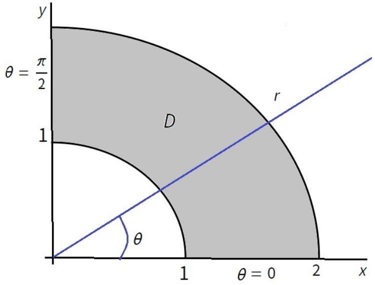
$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

  Se $T(D^*) = D$, então

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D^*} r\, f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta\ .$$

Exemplo

- Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$
onde
$$D = \{(x, y) \;:\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$$



Atendendo à geometria de D, é natural considerar o cálculo do integral proposto usando uma mudança para coordenadas polares:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} (f \circ T)(r,\theta)\,|\det JT(r,\theta)|\,dr\,d\theta\,.$$

Neste caso, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $\det JT(r,\theta) = r$.

Aqui, a função integranda é a função contínua definida em D por $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Assim, $(f \circ T)(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2$.

A descrição de D^* em coordenadas polares é dada por

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D^*} (f \circ T)(r,\theta)\,|\det JT(r,\theta)|\,dr\,d\theta \\ &= \iint_{D^*} r^2\,|r|\,dr\,d\theta = \iint_{D^*} r^3\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_1^2 r^3\,dr\right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{15}{4}\,d\theta = \frac{15\pi}{8}\,.\end{aligned}$$