Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{A}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

9 janeiro 2019 Duração: 2 horas

Nome: ____________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 8 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 9 & 0 & -7\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

as quais se sabe serem equivalentes por linhas.

a) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: $((1,0,3,0,-2),(0,1,1,0,-1),(0,0,0,1,4))$.

b) As três primeiras colunas de A são vetores de $\mathbb{R}^4$ linearmente dependentes.

c) $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.

d) Sendo $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz é A, uma base para $\operatorname{Im} T$ é:

$((1,1,3,2),(-1,1,-1,3),(0,1,1,0))$.

2. Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe(m):

a) dois vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes tais que $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle$;

Por exemplo, os vetores $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$ e $\mathbf{v}_2=(0,1,0)$.

Note-se que, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, tem-se sempre $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle$, pelo que quaisquer dois vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes servem de exemplo.

b) uma matriz A tal que $(1,0)\in\mathcal{N}(A)$ e $(0,1)\in\mathcal{C}(A)$;

Por exemplo, a matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Note-se que esta é a matriz da aplicação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0)=(0,0)$ (logo, $(1,0)\in\operatorname{Nuc} T$) e $T(0,1)=(0,1)$ (logo, $(0,1)\in\operatorname{Im} T$) e relembre-se que $\mathcal{N}(A)=\operatorname{Nuc} T$ e $\mathcal{C}(A)=\operatorname{Im} T$.

c) uma aplicação linear $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ injetiva e tal que $\varphi(1,0,0)=(1,0,0,0)$ e $\varphi(0,1,0)=(1,1,0,0)$;

Por exemplo, a aplicação linear φ cuja matriz é

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

isto é, a aplicação linear definida por $\varphi(1,0,0)=(1,0,0,0)$, $\varphi(0,1,0)=(1,1,0,0)$ e $\varphi(0,0,1)=(1,1,1,0)$.

Note-se que M_φ é uma matriz 4×3 cuja característica é 3, logo é a matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, injetiva.

d) uma matriz A cujo polinómio característico seja $p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ e que seja semelhante à matriz $B = A + 2I$.

Não existe; se A fosse semelhante a B, então A e B teriam os mesmos valores próprios; mas, os valores próprios de A são 1,2 e 3, e os valores próprios de B são 3,4 e 5; logo A e B não podem ser semelhantes.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_4 = -2x_2\}$$

$$V = \langle (1, 0, -1, 1), (1, -2, 1, 4), (1, 2, -3, -2) \rangle.$$

a) Determine uma base e indique qual a dimensão de cada um desses subespaços.
Temos

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_4 = -2x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = -x_1 - x_2 \text{ e } x_4 = -2x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2, -2x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, -1, -2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, -2) \rangle, \end{aligned}$$

o que mostra que os vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1, -2)$ são geradores de U; além disso, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são vetores linearmente independentes (uma vez que são dois vetores tais que nenhum deles é múltiplo do outro); logo $\big((1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, -2)\big)$ é uma base de U; como U tem uma base formada por dois vetores, tem-se $\dim U = 2$.
Seja A a matriz cujas colunas são os vetores indicados como geradores de V, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Então, $V = \mathcal{C}(A)$. Mas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As colunas principais de A formam, como sabemos, uma base para $\mathcal{C}(A)$, sendo $\dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A$; logo, podemos concluir que $((1, 0, -1, 1), (1, -2, 1, 4))$ é uma base de V e que $\dim V = 2$.

Outra forma

Seja B a matriz cujas linhas são os vetores indicados como geradores de V, isto é,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Temos, então, $V = \mathcal{L}(B)$. Mas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como sabemos, as linhas não nulas de uma matriz em escada obtida a partir de B por operações elementares sobre linhas formam uma base para $\mathcal{L}(B)$ e $\dim \mathcal{L}(B) = \operatorname{car} B$. Logo, podemos concluir que $\big((1,0,-1,1),(0,-2,2,3)\big)$ é uma base de V e que $\dim V = 2$.

b) Verifique se $(1,1,1,1) \in V$.

Temos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como

$$\operatorname{car} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{e} \quad \operatorname{car} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right) = 3,$$

concluímos que $(1,1,1,1) \notin \langle (1,0,-1,1),(1,-2,1,4) \rangle = V$.

Em alternativa (trabalhando com vetores dispostos em linhas):

Sabemos que $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle \iff \operatorname{car}(\frac{A}{\mathbf{v}}) = \operatorname{car} A$, onde A é a matriz cujas linhas são os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Como

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{array}\right),$$

podemos concluir que $(1,1,1,1) \notin \langle (1,0,-1,1),(0,-2,2,3) \rangle = V$.

c) Dê um exemplo, caso exista, de um vetor não nulo que pertença a ambos os subespaços.

