UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DANTE CARDOSO PINTO DE ALMEIDA

DEDUÇÃO NATURAL ROTULADA PARA LÓGICAS MODAIS E MULTIMODAIS

CAMPINAS

2017

DANTE CARDOSO PINTO DE ALMEIDA

DEDUÇÃO NATURAL ROTULADA PARA LÓGICAS MODAIS E MULTIMODAIS

Tese apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Supervisor/Orientador: Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO DANTE CARDOSO PINTO DE ALMEIDA, E ORIENTADO PELA PROFA. DRA. ITALA MARIA LOFFREDO D'OTTAVIANO.

CAMPINAS

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/3387

AL64d

Almeida, Dante Cardoso Pinto, 1984-
Dedução natural rotulada para lógicas modais e multimodais / Dante Cardoso Pinto de Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Gabbay, Dov M., 1945-. 2. Dedução natural. 3. Modalidade (Lógica). 4. Lógica matemática não-clássica. I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo,1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Labelled natural deduction for modal and multimodal logics
Palavras-chave em inglês:
Natural deduction
Modality (Logic)
Nonclassical mathematical logic
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora:
Itala Maria Loffredo D'Ottaviano [Orientador]
Cezar Augusto Mortari
Daniel Durante Pereira Alvez
Fabio Maia Bertato
Rafael Rodriguez Testa
Data de defesa: 12-02-2017
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defese de Tese de Doutorado, composta pelos Professores Doutores a seguir descritos, em sessão pública realizada em 12/02/2016, considerou o candidato Dante Cardoso Pinto de Almeida aprovador.

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alvez

Prof. Dr. Fabio Maia Bertato

Prof. Dr. Rafael Rodriguez Testa

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

RESUMO

A Dedução Natural Rotulada consiste em um método de prova desenvolvido por Dov M. Gabbay, o qual se distingue de outros métodos de Dedução Natural pela utilização de rótulos. Estes consistem em marcações metalinguísticas utilizadas nas demonstrações.

A vantagem do método de Gabbay é que ele permite contornar certas dificuldades em aplicar a Dedução Natural a certas lógicas não-clássicas, em especial às lógicas modais.

Os objetivos desta tese consistem em apresentar a Dedução Natural Rotulada de forma intuitiva e expandí-la para lógicas multimodais.

PALAVRAS-CHAVE: Gabbay, dedução natural, Modalidade (Lógica), lógica matemática não-clássica

ABSTRACT

Labelled Natural Deduction is a proof method developed by Dov M. Gabbay and it is distinct from other Natural Deduction methods by its use of labels. These are metalinguistic marks used in the proofs.

The advantage of Gabbay's method is that it allows to work around some difficulties in applying Natural Deduction to some non-classical logics, especially modal logics.

The goals of this thesis are presenting Labelled Natural Deduction in a intuitive fashion and expand them into multimodal logics.

KEYWORDS: Natural deduction, Modality (Logic), Nonclassical mathematical logic

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Na década de 1930, o lógico polonês Stanisław Jaśkowski (1906—1965) e o alemão Gerhard Gentzen (1909 — 1945) desenvolveram, independentemente, um método de demonstração o qual Gentzen nomeou por *Dedução Natural*. Este método faz justiça ao seu nome, pois a estrutura das provas em dedução natural é muito semelhante à forma como matemáticos elaboram provas. Por exemplo, o método de dedução natural permite que se levante hipóteses e se construa provas subordinadas a estas, para então descartar as hipóteses e se extrair uma conclusão. É exatamente isto o que matemáticos fazem quando, por exemplo, estruturam uma prova por contradição.

Entretanto, ainda que o método de dedução natural funcione muito bem para as lógicas clássica, intuicionista e minimal, foi difícil para os lógicos adaptá-lo a outros sistemas. PRAWITZ (1965) desenvolveu sistemas baseados em dedução natural para as lógicas modais **S4** e **S5**, o que é um tanto quanto limitado, levando em conta o quão diversa é a família das lógicas modais. Ademais, os sistemas de Prawitz se baseiam em restrições às regras que versam sobre os operadores modais, de forma que erros são fáceis de serem cometidos e difíceis de serem detectados. [1]

Uma forma engenhosa de contornar este problema foi desenvolvida por GABBAY (1993) com a adição de rótulos ao método de dedução natural. Rótulos consistem em marcações metalinguísticas atreladas às fórmulas da linguagem. A despeito do quão promissor é o método de Gabbay, ele ainda é muito pouco conhecido e não tem recebido a devida atenção. Entre a bibliografia consultada, o que há de mais relevante são o trabalho de SIMPSON (1994), que aplicou o método às lógicas modais intuicionistas, e o trabalho de VOLPE (2011), que o aplicou às lógicas temporais.

Com esta tese, trazemos nossa contribuição a esta área de estudos tão promissora.

Objetivos

O objetivo central deste trabalho consiste em expandir para as lógicas multimodais o método de dedução natural rotulada de Gabbay para as lógicas modais, de forma mais genérica, ampla e abrangente do que já foi realizado por outros pesquisadores da área, tais como os mencionados acima.

Ademais, trabalhos anteriores nesta área privilegiam aspectos mais teóricos ou técnicos da dedução natural em detrimento de aspectos mais didáticos ou intuitivos. Propomo-nos a trazer uma abordagem mais intuitiva e didática da dedução natural rotulada sem, no entanto, abrir mão da elegância formal ou de interesses mais teóricos. Este ponto será esclarecido ainda nesta introdução, quando tratarmos da notação a ser utilizada.

Nossa pretensão (esperamos que não muito presunçosa) é de que no futuro esta tese sirva de referência tanto para trabalhos em teoria da demonstração quanto

[1] E ainda, MEDEIROS(2006) demonstrou que o sistema de Prawitz para a lógica **S4** não é normalizável.

para trabalhos que apenas apliquem os sistemas aqui desenvolvidos.

A fim de satisfazer estes objetivos, dividimos esta tese em seis capítulos (contando com esta Introdução).

No segundo, introduzimos o método de dedução natural sem rótulos aplicado à lógica proposicional clássica e demonstramos os teoremas de corretude, completude e normalização. Uma vez que os demais sistemas a serem estudados serão extensões desse, os resultados do segundo capítulo serão utilizados nas demonstrações para os demais sistemas.

No terceiro capítulo apresentamos as lógicas modais normais pelo método axiomático e a semântica de Kripke para estas. Além de possibilitar que leitores não familiarizados com o tema consigam acompanhar a tese, este capítulo também servirá de base para os demais, uma vez que a corretude e completude dos sistemas de dedução natural serão demonstradas relativamente aos sistemas axiomáticos.

No quarto capítulo finalmente introduzimos nossa abordagem do método de dedução natural rotulado para lógicas modais. Generalizaremos para estas lógicas os teoremas de corretude, completude e normalidade fraca do segundo capítulo.

No quinto capítulo introduzimos as lógicas multimodais, assim como o método de dedução natural rotulada aplicado a estas lógicas.

No sexto capítulo discutiremos as lógicas modais de primeira ordem.

Por fim, nas Considerações Finais, sumarizamos os resultados obtidos e fazemos sugestões sobre o que ainda pode ser estudado nesta área.

Notação

É conveniente que, logo na introdução desta tese, haja um espaço esclarecendo alguns detalhes sobre a notação utilizada. Também gostaríamos de utilizar este espaço para justificar algumas escolhas que fizemos a respeito do método de prova.

Um dos trunfos do método de dedução natural é sua versatilidade. Um lógico tem várias opções para adequar o sistema com o qual trabalhará, de acordo com suas necessidades.

A primeira escolha de um lógico ao desenvolver seu sistema de dedução natural (ou qualquer outro sistema baseado em qualquer método de prova) é o conjunto de conectivos primitivos. Em abordagens mais didáticas da dedução natural para a lógica proposicional clássica, geralmente se adota como primitivos os conectivos mais utilizados na formalização de argumentos: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Já abordagens mais voltadas para o estudo em teoria da demonstração (chamá-las-emos de *abordagens teóricas*) em geral adotam o seguinte conjunto de conectivos primitivos: $\{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow\}$; para então definir a negação e a bi-implicação por $\varphi \rightarrow \perp$ e $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, respectivamente. A razão para as abordagens teóricas não adotarem '$\leftrightarrow$' como primitivo é simples: um conectivo a menos para postular regras, o que simplifica a demonstração de resultados como corretude, completude e normalização. Já as razões para se adotar '$\perp$' (absurdo/*falsum*) como primitivo são duas: não há regra de introdução do $\perp$, assim, a normalização não fica comprometida; e é mais fácil comparar as lógicas clássica, intuicionista e minimal em sistemas nos quais '$\perp$' é primitivo.

A segunda escolha é relativa à notação das provas. Abordagens mais teóricas, em geral, utilizam a notação em árvore de Gentzen. Esta, além de ocupar menos espaço, conta com a vantagem de que, sobre uma fórmula, constam apenas as fórmulas das quais essa depende. Já em abordagens didáticas, é mais comum utilizar-se notações lineares, como a de Fitch, Lemon ou Jaśkowski. Afinal de contas, seres humanos raciocinam uma proposição por vez. Para fins de ilustração, segue abaixo a prova de um dos casos das Leis de De Morgan, $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$, nas notações de Gentzen e Fitch, respectivamente.

Notação em árvore (Gentzen):

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \vee \psi) \qquad \dfrac{[\varphi]\checkmark}{\varphi \vee \psi}\,I\vee}{\neg\varphi}\,I\neg \qquad \dfrac{\neg(\varphi \vee \psi) \qquad \dfrac{[\psi]\checkmark}{\varphi \vee \psi}\,I\vee}{\neg\psi}\,I\neg}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}\,I\wedge$$

Notação linear (Fitch):

$$\begin{array}{lll}
1 & \neg(\varphi \vee \psi) & \text{Premissa} \\
2 & \quad \vert\ \underline{\varphi} & \text{Hipótese} \\
3 & \quad \vert\ \varphi \vee \psi & 2\ I\vee \\
4 & \quad \vert\ \neg(\varphi \vee \psi) & 1\ \textit{Reiteração} \\
5 & \neg\varphi & 2\text{—}3,\ 4\ I\neg \\
6 & \quad \vert\ \underline{\psi} & \text{Hipótese} \\
7 & \quad \vert\ \varphi \vee \psi & 6\ I\vee \\
8 & \quad \vert\ \neg(\varphi \vee \psi) & 1\ \textit{Reiteração} \\
9 & \neg\psi & 6\text{—}7,\ 8\ I\neg \\
10 & \neg\varphi \wedge \neg\psi & 5,\ 9\ I\wedge
\end{array}$$

Por fim, um lógico ainda precisa escolher as regras de seu sistema. Abordagens teóricas trazem mais regras hipotéticas, garantindo assim certas propriedades interessantes do sistema, além de torná-los mais elegantes. Já em abordagens didáticas, algumas regras hipotéticas são substituídas por regras diretas, mas fáceis de compreender e aplicar.

Como dito anteriormente visaremos desenvolver sistemas de dedução natural que capturem os aspectos mais vantajosos de cada abordagem. Assim, adotaremos quatro operadores clássicos primitivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$; três regras hipotéticas para o fragmento clássico e apenas uma regra hipotética modal. Além do mais, adotaremos a notação de Fitch.

Especificado este ponto, passemos a esclarecer a notação utilizada neste trabalho.

Utilizaremos a letra 'p' minúscula, italizada e com índices numéricos — p_1, p_2, p_3... — como fórmulas atômicas específicas. Já a letra 'p' sem índices será utilizada como variável da metalinguagem, representando quaisquer fórmulas atômicas.

Para representar quaisquer fórmulas (atômicas ou moleculares) utilizaremos letras gregas minúsculas — φ, ψ, χ etc. — como variáveis metalinguísticas. Já letras gregas maiúsculas — Π, Σ, Γ, Δ etc. — representarão conjuntos de fórmulas ou sequências de fórmulas, dependendo do contexto.

Utilizaremos o símbolo '::=' para definir recursivamente assinaturas. Por exemplo,

$$\mathcal{L}_{\neg,\rightarrow} ::= p \,|\, \neg\mathcal{L}_{\neg,\rightarrow} \,|\, (\mathcal{L}_{\neg,\rightarrow} \rightarrow \mathcal{L}_{\neg,\rightarrow})$$

Esta é uma definição da assinatura $\mathcal{L}_{\neg,\rightarrow}$, segundo a qual fórmulas atômicas são fórmulas, negação de fórmulas também são fórmulas e implicação entre fórmulas também são fórmulas.

Algumas propriedades de modelos para lógicas modais podem ser expressas por fórmulas da lógica clássica de primeira ordem. A fim de evitar confusão entre linguagem e metalinguagem, utilizaremos uma notação diferente para os conectivos lógicos neste contexto. Na metalinguagem, utilizaremos os símbolos '$\sim$', '&' e '$\Rightarrow$' para negação, conjunção e implicação, respectivamente.

A partir do quinto capítulo, lidaremos com operações sobre relações, as quais são definidas adiante.

Dados $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$:

- $\mathcal{R}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}\}$

  i.e., a *inversa* de uma relação $\mathcal{R}$ é uma relação $\mathcal{R}^{-1}$ na qual, para todo x e y, $x\mathcal{R}y$ sse $y\mathcal{R}^{-1}x$

  e.g. x é progenitor de y sse y é prole de x.

- $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in \mathcal{R} \,\&\, \langle z, y\rangle \in \mathcal{S})\}$

  i.e., a *composta* das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ (nesta ordem) é uma relação $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ na qual, para todo x e y, $x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$ sse existir um z tal que $x\mathcal{R}z$ e $z\mathcal{S}y$

  e.g., x é o avô materno de y sse x é pai da mãe de y.

- $\overline{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}\}$

  i.e., a *complementar* de uma relação $\mathcal{R}$ é uma relação $\overline{\mathcal{R}}$ na qual, para todo x e y, $x\overline{\mathcal{R}}y$ sse não for o caso de $x\mathcal{R}y$

  e.g. $x > y$ sse não for o caso de $x \leq y$.

Capítulo 2

Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica

A Dedução Natural consiste em um método de demonstração desenvolvido independentemente por JAŚKOWSKI(1934) e GENTZEN(1934/5).

A motivação de Jaśkowski para desenvolver o método de Dedução Natural surgiu em resposta ao desafio que Łukasiewicz propôs aos lógicos poloneses[1] de tornar as demonstrações feitas em lógica simbólica mais similares aos raciocínios que os matemáticos efetuam para demonstrar teoremas.

Gentzen, por sua vez, além de ter (assim como Jaśkowski) interesse em desenvolver um método de prova mais semelhante à forma como raciocinamos, ainda tinha em mente obter resultados mais técnicos referentes à teoria de demonstração; visto que no mesmo artigo que introduz a dedução natural, também introduz o cálculo de sequentes e dedica mais espaço a este.

[1]Em seminários realizados em 1926, Łukasiewicz observou que a redação de provas matemáticas seguem um estilo diferente do sugerido por sistemas axiomáticos. Assim, Łukasiewicz lançou o desafio aos seus colegas de desenvolver um sistema de prova no qual as provas fossem realizadas de forma similar a como os matemáticos redigem provas e fosse capaz de provar todos os teoremas da Lógica Clássica.(REF: PELLETIER, 1999)

Neste capítulo, introduziremos um sistema de dedução natural (que chamaremos de *DNC*) para a lógica proposicional clássica (*LPC*) baseado na notação de FITCH(1952) e nas regras de ANDERSON & JOHNSTONE (1962), e provaremos corretude, completude e normalização para este.

Todos os sistemas de dedução natural para lógicas modais que trabalharmos nesta tese serão extensão do sistema introduzido neste capítulo.

2.1 Notação

Seja $\mathcal{L}$ uma *assinatura* definida recursivamente por

$\mathcal{L} ::= p|\neg\mathcal{L}|(\mathcal{L} \wedge \mathcal{L})|(\mathcal{L} \vee \mathcal{L})|(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L})$.

Como de praxe, os parênteses externos são dispensáveis.

A *bi-implicação* é definida por $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Utilizaremos letras gregas minúsculas como variáveis metalinguísticas de fórmulas. Já as letras gregas maiúsculas são reservadas para conjuntos de fórmulas ou sequências de fórmulas (eventualmente vazios).

O estilo de notação utilizado nesta tese é o de Fitch (1952). Neste, a demonstração é disposta em três colunas. Na coluna da esquerda consta a enumeração de cada passo da demonstração. Na coluna do meio constam as fórmulas. Na coluna da direita consta a justificação de cada passo para a obtenção da fórmula correspondente, isto é, informa-se se a fórmula é uma premissa, uma hipótese, um axioma de uma teoria na qual o método de dedução natural esteja sendo aplicado ou, no caso de uma fórmula que esteja sendo inferida, qual regra foi aplicada em quais linhas.

Chamaremos de *derivação* sequencias não vazias de fórmulas em conjunto com suas justificações.

No estilo de Fitch, as fórmulas que são hipóteses são marcadas com uma linha horizontal, e todas as fórmulas que dependem desta hipótese (incluindo a própria hipótese) são marcadas com uma linha vertical entre a coluna da esquerda e do centro. Abordaremos este ponto mais profundamente quando tratarmos sobre as regras hipotéticas.

2.2 Regras de Inferência

As *regras de dedução natural* podem ser divididas em duas formas: entre regras de introdução e elimininação, ou entre regras diretas e hipotéticas.

Em geral,[2] um sistema de dedução natural tem, para cada operador #, uma regra que (sempre) tem como conclusão uma fórmula na qual # é o operador principal, chamada de 'introdução da #' (I#); e uma regra que tem como premissa uma fórmula na qual # é o operador principal, chamada de 'eliminação da #' (E#).

Ainda podemos classificar as regras de um sistema de dedução natural entre 'regras diretas' e 'regras hipotéticas'.

Na classe das regras diretas se encontram as inferências lógicas elementares, aquelas nas quais, dada(s) certa(s) fórmula(s), infere-se outra fórmula. Já as regras hipotéticas formalizam raciocínios mais elaborados, como provas por contradição ou provas condicionais. Enquanto a intuição por trás das regras diretas é: *dado que φ, ψ... são o caso, podemos derivar/concluir que χ também é o caso*; a intuição por trás das regras hipotéticas é: *dado que, a partir da hipótese que φ é o caso, pudemos derivar ψ, podemos concluir χ é o caso.*

[2] Nem todo sistema de dedução natural tem todas suas regras divididas entre regras de introdução e eleminação. Os sistemas que trabalharemos em capítulos posteriores, por exemplo, contêm algumas regras que não se encaixam em nenhuma das categorias.

2.2.1 Regras diretas

Segue abaixo as regras diretas do sistema *DNC*. Observe que as regras de eliminação da conjunção e introdução da disjunção têm, cada uma, dois casos de aplicação.

Observe também que, em caso das regras serem aplicadas em mais de uma fórmula, a ordem que estas aparecem não importa.

Introdução da Conjunção

m	φ	
n	ψ	
o	$\varphi \land \psi$	$m, n\ I\land$

Eliminação da Implicação

m	$\varphi \rightarrow \psi$	
n	φ	
o	ψ	$m, n\ E\rightarrow$

Eliminação da Dupla Negação

m	$\neg\neg\varphi$	
n	φ	$m\ E\neg\neg$

Eliminação da Conjunção

m	$\varphi \land \psi$	
n	φ	$m\ E\land$

m	$\varphi \land \psi$	
n	ψ	$m\ E\land$

Introdução da Disjunção

m	φ	
n	$\varphi \lor \psi$	$m\ I\lor$

m	ψ	
n	$\varphi \lor \psi$	$m\ I\lor$

2.2.2 Regras hipotéticas

As regras hipotéticas lidam com *subprovas*, as quais nada mais são do que sequências de inferências que começam com uma hipótese.

