3. DETERMINANTES

3.1 Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chama-se determinante de A e representa-se por $\det A$ ou $|A|$ ao número definido do seguinte modo:

1. se $n = 1$, então
$$\det A = a_{11},$$
2. se $n > 1$, então
$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det M_{1n},$$
onde M_{1j} denota a matriz de ordem $n - 1$ obtida de A retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Determinante de uma matriz de ordem 2

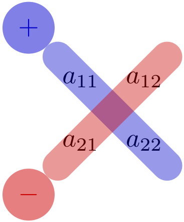
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- n=2



Exemplos

① $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

② $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - i \times i = 2$

Determinante de uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

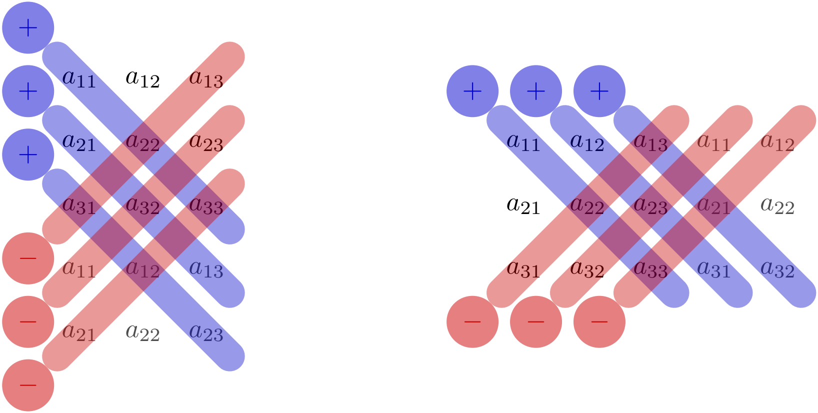
$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + a_{13} \det M_{13}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} M_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{13} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

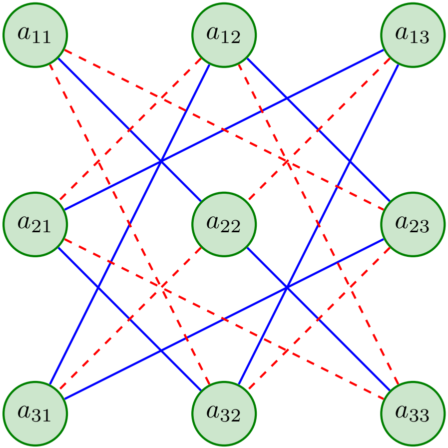
$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

REGRA DE SARRUS



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$



$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}\\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$= 1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6 - 3 \times 5 \times 7 - 6 \times 8 \times 1 - 9 \times 2 \times 4$$

$$= 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. Chama-se

1. **menor do elemento a_{ij}** de A ao número $\det M_{ij}$,
2. **complemento algébrico do elemento a_{ij}** de A e representa-se por A_{ij} ao número
$$(-1)^{i+j} \det M_{ij},$$

onde M_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ que se obtém de A retirando-lhe a linha i e a coluna j.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

- menor do elemento a_{23}:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \times 8 - 2 \times 7 = -6.$$

- complemento algébrico do elemento a_{23}: $(-1)^{2+3} \times (-6) = 6$

Teorema de Laplace:

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. Então,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} \, \det M_{\ell j} = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} A_{\ell j}, , \qquad (1 \leq \ell \leq n).$$

linha ℓ

ou

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \, \det M_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \qquad (1 \leq k \leq n).$$

coluna k

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Primeira coluna:

$$\det A = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Segunda linha:

$$\det A = 0 + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 5 = 4$$

3.2 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 1: *Se A tem uma linha (ou coluna) nula, então*

$$\det A = 0$$

consequência imediata do Teorema de Laplace

Propriedade 2: *Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz triangular, então*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\det I_n = ?$$

Propriedade 3:

$$\det A = \det A^T$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64$$

► Propriedade 3 $\Longrightarrow$ Qualquer propriedade dos determinantes válida para linhas é também válida para colunas.

Propriedade 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Propriedade 4 $\Longrightarrow \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \times 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64$$

Propriedade 5:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1}+\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{kn}+\beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- A Propriedade 5 NÃO significa que $\det(A+B) = \det A + \det B$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

Propriedade 6: *Se A tiver duas linhas (ou colunas) iguais, então*

$$\det A = 0$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedade 7: *O determinante de A não se altera se a uma linha (coluna) de A se adicionar um múltiplo de outra linha (coluna) de A.*

Demonstração: Sejam $L_1, L_2, \cdots L_n$ as n linhas de A.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k + \alpha L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{P5}}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{P4}}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}}_{\boxed{\text{P6}}\ 0}$$

Propriedade 8: *O determinante de A muda de sinal quando se trocam entre si duas linhas (colunas)*

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{P7}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l + L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{P5}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}}_{\boxed{P6}\ 0}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\overset{\boxed{\text{P8}}}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P2}}}{=\!=} -7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P6}}}{=\!=} 0$$

Método de eliminação de Gauss para o cálculo de determinantes

O método de eliminação de Gauss permite transformar uma matriz A numa matriz em forma de escada E. Sendo a matriz A quadrada, a matriz E é triangular superior.

Processo:

1. Usar operações elementares para transformar A em E.
2. Obter a relação entre $\det A$ e $\det E$, considerando a aplicação das Propriedades 4, 7 e 8.
3. Obter $\det E$ por aplicação da Propriedade 2.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P7}}}{\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P7}}}{\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{P8}}}{\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P7}}}{\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P2}}}{=\!=} -(-14) = 14$$

Propriedade 9: *Uma matriz é invertível sse* $\det A \neq 0$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível, uma vez que $\det A = 14 \neq 0$.

Propriedade 10:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

- Propriedade 10 $\Longrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

3.3 APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES

▷ Cálculo da inversa

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$) e seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A.

Chama-se matriz dos complementos algébricos de A, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz que se obtém de A substituindo cada elemento a_{ij} pelo seu complemento algébrico A_{ij}, i.e.

$$\hat{A} = (A_{ij}).$$

Chama-se matriz adjunta de A, e representa-se por $\operatorname{adj} A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos, i.e.

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^T.$$

Exemplo: Se

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

então

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -9\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -9 & -2\end{pmatrix}.$$

Teorema: *Seja A uma matriz invertível. Então,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Exemplo: Seja A a matriz do exemplo anterior.

Como $\det A = 9$ (Verifique!), a matriz A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -1 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

▷ REGRA DE CRAMER PARA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA

Teorema: *Seja $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um sistema de n equações em n incógnitas. Então,*

① *se $\det A \neq 0$, o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução única;*

② *se $\det A \neq 0$, a solução $\boldsymbol{x} = (x_i)$ pode ser obtida de*

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

onde $A^{(i)}$ denota a matriz que resulta de A substituindo a coluna i pela matriz coluna $\boldsymbol{b}$ dos termos independentes.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = -1 \\ \quad -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} . \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = -4$, $\det A^{(1)} = -4$, $\det A^{(2)} = 0$, $\det A^{(3)} = 4$, resulta

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_2 = \frac{0}{-4} = 0, \qquad x_3 = \frac{4}{-4} = -1.$$