O vetor $(1,-2,1,4)$ pertence, naturalmente, a V (já que é um dos geradores desse subespaço); além disso, como $1 + (-2) + 1 = 0$ e $4 = -2 \times (-2)$, vemos que este vetor satisfaz as condições que caracterizam os vetores de U, ou seja, pertence a U; logo, $(1,-2,1,4)$ pertence a ambos os subespaços U e V.

Resolução alternativa:

Como $V = \langle (1,0,-1,1),(0,-2,2,3) \rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in V &\iff \mathbf{u} = \alpha(1,0,-1,1) + \beta(0,-2,2,3), \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &\iff \mathbf{u} = (\alpha, -2\beta, -\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta), \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mas, tendo em conta a definição de U, tem-se

$$(\alpha, -2\beta, -\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) \in U \iff \alpha - 2\beta - \alpha + 2\beta = 0 \text{ e } \alpha + 3\beta = -2(-2\beta) \iff \alpha = \beta.$$

Logo, estão simultaneamente em U e em V todos os vetores da forma $(\alpha, -2\alpha, \alpha, 4\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$; um exemplo será o vetor $(1,-2,1,4)$, obtido considerando $\alpha = 1$.

2. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $\varphi(x, y, z, w) = (x - z, -x + y + z, -x - y + w)$.

a) Determine a matriz da aplicação φ.

Tem-se

$$\varphi(1,0,0,0) = (1,-1,-1),$$
$$\varphi(0,1,0,0) = (0,1,-1),$$
$$\varphi(0,0,1,0) = (-1,1,0),$$
$$\varphi(0,0,0,1) = (0,0,1).$$

Logo,

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Indique, justificando, qual a dimensão de $\mathsf{Nuc}\,\varphi$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\dim \mathsf{Nuc}\,\varphi = \dim \mathcal{N}(M_\varphi) = 4 - \mathsf{car}\, M_\varphi = 4 - 3 = 1.$$

c) Conclua que $\mathbf{v} = (1, -1, 1) \in \mathsf{Im}\,\varphi$ e determine o conjunto dos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ tais que $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

Tem-se

$$\dim \mathsf{Im}\,\varphi = \mathsf{car}\, M_\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

o que mostra que φ é sobrejetiva, ou seja, que $\mathsf{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^3$; como $\mathbf{v} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$, conclui-se que $\mathbf{v} \in \mathsf{Im}\,\varphi$.

Tem-se

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Mas,

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 0 \\ z = \alpha - 2 \\ w = \alpha \text{ (arbitrário)}. \end{cases}$$

Assim, o conjunto dos vetores $\mathbf{u} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ é:

$$\big\{(\alpha - 1, 0, \alpha - 2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\}.$$

3. Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determine os valores de α para os quais a matriz A_α tem um valor próprio duplo.

Calculemos primeiro o polinómio característico de A_α (aplicar Teorema de Laplace à 2ª linha):

$$p_{A_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & \alpha \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \alpha & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & \alpha \\ \alpha & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2-\alpha^2) = (2-\lambda)(3-\lambda-\alpha)(3-\lambda+\alpha).$$

Então,

$$p_{A_\alpha}(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 3-\alpha \vee \lambda = 3+\alpha.$$

Logo, os valores próprios de A_α são: $2, 3-\alpha$ e $3+\alpha$. A existência de um valor próprio duplo poderá ocorrer numa das seguintes situações:

$$\begin{aligned} 3-\alpha = 2 &\iff \alpha = 1 \\ 3+\alpha = 2 &\iff \alpha = -1 \\ 3-\alpha = 3+\alpha &\iff \alpha = 0. \end{aligned}$$

Logo:

- Para $\alpha = 1$, a matriz tem um valor próprio duplo (2) e um valor próprio simples (4);
- para $\alpha = -1$, a matriz tem um valor próprio duplo (2) e um valor próprio simples (4);
- para $\alpha = 0$ a matriz tem um valor próprio duplo (3) e um valor próprio simples (2);
- para os restantes valores de A a matriz tem três valores próprios distintos.

b) Existe algum valor de α para o qual a matriz A_α seja semelhante à matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$? Justifique.