As subprovas são marcadas por uma linha vertical à esquerda das fórmulas e à direita da numeração das linhas. A hipótese com a qual a subprova inicia é marcada com uma linha horizontal sob ela.

Após ser finalizada, as fórmulas de uma subprova não podem mais ser utilizadas para realizar inferências. Enquanto a subprova não é finalizada, dizemos que ela está *aberta* e que a hipótese com a qual esta começa está *vigente*. Uma hipótese que não é mais vigente é chamada de *descartada*. Assim, podemos utilizar intermitentemente as expressões 'iniciar uma subprova começando com φ' ou 'levantar a hipótese φ', assim como 'fechar uma subprova começando com φ' ou 'descartar a hipótese φ'. E ainda, para qualquer fórmula em uma subprova que começa com φ, dizemos que a fórmula em questão *depende de* φ.

Pode-se iniciar uma subprova antes de terminar outra. Quando isto ocorre, dizemos que a segunda está um *nível acima* da primeira. Uma subprova de nível inferior não pode ser finalizada enquanto as subprovas de nível maior que essa estiverem abertas.

Seguem abaixo as três regras hipotéticas de *DNC*:

Introdução da Implicação

$$
\begin{array}{rl l}
m & \vert\ \underline{\varphi} & \text{Hip.} \\
 & \vert\ \ \Sigma & \\
n & \vert\ \ \psi & \\
(n+1) & \varphi \to \psi & m\text{—}n\ I\to
\end{array}
$$

Dada uma subprova que inicia com a hipótese φ e termina na linha n com ψ, ao aplicar na linha $n+1$ a regra de Introdução da Implicação, a subprova é fechada (φ é descartada) e introduz-se $\varphi \to \psi$ na derivação.

Introdução da Negação

$$
\begin{array}{l|l}
l & \varphi \quad \text{Hip.} \\
\hline
 & \Sigma \\
m & \psi \\
 & \Pi \\
n & \neg\psi \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
o & \neg\varphi & l\text{—}m, n\ I\neg
\end{array}
$$

Observação: A ordem de m e n não importa. $o = m + 1$ ou $o = n + 1$.

Ou seja, dada uma subprova que inicia com a hipótese φ e na qual ocorre uma fórmula ψ[3] assim como sua negação, ao aplicar a regra de Introdução da Negação, a subprova é fechada e introduz-se $\neg\varphi$ na derivação.

Eliminação da Disjunção

$$
\begin{array}{lll}
l & \varphi \lor \psi & \\
m & \quad | \ \varphi & \text{Hip.} \\
 & \quad | \ \Sigma & \\
n & \quad | \ \chi & \\
(n+1) & \quad | \ \psi & \text{Hip.} \\
 & \quad | \ \Pi & \\
o & \quad | \ \chi & \\
(o+1) & \chi & l, m\text{—}n, n+1\text{—}o\ E\lor
\end{array}
$$

Esta é a regra hipotética mais complicada, por lidar com uma premissa e duas subprovas. Dada uma fórmula $\varphi \lor \psi$, uma subprova que inicia com φ e termina

[3] Observe que eventualmente ψ e φ coincidem.

com χ e outra subprova (efetuada logo após a anterior) que inicia com ψ e também termina com χ, introduz-se χ na derivação.

Regra Auxiliar. *Reiteração*: Dada uma fórmula φ em uma linha n, pode-se introduzir φ em uma linha m (onde $n < m$) contanto que (i) se φ depende de uma hipótese, ela ainda está vigente, e (ii) a linha m esteja em um nível hipotético superior a n.

Observe que a regra de Reiteração é redundante, pois há várias formas de repetir uma fórmula na derivação sem utilizá-la. Abaixo, provamos o mesmo teorema utilizando a *Reiteração* (à esquerda) e sem utilizá-la (à direita)

1	φ	Hip.
2	ψ	Hip.
3	φ	1 *Reiteração*
4	$\psi \to \varphi$	2—3 $I \to$
5	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	1—4 $I \to$

1	φ	Hip.
2	ψ	Hip.
3	$\varphi \land \psi$	1, 2 $I\land$
4	φ	3 $E\land$
5	$\psi \to \varphi$	2—4 $I \to$
6	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	1—5 $I \to$

Ainda assim, a regra de reiteração, além de abreviar significativamente algumas provas, é essencial para garantirmos a propriedade de subfórmula do sistema de dedução natural, assunto sobre o qual trataremos ainda neste capítulo.

O conceito de prova

Seja Σ uma derivação que inicia com um conjunto finito Γ de premissas e termina em uma fórmula φ que independe de hipóteses vigentes (ou seja, não há traço vertical à esquerda de φ). Neste caso dizemos que Σ é uma *prova* de φ a partir de Γ. Representamos a existência de tal derivação por $\Gamma \vdash \varphi$.

No caso de $\Gamma = \varnothing$, dizemos que φ é um *teorema* e que Σ é uma prova de φ.

2.2.3 Estratégias de derivação

A seguir listaremos as estratégias e heurísticas para demonstrar teoremas ou inferências em *DNC*. As estratégias (fora os casos base) instruem como proceder para obter uma fórmula em vista de seu operador principal. Assim, a cada passo da derivação, checamos qual objetivo (ainda que intermediário) visamos alcançar e aplicamos a estratégia devida.

- Caso base (i): Confira se a fórmula a ser derivada é derivável apenas por aplicação de regras de eliminação ou reiteração. Em caso positivo, faça-o.
- Caso base (ii): Se a fórmula φ a ser derivada for atômica ou arbitrária[4] e o caso base (i) não for aplicável, levante a hipótese $\neg\varphi$, derive uma contradição e aplique $I\neg$, obtendo $\neg\neg\varphi$, e então aplique $E\neg\neg$.
- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\neg\varphi$, levante a hipótese φ, derive uma contradição e aplique $I\neg$.
- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\varphi \wedge \psi$, derive φ, derive ψ e aplique $I\wedge$.

[4]Por uma fórmula arbitrária, entendemos uma fórmula φ que é subfórmula de χ, mas não de ψ, e $\psi \to \chi$ é teorema (como p_2 em $p_1 \to (p_2 \to p_1)$); ou ainda, uma fórmula φ que é subfórmula de χ, mas de nenhuma fórmula em Γ e $\Gamma \vdash \chi$ (como p_2 em $\{p_1, \neg p_1\} \vdash p_2$).

- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\varphi \to \psi$, levante a hipótese φ, derive ψ e aplique $I \to$.
- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\varphi \lor \psi$, e se φ é derivável ou ψ é derivável por meio dos métodos acima, derive φ ou ψ e aplique $I\lor$.
- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\varphi \lor \psi$, nem φ e nem ψ são deriváveis por meio dos métodos acima, e se há na derivação uma fórmula $\alpha \lor \beta$ tal que $\varphi \lor \psi$ é derivável tanto por meio de α quanto por meio de β, então aplique $E\lor$ em $\alpha \lor \beta$.
- Se a fórmula a ser derivada tem a forma $\varphi \lor \psi$ e os casos acima não se aplicam, levante a hipótese $\neg(\varphi \lor \psi)$, derive uma contradição e aplique $I\neg$, obtendo $\neg\neg(\varphi \lor \psi)$, e então aplique $E\neg\neg$.

Exemplos

Eis alguns exemplos para ilustrar a aplicação das regras e estratégias.

$\vdash \neg\alpha \to \neg(\alpha \land \beta)$

1	$\quad\vert\ \neg\alpha$	Hip.
2	$\quad\vert\quad\vert\ \alpha \land \beta$	Hip.
3	$\quad\vert\quad\vert\ \alpha$	2 $E\land$
4	$\quad\vert\quad\vert\ \neg\alpha$	1 *Reiteração*
5	$\quad\vert\ \neg(\alpha \land \beta)$	2—3, 4 $I\neg$
6	$\neg\alpha \to \neg(\alpha \land \beta)$	1—5 $I \to$

$\{\varphi \to (\varphi \to \psi)\} \vdash \varphi \to \psi$

1	$\varphi \to (\varphi \to \psi)$	Prem.
2	$\quad\vert\ \varphi$	Hip.
3	$\quad\vert\ \varphi \to \psi$	1, 2 E$\to$
4	$\quad\vert\ \psi$	3, 2 E$\to$
5	$\varphi \to \psi$	2–4 I$\to$

Na derivação à esquerda, queremos provar $\neg\alpha \to \neg(\alpha \wedge \beta)$. Como o conectivo principal é uma implicação, devemos começar assumindo o antecedente $\neg\alpha$ (linha 1) e tentar derivar o consequente $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Como o consequente não é derivavel por meio de regras diretas e seu conectivo principal é a negação, assumimos $\alpha \wedge \beta$ (linha 2) a fim de obter uma contradição, o que realizamos nas linhas 3 e 4. A prova então é finalizada aplicando as devidas regras hipotéticas e encerrando todas as subprovas.

Na derivação à direita, queremos inferir $\varphi \to \psi$ a partir de $\varphi \to (\varphi \to \psi)$. Novamente, como o conectivo principal de $\varphi \to \psi$ é uma implicação, devemos supor o antecedente φ (linha 2) e tentar derivar o consequente ψ, o que conseguimos na linha 4 por meio de regras de inferência diretas.

Os exemplos a seguir nos permitirão ilustrar ainda outras estratégias de derivação.

$\{\neg\varphi \to \varphi\} \vdash \varphi$

1	$\neg\varphi \to \varphi$	Prem.
2	$\quad \neg\varphi$	Hip.
3	$\quad \varphi$	1, 2 E$\to$
4	$\neg\neg\varphi$	2—2, 3 I$\neg$
5	φ	4 E$\neg\neg$

$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

1	$\quad \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	Hip.
2	$\quad\quad \varphi$	Hip.
3	$\quad\quad \varphi \vee \neg\varphi$	2 I$\vee$
4	$\quad\quad \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	1 *Reiteração*
5	$\quad \neg\varphi$	2—3,4 I$\neg$
6	$\quad \varphi \vee \neg\varphi$	5 I$\vee$
7	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	1—6, 1 I$\neg$
8	$\varphi \vee \neg\varphi$	7 E$\neg\neg$

À esquerda, deriva-se φ a partir da premissa $\neg\varphi \to \varphi$. Como a conclusão é um esquema de fórmula atômico e não temos como derivá-lo aplicando regras diretas na premissa, faz-se necessária uma prova por contradição.

À direita temos uma prova do *Princípio de Terceiro Excluído*, $\varphi \vee \neg\varphi$. Como o conectivo principal é uma disjunção e nenhum dos termos disjuntos é individualmente demonstrável, novamente faz-se necessária uma prova por contradição. Supõe-se $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ (linha 1). A partir hipótese φ (linha 2) segue $\varphi \vee \neg\varphi$ (linha 3), o que contradiz a hipótese original. Portanto $\neg\varphi$ (linha 5). Mas disto também segue $\varphi \vee \neg\varphi$. Portanto a hipótese original é falsa.

2.2.4 Corretude das Regras

Mostraremos a seguir que, para qualquer conjunto Γ (eventualmente vazio) de fórmulas, a aplicação das regras aqui postuladas preserva verdade, isto é, em qualquer valoração na qual todas as fórmulas de Γ sejam verdadeiras, as fórmulas produzidas aplicando as regras de inferência nas fórmulas de Γ também serão verdadeiras.

Para as regras de inferência direta, basta construir uma tabela veritativa e observar que, em todas as valorações nas quais as premissas de uma regra são verdadeiras (*i.e.*, recebe o valor 1), a conclusão também é verdadeira.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1

Quanto à corretude das regras indiretas, a questão é a seguinte. As regras indiretas seguem o esquema: *dado o conjunto* Γ *(eventualmente vazio) de premissas e hipóteses vigentes, se a partir de* Γ *em conjunto com uma hipótese* α *deriva-se* β*, então a partir de* Γ *deriva-se* δ*.* Ou seja,

$$\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \delta}$$

Portanto, para provar que as regras indiretas preservam a verdade, precisamos provar que se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$, então $\Gamma \vDash \delta$. Segue a prova de cada uma das regras:

I$\rightarrow$: Suponha que a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ foi derivado ψ por meio de regras válidas, ou seja, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. Portanto, se há uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$, então $v(\psi) = 1$. No caso de tal valoração existir, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e, portanto, $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$. No caso de não existir tal valoração, então ou Γ é inconsistente e, portanto, $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$; ou qualquer valoração v' que satisfaça Γ, $v'(\varphi) = 0$ e, portanto, $v'(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Logo, $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$. $\square$

I$\neg$: Suponha que a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ foi derivado tanto ψ, quanto $\neg\psi$, por meio de regras válidas, ou seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \neg\psi$. Logo, não há uma valoração que satisfaça $\Gamma \cup \{\varphi\}$. No caso de não existir sequer uma valoração que satisfaça Γ, então $\Gamma \vDash \neg\varphi$. No caso de existir uma valoração v que satisfaça Γ, então $v(\varphi) = 0$, portanto $\Gamma \vDash \neg\varphi$. $\square$

E$\vee$: Suponha que tanto a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, quanto a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$, se derive χ por meio de regras válidas. Então, para toda valoração v que satisfaça $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ou $\Gamma \cup \{\psi\}$, v também satisfará χ. Logo, toda valoração v que satisfaça $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\}$ também satisfará χ. Ou seja, $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vDash \chi$. $\square$

2.2.5 Normalização

Definição:

- A *premissa maior* de uma inferência é a premissa de maior comprimento da inferência em questão.
- Uma *fórmula maximal* em uma derivação Π é uma fórmula obtida por uma regra de introdução de um certo operador e que, em um passo posterior de Π, é premissa maior em uma inferência na qual se aplica a regra de eliminação do mesmo operador.
- Uma derivação *normalizada* é aquela na qual não ocorrem fórmulas maximais.
- *Normalização* é um procedimento no qual, dada uma derivação Σ não–normalizada que seja uma prova de $\Gamma \vdash \psi$, obtém-se uma derivação Σ' normal que também seja uma prova de $\Gamma \vdash \psi$.

Ou seja, em uma derivação Σ *não–normalizada*, em ao menos uma linha n uma fórmula φ é obtida por $I\#$ (onde '#' representa um operador qualquer) e, em algum passo de Σ, a regra $E\#$ é aplicada em n.

Como PRAWITZ (1965) observou (pág. 34), nem sempre é possível normalizar uma derivação se ao menos uma de suas fórmulas maximais tiver sido obtida por $I\neg$, mas pode-se fazê-lo para os demais operadores, tal como demonstraremos a seguir.

Teorema de Normalização

Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash \psi$ tal que em Σ seja inferida em uma linha n uma fórmula φ por meio de $I\wedge$, $I\rightarrow$ ou $I\vee$ para posteriormente aplicar em n a regra de $E\wedge$, $E\rightarrow$ (na qual φ é a premissa condicional)[5] ou $E\vee$, respectivamente; então existe uma derivação Σ' que prova $\Gamma \vdash \psi$ no qual isto não ocorre. Isto é, não é necessário obter em uma linha n uma fórmula cujo operador principal é $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$ para então aplicar na linha n a regra de eliminação do operador em questão.

Prova

Começaremos demonstrando que, para cada conectivo binário, existe um procedimento que elimina a fórmula maximal obtida pela regra de introdução do conectivo em questão. Tais procedimentos são chamados de *redução*.

Conjunção: Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash \varphi$ e na qual em uma linha k seja obtida por meio da regra $I\wedge$ uma fórmula $\alpha \wedge \beta$. Logo, deve haver linhas i e j menores que k tais que α e β ocorram em cada uma. Suponha que a regra $E\wedge$ seja aplicada em k, tal como ilustrado abaixo:

$$\begin{array}{lll}
i & \alpha & \\
j & \beta & \\
k & \alpha \wedge \beta & i, j\ I\wedge \\
 & \Theta & \\
l & \alpha & k\ E\wedge \\
 & \Pi & \\
m & \varphi &
\end{array}$$

[5]Esclarecimento: Digamos que φ seja $\alpha \rightarrow \beta$ obtida por $I\rightarrow$. O teorema garante que na prova não é necessário aplicar $E\rightarrow$ em $\alpha \rightarrow \beta$ em conjunto com α; mas pode ser que seja necessário aplicar $E\rightarrow$ em $\alpha \rightarrow \beta$ em conjunto com $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$

Onde Θ e Π são fragmentos de Σ. No caso das linhas i e j estarem no mesmo nível, podemos obter a partir de Σ uma derivação Σ' na forma:

i	α	
j	β	
k	$\alpha \wedge \beta$	$i, j\ I\wedge$
	Θ	
	Π	
$(m-1)$	φ	

Basta que qualquer linha $x > l$ em Σ seja idêntica a uma linha $x-1$ em Σ'; que qualquer linha x em Σ cuja justificação mencione l, a linha $x-1$ em Σ' mencione i; e que qualquer linha x em Σ cuja justificação mencione uma $y > l$, a linha $x-1$ em Σ' mencione $y-1$.

Já no caso de j estar em um ou mais níveis acima de i, Σ' terá a forma:

i	α	
j	β	
k	$\alpha \wedge \beta$	$i, j\ I\wedge$
	Θ	
l	α	*i Reiteração*
	Π	
m	φ	

Implicação: Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash \varphi$ e na qual em uma linha $k+1$ seja obtida por meio da regra $I\rightarrow$ uma fórmula $\alpha \rightarrow \beta$. Suponha que a regra $E\rightarrow$ seja aplicada em $k+1$. Neste caso, deve haver uma linha i na qual ocorre a fórmula α. Assim, Σ tem duas formas possíveis, tal como ilustrado abaixo:

$$
\begin{array}{lll}
i & \alpha & \\
 & \Delta & \\
j & \vert\; \underline{\alpha} & \text{Hip.} \\
 & \vert\; \Lambda & \\
k & \vert\; \beta & \\
(k+1) & \alpha \to \beta & j\text{—}k\ I \to \\
 & \Xi & \\
l & \beta & (k+1), i\ E \to \\
 & \Theta & \\
m & \varphi &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
j & \vert\; \underline{\alpha} & \text{Hip.} \\
 & \vert\; \Lambda & \\
k & \vert\; \beta & \\
(k+1) & \alpha \to \beta & j\text{—}k\ I \to \\
 & \Delta & \\
i & \alpha & \\
 & \Xi & \\
l & \beta & (k+1), i\ E \to \\
 & \Theta & \\
m & \varphi &
\end{array}
$$

Mas dado que contamos com α em i e que desta podemos derivar β por meio de Λ, então podemos construir uma Σ' que tem, respectivamente, alguma das seguintes formas:

$$
\begin{array}{ll}
i & \alpha \\
 & \Lambda \\
j & \beta \\
 & \Delta \\
 & \Xi \\
 & \Theta \\
k & \varphi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \Delta \\
i & \alpha \\
 & \Lambda \\
j & \beta \\
 & \Xi \\
 & \Theta \\
k & \varphi
\end{array}
$$

Disjunção: Seja Σ uma derivação na qual seja a regra de eliminação da disjunção seja aplicada em uma fórmula obtida por introdução da disjunção, tal como ilustrado abaixo.

$$\begin{array}{rll}
k & \varphi & \\
l & \varphi \vee \psi & k\ I\vee \\
m & \mid\ \underline{\varphi} & \text{Hip.} \\
 & \mid\ \Lambda & \\
n & \mid\ \chi & \\
(n+1) & \mid\ \underline{\psi} & \text{Hip.} \\
 & \mid\ \Pi & \\
o & \mid\ \chi & \\
(o+1) & \chi & l, m\text{—}n, n+1\text{—}o\ \ E\vee
\end{array}$$

Podemos obter uma derivação Σ' na qual isto não ocorre:

$$\begin{array}{rll}
k & \varphi & \\
l & \varphi \vee \psi & k\ I\vee \\
 & \Lambda & \\
m & \chi &
\end{array}$$

Dados estes procedimentos de redução, podemos finalmente demostrar a normalização.

Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash \varphi$ e seja ψ uma fórmula maximal em Σ tal que não haja outra de grau maior. Neste caso, podemos obter, por redução, uma Σ' na qual não ocorre ψ. Uma vez que derivações são sequências finitas, basta repetir este procedimento até obter uma prova de $\Gamma \vdash \varphi$ na qual não ocorram fórmulas maximais. *Q.e.d.*

Propriedade de Subfórmula

Como consequência imediata da normalização do sistema *DNC* (relativa aos conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$), tem-se que em uma prova de $\Gamma \vdash \varphi$ por meio de uma derivação Σ, assumindo que esta seja a mais curta possível, todas as fórmulas em Σ terão a forma δ, $\neg\delta$ ou $\neg\neg\delta$, onde δ é subfórmula[6] de φ ou subfórmula de alguma fórmula de Γ. A esta propriedade é dado o nome de *propriedade de subfórmula*.

Este aspecto do método de dedução natural, juntamente com o uso de subprovas, é um de seus maiores méritos em relação ao método axiomático; uma vez que as provas neste podem trazer fórmulas muito complexas.

A fim de ilustrar este ponto, consideremos o fragmento implicativo de *DNC* (apenas as regras $I \rightarrow$ e $E \rightarrow$) e o fragmento implicativo do método axiomático caracterizado pela regra de modus ponens e os dois axiomas a seguir:

Ax$_1$ $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Ax$_2$ $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Abaixo, provamos os mesmos resultados por meio do método axiomático e do método de dedução natural.

Exemplo 1: $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$

[6] Não necessariamente subfómula própria. Uma fórmula é subfórmula de si própria.

Dedução Natural

1	$\varphi \to \psi$	Prem.
2	$\psi \to \chi$	Prem.
3	$\quad\varphi$	Hip.
4	$\quad\psi$	1, 3 E$\to$
5	$\quad\chi$	2, 4 E$\to$
6	$\varphi \to \chi$	3—5 I$\to$

Método axiomático

1	$\varphi \to \psi$	Premissa
2	$\psi \to \chi$	Premissa
3	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	$\mathbf{Ax}_1$
4	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	2, 3 MP
5	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	$\mathbf{Ax}_2$
6	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	5, 4 MP
7	$\varphi \to \chi$	6, 1 MP

Exemplo 2: $\vdash \varphi \to \varphi$

Dedução Natural

1	$\vert\ \varphi$	Hip.
2	$\varphi \to \varphi$	1—1 I$\to$

Método Axiomático

1	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	Ax_2
2	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	Ax_1
3	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	1, 2 MP
4	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	Ax_1
5	$\varphi \to \varphi$	3, 4 MP

2.3 Completude

Nesta seção demonstramos a completude de *DNC* em respeito à *LPC*:

$$\text{Se } \Gamma \vDash \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Ou seja, se uma fórmula φ é satisfeita (na semântica de valorações) por um conjunto Γ de fórmulas, então existe uma derivação em *DNC* que inicia com as fórmulas de Γ e termina com φ, tendo todas hipóteses descartadas.

Para demonstrar este resultado, primeiro demonstramos três lemas, dois dos quais consistem em casos particulares do teorema da completude.

2.3.1 Lema 0

$$\text{Se } \Gamma \vdash \varphi \text{ e } \Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \text{ então } \Gamma \cup \Delta \vdash \psi$$

Prova:

Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Neste caso, deve existir uma sequência Λ e uma Π tais que

$$\begin{array}{rll} & \Gamma & \text{Premissas} \\ & \Lambda & \\ i & \varphi & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rll} & \Delta & \text{Premissas} \\ i & \varphi & \text{Premissa} \\ & \Pi & \\ j & \psi & \end{array}$$

Assim sendo, deve haver uma derivação na forma

$$\begin{array}{rll} & \Gamma \cup \Delta & \text{Premissas} \\ & \Lambda & \\ i & \varphi & \\ & \Pi & \\ j & \psi & \end{array}$$

Q.e.d.

2.3.2 Lema 1

Seja χ uma fórmula com n subfórmulas atômicas — $p_1, p_2, \ldots , p_n$ — seja Γ um conjunto de literais tal que, para todo $x \leq n$, $p_x \in \Gamma$ ou $\neg p_x \in \Gamma$; [7] e seja $\mathfrak{v}$ uma valoração que satisfaz Γ. Se $\mathfrak{v}(\chi) = 1$, então $\Gamma \vdash \chi$. Se $\mathfrak{v}(\chi) = 0$, então $\Gamma \vdash \neg\chi$.[8]

[7] Isto é, $p_1 \in \Gamma$ ou $\neg p_1 \in \Gamma$, $p_2 \in \Gamma$ ou $\neg p_2 \in \Gamma$,..., $p_n \in \Gamma$ ou $\neg p_n \in \Gamma$.

[8] Ou seja, segundo o Lema 1, dado que uma fómula χ é consequência semântica de um conjunto Γ de literais, segue que existe uma derivação de χ a partir de Γ em *DNC*.

Prova:

A prova será por indução no comprimento de χ. No caso base assumimos χ como um literal. No passo indutivo, assumiremos que certas fórmulas φ e ψ têm a propriedade expressa pelo lema, para então demonstrar que no caso de χ molecular, qualquer que seja sua forma, se χ for consequêcia semântica de φ e ψ, então há um derivação em *DNC* de χ a partir de φ e ψ. No caso de φ e ψ não forem literais, o Lema 0 garante que χ é derivável por literais.

Caso Base: χ é atômica. Este caso é trivial, pois as derivações são sequências unitárias que começam e terminam com uma premissa:

$\{p\} \vdash p$

$\{\neg p\} \vdash \neg p$

Passo indutivo: Sejam φ e ψ fórmulas com a propriedade descrita pelo lema. Provaremos então que a mesma propriedade vale para $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$.

Assim, uma vez que já estamos assumindo que φ (ou $\neg\varphi$) e ψ (ou $\neg\psi$) são deriváveis a partir de um conjunto de literais,[9] nos basta demonstrar:

(a) $\{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$

(b) $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

(c) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

(d) $\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

(e) $\{\neg\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

(f) $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

(g) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$

(h) $\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$

(i) $\{\neg\varphi, \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$

(j) $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$

(k) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$

(l) $\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

(m) $\{\neg\varphi, \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$

(n) $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$

[9] Observe que não excluímos o caso da derivação ser uma sequência vazia, o que faria φ (ou $\neg\varphi$) e ψ (ou $\neg\psi$) serem premissas.

(a) Simliar ao caso base.

(b)

1	φ	
2	$\quad\neg\varphi$	Hip.
3	$\quad\varphi$	1 *Reiteração*
4	$\neg\neg\varphi$	2—3,2 $I\neg$

(e)

1	$\neg\varphi$	
2	ψ	
3	$\quad\varphi \wedge \psi$	Hip.
4	$\quad\varphi$	3 $E\neg$
5	$\quad\neg\varphi$	1 *Reiteração*
6	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	3—4,5 $I\neg$

Os casos **(d)** e **(f)** são análogos.

(c)

1	φ	
2	ψ	
3	$\varphi \wedge \psi$	1, 2 $I\wedge$

(g)

1	φ	
2	ψ	
3	$\varphi \vee \psi$	1 $I\vee$

Os casos **(h)** e **(i)** são análogos.

(k)

1	φ	
2	ψ	
3	$\quad\varphi$	Hip.
4	$\quad\psi$	2 *Reiteração*
5	$\varphi \rightarrow \psi$	2—4 $I \rightarrow$

O caso **(m)** é análogo.

(j)

1	$\neg\varphi$	
2	$\neg\psi$	
3	$\varphi \vee \psi$	Hip.
4	φ	Hip.
5	ψ	Hip.
6	$\neg\varphi$	Hip.
7	ψ	5 *Reiteração*
8	$\neg\psi$	2 *Reiteração*
9	$\neg\neg\varphi$	6—7,8 $I\neg$
10	φ	9 $E\neg\neg$
11	φ	3, 4—4, 5—10 $E\vee$
12	$\neg\varphi$	1 *Reiteração*
13	$\neg(\varphi \vee \psi)$	3—12 $I\neg$

(l)

1	φ	
2	$\neg\psi$	
3	$\varphi \to \psi$	Hip.
4	ψ	3, 1 $E \to$
5	$\neg\psi$	2 *Reiteração*
6	$\neg(\varphi \to \psi)$	3—4,5 $I\neg$

(n)

1	$\neg\varphi$	
2	$\neg\psi$	
3	φ	Hip.
4	$\neg\psi$	Hip.
5	$\neg\varphi$	1 *Reiteração*
6	φ	3 *Reiteração*
7	$\neg\neg\psi$	4—5,6 $I\neg$
8	ψ	7 $E\neg\neg$
9	$\varphi \to \psi$	3—8 $I \to$

Q.e.d.

2.3.3 Lema 2

Todas as tautologias são teoremas.

Prova:

Seja φ uma tautologia que tenha n subfórmulas atômicas — p_1, ... , p_n — e seja $\Gamma = \{p_1 \vee \neg p_1, ..., p_n \vee \neg p_n\}$. Em primeiro lugar, mostraremos que $\Gamma \vdash \varphi$.

Como uma tautologia, por definição, é verdadeira em toda valoração, o Lema 1 garante que, a partir de qualquer conjunto de literais formados pelas mesmas atômicas que φ é formada, existe uma prova de φ. Ora, como Γ é um conjunto de disjunções destes literais, podemos aninhar subprovas para eliminação da disjunção de forma a obter todas as combinações possíveis de literais como hipóteses das subprovas. E assim, prova-se φ.

Para efeito de ilustração, considere φ contendo uma ou duas subfórmulas atômicas. As provas, nestes casos, seguiriam respectivamente algum dos seguintes esquemas:

1	$p \vee \neg p$	Prem.
2	$\quad \mid\ p$	Hip.
3	$\quad \mid\ \varphi$	2 Lema 1
4	$\quad \mid\ \neg p$	Hip.
5	$\quad \mid\ \varphi$	4 Lema 1
6	φ	1, 2—3, 4—5 $E\vee$

1	$p_1 \vee \neg p_1$	Prem.
2	$p_2 \vee \neg p_2$	Prem.
3	$\quad p_1$	Hip.
4	$\qquad p_2$	Hip.
5	$\qquad \varphi$	3, 4 Lema 1
6	$\qquad \neg p_2$	Hip.
7	$\qquad \varphi$	3, 5 Lema 1
8	$\quad \varphi$	2, 4—5, 6—7 $E\vee$
9	$\quad \neg p_1$	Hip.
10	$\qquad p_2$	Hip.
11	$\qquad \varphi$	9, 10 Lema 1
12	$\qquad \neg p_2$	Hip.
13	$\qquad \varphi$	9, 12 Lema 1
14	$\quad \varphi$	2, 10—11, 12—13 $E\vee$
15	φ	1, 3—8, 9—14 $E\vee$

Como já foi demonstrado na seção de estratégias de derivação, qualquer instância do esquema $\varphi \vee \neg\varphi$ é teorema. Assim, qualquer tautologia é demonstrável a partir de um conjunto vazio de premissas, ou seja, toda tautologia é teorema. *Q.e.d.*

2.3.4 Teorema de Completude

Se $\Gamma \vDash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova: Seja Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula tais que $\Gamma \vDash \varphi$. Seja ψ uma conjunção entre todos elementos de Γ. Evidentemente, $\psi \rightarrow \varphi$ é uma tautologia, a qual, pelo Lema 2, pode ser provada a partir de qualquer conjunto. Portanto, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Por sua vez, ψ é derivável a partir de Γ por meio de sucessivas aplicações da introdução da conjunção. Ou seja, $\Gamma \vdash \psi$. Assim, por eliminação da implicação, obtemos que $\Gamma \vdash \varphi$. *Q.e.d.*

Como planejado, descrevemos neste capítulo um sistema de dedução natural para a Lógica Proposicional Clássica (*DNC*) e demonstramos os resultados de corretude, completude e normalização para este. Estes resultados nos servirão ao tratarmos no Capítulo 4 sobre dedução natural para lógicas modais. Antes disto, trataremos no Capítulo 3 desta família de lógicas.

Capítulo 3

Semântica e Axiomática das Lógicas Modais

É complicado definir 'lógica modal' em vista da rápida evolução do tópico ao longo de sua história. A pretensão original de David Lewis (1941—2001)[1] foi desenvolver um sistema de lógica com uma implicação estrita ($\strictif$) que não incorresse nos mesmos resultados contra-intuitivos que a implicação material ($\rightarrow$) da lógica clássica.

A fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ é falsa (na lógica clássica) no caso do antecedente (a fórmula φ) ser verdadeiro e o consequente (a fórmula ψ) ser falso, e verdadeira caso contrário. Ou seja, ela é equivalente a $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Assim, uma fórmula condicional pode ser verdadeira, ainda que antecedente e consequente não tenham qualquer relação um com o outro. Aliás, dadas duas proposições, φ e ψ quaisquer, ao menos um dos dois condicionais é verdadeiro: $\varphi \rightarrow \psi$ ou $\psi \rightarrow \varphi$.

A ideia de Lewis[2] é que uma fórmula condicional estrita $\varphi \strictif \psi$ é verdadeira no

[1]Filósofo americano, criador do primeiros sistemas formais de lógica modal e expoente da corrente pragmatista de filosofia.

[2]A rigor, a discussão sobre o critério de verdade de sentenças condicionais remonta à antiguidade clássica. Philo de Megara (fl. 300 AEC) defendia um critério semelhante ao vero-funcional

caso de não ser possível que o antecedente seja verdadeiro e o consequente falso, e falsa caso contrário, o que faz $\varphi \multimap \psi$ equivalente a $\neg\Diamond(\varphi \land \neg\psi)$ e $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$.

Em pouco tempo o foco dos estudos em lógica modal passou para os conceitos de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$), tanto que eventualmente define-se lógica modal como a lógica que trata destes conceitos. Contudo, foram surgindo sistemas de lógica temporal, deôntica, epistêmica e diversos outros os quais têm várias similaridades com os sistemas desenvolvidos por Lewis, em alguns casos até admitindo uma semântica em comum. Eventualmente, todos estes sistemas foram classificados como lógicas modais.

Neste capítulo, apresentaremos vários sistemas de lógica modal sob o aspecto predominantemente formal, deixando de lado qualquer interpretação que estes possam receber, focando-se no método axiomático e na semântica de Kripke.

Além do mais, restringir-nos-emos a sistemas normais.[3] Um sistema **S** de lógica modal é *normal* quando satisfaz o seguinte critério:

Dado $\{\varphi, ..., \psi\} \vdash_{\mathbf{S}} \chi$,
segue que $\{\Box\varphi, ..., \Box\psi\} \vdash_{\mathbf{S}} \Box\chi$.

Ou seja, se uma fórmula χ é consequência de um conjunto de fórmulas, a fórmula obtida a partir desta adicionando o operador $\Box$ é consequência do conjunto de fórmulas obtidas da mesma forma a partir das fórmulas do primeiro conjunto.

Dependendo da interpretação dada a $\Box$, isto significa que a consequência de proposições necessárias, obrigatórias, conhecidas, demonstráveis... também é,

da Lógica Clássica. Já seu mestre, Diodoro Cronus (? — 284 AEC) defendia um critério temporal, enquanto Crisipo de Solis (ca. 280 AEC — ca. 208 AEC) defendia um critério modal semelhante ao de D. Lewis. REF.: BOBZIEN, (2011).

[3] Aqui não há qualquer relação entre o uso do termo "normal" com o uso do mesmo no contexto de dedução natural.

respectivamente, necessária, obrigatórias conhecida ou demonstrável.

3.1 O Sistema K

A seguir, introduzimos o sistema axiomático para a lógica modal **K**. Esta consiste na mais elementar lógica modal normal, de forma que todas as demais são extensões de **K**.

A assinatura com a qual trabalharemos é:

$\mathcal{L}_{\Box} ::= p \,|\, \neg\mathcal{L}_{\Box} \,|\, (\mathcal{L}_{\Box} \wedge \mathcal{L}_{\Box}) \,|\, (\mathcal{L}_{\Box} \vee \mathcal{L}_{\Box}) \,|\, (\mathcal{L}_{\Box} \to \mathcal{L}_{\Box}) \,|\, \Box\mathcal{L}_{\Box} \,|\, \Diamond\mathcal{L}_{\Box}.$ [4]

Já os axiomas e regras de inferência de **K** são:

- Axioma *LC*. Todas as tautologias da lógica proposicional clássica
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- Axioma de Interdefinibilidade $\Box/\Diamond$. $\neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
- Regra de Necessitação, *RN*. $\dfrac{\vdash_{\mathbf{K}} \varphi}{\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi}$

O axioma *LC* e a regra *MP* garantem que **K** é uma extensão da lógica clássica. Como todas as inferências válidas na lógica clássica também são válidas em **K** (e demais lógicas modais normais), neste capítulo abreviaremos as provas de teoremas utilizando-as. Por exemplo, a derivação abaixo

[4] A despeito da abordagem típica da linguagem das lógicas modais ser definir '$\Diamond$' por meio de '$\Box$' — $\Diamond\varphi \overset{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\varphi$ — preferimos adotar '$\Diamond$' como primitivo.

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \chi$	
3	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	*LC*
4	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	3, 1 *MP*
5	$\varphi \to \chi$	4, 2 *MP*

é abreviada da seguinte maneira

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \chi$	
3	$\varphi \to \chi$	1, 2 *LC*

O axioma K garante que o sistema **K** é *fechado sob modus ponens*, isto quer dizer que em **K** pode-se efetuar derivações na forma:

1	$\Box(\varphi \to \psi)$	
2	$\Box\varphi$	
3	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	axioma K
4	$\Box\varphi \to \Box\psi$	3, 1 *MP*
5	$\Box\psi$	4, 2 *MP*

O Axioma de Interdefinibilidade $\Box/\Diamond$ estabelece a dualidade entre os operadores $\Box$ e $\Diamond$. Com frequência, neste capítulo, abreviaremos as provas que utilizam este axioma, apenas realizando a substituição das ocorrências de "$\neg\Box\neg$" em uma fórmula por "$\Diamond$".

Por fim, a Regra de Necessitação garante que, se uma fórmula φ é teorema de **K**, então a fórmula $\Box\varphi$ também é teorema de **K**. Observe que, em extensões de **K**, a Regra de Necessitação é adaptada para também englobar os teoremas dos sistemas em questão.

3.1.1 Alguns exemplos de teoremas de K

A seguir, damos alguns exemplos de teoremas de **K** e suas respectivas demonstrações, mas primeiro demonstramos a Regra de Monotonicidade, uma regra derivada que nos permite abreviar significativamente as provas.

Regra de Monotonicidade (*RM*), $\frac{\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \to \psi}{\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi \to \Box\psi}$

1	$\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \to \psi$	Hipótese
2	$\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \to \psi)$	1 *RN*
3	$\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	*K*
4	$\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi \to \Box\psi$	3, 2 *MP*

$\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$

1	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	*LC*
2	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	*LC*
3	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha$	1 *RM*
4	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta$	2 *RM*
5	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$	3, 4 *LC*

$\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$

1	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	*LC*
2	$\Box\alpha \rightarrow \Box(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	1 *RM*
3	$\Box(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$	*K*
4	$\Box\alpha \rightarrow (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$	2, 3 *LC*
5	$(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$	4 *LC*

Observação: Os dois teoremas acima podem ser generalizados para $\Box(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \leftrightarrow (\Box\varphi_1 \wedge ... \wedge \Box\varphi_n)$.

