EXEMPLO

Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo o vetor v unitário de $\mathbb{R}^2$.

b) Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação linear definida por $L(w) = \nabla f(0,0) \cdot w$.

Verifique que $L(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo o vetor v unitário de $\mathbb{R}^2$.

c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

a) Seja $v = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário. Por definição:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3\alpha^3 t\beta}{t(t^6\alpha^6 + t^2\beta^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 \alpha^3 \beta}{t^3(t^4\alpha^6 + \beta^2)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t\alpha^3\beta}{(t^4\alpha^6 + \beta^2)} = 0.$$

b) Da alínea anterior, $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$. Logo $L(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^2$.

Assim, $L(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para v tal que $\|v\| = 1$.

c) Vejamos que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{\|(x,y)\|} \neq 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x^3 y|}{(x^6 + y^2)\sqrt{x^2+y^2}} := \lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y).$$

Consideramos o limite trajetorial relativo a $y = x^3$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} g(x,y) = \lim_{x\to 0} g(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3x^3|}{(x^6+x^6)\sqrt{x^2+x^6}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x^6}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Logo f não é diferenciável em $(0,0)$.