ANÁLISE
Cap. 4 – Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Abril 2020

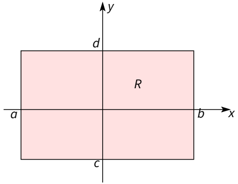
4. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

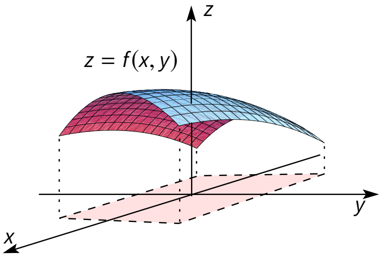
4.1 Integrais duplos e volumes

Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

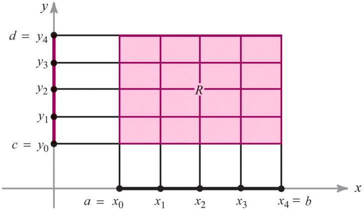
formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

- [Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.

Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos
  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Considere-se uma subdivisão $[c, d]$ em k subintervalos
  $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores corresponde uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



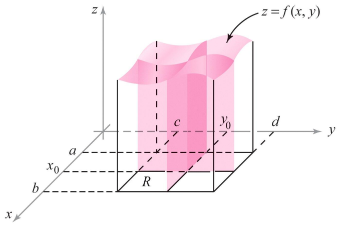
- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$;
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolha-se um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$;

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}.$$



- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}$$

- [Definição] Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em R e denota-se

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, d(x,y).$$

  - Se existir o integral duplo de f em R, diz-se que f é integrável em R.

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$
2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\, dA = \lambda\ \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\displaystyle\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$
   $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;
4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA;$
   - $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0;$
5. $\displaystyle\left|\iint_R f(x,y)\, dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\ dA.$

Como calcular um integral duplo?

- [Teorema] Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.

- [Teorema de Fubini]

  Seja f uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o integral duplo de f em R é dado por

$$\iint_R f(x, y)\, dA =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral, onde R é o retângulo $[0,1]\times[1,2]$,

$$\iint_R (x^3+y^2)\,dA.$$

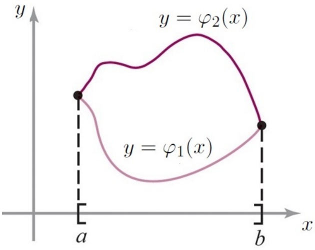
A função integranda é uma função contínua em R por ser uma função polinomial. Usando o teorema de Fubini e a ordem de integração $dydx$, o integral duplo pode ser calculado como dois integrais simples iterados. Começa-se por calcular sempre o integral “de dentro”:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^3+y^2)\,dA &= \int_0^1 \left[\int_1^2 (x^3+y^2)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^3y+\frac{y^3}{3}\right|_{y=1}^{2} dx = \int_0^1 \left[\left(2x^3+\frac{8}{3}\right)-\left(x^3+\frac{1}{3}\right)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3+\frac{7}{3}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{7}{3}x\right|_{x=0}^{1} = \frac{1}{4}+\frac{7}{3}-0 \\
&= \frac{31}{12}
\end{aligned}$$

Em alternativa, poder-se-ia ter usado a ordem de integração $dx\, dy$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^3 + y^2)\, dA &= \int_1^2 \left[\int_0^1 (x^3 + y^2)\, dx \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{x^4}{4} + x\, y^2 \right|_{x=0}^{1} dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{4} + y^2 - 0 \right] dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{4} + y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{4} y + \frac{y^3}{3} \right|_{y=1}^{2} = \left(\frac{2}{4} + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{31}{12}
\end{aligned}$$

Integração em regiões elementares de $\mathbb{R}^2$



Região do tipo I

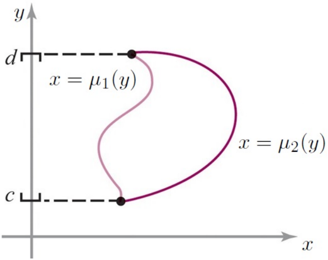
$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

Região do tipo II

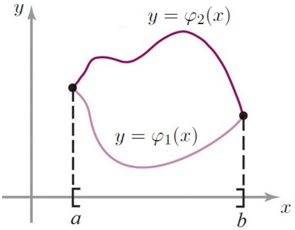
$c \leq y \leq d$

$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$



Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]



$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ tais que

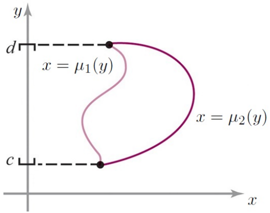
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

▶ [Região do tipo II]

$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

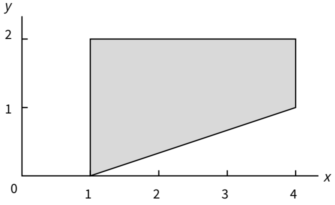
- Neste caso,

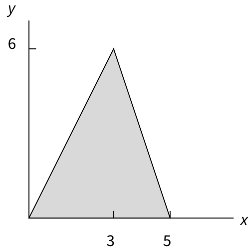
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

▶ [Região do tipo III] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo III.