$\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$

1	$(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \rightarrow \Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	teorema
2	$\neg\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	1 *LC*
3	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$	*LC*
4	$\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \Box\neg(\alpha \vee \beta)$	3 *RM*
5	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	4 *LC* e $\Box/\Diamond$
6	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	2, 5 *LC*
7	$\neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	*LC* e $\Box/\Diamond$
8	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	6, 7 *LC*

$\vdash_{\mathbf{K}} (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$

1	$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	*LC*
2	$\Box\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	1 *RM*
3	$\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow (\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	teorema
4	$\Box\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	2, 3 *LC*
5	$\neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$	4 *LC*
6	$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	*LC*
7	$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$	6, 5 *LC*

Observação: Os dois teoremas acima podem ser generalizados para $\Diamond(\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n) \leftrightarrow (\Diamond\varphi_1 \vee ... \vee \Diamond\varphi_n)$.

$\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$

1	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	*LC*
2	$\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	1 *RM*
3	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	*LC*
4	$\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	3 *RM*
5	$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	2, 4 *LC*

$\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$

1	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	*LC*
2	$\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$	1 *LC*
3	$\Box\neg\alpha \rightarrow \Box\neg(\alpha \wedge \beta)$	2 *RM*
4	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\alpha$	3 *LC*
5	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	*LC*
6	$\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$	5 *LC*
7	$\Box\neg\beta \rightarrow \Box\neg(\alpha \wedge \beta)$	6 *RM*
8	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\beta$	7 *LC*
9	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$	4, 8 *LC*

3.2 Semântica de Kripke

A seguir, introduzimos a semântica relacional de mundos possíveis desenvolvida por Saul Kripke.

Uma *estrutura* de Kripke $\mathcal{F}$ é um par $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{W}$ é um conjunto não-vazio de *mundos possíveis* e $\mathcal{R}$ é uma *relação de acessibilidade* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$.

Observação: abreviaremos $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}$ por $w\mathcal{R}w'$, o que leremos como '*w acessa w' por meio de $\mathcal{R}$*'.

Uma valoração consiste em uma função $\mathfrak{v} : \mathcal{W} \times \textsc{Atom} \rightarrow \{0, 1\}$, onde $\textsc{Atom}$ é o conjunto de fórmulas atômicas.

Um *modelo de Kripke* consiste em uma tripla $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$. Diz-se que o modelo $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$ é obtido a partir da aplicação da valoração $\mathfrak{v}$ em uma estrutura $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$.

Define-se a relação $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$, a qual é lida como *"$\alpha$ é verdadeira no mundo w do modelo $\mathcal{M}$"*, nos seguintes termos:

- Se $p \in$ Atom, então $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash p$ sse $\mathfrak{v}(w, p) = 1$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \neg\alpha$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \wedge \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \vee \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \to \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Diamond\alpha$ sse, para algum $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

Um *modelo* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$ *satisfaz uma fórmula* φ ($\mathcal{M} \vDash \varphi$) sse, para todo $w \in \mathcal{W}$, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$.

Uma *estrutura* $\mathcal{F}$ *satisfaz uma fórmula* φ ($\mathcal{F} \vDash \varphi$) sse, para qualquer valoração $\mathfrak{v}$, a aplicação de $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ produz um $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Uma *classe* $\mathfrak{M}$ *de modelos satisfaz uma fómula* φ ($\mathfrak{M} \vDash \varphi$) sse, para qualquer modelo $\mathcal{M}$ elemento de $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Uma *classe* $\mathfrak{F}$ *de estruturas satisfaz uma fómula* φ ($\mathfrak{F} \vDash \varphi$) sse, para qualquer estrutura $\mathcal{F}$ elemento de $\mathfrak{F}$, $\mathcal{F} \vDash \varphi$.

Seja Γ um conjunto de fórmulas, dizemos que 'φ é uma *consequência local* de Γ em relação a um mundo w de um modelo $\mathcal{M}$' (o que representamos por $\Gamma \vDash_w^{\mathcal{M}} \varphi$) sse, se $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ satisfaz todas fórmulas de Γ, então $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$.

Dizemos que dizemos que 'φ é uma *consequência global* de Γ em relação a um modelo $\mathcal{M}$' (o que representamos por $\Gamma \vDash^{\mathcal{M}} \varphi$) sse, se $\mathcal{M}$ satisfaz todas fórmulas de Γ, então $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

3.2.1 Corretude

A seguir, provaremos que os axiomas de **K** são satisfeitos por qualquer modelo de Kripke, e também que as regras de inferência preservam verdade em modelos de Kripke. Assim, estará determinado que o sistema **K** é correto em relação a modelos de Kripke (assim como estruturas e classes de modelos ou estruturas).

Proposição: Qualquer modelo de Kripke satisfaz o Axioma *K*

Prova:

Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$ um modelo tal que $w \in \mathcal{W}$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box(\varphi \to \psi)$.
Portanto, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi \to \psi$.
Suponha $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$, ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.
Disto segue que $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \psi$. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\psi$.
Logo, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$. *Q.e.d.*

Proposição: Qualquer modelo de Kripke satisfaz o Axioma de Interdefinibilidade $\Box/\Diamond$

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$ um modelo tal que $w \in \mathcal{W}$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \neg\Box\neg\varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \Box\neg\varphi$. Neste caso, deve existir ao menos um mundo w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \nvDash \neg\varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Diamond\varphi$. Logo,

$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v}\rangle$ um modelo tal que $w \in \mathcal{W}$ e $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond\varphi$. Neste caso, deve existir ao menos um mundo w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \nvDash \neg\varphi$. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \nvDash \Box\neg\varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \neg\Box\neg\varphi$. Logo, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond\varphi \rightarrow \neg\Box\neg\varphi$. *Q.e.d.*

Quanto a *LC*, uma vez que (no que tange os operadores clássicos) os critérios de satisfatibilidade em um mundo possível são os mesmos que os critérios de satisfatibilidade em uma valoração, é óbvio que modelos de Kripke satisfazem qualquer tautologia clássica. O mesmo vale para a regra *MP*, que preserva validade tanto em mundos quanto em modelos. Resta, então apenas provar que *RN* preserva validade em modelos.

Proposição: $\varphi \vDash^{\mathcal{M}} \Box\varphi$

Prova: Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v}\rangle$ um modelo tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Ou seja, para todo $w \in \mathcal{W}$, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \varphi$. Consequentemente, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \varphi$. Assim, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\varphi$ (para todo w). Ou seja, $\mathcal{M} \vDash \Box\varphi$. *Q.e.d.*

Observação: Distintamente de *MP*, *RN* não preserva verdade em mundos. Ou seja, que uma fórmula φ é verdadeira em um mundo não garante que $\Box\varphi$ também seja.

3.2.2 Completude

A seguir, abordaremos a completude de sistemas normais de lógica modal. A multiplicidade de modelos na semântica de Kripke impõe complicações aos resultados de adequação semântica de sistemas. Estas complicações são contornadas definindo-se o conceito de *modelos canônicos* e demonstrando a completude de sistemas em respeito a estes. Modelos canônicos são definidos de uma forma que garante que o modelo canônico de um sistema **S** satisfaça todos e apenas os teoremas de **S**.

Observe que nesta seção, entenderemos um sistema **S** como um conjunto de fórmulas fechado por uma relação de consequência.

Definições:

Seja **S** um sistema de lógica modal normal;

- φ é **S**–consistente sse $\neg\varphi \notin \mathbf{S}$.
- w é uma *extensão maximal consistente* de **S** sse:
    1. $\mathbf{S} \subseteq w$
    2. Para toda fórmula φ, $\varphi \in w$ sse $\neg\varphi \notin w$ (ou seja, w é consistente)
    3. Para toda fórmula φ, $\varphi \in w$ ou $\neg\varphi \in w$
- $Des(w) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathcal{L}_{\Box} : \Box\varphi \in w\}$. Chamaremos $Des(w)$ de *conjunto das fórmulas desnecessitadas de w*.
- Um *modelo canônico* de **S** é $\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle \mathcal{W}_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, \mathfrak{v}_{\mathbf{S}} \rangle$ tal que
    1. $\mathcal{W}_{\mathbf{S}}$ é o conjunto de todas as extensões maximais consistentes de **S**.

2. Para todo $w, w' \in \mathcal{W}_{\mathbf{S}}$, $w\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w'$ sse $Des(w) \subseteq w'$. Ou seja, um mundo acessa outro sse o segundo contém todas as fórmulas desnecessitadas do primeiro.

3. $\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}$ é uma função característica tal que

$$\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}(p, w) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in w \\ 0, & \text{se } p \notin w \end{cases}$$

- Dado um modelo canônico $\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle \mathcal{W}_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, \mathfrak{v}_{\mathbf{S}} \rangle$, dizemos que $\mathcal{F}_{\mathbf{S}} = \langle \mathcal{W}_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}} \rangle$ é sua respectiva *estrutura canônica*.

Lema 1:

Como consequência imediata das definições acima, temos

- $\varphi \wedge \psi \in w$ sse $\varphi \in w$ e $\psi \in w$.
- $\varphi \vee \psi \in w$ sse $\varphi \in w$ ou $\psi \in w$.
- Se $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, então $\varphi \in w$.
- Se $\varphi \in w$ e $\varphi \rightarrow \psi \in w$, então $\psi \in w$.

Lema de Lindenbaum:

Todo conjunto de fórmulas consistente com um sistema **S** tem ao menos uma extensão maximal consistente.

Prova: Considere uma enumeração de todas as fórmulas da linguagem (φ_1, φ_2, φ_3...) e seja Γ um conjunto de fórmulas consistente com um sistema **S**. Também considere

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}, & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ for consistente com } \mathbf{S} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Gamma_{max} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Suponha, por absurdo, que Γ_n é consistente com **S**, mas Γ_{n+1} é inconsistente com **S**. Neste caso temos que $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$ e $\Gamma_n \cup \{\neg\neg\varphi_{n+1}\}$ são inconsistentes com **S**. Mas então, Γ_n é consistente com **S** enquanto $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1} \vee \neg\neg\varphi_{n+1}\}$ não é, o que é absurdo. Portanto, se Γ_n é consistente com **S**, então Γ_{n+1} também é.

Consequentemente temos que Γ_{max} é uma extensão maximal consistente de Γ. *Q.e.d.*

Lema 2:

Se w é uma extensão maximal consistente de **S** e $\neg\Box\varphi \in w$, então $Des(w) \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente com **S**.

Prova: Suponha que $Des(w) \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente com **S**. Então deve existir um conjunto finito $\{\psi, ..., \chi, \neg\varphi\} \subseteq Des(w) \cup \{\neg\varphi\}$ que também é inconsistente com **S**. Neste caso, qualquer modelo que satisfaz **S** também satisfaz $(\psi \wedge ... \wedge \chi) \rightarrow \varphi$. Consequentemente, qualquer modelo que satisfaz **S** também satisfaz $(\Box\psi \wedge ... \wedge \Box\chi) \rightarrow \Box\varphi$.[5] Logo, $\{\Box\psi, ..., \Box\chi, \neg\Box\varphi\}$ é inconsistente com **S**. Por contraposição obtem-se o lema. *Q.e.d.*

[5] Uma vez que a Regra de Monotonicidade é válida em qualquer sistema normal e $\Box(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \leftrightarrow (\Box\varphi_1 \wedge ... \wedge \Box\varphi_n)$ é teorema de qualquer sistema normal.

Teorema dos Modelos Canônicos:

Dado $\mathcal{M}_{\mathbf{S}} = \langle \mathcal{W}_{\mathbf{S}}, \mathcal{R}_{\mathbf{S}}, \mathfrak{v}_{\mathbf{S}} \rangle$, seja φ uma fórmula qualquer e $w \in \mathcal{W}_{\mathbf{S}}$, temos que

$$\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}(\varphi, w) = \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi \in w \\ 0, & \text{se } \varphi \notin w \end{cases}$$

A prova se dá por indução na complexidade das fórmulas e é trivial para os operadores clássicos. Assim, nos focaremos no operador '$\Box$'[6]

Prova: **(1)** Por hipótese de indução, φ é uma fórmula com a propriedade descrita pelo teorema. Suponha que $\Box\varphi \in w$. Neste caso, para todo $w' \in \mathcal{W}_{\mathbf{S}}$ tal que $w\mathcal{R}_{\mathbf{S}}w'$, $\varphi \in w'$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}(\varphi, w') = 1$. Portanto, $\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}(\Box\varphi, w) = 1$. **(2)** Suponha que $\Box\varphi \notin w$. Como w é maximal consistente, $\neg\Box\varphi \in w$. Pelo lema anterior, segue que $Des(w) \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente com **S**. O lema de Lindenbaum garante que existe uma extensão maximal consistente de $Des(w) \cup \{\neg\varphi\}$, a qual chamaremos de w'. Assim, temos que $\neg\varphi \in w'$ e $Des(w) \in w'$, o que garante $w\mathcal{R}w'$. Consequentemente, $\mathfrak{v}_{\mathbf{S}}(\Box\varphi, w) = 0$. *Q.e.d.*

Como consequência imediata do Lema 1 e do teorema dos modelos canônicos, temos o corolário a seguir.

Corolário:

Se $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, então φ é satisfeita no modelo canônico de **S**.

[6] E uma vez provado para '$\Box$', '$\Diamond$' já é garantido pelo Axioma de Interdefinibilidade.

3.3 Extensões do Sistema K (Axiomas de assinatura $G_{(l,m,n,o)}$)

A seguir, abordaremos esquemas de fórmulas adotados como axiomas em algumas das extensões de **K**. Restringir-nos-emos às fórmulas de assinatura $G_{(l,m,n,o)}$, isto é, fórmulas que têm a forma $\Diamond_l \Box_m \varphi \rightarrow \Box_n \Diamond_o \varphi$, onde l, m, n e o são números naturais que indicam a iteração dos operadores modais. Por exemplo, $G_{(0,1,2,3)}$ é $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\Diamond\Diamond\Diamond\varphi$, enquanto $G_{(3,2,1,0)}$ é $\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$.

Introduzimos os axiomas na tabela a seguir, na qual consta seus nomes (**N.**), suas formulações usuais (**F. usual**), suas assinaturas G (**Ass. G**), formas equivalentes ou formulações alternativas (**F. alt.**) e, por fim, as propriedades[7] que uma relação de acessibilidade precisa ter para que um modelo satisfaça os axiomas (entraremos em maiores detalhes sobre este ponto mais adiante).

N.	**F. usual**	**Ass. G**	**F. alt.**	**Propriedade Relacional**
T	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	0,1,0,0	$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Ref.: $\forall w. w\mathcal{R}w$
D	$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	0,1,0,1	$\neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$	Serial: $\forall w \exists w'. w\mathcal{R}w'$
4	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	0,1,2,0	$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Tran.: $\forall w, w', w''.(w\mathcal{R}w' \,\&\, w'\mathcal{R}w'') \Rightarrow w\mathcal{R}w''$
B	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	0,0,1,1	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	Sim.: $\forall w, w'. w\mathcal{R}w' \Rightarrow w'\mathcal{R}w$
G	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	1,1,1,1	$\Box\Diamond\varphi \vee \Box\Diamond\neg\varphi$	Inc: $\forall w, w', w''.(w\mathcal{R}w' \,\&\, w\mathcal{R}w'') \Rightarrow \exists w'''(w'\mathcal{R}w''' \,\&\, w''\mathcal{R}w''')$
5	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	1,0,1,1	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$	Euc.: $\forall w, w', w''.(w\mathcal{R}w' \,\&\, w\mathcal{R}w'') \Rightarrow w'\mathcal{R}w''$
4^{-1}	$\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	0,2,1,0	$\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Diamond\varphi$	Densa: $\forall w, w' \exists w''. w\mathcal{R}w' \Rightarrow (w\mathcal{R}w'' \,\&\, w''\mathcal{R}w')$

Uma breve digressão sobre os axiomas:

[7] Expressas em linguagem da Lógica de Primeira Ordem Clássica, em uma notação diferente da utilizada para a linguagem objeto.

- O Axioma T expressa a factualidade ou veracidade das fórmulas sob o escopo do operador $\Box$.

- O Axioma D expressa a consistência entre as fórmulas sob o escopo de $\Box$. Uma vez que D é consequência de T, o primeiro só é postulado em sistemas no qual o segundo não é, tais como em sistemas doxásticos (uma vez que nem toda crença é verdadeira) e sistemas deônticos (uma vez que nem toda obrigação é cumprida). Daí seu nome, '*D*'.

- O Axioma B recebe seu nome em homenagem a Brouwer, ícone do intuicionismo. A razão para a homenagem é que, se interpretarmos '$\Box\neg$' como uma espécie de negação forte, $\sim \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \Box\neg\varphi$, B é formulável por $\varphi \rightarrow \sim\sim \varphi$, teorema da lógica intuicionista.

- O Axioma 4^{-1} consiste em uma instância de T. Portanto, assim como o Axioma D, 4^{-1} só é postulado em sistemas nos quais T não o é.

Nomearemos as extenções de **K** pela letra '*K*' seguida dos nomes dos axiomas adicionais. Por exemplo, KDB é o sistema obtido extendendo **K** com a adição dos axiomas D e B. Alguns sistemas de maior destaque na literatura recebem um nome distinto:

- **D**=KD

- **T**=KT

- **B**=KTB

- **S4**=$KT4$

- **S4.2**=$KT4G$

- **S5**=$KT5 = KTB4 = KDB4 = KDB5$ (Trataremos sobre esta equivalência de sistemas ainda neste capítulo)

Proposição: *Os seguintes esquemas de fórmula são esquemas de teorema de* **T**:

- $\varphi \to \Diamond\varphi$
- $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$
- $\Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$

Prova:

$\vdash_{\mathbf{T}} \varphi \to \Diamond\varphi$

1	$\Box\neg\varphi \to \neg\varphi$	T
2	$\varphi \to \Diamond\varphi$	1 LC

$\vdash_{\mathbf{T}} \Box\varphi \to \Diamond\varphi$

1	$\Box\varphi \to \varphi$	T
2	$\varphi \to \Diamond\varphi$	Teor. de **T**
3	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	1, 2 LC

$\vdash_{\mathbf{T}} \Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$

1	$\neg(\varphi \to \Box\varphi) \to (\varphi \wedge \neg\Box\varphi)$	*LC*
2	$\Box\neg(\varphi \to \Box\varphi) \to \Box(\varphi \wedge \neg\Box\varphi)$	1 *RM*
3	$\Box(\varphi \wedge \neg\Box\varphi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\neg\Box\varphi)$	Teor. de **K**
4	$\Box\neg\Box\varphi \to \neg\Box\varphi$	*T*
5	$\Box(\varphi \wedge \neg\Box\varphi) \to (\Box\varphi \wedge \neg\Box\varphi)$	4,3 *LC*
6	$\neg\Box(\varphi \wedge \neg\Box\varphi)$	5 *LC*
7	$\Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	2,6 *LC* e $\Box/\Diamond$

Proposição:

$$\vdash_{K4} \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$$

Prova:

1	$\Box\neg\varphi \to \Box\Box\neg\varphi$	*4*
2	$\neg\Box\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$	1 *LC*
3	$\Box\neg\varphi \to \neg\neg\Box\neg\varphi$	*LC*
4	$\Box\Box\neg\varphi \to \Box\neg\neg\Box\neg\varphi$	3 *RM*
5	$\neg\Box\neg\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\Box\neg\varphi$	4 *LC*
6	$\neg\Box\neg\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$	5, 2 *LC*
7	$\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	6 $\Box/\Diamond$

Corolário:*As seguintes equivalências são teoremas de* **S4**,

- $\Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$
- $\Diamond\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$

Proposição:

$$\vdash_{K5} \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$$

Prova:

1	$\Diamond\neg\varphi \rightarrow \Box\Diamond\neg\varphi$	*5*
2	$\neg\Box\neg\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\neg\varphi$	1 $\Box/\Diamond$
3	$\neg\Box\neg\Box\neg\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\neg\varphi$	2 *LC*
4	$\neg\Box\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	3 *LC*
5	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	4 $\Box/\Diamond$

Corolário:*As seguintes equivalências são teoremas de* **S5**,

- $\Diamond\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$
- $\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$

Proposição:

Vale a seguinte equivalência entre sistemas: KT5=KTB4=KDB4=KDB5

Prova:

Dividimos a prova em quatro passos.

