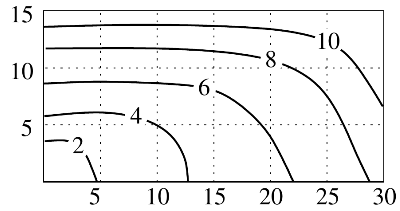
Análise

Folha 7 2019/20

Cálculo Integral em $\mathbb{R}^2$: Integração Dupla

1. A figura representa um diagrama de nível da função f definida no retângulo $\mathcal{R} = [0,30] \times [0,15]$.
Usando $\Delta x = 10$ e $\Delta y = 5$ aproxime, por defeito e por excesso, $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)$.



2. Seja $\mathcal{R}$ o retângulo $[-1,1] \times [-1,1]$ e considere as regiões limitadas $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ tais que $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{R} : y > 0\}$, $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathcal{R} : x > 0\}$, $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathcal{R} : y < 0\}$ e $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathcal{R} : x < 0\}$.

   Nestas condições indique, se possível, o sinal dos seguintes integrais duplos;

   (a) $\iint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-x}\,d(x,y)$;

   (b) $\iint_{\mathcal{B}} y^3\,d(x,y)$;

   (c) $\iint_{\mathcal{D}} (x+y^2)\,d(x,y)$;

   (d) $\iint_{\mathcal{E}} y^3\,d(x,y)$;

   (e) $\iint_{\mathcal{E}} (x+y^2)\,d(x,y)$.

3. Seja f uma função contínua, real de duas variáveis reais. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

   (a) $\displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$;

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$.

4. Seja $\mathcal{R}$ o retângulo $[0,1] \times [1,2]$. Calcule os seguintes integrais:

   (a) $\iint_{\mathcal{R}} (x^3+y^2)\,d(x,y)$

   (b) $\iint_{\mathcal{R}} y\mathrm{e}^{xy}\,dA$

   (c) $\iint_{\mathcal{R}} (xy)^2 \cos x^3\,d(x,y)$

   (d) $\iint_{\mathcal{R}} \ln\left((x+1)y\right)\,dA$

5. Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{\mathrm{e}^y} (x+y)\,dx\,dy$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\,dy\,dx$

6. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,d(x,y)$, usando as duas possíveis ordens de integração, quando f e $\mathcal{D}$ são:

   (a) $f(x,y) = xy,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

   (b) $f(x,y) = x\ \operatorname{sen}(x+y),\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \pi,\ 0 \le x \le 1\}$

   (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y},\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}$

   (d) $f(x,y) = x^2+y^2,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$

7. Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração em cada um dos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (d) $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{-4+y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (e) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-4+y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (f) $\displaystyle\int_{1}^{e^2}\int_{\ln x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

   (g) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-|y|+2} f(x,y)\,dx\,dy$

   (h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

   (i) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{-x+2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (j) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{0}^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{-y+2} f(x,y)\,dx\,dy$

8. Representa graficamente o conjunto $\mathcal{D}$ e calcule, recorrendo a integrais duplos, a sua área:

   (a) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$

   (b) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1\}$

9. Determine a área limitada pelas curvas definidas por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = 0$.

10. Usando integrais duplos obtenha as expressões das áreas da circunferência de raio r e da elipse de semieixos a e b.

11. Calcule o volume dos sólidos limitados

    (a) pelos planos definidos por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$ e pela superfície definida por $z = x^2 + y^4$.

    (b) pela superfície definida por $z = \operatorname{sen} y$ e pelos planos definidos por $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $z = 0$.

    (c) pelo parabolóide definido por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano definido por $z = 0$.

12. Seja $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$.

    (a) Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,d(x,y)$.

    (b) Calcule o integral da alínea anterior, fazendo a mudança de variáveis $x = u+v$, $y = u-v$.

13. Usando a mudança de variáveis tal que $(x,y) = T(u,v) = (u+2v, -2u+3v)$, calcule o integral $\iint_{\mathcal{D}} (3x-2y)\,dA$, sabendo que $\mathcal{D}$ é um paralelogramo definido pelas retas $y = \dfrac{3}{2}x - 4$, $y = \dfrac{3}{2}x + 2$, $y = -2x + 1$ e $y = -2x + 3$.

14. Calcule os seguintes integrais, usando uma mudança de variáveis adequada:

    (a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,d(x,y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x-y \le 0,\ -1 \le x+y \le 0\}$

    (b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x-y)\,d(x,y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \le y \le 3-x,\ 2x-2 \le y \le 2x\}$

15. Calcule os seguintes integrais, usando coordenadas polares.

(a) $\displaystyle\int_0^{2R}\int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx$

16. Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$.

17. Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^3\,d(x,y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1 \text{ e } x \ge 0 \text{ e } y \ge 0\}$.

18. Calcule, usando coordenadas polares, o volume dos sólidos limitados por:

(a) $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

(b) $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$