Exemplo

- Para cada uma das seguintes regiões D escreva $\iint_D f\, dA$ na forma de dois integrais iterados





- Na primeira figura, a região D é delimitada por 4 retas:

$$x = 1, \quad x = 4, \quad x - 3y = 1 \quad \text{e} \quad y = 2\,.$$

  - A região D pode ser descrita como uma região do tipo I

$$1 \leq x \leq 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{x-1}{3} \leq y \leq 2.$$

Neste caso, $$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_1^4 \left[\int_{\frac{x-1}{3}}^{2} f(x,y)\, dy \right] dx$$

- Para descrever D como uma região do tipo II é necessário subdividir a região em duas: $D = D_1 \cup D_2$

$$
\begin{aligned}
D_1 : &\quad 0 \leq y \leq 1 &\quad \text{e} &\quad 1 \leq x \leq 3y + 1 \\
D_2 : &\quad 1 \leq y \leq 2 &\quad \text{e} &\quad 1 \leq x \leq 4
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dA &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA \\
&= \int_0^1 \left[\int_1^{3y+1} f(x,y)\,dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_1^4 f(x,y)\,dx \right] dy\,.
\end{aligned}
$$

- A região D da segunda figura é delimitada por 3 retas:

$$
y = 0, \qquad y = 2x \qquad \text{e} \qquad y + 3x = 15\,.
$$

- Para descrever D como uma região do tipo I é necessário subdividir a região em duas: $D = D_1 \cup D_2$ onde

$$
\begin{aligned}
D_1 : &\ 0 \leq x \leq 3 &\quad \text{e} &\quad 0 \leq y \leq 2x \\
D_2 : &\ 3 \leq x \leq 5 &\quad \text{e} &\quad 0 \leq y \leq 15 - 3x
\end{aligned}
$$

ficando

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA \;+\; \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$
$$= \int_0^3 \left[\int_0^{2x} f(x,y)\,dy\right] dx + \int_3^5 \left[\int_0^{15-3x} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

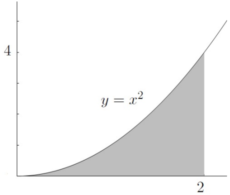
- A descrição de D como uma região do tipo II é mais simples

$$0 \le y \le 6 \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{2} \le x \le \frac{15-y}{3}$$

ficando

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^6 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{15-y}{3}} f(x,y)\,dx\right] dy\,.$$

Exemplo



- Calcular $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$ quando

  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}.$

  a) Usando uma região verticalmente simples.

  b) Usando uma região horizontalmente simples.

a) Tem-se $D:\ 0 \le x \le 2 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x^2$. Logo

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} x\,y\,dy\right] dx = \int_0^2 x\,\left[y^2/2\right|_{y=0}^{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{x^4}{2} - 0\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^5\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\left[x^6\right|_{x=0}^{2} = \frac{16}{3}$$

b) Agora $D:\ 0 \leq y \leq 4 \quad \text{e} \quad \sqrt{y} \leq x \leq 2$, pelo que

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^4 \left[\int_{\sqrt{y}}^2 x\,y\,dx\right] dy = \int_0^4 y\,\left[x^2/2\right]_{\sqrt{y}}^2\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 y\,[4-y]\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left[2y^2 - y^3/3\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{16}{3}\,.
\end{aligned}$$

Observação

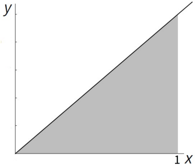
- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

- A ordem de integração *dy dx* corresponde a uma subdivisão "vertical"da região de integração, enquanto que a ordem *dx dy* corresponde a uma subdivisão "horizontal".

- Para regiões do tipo III, a alteração da ordem de integração pode permitir calcular um integral que de outra forma não seria possível.

Exemplo

▶ Calcular $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$.



- O cálculo deste integral, usando a ordem de integração apresentada, não é possível pois não é possível escrever nenhuma primitiva da função e^{x^2} relativamente à variável x como combinação de funções elementares.
- Trocando a ordem de integração, passa a ser necessário uma primitiva da mesma função, mas agora relativamente a y. Ora uma tal primitiva é a função $e^{x^2} y$.
- Assim,

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}\, y\right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x\, e^{x^2} - 0)\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right|_{x=0}^{1} = \frac{e-1}{2}$$

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

define-se o volume de S por

$$\mathrm{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\, dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x, y) = 1$ e f é integrável em B, a área de B é dada por

$$\text{área}(B) = \iint_B 1\, dA$$