(i) B é teorema de $KT5$, $\vdash_{KT5} \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

1	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	5
2	$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Teor. de **T**
3	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	1, 2 *LC*

(ii) 4 é teorema de $KB5$, $\vdash_{KB5} \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

1	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	Teor. de *K5*
2	$\Box\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	1 *RM*
3	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$	*B*
4	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	2, 3 *LC*

(iii) 5 é teorema de $KB4$, $\vdash_{KB4} \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

1	$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	Teor. de *K4*
2	$\Box\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	1 *RM*
3	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\Diamond\varphi$	*B*
4	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	2, 3 *LC*

(iv) T é teorema de $KDB4$, $\vdash_{KDB4} \Box\varphi \rightarrow \varphi$

1	$\Box\Box\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$	D
2	$\neg\varphi \rightarrow \Box\Diamond\neg\varphi$	B
3	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	2 *LC*
4	$\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$	1, 3 *LC*
5	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	4
6	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	5, 4 *LC*

De (i), (ii) e (iii), segue que $KT5 = KTB4$. (ii) e (iii) garantem que $KDB4 = KDB5$. A partir de (iv) e do fato que $\vdash_{KT} \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ segue que $KDB4 = KTB4$. *Q.e.d.*

Obs.: (i) e (ii) provam que **S5** é extensão de **B** e de **S4**.

3.3.1 Completude e corretude

Uma vez que há um número muito grande de sistemas distintos de lógica modal, provaremos resultados particulares sobre os axiomas que compoem esses sistemas.

Dois tipos de resultados serão demonstrados: que certas classes de estruturas satisfazem certos axiomas, e que certos axiomas caracterizam[8] certas classes de estruturas.

Os resultados sobre satisfatibilidade determinam a corretude dos sistemas. Por exemplo, uma vez demonstrado que os axiomas T, B e 4 são satisfeitos por quais-

[8]Uma fórmula caracteriza uma classe de modelos ou estruturas quando, ao assumirmos que a fórmula é satisfeita pela classe, concluímos que todos os membros da classe têm certa propriedade.

quer estruturas cuja relação de acessibilidade seja, respectivamente, reflexiva, simétrica e transitiva; estará demonstrado que o sistema **S5** é correto a respeito de qualquer modelo ou estrutura cuja relação de acessibilidade seja uma relação de equivalência.

Já os resultados sobre caracterização determinam a completude dos sistemas. Por exemplo, uma vez demonstrado que o axioma D caracteriza a classe das estruturas com relação de acessibilidade serial, estará demonstrado que o sistema **D** é completo a respeito desta classe.

Observe que, no caso da completude, o fato de um sistema ser completo a respeito de uma classe de modelos ou estruturas não implica que o sistema em questão seja completo a respeito de qualquer membro da classe em questão. Por exemplo, **D** não é completo com respeito a uma estrutura que satisfaça $KD5$, ainda que esta seja membro da classe das estruturas com relação de acessibilidade serial.

O Axioma D é satisfeito qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for serial, *i.e.*, para todo $w' \in \mathcal{W}$, existe um $w'' \in \mathcal{W}$ tal que $w'\mathcal{R}w''$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ serial. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$. Por absurdo, suponha $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\neg\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \neg\varphi$. Como $\mathcal{R}$ é serial, existe um w' tal que $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$, o que é absurdo. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \neg\Box\neg\varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$. *Q.e.d*

O Axioma D caracteriza a classe de estruturas nas quais a relação de acessibilidade $\mathcal{R}$ é serial.

Prova:

Seja $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ um modelo no qual $\mathcal{R}$ não é serial e seja $\mathcal{M}$ um modelo obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$. Ou seja, algum $w \in \mathcal{W}$ não acessa mundo algum. Neste caso, para toda fórmula φ, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$ (pois não há um w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\mathfrak{v}(\varphi, w') = 0$) e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \Diamond\varphi$ (pois não há um w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\mathfrak{v}(\varphi, w') = 1$). Logo, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$. Portanto, se $\mathcal{F} \vDash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$, a relação de acessibilidade de $\mathcal{F}$ é serial. *Q.e.d.*

O Axioma T é satisfeito por qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for reflexiva, *i.e.*, para todo $w \in \mathcal{W}$, $w\mathcal{R}w$.

Prova:

Seja a relação $\mathcal{R}$ reflexiva.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$. Isto é, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.
Como $w\mathcal{R}w$ (reflexividade), segue que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$. Logo, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma T caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade reflexiva.

Prova:

Considere uma classe de estruturas $\mathfrak{F}$ que satisfaça qualquer fórmula na forma $\Box\varphi \rightarrow \varphi$. Vamos supor, por absurdo, que haja ao menos uma estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$

que seja membro de $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{R}$ não seja reflexiva, ou seja, existe um $w \in \mathcal{W}$ tal que $\langle w, w \rangle \notin \mathcal{R}$. Basta-nos obter um modelo a partir de $\mathcal{F}$ que não satisfaça ao menos uma fórmula na forma $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ para que haja uma contradição.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(p, w') = 1$ sse $w' \neq w$. Ou seja, uma fórmula atômica p é verdadeira em todos os mundos fora o w que determinamos não acessar a si próprio. Neste caso, $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$ (pois p é verdadeira em qualquer mundo acessível a w) e $\mathcal{M}, w \nvDash p$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p \rightarrow p$. Oras, se um modelo obtido a partir de $\mathcal{F}$ não satisfaz uma instância de T, então $\mathcal{F}$ não satisfaz T; o que contradiz nossa assunção inicial de que $\mathcal{F}$ é membro de uma classe de estruturas que satisfaz T. Logo, nenhuma estrutura não com relação de acessibilidade não reflexiva é membro de uma classe que satisfaça T, ou seja, T caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade reflexiva. *Q.e.d.*

O Axioma *4* é satisfeito qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for transitiva, *i.e.*, se $w'\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'''$, então $w'\mathcal{R}w'''$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação transitiva.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.

Agora, para cada w'' tal que $w'\mathcal{R}w''$, dado que $w\mathcal{R}w''$ (transitividade), segue que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$.

Assim, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \Box\varphi$. Consequentemente, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\Box\varphi$.

Logo, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma *4* caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade transitiva

Prova:

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{R}$ é não transitiva; ou seja, existem $w, w', w'' \in \mathcal{W}$ tais que $w\mathcal{R}w'$, $w'\mathcal{R}w''$ e $\langle w, w'' \rangle \notin \mathcal{R}$. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w''' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(w, p) = 1$ sse $w\mathcal{R}w'''$. Neste caso, temos que $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$ e $\mathcal{M}, w' \nvDash \Box p$. Assim, $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Box p$. Mas então $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p \rightarrow \Box\Box p$. *Q.e.d.*

O Axioma *B* é satisfeito qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for simétrica, *i.e.*, se $w\mathcal{R}w'$, então $w'\mathcal{R}w$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação simétrica.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$. Como $\mathcal{R}$ é simétrica, para qualquer w' tal que $w\mathcal{R}w'$, temos que $w'\mathcal{R}w$ e, consequentemente, $\mathcal{M}, w' \vDash \Diamond\varphi$. Disto segue que, $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond\varphi$. Logo, $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma *B* caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade simétrica

Prova:

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{R}$ é não simétrica; ou seja, existem $w, w' \in \mathcal{W}$ tais que $w\mathcal{R}w'$ e $\langle w', w \rangle \notin \mathcal{R}$. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w'' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(w'', p) = 1$ sse $w'' = w$. Neste caso, temos que $\mathcal{M}, w \vDash p$ e $\mathcal{M}, w' \nvDash \Diamond p$. Assim, $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Diamond p$. Mas então $\mathcal{M}, w \nvDash p \rightarrow \Box\Diamond p$. *Q.e.d.*

O Axioma *5* é satisfeito qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for euclideana, *i.e.*, se $w\mathcal{R}w'$ e $w\mathcal{R}w''$, então $w'\mathcal{R}w''$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação euclideana.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi$. Neste caso, deve existir um w'' tal que $w\mathcal{R}w''$ e $\mathcal{M}, w'' \vDash \varphi$. Como $\mathcal{R}$ é euclideana, para qualquer w' tal que $w\mathcal{R}w'$, temos que $w'\mathcal{R}w''$. Disto segue que $\mathcal{M}, w' \vDash \Diamond\varphi$. Neste caso, $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond\varphi$. Logo, $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma *5* caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade euclideana

Prova:

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{R}$ é não euclideana; ou seja, existem $w, w', w'' \in \mathcal{W}$ tais que $w\mathcal{R}w'$, $w\mathcal{R}w''$ e $\langle w', w'' \rangle \notin \mathcal{R}$. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w''' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(w''', p) = 1$ sse $w''' = w''$. Neste caso, temos que $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond p$ e $\mathcal{M}, w' \nvDash \Diamond p$. Assim, $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Diamond p$. Mas então $\mathcal{M}, w \nvDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. *Q.e.d.*

O Axioma *4*$^{-1}$ é satisfeito qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for densa, *i.e.*, se $w\mathcal{R}w'$, então existe um w'' tal que $w\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação densa.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Box\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\mathcal{M}, w' \vDash \Box\varphi$. Como $\mathcal{R}$ é densa, para cada w' existe um w'' tal que $w\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'$. Neste caso, $\mathcal{M}, w'' \vDash \Box\varphi$, e disto segue que $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi$. Portanto, $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$. Logo, $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma *4*$^{-1}$ caracteriza a classe de estruturas com relação de acessibilidade densa

Prova:

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{R}$ é não densa; ou seja, existem $w, w' \in \mathcal{W}$ tais que $w\mathcal{R}w'$ e não existe um $w'' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'$.

Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w''' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(w''', p) = 1$ sse $w''' \neq w'$. Neste caso, temos que $\mathcal{M}, w' \vDash \Box p$ e que para qualquer $w'''' \in \mathcal{W}$, $\mathcal{M}, w'''' \nvDash \Box p$ sse $\langle w'''', w' \rangle \notin \mathcal{R}$. Como w acessa w' e não acessa qualquer mundo que acesse w', temos que $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p$ e $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Box p$. Mas então $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Box p \rightarrow \Box p$. *Q.e.d.*

O Axioma *G* é satisfeito por qualquer estrutura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for incestuosa, *i.e.*, $\forall w, w', w''.(w\mathcal{R}w' \,\&\, w\mathcal{R}w'') \Rightarrow \exists w'''(w'\mathcal{R}w''' \,\&\, w''\mathcal{R}w''')$

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação incestuosa e considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir a partir da aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ em $\mathcal{F}$. Considere um w tal que $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\Box\varphi$. Assim, deve haver um w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\mathcal{M}, w' \vDash \Box\varphi$. Agora considere qualquer w'' tal que $w\mathcal{R}w''$. Disto segue que há um w''' tal que $w'\mathcal{R}w'''$ e $w''\mathcal{R}w'''$. Neste caso, $\mathcal{M}, w''' \vDash \varphi$. Assim, $\mathcal{M}, w' \vDash \Diamond\varphi$ e $\mathcal{M}, w'' \vDash \Diamond\varphi$. Disto segue $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond\varphi$. Logo, $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. *Q.e.d.*

O Axioma *G* caracteriza a classe de estruturas com relações de acessibilidade incestuosa.

Prova:

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{R}$ não satisfaz a condição em questão. Neste caso, existe w, w', w'' tais que $w\mathcal{R}w'$ e $w\mathcal{R}w''$, mas não existe um w''' tal que $w'\mathcal{R}w'''$ e $w''\mathcal{R}w'''$. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo $w''' \in \mathcal{W}$, $\mathfrak{v}(w''', p) = 1$ sse

$w'\mathcal{R}w'''$. Neste caso, $\mathcal{M}, w' \vDash \Box p$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\Box p$. Mas como $\langle w'', w''' \rangle \notin \mathcal{R}$, temos que $\mathcal{M}, w \nvDash \Diamond p$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \nvDash \Box\Diamond p$. Assim, $\mathcal{M}, w \nvDash \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$. *Q.e.d.*

Terminamos este capítulo tendo introduzido as lógicas modais e os resultados de completude e corretude, os quais nos servirão no próximo capítulo ao introduzirmos a dedução natural rotulada para estas lógicas.

Capítulo 4

Dedução Natural Rotulada para a Lógica Modal

Na literatura sobre teoria da demonstração, *rótulos* são marcações que não fazem parte da linguagem do sistema de lógica estudado, mas são atribuídas às fórmulas e desempenham um papel na formulação das regras de inferência.

Segundo este critério, as linhas verticais da notação ao estilo de Fitch (introduzida no Capítulo 2) consistem em rótulos. Contudo, tradicionalmente são chamados de '*rotulados*' apenas os métodos de prova nos quais todas as fórmulas recebem rótulos. Como em *DNC* toda prova completa tem, ao menos no último passo, uma fórmula sem uma linha vertical à esquerda, *DNC* não é considerado (nesse sentido) um sistema rotulado.

Neste capítulo, introduziremos o método de dedução natural rotulado desenvolvido por GABBAY(1993) para as lógicas modais tratadas no Capítulo 3. Além das linhas verticais da notação de Fitch, os sistemas aqui introduzidos também contam com rótulos que remetem à semântica de Kripke.

4.0.2 Rótulos e fórmulas rotuladas

Utilizaremos w, w', w'', w'''... como rótulos.

Dada uma fórmula φ da assinatura

$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} ::= p|\neg\mathcal{L}_{\mathrm{m}}|(\mathcal{L}_{\mathrm{m}} \wedge \mathcal{L})_{\mathrm{m}}|(\mathcal{L}_{\mathrm{m}} \vee \mathcal{L})_{\mathrm{m}}|(\mathcal{L}_{\mathrm{m}} \rightarrow \mathcal{L})_{\mathrm{m}}|\Box\mathcal{L}_{\mathrm{m}}|\Diamond\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$,

dizemos que $w : \varphi$ é uma *fórmula rotulada*.

E dados os rótulos w e w', chamamos $w\mathcal{R}w'$ de *fórmula relacional*.

Os rótulos fazem referência à semântica de Kripke. Assim, a corretude dos sistemas que introduziremos neste capítulo é uma mera questão de que as regras para os conectivos estejam de acordo com os critérios de satisfatibilidade de fórmulas introduzidos no Capítulo 3 e que as regras para as fórmulas relacionais expressem as propriedades das relações dos modelos em questão.

4.0.3 O conceito de prova em dedução natural rotulada

Ao lidar com rótulos, precisamos fazer adendos ao conceito de prova.

Seja Σ uma derivação que segue apenas as regras de um sistema **S**, que inicia com um conjunto Γ de premissas, todas com o mesmo rótulo, e termina em uma fórmula φ que independe de hipóteses vigentes e tenha o mesmo rótulo que as premissas. Neste caso dizemos que Σ é uma prova em **S** que tem como premissas os elementos de Γ e φ como conclusão. Representamos a existência de tal derivação por $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$.

No caso de $\Gamma = \varnothing$, dizemos que φ é um teorema de **S** e que Σ é uma prova de φ.

4.1 Sistema *DN***K**

A seguir, introduzimos o sistema de dedução natural *DN***K**, no qual são demonstráveis todos os teoremas do sistema de lógica modal **K**.

4.1.1 Regras

Introdução da Conjunção

m	$w : \varphi$	
n	$w : \psi$	
o	$w : \varphi \wedge \psi$	$m, n\ I\wedge$

Eliminação da Conjunção

m	$w : \varphi \wedge \psi$	
n	$w : \varphi$	$m\ E\wedge$

m	$w : \varphi \wedge \psi$	
n	$w : \psi$	$m\ E\wedge$

Introdução da Disjunção

m	$w : \varphi$	
n	$w : \varphi \vee \psi$	$m\ I\vee$

m	$w : \psi$	
n	$w : \varphi \vee \psi$	$m\ I\vee$

Eliminação da Disjunção

l	$w : \varphi \vee \psi$	
m	$\quad\vert\ w : \varphi$	**Hip.**
	$\quad\vert\ \Sigma$	
n	$\quad\vert\ w' : \chi$	
$(n+1)$	$\quad\vert\ w : \psi$	**Hip.**
	$\quad\vert\ \Pi$	
o	$\quad\vert\ w' : \chi$	
$(o+1)$	$w' : \chi$	$l, m—n, n+1—o\ E\vee$

Introdução da Implicação

$$
\begin{array}{lll}
m & \left|\ \underline{w : \varphi}\right. & \text{Hip.} \\
 & \left|\ \quad\Sigma\right. & \\
n & \left|\ w : \psi\right. & \\
(n+1) & w : \varphi \rightarrow \psi & m\text{—}n\ I \rightarrow
\end{array}
$$

Eliminação da Implicação

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \varphi \rightarrow \psi & \\
n & w : \varphi & \\
o & w : \psi & m, n\ E \rightarrow
\end{array}
$$

Introdução da Negação

$$
\begin{array}{lll}
l & \left|\ \underline{w : \varphi}\right. & \text{Hip.} \\
 & \left|\ \quad\Sigma\right. & \\
m & \left|\ w' : \psi\right. & \\
 & \left|\ \quad\Pi\right. & \\
n & \left|\ w' : \neg\psi\right. & \\
o & w : \neg\varphi & l\text{—}m, n\ I\neg
\end{array}
$$

Observação: A ordem de m e n não importa. $o = m + 1$ ou $o = n + 1$.

Eliminação da Dupla Negação

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \neg\neg\varphi & \\
n & w : \varphi & m\ E\neg\neg
\end{array}
$$

Reiteração: Dada uma fórmula φ com um rótulo w em uma linha n, pode-se introduzir $w : \varphi$ em uma linha m (onde $n < m$) contanto que (i) se $w : \varphi$ depende de uma hipótese, ela ainda está vigente, e (ii) a linha m esteja em um nível hipotético superior a n.

Introdução de $\Box$

$$\begin{array}{l|l l}
m & \underline{w\mathcal{R}w'} & \text{Hip.} \\
 & \Sigma & \\
n & w' : \varphi & \\
\multicolumn{2}{l}{(n+1)\ \ w : \Box\varphi} & m\text{—}n\ I\Box
\end{array}$$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Eliminação de $\Box$

$$\begin{array}{lll}
m & w : \Box\varphi & \\
n & w\mathcal{R}w' & \\
o & w' : \varphi & m, n\ E\Box
\end{array}$$

Introdução de $\Diamond$

$$\begin{array}{lll}
m & w' : \varphi & \\
n & w\mathcal{R}w' & \\
o & w : \Diamond\varphi & m, n\ I\Diamond
\end{array}$$

Eliminação de $\Diamond$

$$\begin{array}{lll}
m & w : \Diamond\varphi & \\
n & w\mathcal{R}w' & m, n\ I\Diamond \\
(n+1) & w' : \varphi & m, n\ I\Diamond
\end{array}$$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Em todas as regras diretas para os conectivos clássicos, as conclusões devem ter o mesmo rótulo que as premissas. Além do mais, quando há duas premissas, a inferência só pode ser efetuada se ambas tiverem o mesmo rótulo. Fora este detalhe sobre rótulos, as regras diretas para conectivos clássicos de $DN\mathbf{K}$ são as mesmas que de DNC.

Na regra $I \rightarrow$, o antecedente (hipótese da subprova), o consequente (fórmula no último passo da subprova) e a conclusão devem ter todas o mesmo rótulo.

Quanto a $I\neg$, hipótese e conclusão devem ter o mesmo rótulo. Além do mais, as fórmulas contraditórias entre si obtidas na subprova devem ter o mesmo rótulo. Contudo, estas fórmulas não precisam (ainda que possam) ter o mesmo rótulo que a hipótese.

