Pág. 28 dos slides 3.2, exercício 1.c)

[Por engano, a resolução deste exercício não foi disponibilizada juntamente com a dos outros exercícios deste conjunto de slides.]

Por definição, f é diferenciável em $(0,0)$ se existir uma aplicação linear $df(0,0)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x-0, y-0)|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0\,.$$

Foi visto na alínea a) que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, logo terá de ser

$$df(0,0)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y = 0.$$

Assim, o que temos de ver é que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \qquad (*)$$

Ora,

$$\left|\frac{\left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \sqrt{x^2+y^2}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

(porque $-1 \le \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$)

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, logo $(*)$ é válido, pelo Teorema do Enquadramento.