Note-se que $\lambda = 2$ é sempre um dos valores próprios de A_α. Por outro lado, tem-se

$$\begin{cases} 3-\alpha = 1 \\ 3+\alpha = 5 \end{cases} \iff \alpha = 2.$$

Logo, para $\alpha = 2$, a matriz A_α tem três valores próprios distintos 2,1,e 5, sendo, portanto, diagonalizável e semelhante à matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (matriz diagonal com esses valores próprios na diagonal).

De modo análogo se vê que o mesmo se passa quando $\alpha = -2$, caso em que se tem $3-\alpha = 5$ e $3+\alpha = 1$.

c) Determine os valores próprios de A_1 e os respetivos subespaços próprios.

Os valores próprios de A_1 já forma calculados na alínea a): são $\lambda_1 = 2$ (duplo) e $\lambda_2 = 4$.

Calculemos $V_2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : (A-2I)\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ (subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$); temos, então, de encontrar as soluções do sistema homogéneo cuja matriz simples é

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\alpha-\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo,

$$V_2 = \{(-\alpha-\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle.$$

De modo análogo se calcula V_4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -2y=0 \\ z=\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo

$$V_4 = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1) \rangle.$$

d) Diga, justificando convenientemente, se a matriz A_1 é ou não diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz que a diagonaliza.

Para $\alpha = 1$, tem-se $\dim V_2 = 2$ (grau de indeterminação do sistema homogéneo que resolvemos para calcular V_2), ou seja, tem-se $\mathrm{mg}(2) = 2$; uma vez que 4 é um valor próprio simples, sabemos que $\mathrm{mg}(4) = \mathrm{ma}(4) = 1$; como a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios é 3 (igual à ordem da matriz), a matriz é diagonalizável.

Para encontrar uma matriz que diagonaliza A_1 bastará encontrar três vetores próprios de A_1 linearmente independentes e formar a matriz com esses vetores como colunas; os dois vetores próprios $(-1,1,0)$ e $(-1,0,1)$ (associados ao valor próprio 2) são linearmente independentes; como $(1,0,1)$ é um vetor próprio associado ao outro valor próprio, podemos concluir que os três vetores próprios

$$(1,1,0), (-1,0,1), (1,0,1)$$

são vetores linearmente independentes (ver teorema enunciado na p. 175 dos slides das aulas). Assim, a matriz

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma matriz que diagonaliza A_1.

4. Sejam V e W dois espaços vetoriais reais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Sendo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ tais que $(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ é uma base de W e sabendo que T é injetiva, mostre que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ é uma base de V.

Tendo em conta a definição de uma base de um espaço vetorial, para provar que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ é uma base de V teremos de mostrar que :

1. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ são vetores lineamente independentes;
2. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ geram V.

1. Suponhamos que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ e mostremos que terá de ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, o que estabelecerá a independência linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.
   Temos
   $$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} &\underset{(i)}{\Rightarrow} T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k) = T(\mathbf{0}) \\ &\underset{(ii)}{\Rightarrow} \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \\ &\underset{(iii)}{\Rightarrow} \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0. \end{aligned}$$
   Justificação das diversas passagens:
   (i) - porque T é uma aplicação, logo um elemento só tem uma imagem;
   (ii) - usámos duas propriedades conhecidas das transformações lineares;
   (iii) - porque, por hipótese, $(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ é uma base de W, logo, $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k)$ são vetores linearmente independentes.
2. Mostremos agora que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ geram V, ou seja, que todo o vetor de V se pode escrever como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.
   Seja $\mathbf{v}$ um vetor qualquer de V; a sua imagem por T, $T(\mathbf{v})$, é um vetor de W e, como tal, tendo em conta que $(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ é uma base de W, poderá escrever-se como combinação linear dos vetores $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k)$; assim, existem escalares $\beta_1, \dots, \beta_k$ tais que $T(\mathbf{v}) = \beta_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \beta_k T(\mathbf{v}_k)$.
   Mas,
   $$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) = \beta_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \beta_k T(\mathbf{v}_k) &\underset{(i)}{\Rightarrow} T(\mathbf{v}) = T(\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k) \\ &\underset{(ii)}{\Rightarrow} \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k \end{aligned}$$
   Vemos então que $\mathbf{v}$ se escreve como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, o que conclui a demonstração.
   Justificação das passagens:
   (i) - usando uma das propriedades de uma transformação linear;
   (ii) - porque, por hipótese, T é injetiva.

Cotação: $\boxed{\text{I}}$ - **1.** 3 valores; **2.** 3 valores ; $\boxed{\text{II}}$ - **1.** 4.5 valores; **2.** 3 valores; **3.** 4.5 valores; **4.** 2 valores.