Já $E\vee$ é mais complicada, por envolver uma premissa e duas subprovas (assim como em DNC). As hipóteses de ambas subprovas devem ter o mesmo rótulo que a premissa. Cada subprova deve terminar com fórmulas idênticas com rótulos idênticos. Esta fórmula com este rótulo será a conclusão da inferência. A conclusão não precisa (mas pode) ter o mesmo rótulo que a premissa.

Voltemos nossa atenção às regras para os operadores modais.

$I\Box$ é uma regra hipotética. Começa com uma fórmula relacional na qual o segundo termo não ocorre em premissa ou subprova aberta. Ao derivar uma fórmula φ com o rótulo à direita na fórmula relacional, encerra-se a subprova e se conclui $\Box\varphi$ com o rótulo à esquerda na fórmula relacional. A intuição por trás desta regra é: se podemos provar que φ é verdadeira em um mundo qualquer acessível por um mundo w, então φ é verdadeira em qualquer mundo que w acesse; o que garante que $\Box\varphi$ é verdadeira em w.

Já $E\Box$ é uma regra direta: dado que $\Box\varphi$ é verdadeira em um mundo w, tem-se que φ é verdadeira em qualquer mundo acessível a w.

A regra $I\Diamond$ também é direta: dado que φ é verdadeira em um mundo w', tem-se que $\Diamond\varphi$ é verdadeira em qualquer mundo que acesse w'.

A regra $E\Diamond$, a despeito de ser direta, é mais complicada, pois envolve duas conclusões e introdução de rótulo novo na derivação: Dado que $\Diamond\varphi$ é verdadeira em um mundo w, tem-se que existe algum mundo acessível a w no qual φ é verdadeira. Como este mundo é obtido por skolemização,[1] utiliza-se um rótulo que seja novo na derivação para representá-lo.

[1]Uma função f é chamada de *função de Skolem* sse, para qualquer fórmula na forma $\forall x \exists y.\varphi(x, y)$ satisfeita por um modelo $\mathcal{M}$, $\forall x.\varphi(x, f(x))$ também é satisfeita.

Skolemização consiste no procedimento de remover o quantificador existencial de uma fórmula e substituir cada ocorrência da variável a ele atrelada por uma constante obtida por uma função de Skolem.

4.1.2 Exemplos de derivação em *DN***K**

A seguir, são dados vários exemplos de provas em *DN***K**. Alguns dos teoremas provados adiante já foram demonstrados no capítulo 3 por meio do método axiomático. Assim, o leitor tem parâmetros para comparar ambos métodos.

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

1	$w : \Box(\varphi \to \psi)$	Hip.
2	$w : \Box\varphi$	Hip.
3	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
4	$w' : \varphi \to \psi$	1, 3 $E\Box$
5	$w' : \varphi$	2, 3 $E\Box$
6	$w' : \psi$	4, 5 $E \to$
7	$w : \Box\psi$	3—6 $I\Box$
8	$w : \Box\varphi \to \Box\psi$	2—7$I \to$
9	$w : \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	1—8$I \to$

Este resultado mostra que o axioma K é um teorema de *DN***K**.

A prova segue a heurística típica da dedução natural. A fórmula a ser demonstrada é uma implicação. Assim, supõe-se o antecedente $\Box(\varphi \to \psi)$ com um rótulo w visando obter o consequente, $(\Box\varphi \to \Box\psi)$, com o mesmo rótulo e aplicar $I \to$. Como $(\Box\varphi \to \Box\psi)$, por sua vez, também é uma implicação, supõe-se o antecedente, $\Box\varphi$, visando obter o consequente, $\Box\psi$; ambos com o rótulo w. A fórmula

$\Box\psi$ é obtida por $I\Box$ e a prova é terminada por aplicação de $I \rightarrow$ duas vezes.

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$

1	$\mid \underline{w : \Diamond\varphi}$	Hip.
2	$\mid\ \mid \underline{w : \Box\neg\varphi}$	Hip.
3	$\mid\ \mid w\mathcal{R}w'$	$1E\Diamond$
4	$\mid\ \mid w' : \varphi$	$1E\Diamond$
5	$\mid\ \mid w' : \neg\varphi$	2, 3 $E\Box$
6	$\mid w : \neg\Box\neg\varphi$	2—4,5 $I\neg$
7	$w : \Diamond\varphi \rightarrow \neg\Box\neg\varphi$	1—6 $I \rightarrow$
8	$\mid \underline{w : \neg\Box\neg\varphi}$	Hip.
9	$\mid\ \mid \underline{w : \neg\Diamond\varphi}$	Hip.
10	$\mid\ \mid\ \mid \underline{w\mathcal{R}w'}$	Hip.
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{w' : \varphi}$	Hip.
12	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid w : \Diamond\varphi$	10, 11 $I\Diamond$
13	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid w : \neg\Diamond\varphi$	9 *Reiteração*
14	$\mid\ \mid\ \mid w' : \neg\varphi$	11—12,13 $I\neg$
15	$\mid\ \mid w : \Box\neg\varphi$	10—14 $I\Box$
16	$\mid\ \mid w : \neg\Box\neg\varphi$	8 *Reiteração*
17	$\mid w : \neg\neg\Diamond\varphi$	10—15,16 $I\neg$
18	$\mid w : \Diamond\varphi$	17 $E\neg\neg$
19	$w : \neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	8—18 $I \rightarrow$
20	$w : \neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$	7, 19 $I\wedge$

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \neg\Diamond\neg\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$

1	$\mid \underline{w : \neg\Diamond\neg\varphi}$	Hip.
2	$\mid\ \mid \underline{w\mathcal{R}w'}$	Hip.
3	$\mid\ \mid\ \mid \underline{w' : \neg\varphi}$	Hip.
4	$\mid\ \mid\ \mid w : \Diamond\neg\varphi$	2, 3 $I\Diamond$
5	$\mid\ \mid\ \mid w : \neg\Diamond\neg\varphi$	1 *Reiteração*
6	$\mid\ \mid w' : \neg\neg\varphi$	3—4,5 $I\neg$
7	$\mid\ \mid w' : \varphi$	6 $E\neg\neg$
8	$\mid w : \Box\varphi$	2—7 $I\Box$
9	$w : \neg\Diamond\neg\varphi \rightarrow \Box\varphi$	1—8 $I \rightarrow$
10	$\mid \underline{w : \Box\varphi}$	Hip.
11	$\mid\ \mid \underline{w : \Diamond\neg\varphi}$	Hip.
12	$\mid\ \mid w\mathcal{R}w'$	11 $E\Diamond$
13	$\mid\ \mid w' : \neg\varphi$	11 $E\Diamond$
14	$\mid\ \mid w' : \varphi$	10, 12 $E\Box$
15	$\mid w : \neg\Diamond\neg\varphi$	11—14,13 $I\neg$
16	$w : \Box\varphi \rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$	10—15 $I \rightarrow$
17	$w : \neg\Diamond\neg\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$	16, 9 $I\wedge$

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \Box(\varphi \land \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \land \Box\psi)$

1	$w : \Box(\varphi \land \psi)$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w' : \varphi \land \psi$	1, 2 $E\Box$
4	$w' : \varphi$	3 $E\land$
5	$w : \Box\varphi$	2—4 $I\Box$
6	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
7	$w' : \varphi \land \psi$	1, 2 $E\Box$
8	$w' : \psi$	3 $E\land$
9	$w : \Box\psi$	2—4 $I\Box$
10	$w : \Box\varphi \land \Box\psi$	5, 9 $I\Box$
11	$w : \Box(\varphi \land \psi) \to (\Box\varphi \land \Box\psi)$	1—10 $I \to$
12	$w : \Box\varphi \land \Box\psi$	Hip.
13	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
14	$w : \Box\varphi$	12 $E\land$
15	$w' : \varphi$	13, 14 $E\Box$
16	$w : \Box\psi$	12 $E\land$
17	$w' : \psi$	13, 16 $E\Box$
18	$w' : \varphi \land \psi$	15, 17 $I\land$
19	$w : \Box(\varphi \land \psi)$	13—18 $I\Box$
20	$w : (\Box\varphi \land \Box\psi) \to \Box(\varphi \land \psi)$	12—19 $I\Box$
21	$w : \Box(\varphi \land \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \land \Box\psi)$	11, 20 $I\land$

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

1	$w : \Diamond(\varphi \vee \psi)$	Hip.
2	$w' : \varphi \vee \psi$	1 $E\Diamond$
3	$w\mathcal{R}w'$	1 $E\Diamond$
4	$w' : \varphi$	Hip.
5	$w : \Diamond\varphi$	4, 3 $I\Diamond$
6	$w : \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	5 $I\vee$
7	$w' : \psi$	Hip.
8	$w : \Diamond\psi$	7, 3 $I\Diamond$
9	$w : \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	8 $I\vee$
10	$w : \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	2, 4—6, 7—9 $E\vee$
11	$w : \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$	1—10 $I \to$

1	$w : \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	Hip.
2	$w : \Diamond\varphi$	Hip.
3	$w\mathcal{R}w'$	2 $E\Diamond$
4	$w' : \varphi$	2 $E\Diamond$
5	$w' : \varphi \vee \psi$	4 $I\vee$
6	$w : \Diamond(\varphi \vee \psi)$	3, 5 $I\Diamond$
7	$w : \Diamond\psi$	Hip.
8	$w\mathcal{R}w'$	7 $E\Diamond$
9	$w' : \psi$	7 $E\Diamond$
10	$w' : \varphi \vee \psi$	9 $I\vee$
11	$w : \Diamond(\varphi \vee \psi)$	8, 10 $I\Diamond$
12	$w : \Diamond(\varphi \vee \psi)$	1, 2—6, 7—11 $E\vee$
13	$w : (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \vee \psi)$	1—12 $I \to$

$\vdash_{DN\mathbf{K}} (\Box\varphi \vee \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$

1	$w : \Box\varphi \vee \Box\psi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w : \Box\varphi$	Hip.
4	$w' : \varphi$	3, 2 $E\Box$
5	$w' : \varphi \vee \psi$	4 $I\vee$
6	$w : \Box\psi$	Hip.
7	$w' : \psi$	6, 2 $E\Box$
8	$w' : \varphi \vee \psi$	7 $I\vee$
9	$w' : \varphi \vee \psi$	1, 3—5, 6—8 $E\vee$
10	$\Box(\varphi \vee \psi)$	2—9 $I\Box$
11	$(\Box\varphi \vee \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$	1—10 $I \rightarrow$

$\vdash_{DN\mathbf{K}} \Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$

1	$w : \Diamond(\varphi \wedge \psi)$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	1 $E\Diamond$
3	$w' : \varphi \wedge \psi$	1 $E\Diamond$
4	$w' : \varphi$	3 $E\wedge$
5	$w' : \psi$	3 $E\wedge$
6	$w : \Diamond\varphi$	4 $I\Diamond$
7	$w : \Diamond\psi$	5 $I\Diamond$
8	$w : \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$	6, 7 $I\wedge$
9	$w : \Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$	1—8 $I \rightarrow$

4.1.3 Corretude

*As regras para o sistema DN***K** *preservam verdade em qualquer modelo de Kripke*.

Para as regras diretas — $I\wedge$, $E\wedge$, $I\vee$, $E \rightarrow$, $E\neg\neg$, $E\Box$, $I\Diamond$ e $E\Diamond$ — o resultado é trivial, uma vez que estas regras expressam os critérios de satisfatibilidade em mundos descritos em 3.2.

Focar-nos-emos, então, nas regras hipotéticas.

$I\rightarrow$: Seja Γ um conjunto (eventualmente vazio) de fórmulas rotuladas, $\{w'' : \chi_1, ..., w''' : \chi_n\}$. Suponha que a partir de $\Gamma \cup \{w : \varphi\}$ foi derivado $w : \psi$. Ou seja, para qualquer modelo $\mathcal{M}$, se $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \chi_1$,..., $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \chi_n$ e $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \varphi$, então $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \psi$. Logo, se $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \chi_1$,..., $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \chi_n$, então $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \varphi \rightarrow \psi$.

$I\neg$: Seja Γ um conjunto (eventualmente vazio) de fórmulas rotuladas, $\{w'' : \chi_1, ..., w''' : \chi_n\}$. Suponha que a partir de $\Gamma \cup \{w : \varphi\}$ foi derivado tanto $w' : \psi$, quanto $w' : \neg\psi$, por meio de regras válidas. Ou seja, para qualquer modelo $\mathcal{M}$, dado $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \chi_1$,..., $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \chi_n$ e $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \varphi$, segue que $\langle\mathcal{M}, w'\rangle \vDash \psi$ e $\langle\mathcal{M}, w'\rangle \vDash \neg\psi$. Logo, $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \nvDash \chi_1$ ou ... ou $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \nvDash \chi_n$ ou $\langle\mathcal{M}, w\rangle \nvDash \varphi$. Consequentemente; se $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \chi_1$,..., $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \chi_n$, então $\langle\mathcal{M}, w\rangle \nvDash \varphi$; ou seja, $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \neg\varphi$.

$E\vee$: Seja Γ um conjunto (eventualmente vazio) de fórmulas rotuladas, $\{w'' : \chi_1, ..., w''' : \chi_n\}$. Suponha que tanto a partir de $\Gamma \cup \{w : \varphi\}$, quanto a partir de $\Gamma \cup \{w : \psi\}$ se derive $w' : \chi$ por meio de regras válidas. Ou seja, para qualquer modelo $\mathcal{M}$, dado $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \chi_1$,..., $\langle\mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \chi_n$ e $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \varphi \vee \psi$, tem-se que $\langle\mathcal{M}, w'\rangle \vDash \chi$.

$I\Box$: Seja w' um rótulo novo em uma derivação, ou seja, w' representa qualquer mundo de qualquer modelo $\mathcal{M}$. Suponha que a partir de $w\mathcal{R}w'$ (e outras eventuais hipótese vigentes ou premissas) se derive $w' : \varphi$ por meio de regras válidas. Neste caso, (sob as eventuais hipóteses vigentes ou premissas) tem-se que $\langle\mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\varphi$.

4.1.4 Completude

*O conjunto de regras para o sistema DN***K** *é completo em relação à classe dos modelos de Kripke.*

Provaremos a completude de *DN***K** indiretamente, mostrando que por meio dele podemos reproduzir todos os resultados do sistema axiomático **K**; o qual, como demonstrado no Capítulo 3, é completo em relação à classe dos modelos de Kripke.

Recapitulemos o sistema axiomático **K**:

LPC: Todas as tautologias e inferências válidas da lógica proposicional clássica.

K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

$Interdefinibilidade \Diamond/\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

RN: $\frac{\vdash\varphi}{\vdash\Box\varphi}$

Já provamos no Capítulo 2 que, com o conjunto de regras clássicas com o qual estamos trabalhando, podemos provar todas tautologias e inferências válidas da lógica clássica. Também já mostramos neste capítulo que os axiomas *K* e Interdefinibilidade $\Diamond/\Box$ são deriváveis no sistema. Só nos resta demonstrar que podemos efetuar, por dedução natural, tudo o que se efetua por meio de *RN* em sistemas axiomáticos.

Seja φ um teorema de *DN***K** demonstrável por meio de uma derivação Π. Para demonstrar $\Box\varphi$, basta reproduzir Π dentro de uma subprova para introdução de $\Box$, tal como ilustrado no esquema abaixo.

$$
\begin{array}{ll|l}
m & & \underline{w\mathcal{R}w'} \quad \text{Hipótese} \\
 & & \Pi \\
n & & w' : \varphi \\
(n+1) & w : \Box\varphi & \quad m\text{—}n \ I\Box
\end{array}
$$

4.1.5 Normalização

Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash_{DN\mathbf{K}} \psi$, tal que em Σ seja inferida em uma linha n uma fórmula φ por meio de $I\wedge$, $I \rightarrow$, $I\vee$, $I\Box$ ou $I\Diamond$; para posteriormente ser aplicada em n a regra de $E\wedge$, $E \rightarrow$, $E\vee$, $E\Box$ ou $E\Diamond$ respectivamente; então existe uma derivação Σ' que prova $\Gamma \vdash_{DN\mathbf{K}} \psi$ no qual isto não ocorre. Isto é, não é necessário obter em uma linha n uma fórmula cujo operador principal é $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Box$ ou $\Diamond$ para então aplicar na linha n a regra de eliminação do operador em questão.

Ou seja, assim como demonstramos no Capítulo 2 a normalização de *DNC*, aqui demonstraremos o resultado análogo para *DN***K**.

Para os operadores clássicos, a prova é idêntica ao capítulo 2, com a adição de rótulos. Abaixo trataremos dos conectivos modais.

$\Box$: Seja Σ uma derivação que prova $\Gamma \vdash_{DN\mathbf{K}} \varphi$ e na qual em uma linha $k+1$ seja obtida por meio da regra $I\Box$ uma fórmula rotulada $w : \Box\alpha$. Suponha que a regra $E\Box$ seja aplicada em $k+1$. Neste caso, deve haver uma linha i na qual ocorre $w\mathcal{R}w'$, tal como ilustrado abaixo:

$$
\begin{array}{lll}
i & w\mathcal{R}w' & \\
 & \Lambda & \\
j & \quad \left| \begin{array}{l} \underline{w\mathcal{R}w''} \\ \quad \Pi \\ w'' : \alpha \end{array} \right. & \text{Hip.} \\
k & & \\
(k+1) & w : \Box\alpha & j\text{—}k\ I\Box \\
 & \Delta & \\
l & w' : \alpha & i, (k+1)\ E\Box \\
 & \Theta & \\
m & w : \varphi &
\end{array}
$$

Mas como contamos com $w\mathcal{R}w'$ na linha i, podemos obter uma derivação Σ' na forma

$$
\begin{array}{lll}
i & w\mathcal{R}w' & \\
 & \Lambda & \\
j & \quad \left| \begin{array}{l} \underline{w\mathcal{R}w''} \\ \quad \Pi \\ w'' : \alpha \end{array} \right. & \text{Hip.} \\
k & & \\
(k+1) & w : \Box\alpha & j\text{—}k\ I\Box \\
 & \Delta & \\
 & \Pi' & \\
l & w' : \alpha & \\
 & \Theta & \\
m & w : \varphi &
\end{array}
$$

Onde Π' é uma sequência obtida a partir de Π na qual qualquer ocorrência do rótulo w'' nesta é substituída pelo rótulo w' em Π', e toda referência à linha j em Π corresponde a uma referência à linha i em Π'.

$\Diamond$: Para o operador $\Diamond$ a normalidade é trivial. Aplicar $E\Diamond$ em uma fórmula obtida por $I\Diamond$ é redundante e simplesmente reproduz o que já havia na derivação, apenas com um rótulo diferente:

i	$w\mathcal{R}w'$	
j	$w' : \varphi$	
k	$w : \Diamond\varphi$	$i, j\ I\Diamond$
l	$w\mathcal{R}w''$	$k\ E\Diamond$
m	$w'' : \varphi$	$k\ E\Diamond$

4.2 Extensões de *DN*K

Assim como podemos extender o sistema axiomático **K** adicionando axiomas, podemos extender *DN***K** adicionando regras. A seguir, são descritas regras que permitem obter sistemas de dedução natural equivalentes aos sistemas axiomáticos tratados no capítulo anterior.

4.2.1 Regra *RD*

$n \quad w\mathcal{R}w' \quad RD$

Contanto que w' seja nova na derivação e $w \neq w'$.

Ou seja, a *RD* permite inserir uma fórmula relacional $w\mathcal{R}w'$ em qualquer momento na derivação, contanto que w' seja um rótulo novo.

Lembremos que o axioma D é satisfeito por modelos cuja relação de acessibilidade é serial, $\forall w \exists w'.w\mathcal{R}w'$; justamente o que é expresso por *RD*, onde w' é obtido por skolemização. Seguem abaixo alguns exemplos de provas que utilizam *RD*.

$\vdash_{DN\mathbf{D}} \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

1	$w : \Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	RD
3	$w' : \varphi$	1, 2 $E\Box$
4	$w : \Diamond\varphi$	2, 3 $I\Diamond$
5	$w : \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	1—4 $I \rightarrow$

$\vdash_{DN\mathbf{D}} \neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$

1	$w : \Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi$	Hip.
2	$w : \Box\varphi$	1 $E\wedge$
3	$w : \Box\neg\varphi$	1 $E\wedge$
4	$w\mathcal{R}w'$	RD
5	$w' : \varphi$	2, 4 $E\Box$
6	$w' : \neg\varphi$	3, 4 $E\Box$
7	$w : \neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$	1—5, 6 $I\neg$

4.2.2 Regra *RT*

$n \quad w\mathcal{R}w \quad RT$

Ou seja, a *RT* permite inserir uma fórmula relacional $w\mathcal{R}w$ em qualquer momento na derivação.

Lembremos que o axioma T é satisfeito por modelos cuja relação de acessibilidade é reflexiva, $\forall w.w\mathcal{R}w$; justamente o que é expresso por RT.

É interessante observar que *RT* permite efetuar qualquer prova que seja efetuada por meio de *RD*.

Segue abaixo alguns exemplos de provas utilizando RT.

$\vdash_{DN\mathbf{T}} \Box\varphi \to \varphi$

1	$w : \Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w$	RT
3	$w : \varphi$	1, 2 $E\Box$
4	$w : \Box\varphi \to \varphi$	1—3 $I \to$

$\vdash_{DN\mathbf{T}} \varphi \to \Diamond\varphi$

1	$w : \varphi$	Hip;
2	$w\mathcal{R}w$	RT
3	$w : \Diamond\varphi$	1, 2 $I\Diamond$
4	$w : \varphi \to \Diamond\varphi$	1—3 $I \to$

$\vdash_{DN\mathbf{T}} \Box\varphi \to \Diamond\varphi$

1	$w : \Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w$	RT
3	$w : \varphi$	1, 2 $E\Box$
4	$w : \Diamond\varphi$	2, 3 $I\Diamond$
5	$w : \Box\varphi \to \Diamond\varphi$	1—4 $I \to$

$\vdash_{DN\mathbf{T}} \Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$

1	$w : \neg\Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w' : \neg\varphi$	Hip.
4	$w' : \varphi$	Hip.
5	$w' : \neg\Box\varphi$	Hip.
6	$w' : \varphi$	4 *Reiteração*
7	$w' : \neg\varphi$	3 *Reiteração*
8	$w' : \neg\neg\Box\varphi$	5 — 6, 7 $I\neg$
9	$w' : \Box\varphi$	8 $E\neg\neg$
10	$w' : \varphi \to \Box\varphi$	4—9 $I \to$
11	$w : \Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	10, 3 $I\Diamond$
12	$w : \neg\Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	1 *Reiteração*
13	$w' : \neg\neg\varphi$	3— 11, 12 $I\neg$
14	$w' : \varphi$	13 $E\neg\neg$
15	$w : \Box\varphi$	2—14 $I\Box$
16	$w : \varphi$	Hip.
17	$w : \Box\varphi$	15 *Reiteração*
18	$w : \varphi \to \Box\varphi$	16—17 $I \to$
19	$w\mathcal{R}w$	*RT*
20	$w : \Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	18, 19 $I\Diamond$
21	$w : \neg\neg\Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	1—1, 20 $I\neg$
22	$w : \Diamond(\varphi \to \Box\varphi)$	21 $E\neg\neg$

4.2.3 Regra *R4*

m	$w\mathcal{R}w'$	
n	$w'\mathcal{R}w''$	
o	$w\mathcal{R}w''$	m, n *R4*

Ou seja, a *R4* permite, a partir de duas fórmulas relacionais $w\mathcal{R}w'$ e $w'\mathcal{R}w''$, inferir uma fórmula relacional $w\mathcal{R}w''$.

Lembremos que o axioma *4* é satisfeito por modelos cuja relação de acessibilidade é transitiva, justamente o que é expresso por *R4*.

Segue abaixo alguns exemplos de provas que utilizam *R4*.

$\vdash_{DNK4} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

1	$w : \Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w'\mathcal{R}w''$	Hip.
4	$w\mathcal{R}w''$	2, 3 *R4*
5	$w'' : \varphi$	1, 4 $E\Box$
6	$w' : \Box\varphi$	3—5 $I\Box$
7	$w : \Box\Box\varphi$	2—6 $I\Box$
8	$w : \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	1—7 $I \to$

$\vdash_{DNK4} \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$

1	$w : \Diamond\Diamond\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	1 $E\Diamond$
3	$w : \Diamond\varphi$	1 $E\Diamond$
4	$w\mathcal{R}w''$	3 $E\Diamond$
5	$w'' : \varphi$	3 $E\Diamond$
6	$w\mathcal{R}w''$	2, 4 *R4*
7	$w : \Diamond\varphi$	5, 6 $I\Diamond$
8	$w : \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	1—7 $I \to$

4.2.4 Regra *RB*

m	$w\mathcal{R}w'$	
n	$w'\mathcal{R}w$	m RB

Ou seja, a *RB* permite, a partir de duas fórmula relacional $w\mathcal{R}w'$, inferir uma fórmula relacional $w'\mathcal{R}w$.

Lembremos que o axioma *B* é satisfeito por modelos cuja relação de acessibilidade é transitiva, justamente o que é expresso por *RB*.

Segue abaixo alguns exemplos de provas que utilizam *RB*.

$\vdash_{DNKB} \varphi \to \Box\Diamond\varphi$

1	$\vert\ w : \varphi$	Hip. p/ $I \to$
2	$\vert\ \vert\ w\mathcal{R}w'$	Hip. p/ $I\Box$
3	$\vert\ \vert\ w'\mathcal{R}w$	2 RB
4	$\vert\ \vert\ w' : \Diamond\varphi$	1, 3 $I\Diamond$
5	$\vert\ w : \Box\Diamond\varphi$	2—4 $I\Box$
6	$w : \varphi \to \Box\Diamond\varphi$	1—5 $I \to$

$\vdash_{DNKB} \Diamond\Box\varphi \to \varphi$

1	$\vert\ w : \Diamond\Box\varphi$	Hip. p/ $I \to$
2	$\vert\ w\mathcal{R}w'$	1 $E\Diamond$
3	$\vert\ w' : \Box\varphi$	1 $E\Diamond$
4	$\vert\ w'\mathcal{R}w$	2 B
5	$\vert\ w : \varphi$	1, 3 $I\Diamond$
6	$w : \Diamond\Box\varphi \to \varphi$	1—5 $I \to$

Observe que dos dois teoremas acima segue $\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

4.2.5 Regra *R5*

m	$w\mathcal{R}w'$	
n	$w\mathcal{R}w''$	
o	$w'\mathcal{R}w''$	m, n *R5*

Ou seja, a *R5* permite, a partir de duas fórmulas relacionais $w\mathcal{R}w'$ e $w\mathcal{R}w''$, inferir uma fórmula relacional $w'\mathcal{R}w''$.

Lembremos que o axioma *5* é satisfeito por modelos cuja relação de acessibilidade é euclideana, justamente o que é expresso por *R5*.

Segue abaixo alguns exemplos de provas que utilizam *R5*.

$\vdash_{DNK5} \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$

1	$w : \Diamond\Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w\mathcal{R}w''$	1 $E\Diamond$
4	$w'' : \Box\varphi$	1 $E\Diamond$
5	$w''\mathcal{R}w'$	3, 2 *R5*
6	$w' : \varphi$	4, 5 $E\Box$
7	$w : \Box\varphi$	2—6 $E\Box$
8	$w : \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	1—7 $I \rightarrow$

$\vdash_{DNK5} \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

1	$\mid\ w : \Diamond\varphi$	Hip.
2	$\mid\ \mid\ w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$\mid\ \mid\ w\mathcal{R}w''$	1 $E\Diamond$
4	$\mid\ \mid\ w'' : \varphi$	1 $E\Diamond$
5	$\mid\ \mid\ w'\mathcal{R}w''$	*R5*
6	$\mid\ \mid\ w' : \Diamond\varphi$	4, 5 $I\Diamond$
7	$\mid\ w : \Box\Diamond\varphi$	2—6 $I\Box$
8	$w : \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	1—7 $I \to$

$\vdash_{DNK5} \Box(\Box\varphi \to \varphi)$

1	$\mid\ w\mathcal{R}w'$	Hip.
2	$\mid\ \mid\ w' : \Box\varphi$	Hip.
3	$\mid\ \mid\ w'\mathcal{R}w'$	1, 1 *R5*
4	$\mid\ \mid\ w' : \varphi$	2, 3 $E\Box$
5	$\mid\ w' : \Box\varphi \to \varphi$	2—4 $I \to$
6	$w : \Box(\Box\varphi \to \varphi)$	1—5 $I\Box$

4.2.6 Regra *RG*

l	$w\mathcal{R}w'$	
m	$w\mathcal{R}w''$	
n	$w'\mathcal{R}w'''$	l, m RG
$(n+1)$	$w''\mathcal{R}w'''$	l, m RG

Sendo que w''' é nova na derivação.

Ou seja, a *RG* permite, a partir de duas fórmulas relacionais $w\mathcal{R}w'$ e $w\mathcal{R}w''$, inferir duas fórmulas relacionais $w'\mathcal{R}w'''$ e $w''\mathcal{R}w'''$, contanto que w''' seja um rótulo novo. Segue abaixo um exemplo de prova que utilizam *RG*.

$\vdash_{DNKG} \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

1	$w : \Diamond\Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w\mathcal{R}w''$	1 $E\Diamond$
4	$w'' : \Box\varphi$	1 $E\Diamond$
5	$w'\mathcal{R}w'''$	2, 3 RG
6	$w''\mathcal{R}w'''$	2, 3 RG
7	$w''' : \varphi$	4, 6 $E\Box$
8	$w' : \Diamond\varphi$	5, 7 $I\Diamond$
9	$w : \Box\Diamond\varphi$	2—8 $I\Box$
10	$w : \Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	1—9 $I \rightarrow$

4.2.7 Regra $R4^{-1}$

m	$w\mathcal{R}w'$	
n	$w\mathcal{R}w''$	m $R4^{-1}$
$(n+1)$	$w''\mathcal{R}w'$	m $R4^{-1}$

Sendo que w'' é nova na derivação.

Ou seja, a *R4*$^{-1}$ permite, a partir de uma fórmula relacional $w\mathcal{R}w'$, inferir duas fórmulas relacionais $w'\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'$, contanto que w'' seja um rótulo novo. .

Segue abaixo um exemplo de prova que utiliza *R4*$^{-1}$.

$\vdash_{DNK4^{-1}} \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$

1	$w : \Box\Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w\mathcal{R}w''$	2 $R4^{-1}$
4	$w''\mathcal{R}w'$	2 $R4^{-1}$
5	$w'' : \Box\varphi$	1, 3 $E\Box$
6	$w' : \varphi$	4, 5 $E\Box$
7	$w : \Box\varphi$	2—6 $I\Box$
8	$w : \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	1—7 $I\Box$

Terminamos este capítulo tendo concluído um dos objetivos desta tese: adaptar o método de dedução natural rotulada de Gabbay para a notação de Fitch. No próximo capítulo, abordaremos mais um objetivo: expandir o método de forma genérica para lógicas multimodais.

Capítulo 5

Lógicas Multimodais e Dedução Natural Rotulada

Neste capítulo tratamos da generalização, para lógicas multimodais, do método de dedução natural rotulada introduzido no capítulo anterior.

Um *parâmetro modal* é uma classe de operadores modais definíveis a partir de um único operador. Os operadores '$\Box$' e '$\Diamond$' têm o mesmo parâmetro modal, afinal de contas, são interdefiníveis:

$$\Box\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Diamond\neg\varphi$$
$$\Diamond\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\varphi$$

Uma lógica com *n* parâmetros modais é chamada de *n–modal*. Todos os sistemas tratados até agora são *monomodais*, ou seja, tratam de apenas um parâmetro modal. Alguns exemplos notáveis de lógicas multimodais (i.e. com mais de um parâmetro modal) são os seguintes.

Lógicas temporais : As lógicas temporais de PRIOR (1957) contam com os seguintes operadores modais;

$P\varphi$, "alguma vez foi o caso que φ",

$H\varphi$, “sempre foi o caso que φ”,

$F\varphi$, “alguma vez será o caso que φ”,

$G\varphi$, “sempre será o caso que φ”.

Os operadores P e H são interdefiníveis, assim como F e G. Contudo, não é possível (ao menos nos sistemas mais estudados de lógicas temporais) definir P e H por meio de F ou G, nem definir F e G por meio de P ou H. Assim, tem-se dois parâmetros modais, o dos operadores que expressam o passado (‘P’ e ‘H’) e dos operadores que espressam o futuro (‘F’ e ‘G’).

Lógicas epistemico-doxásticas : Estas lógicas contam com operadores modais

$K\varphi$, “sabe-se que φ”,

$B\varphi$, “acredita-se que φ”.

Como os conceitos de ‘conhecimento’ e ‘crença’ não são definíveis estritamente em termos um do outro, os operadores em questão são de parâmetros modais distintos.

Lógicas epistêmicas e/ou doxásticas com mais de um agente cognoscente : Para lidar, por meio de lógicas modais, com as interações de conhecimento e/ou crença de múltiplos agentes cognoscentes, utiliza-se um operador epistêmico e/ou operador doxástico para cada agente,

$K_i\varphi$, ‘i sabe que φ’,

$B_i\varphi$, ‘i acredita que φ’.

Uma vez que o conhecimento ou a crença de um agente cognoscente não pode ser definido por meio do conhecimento e crença de outro agente (ao menos na maior parte das situações), cada agente cognoscente corresponde a um (no caso de uma lógica estritamente epistêmica ou estritamente doxática) ou dois (no caso de uma lógica epistêmico-doxástica) parâmetros modais.

Lógicas deônticas que lidam com mais de um sistema moral ou legal : Podemos lidar com os conceitos de obrigatoriedade e permissibilidade em diferentes códigos legais ou morais, tratando cada código como um parâmetro modal.

Lógicas dinâmicas : Nas lógicas dinâmicas, cada parâmetro modal (geralmente representados por letras romanas minúsculas) representa uma ação,
$[\mathbf{a}]\varphi$, "sempre, após a realização da ação **a**, é o caso que φ"
$\langle\mathbf{a}\rangle\varphi$, "eventualmente, após a realização da ação **a**, é o caso que φ".

Assim, uma lógica dinâmica consiste em uma lógica n–modal, onde n é o número de ações (que não podem ser definidas estritamente por meio de outra ação) expressas pela linguagem da lógica em questão.

No método axiomático, podemos obter sistemas multimodais simplesmente fazendo a união dos axiomas de sistemas monomodais de parâmetros distintos. Este procedimento é chamado de *fusão*, e utiliza-se o símbolo '$\oplus$' para representá-lo.[1]

Por exemplo, digamos que queremos um sistema bimodal no qual um dos parâmetros é regido pelos princípios do sistema **T**; enquanto o outro parâmetro é

[1]A fusão de lógicas é um caso específico de *combinação de lógicas*, um campo de estudo extenso. Aqui, apenas descreveremos a fusão de lógicas modais normais. Àqueles interessados em se aprofundar no tema, sugerimos a leitura de CARNIELLI & CONIGLIO(2014) e CARNIELLI & CONIGLIO et al.(2008)

regido pelos princípios do sistema **D**. Primeiro, estipulamos símbolos diferentes para cada parâmetro; por exemplo, '$\Box$' e '$\Diamond$' para o primeiro, '$\blacksquare$' e $\blacklozenge$' para o segundo; e efetuamos a fusão, o que resulta no sistema que denotaremos por $\mathbf{T}_\Box \oplus \mathbf{D}_\blacksquare$:

- Axioma *LC*.
- Axioma $K_\Box$. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- Axioma $K_\blacksquare$. $\blacksquare(\varphi \to \psi) \to (\blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi)$
- Axioma de Interdefinibilidade $\Box/\Diamond$. $\neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$
- Axioma de Interdefinibilidade $\blacksquare/\blacklozenge$. $\neg\blacksquare\neg\varphi \leftrightarrow \blacklozenge\varphi$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
- Regra de Necessitação, $RN_\Box$. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$
- Regra de Necessitação, $RN_\blacksquare$. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \blacksquare\varphi}$
- Axioma $T_\Box$. $\Box\varphi \to \varphi$
- Axioma $D_\blacksquare$. $\blacksquare\varphi \to \blacklozenge\varphi$

O sistema $\mathbf{T}_\Box \oplus \mathbf{D}_\blacksquare$ terá teoremas tanto de $\mathbf{T}_\Box$ quanto de $\mathbf{D}_\blacksquare$, além de outros teoremas que sequer são exprimíveis nas linguagens destes, tal como $\Box\blacksquare(\varphi \to \varphi)$.

Para expressar interações mais sofisticadas entre parâmetros modais, pode-se estender sistemas obtidos por fusão postulando-se axiomas adicionais chamados de *princípios pontes*, os quais consistem em esquemas de fórmulas nos quais ocorrem modalidades de mais de um parâmetro. Alguns exemplos destes princípios são $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$, $\varphi \to \blacksquare\Diamond\varphi$ e $\blacksquare\varphi \to \blacksquare\Box\varphi$.

Na primeira seção deste capítulo, introduziremos a sintaxe e a semântica dos sistemas multimodais, e mostraremos como obter sistemas rotulados de dedução natural equivalentes aos sistemas axiomáticos obtidos por fusão de lógicas. Uma vez que a semântica em questão é uma generalização da semântica de Kripke introduzida no Capítulo 3, todos os resultados deste são generalizáveis para os sistemas multimodais.

Na segunda seção, mostraremos como obter a propriedade relacional dos modelos canônicos de sistemas que tenham como axiomas ou teoremas certos princípios pontes. Trabalharemos apenas com fórmulas que sejam instâncias do esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$, uma generalização multimodal do esquema $G_{(l,m,n,o)}$ introduzido no Capítulo 3.

Na Seção 3, introduziremos regras de dedução natural que permitem estender os sistemas introduzidos na primeira seção.

5.1 Linguagem, semântica e regras de dedução natural das lógicas multimodais

Por conveniência, utilizaremos a notação usual da assinatura das lógicas dinâmicas quando tratarmos de qualquer lógica n–modal para n arbitrário:

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]} ::= p|\neg\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}|(\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}\wedge\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]})|(\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}\vee\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]})|(\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}\rightarrow\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]})|[\mathbf{a}_x]\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}|\langle\mathbf{a}_x\rangle\mathcal{L}_{[\mathbf{a}_x]}.$$

onde $1 \leq x \leq n$, ou seja '$[\mathbf{a}_1]$', '$\langle\mathbf{a}_1\rangle$',..., '$[\mathbf{a}_n]$' e '$\langle\mathbf{a}_n\rangle$' são os operadores modais da linguagem.

Como as lógicas bimodais terão uma atenção maior neste capítulo, ao tratarmos destas utilizaremos '$\Box$', '$\Diamond$', '$\blacksquare$' e '$\blacklozenge$' no lugar de '$[\mathbf{a}_1]$', '$\langle\mathbf{a}_1\rangle$', '$[\mathbf{a}_2]$' e '$\langle\mathbf{a}_2\rangle$', respectivamente.

Por extensão das definições introduzidas no Capítulo 3, um modelo para uma lógica n–modal é uma $(n+2)$–upla $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_n, \mathfrak{v} \rangle$. Já uma estrutura para a mesma é uma $(n+1)$–upla $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_n \rangle$.

Os critérios de satisfatibilidade para uma fórmula multimodal em relação a mundos, modelos e estruturas são os mesmos que os critérios para lógicas monomodais introduzidos no Capítulo 3, bastando generalizar as cláusulas para operadores modais:

- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash [\mathbf{a}_x]\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}_x w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \langle \mathbf{a}_x \rangle\alpha$ sse, para algum $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}_x w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

Dado isto, o primeiro passo para se obter um sistema de dedução natural rotulado para lógicas multimodais é generalizar as regras $I\Box$, $E\Box$, $I\Diamond$ e $E\Diamond$, introduzidas no capítulo anterior, para quaisquer parâmetros:

Introdução de $[\mathbf{a}_x]$

m	$w\mathcal{R}_x w'$	Hip.
	Σ	
n	$w' : \varphi$	
$(n+1)$	$w : [\mathbf{a}_x]\varphi$	m—n $I[\mathbf{a}_x]$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Eliminação de $[\mathbf{a}_x]$

m	$w : [\mathbf{a}_x]\varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	
o	$w' : \varphi$	m, n $E[\mathbf{a}_x]$

Introdução de $\langle \mathbf{a}_x \rangle$

m	$w' : \varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	
o	$w : \langle \mathbf{a}_x \rangle \varphi$	$m, n\ I\langle \mathbf{a}_x \rangle$

Eliminação de $\langle \mathbf{a}_x \rangle$

m	$w : \langle \mathbf{a}_x \rangle \varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	$m, n\ I\langle \mathbf{a}_x \rangle$
$(n+1)$	$w' : \varphi$	$m, n\ I\langle \mathbf{a}_x \rangle$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Com esta generalização das regras de introdução e eliminação dos operadores modais, basta adequar as regras tratadas no Capítulo 4 aos parâmetros modais específicos para obtermos sistemas de dedução natural rotulada equivalentes aos sistemas axiomáticos obtidos por fusão de lógicas modais.

Para fins de ilustração, digamos que visamos obter um sistema de dedução natural rotulada equivalente ao sistema axiomático $\mathbf{T}_\square \oplus \mathbf{D}_\blacksquare$. Neste caso, precisamos adequar as regras *RT* e *RD* (introduzidas no capítulo anterior) restringindo-as aos parâmetros aos quais elas se aplicam. O resultado é:

Regra $RD_\blacksquare$

$n \quad w\mathcal{R}_2 w' \quad RD_\blacksquare$

Contanto que w' seja novo na derivação e $w \neq w'$.

Regra $RT_\square$

$n \quad w\mathcal{R}_1 w \quad RT_\square$

Na seção a seguir, veremos como estender esses sistemas criando "pontes" entre os parâmetros.

5.2 Princípios Ponte entre parâmetros modais

Em sistemas axiomáticos que estendem sistemas obtidos por fusão, a "ponte" entre parâmetros modais distintos é expressa por meio de axiomas nos quais estão relacionadas modalidades desses parâmetros. Estes axiomas são chamados de *princípios ponte*.

Para obter sistemas de dedução natural rotulada equivalentes a estes sistemas axiomáticos, basta elaborar e adotar regras que descrevam a propriedade relacional dos modelos que satisfazem os axiomas em questão.

Nesta seção, veremos como obter a propriedade relacional de axiomas que consistem em instâncias do esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$, o qual será definido em 5.2.3 e se trata de uma generalização multimodal do esquema $G_{(l,m,n,o)}$, introduzido no Capítulo 3.

Inicialmente, a fim de identificar os mais diversos axiomas como instâncias do mesmo esquema, precisamos adotar em nossa metalinguagem certos recursos. Estes nos permitirão tratar a composição de vários parâmetros modais como um único parâmetro, e a ausência de modalidades como uma espécie de parâmetro neutro. Assim, tanto axiomas com um parâmetro quanto axiomas com vários parâmetros podem ser identificados como instâncias de $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$.

5.2.1 Operações entre parâmetros modais

Definição: Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são parâmetros modais, estipulamos que $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ também são parâmetros modais tais que os seguintes esquemas de fórmulas sejam válidos em qualquer modelo de Kripke para lógicas com parâmetros $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$[\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}]\varphi \leftrightarrow ([\mathbf{a}]\varphi \wedge [\mathbf{b}]\varphi)$

$[\mathbf{a} \circ \mathbf{b}]\varphi \leftrightarrow [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi$

$[\mathbf{0}]\varphi$ [2]

$[\mathbf{1}]\varphi \leftrightarrow \varphi$

$\langle \mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} \rangle \varphi \leftrightarrow (\langle \mathbf{a} \rangle \varphi \vee \langle \mathbf{b} \rangle \varphi)$

$\langle \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \rangle \varphi \leftrightarrow \langle \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b} \rangle \varphi$

$\langle \mathbf{1} \rangle \varphi \leftrightarrow \varphi$

$\neg \langle \mathbf{0} \rangle \varphi$

Observação: Enriquecer uma linguagem com '**1**', '**0**', '$\sqcup$' e '$\circ$' não lhe confere maior poder expressivo. Afinal, pela definição, tudo o que for expresso por meio destes símbolos pode ser expresso sem uso deles. Por exemplo, a fórmula $[\mathbf{0}]p \rightarrow ([\mathbf{a} \circ \mathbf{b}]p \rightarrow [\mathbf{1}]p)$ é equivalente a $[\mathbf{a}][\mathbf{b}]p \rightarrow p$.

Justamente por serem inócuos em linguagens de qualquer lógica multimodal, eles serão úteis em expressar alguns fatos sobre estas, como veremos a seguir.

5.2.2 Função ρ

Definição: Para cada sistema (multi)modal **S**, define-se uma função ρ cujo domínio consiste nos parâmetros modais de **S** e a imagem consiste nas relações de acessibilidade do modelo canônico de **S**; de forma que:

$$\rho(\mathbf{a}_x) = \mathcal{R}_x \ .$$

Ou seja, ρ "nos informa" quais relações de acessibilidade correspondem a cada parâmetro modal.

Teorema: Dados os parâmetros modais **a**, **b**, **1** e **0**, para qualquer sistema **S** tem-se que:

[2]**0** consiste em um parâmetro absurdo, no qual todas as proposições são necessárias.

(i) $\rho(\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}) = \rho(\mathbf{a}) \cup \rho(\mathbf{b})$

(ii) $\rho(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \rho(\mathbf{a}) \circ \rho(\mathbf{b})$ [3]

(iii) $\rho(\mathbf{1}) = id$

(iv) $\rho(\mathbf{0}) = \varnothing$

Prova:

(i)

Considere um mundo w de um modelo $\mathcal{M}$ tais que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash [\mathbf{a}]\varphi \wedge [\mathbf{b}]\varphi$. Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash [\mathbf{a}]\varphi$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash [\mathbf{b}]\varphi$. Isto tem as seguintes consequências:
para qualquer w' tal que $\langle w, w' \rangle \in \rho(\mathbf{a})$; $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.
para qualquer w'' tal que $\langle w, w'' \rangle \in \rho(\mathbf{b})$, $\langle \mathcal{M}, w'' \rangle \vDash \varphi$.

Ou seja, para qualquer w''', tanto $\langle w, w''' \rangle \in \rho(\mathbf{a})$ quanto $\langle w, w''' \rangle \in \rho(\mathbf{b})$ são condições suficientes para garantir $\langle \mathcal{M}, w''' \rangle \vDash \varphi$. Portanto, $\langle w, w''' \rangle \in \rho(\mathbf{a}) \cup \rho(\mathbf{b})$ também o é. Logo, $\rho(\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}) = \rho(\mathbf{a}) \cup \rho(\mathbf{b})$.

(ii)

Para uma valoração $\mathfrak{v}$ de um modelo qualquer, $\mathfrak{v}([\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi, w) = 1$ sse, para todo w' tal que $\langle w, w' \rangle \in \rho(\mathbf{a})$, $\mathfrak{v}([\mathbf{b}]\varphi, w') = 1$. Isto, por sua vez, é o caso sse, para todo w'' tal que $\langle w', w'' \rangle \in \rho(\mathbf{b})$, $\mathfrak{v}(\varphi, w'') = 1$.

Ora, tudo isto é abreviável por $\mathfrak{v}([\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi, w) = 1$ sse, para todo w'' tal que $\langle w', w'' \rangle \in \rho(\mathbf{a}) \circ \rho(\mathbf{b})$, $\mathfrak{v}(\varphi, w'') = 1$.

Uma vez que, por definição, $[\mathbf{a} \circ \mathbf{b}]\varphi \leftrightarrow [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi$; tem-se que
$\rho(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \rho(\mathbf{a}) \circ \rho(\mathbf{b})$.

[3] Lembre que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle \mid \exists z, \langle x, z \rangle \in \mathcal{R} \,\&\, \langle z, y \rangle \in \mathcal{S}\}$

(iii)

Por definição, $[\mathbf{1}]\varphi \to \varphi$. Assim, como já foi demonstrado no Capítulo 3, $\rho(\mathbf{1})$ é reflexiva; o que garante $id \subseteq \rho(\mathbf{1})$.

Agora suponha, por absurdo, que $\rho(\mathbf{1}) \nsubseteq id$. Neste caso, deve existir um w e um w' tais que $\langle w, w' \rangle \in \rho(\mathbf{1})$ e $w \neq w'$. Basta-nos mostrar um modelo cuja relação de acessibilidade tenha esta propriedade, mas não satisfaça $\varphi \to [\mathbf{1}]\varphi$. Considere, assim, um modelo $\mathcal{M}$ no qual $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash p$ e $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \neg p$. Neste caso, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash [\mathbf{1}]p$. Consequentemente, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash p \to [\mathbf{1}]p$. Logo, $\rho(\mathbf{1}) \subseteq id$.

(iv)

Suponha, por absurdo, que $\rho(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. Neste caso, existe um w e um w' tais que $\langle w, w' \rangle \in \rho(\mathbf{0})$. Como, por definição, $[\mathbf{0}]\varphi$ é um esquema verdadeiro para qualquer fórmula φ em qualquer mundo de qualquer modelo, tem-se que $\mathfrak{v}([\mathbf{0}]\varphi, w) = 1$. Disto segue que $\mathfrak{v}(\varphi, w') = 1$, para qualquer fórmula φ, o que é absurdo. Logo, $\rho(\mathbf{0}) = \emptyset$.

Q.e.d.

5.2.3 Esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$

Definição: Sejam **l**, **m**, **n** e **o** parâmetros modais, $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$ consiste no esquema

$$\langle \mathbf{l} \rangle [\mathbf{m}]\varphi \to [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o} \rangle \varphi$$

5.2.4 Teorema de satisfatibilidade de $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$

O esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$ é satisfeito por modelos com a seguinte propriedade relacional

$$\rho(\mathbf{l})^{-1} \circ \rho(\mathbf{n}) \subseteq \rho(\mathbf{m}) \circ \rho(\mathbf{o})^{-1}$$

Prova: Considere um modelo $\mathcal{M}$ que tenha a propriedade relacional em questão. Suponha $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \langle \mathbf{l}\rangle[\mathbf{m}]\varphi$. Ou seja, existe um w' tal que $\langle w, w'\rangle \in \rho(\mathbf{l})$ e $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash [\mathbf{m}]\varphi$. Consequentemente, para todo w'' tal que $\langle w', w''\rangle \in \rho(\mathbf{m})$, $\langle \mathcal{M}, w''\rangle \vDash \varphi$. Além do mais, $\langle w', w\rangle \in \rho(\mathbf{l})^{-1}$.

Para qualquer w''' tal que $\langle w, w'''\rangle \in \rho(\mathbf{n})$, [4] tem-se que $\langle w', w'''\rangle \in \rho(\mathbf{l})^{-1} \circ \rho(\mathbf{n})$. Consequentemente, $\langle w', w'''\rangle \in \rho(\mathbf{m})\circ\rho(\mathbf{o})^{-1}$. Disto segue que deve existir um w'''' tal que $\langle w', w''''\rangle \in \rho(\mathbf{m})$ e $\langle w'''', w'''\rangle \in \rho(\mathbf{o})^{-1}$. Ou seja, $\langle w''', w''''\rangle \in \rho(\mathbf{o})$; o que garante $\langle \mathcal{M}, w'''\rangle \vDash \langle \mathbf{o}\rangle\varphi$. Disto segue que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o}\rangle\varphi$.

Logo, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \langle \mathbf{l}\rangle[\mathbf{m}]\varphi \rightarrow [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o}\rangle\varphi$. *Q.e.d.*

5.2.5 Teorema de caracterização de $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$

O esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$ caracteriza a classe de estruturas cujas respectivas relações de acessibilidade satisfazem a seguinte condição:

$$\rho(\mathbf{l})^{-1} \circ \rho(\mathbf{n}) \subseteq \rho(\mathbf{m}) \circ \rho(\mathbf{o})^{-1}$$

Prova: A propriedade em questão pode ser expressa em lógica de primeira–ordem por

$$\forall w, w', w''.(w\rho(\mathbf{l})w' \,\&\, w\rho(\mathbf{n})w'') \Rightarrow \exists w'''(w'\rho(\mathbf{m})w''' \,\&\, w''\rho(\mathbf{o})w'''). \text{ [5]}$$

Isto nos permite provar este teorema de forma similar a como provamos **3.1.1** no Capítulo 3.

Seja $\mathfrak{F}$ uma classe de estruturas tal que $\mathfrak{F} \vDash \langle \mathbf{l}\rangle[\mathbf{m}]\varphi \rightarrow [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o}\rangle\varphi$. Suponha, por absurdo, que haja um membro $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{F}$ que não satisfaz a propriedade relacional em questão. Neste caso, existe w, w', w'' tais que $w\rho(\mathbf{l})w'$ e $w\rho(\mathbf{n})w''$, mas não

[4]No caso de $\rho(\mathbf{l})^{-1} \circ \rho(\mathbf{n}) = \varnothing$; tem-se que, para qualquer w''', $\langle w, w'''\rangle \notin \rho(\mathbf{n})$. Disto segue que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o}\rangle\varphi$. O que garante $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \langle \mathbf{l}\rangle[\mathbf{m}]\varphi \rightarrow [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o}\rangle\varphi$.

[5]Onde $w\rho(\mathbf{x})w'$ abrevia $\langle w, w'\rangle \in \rho(\mathbf{x})$ para quaisquer mundos w e w' e qualquer parâmetro $\mathbf{x}$.

existe um w''' tal que $w'\rho(\mathbf{n})w'''$ e $w''\rho(\mathbf{o})w'''$. Considere um modelo $\mathcal{M}$ obtido a partir de $\mathcal{F}$ pela aplicação de uma valoração $\mathfrak{v}$ tal que, para todo w''', $\mathfrak{v}(w''', p) = 1$ sse $w'\rho(\mathbf{m})w'''$. Neste caso, $\mathcal{M}, w' \vDash [\mathbf{m}]p$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \vDash \langle \mathbf{l} \rangle [\mathbf{m}]p$. Mas como $\langle w'', w''' \rangle \notin \rho(\mathbf{o})$, temos que $\mathcal{M}, w \nvDash \langle \mathbf{o} \rangle p$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \nvDash [\mathbf{m}]\langle \mathbf{o} \rangle p$. Assim, $\mathcal{M}, w \nvDash \langle \mathbf{l} \rangle [\mathbf{m}]p \to [\mathbf{n}]\langle \mathbf{o} \rangle p$. *Q.e.d.*

Com estes teoremas, podemos facilmente determinar quais são as propriedades relacionais dos modelos que satisfazem princípios ponte que sejam instâncias do esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$. Como nos focaremos em casos bimodais, nossos parâmetros serão $\mathbf{b}$ ($\square$ e $\Diamond$) e $\mathbf{p}$ ($\blacksquare$ e $\blacklozenge$), tais que $\rho(\mathbf{b}) = \mathcal{R}$ e $\rho(\mathbf{p}) = \mathcal{S}$.

Exemplo 1: $\square\varphi \to \blacksquare\varphi$

Esta fórmula corresponde à seguinte instância do esquema $G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$:

$$\langle \mathbf{1} \rangle [\mathbf{b}]\varphi \to [\mathbf{p}]\langle \mathbf{1} \rangle \varphi$$

Portanto, a propriedade relacional é

$$\rho(\mathbf{1})^{-1} \circ \rho(\mathbf{p}) \subseteq \rho(\mathbf{b}) \circ \rho(\mathbf{1})^{-1}$$

Ao aplicar as devidas substituições e regras[6] da álgebra relacional, obtém-se:

$$id^{-1} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \circ id^{-1}$$
$$id \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \circ id$$
$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \quad .$$

[6]Nos exemplos dados, as únicas regras utilizadas são:

Idempotência da identidade: $\mathcal{R} \circ id = id \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$

Simetria da identidade: $id^{-1} = id$

Exemplo 2: $\square\varphi \to \blacksquare\square\varphi$

Esta fórmula corresponde à seguinte instância do esquema $G(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})$:

$$\langle\mathbf{1}\rangle[\mathbf{b}]\varphi \to [\mathbf{p} \circ \mathbf{b}]\langle\mathbf{1}\rangle\varphi$$

Portanto, a propriedade relacional é

$$\rho(\mathbf{1})^{-1} \circ \rho(\mathbf{p} \circ \mathbf{b}) \subseteq \rho(\mathbf{b}) \circ \rho(\mathbf{1})^{-1}$$

Ao aplicar as devidas substituições e regras da álgebra relacional, obtém-se:

$$\begin{gathered} id^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ id^{-1} \\ \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \quad . \end{gathered}$$

Ao efetuarmos o mesmo procedimento para os axiomas bimodais mais recorrentes na literatura, obtemos:

Nome	**Form. usual**	$G_{(\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{o})}$	**Form. alt.**	**Propriedade Relacional**
$A_{\square\blacksquare}$	$\square\varphi \to \blacksquare\varphi$	$1, b, p, 1$	$\blacklozenge\varphi \to \Diamond\varphi$	$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$
$T+$	$(\square\varphi \wedge \blacksquare\varphi) \to \varphi$	$1, b \cup p, 1, 1$	$\varphi \to (\Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi)$	$\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é reflexiva.
$T_{\square\blacksquare}$	$\square\blacksquare\varphi \to \varphi$	$1, b \circ p, 1, 1$	$\varphi \to \Diamond\blacklozenge\varphi$	$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é reflexiva.
$B_{\square\blacklozenge}$	$\varphi \to \square\blacklozenge\varphi$	$1, 1, b, p$	$\Diamond\blacksquare\varphi \to \varphi$	$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$
$4_{\square\blacksquare\square}$	$\square\varphi \to \blacksquare\square\varphi$	$1, b, b \circ p, 1$	$\blacklozenge\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$
$4_{\square\square\blacksquare}$	$\square\varphi \to \square\blacksquare\varphi$	$1, b, p \circ b, 1$	$\Diamond\blacklozenge\varphi \to \Diamond\varphi$	$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$
$5_{\blacksquare\Diamond}$	$\Diamond\varphi \to \blacksquare\Diamond\varphi$	$b, 1, p, b$	$\blacklozenge\square\varphi \to \square\varphi$	$\mathcal{R} \subseteq \overline{\mathcal{S} \circ \overline{\mathcal{R}}}$
$C_{\blacksquare\square}$	$\blacksquare\square\varphi \to \square\blacksquare\varphi$	$1, p \circ b, b \circ p, 1$	$\Diamond\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\Diamond\varphi$	$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$
$4^{-1}_{\blacksquare\square\square}$	$\blacksquare\square\varphi \to \square\varphi$	$p \circ b, 1, 1, b$	$\Diamond\varphi \to \blacklozenge\Diamond\varphi$	$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$
$5^{-1}_{\blacksquare\Diamond}$	$\blacksquare\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	$b, 1, p, b$	$\blacklozenge\square\varphi \to \square\varphi$	$\mathcal{R} \subseteq \overline{\mathcal{S} \circ \overline{\mathcal{R}}}$

5.3 Regras de dedução natural rotulada

A seguir, formularemos algumas regras para sistemas bimodais e trimodais. Daremos exemplos de aplicações destas regras realizando derivações em sistemas que só contam com regras para os conectivos clássicos, regras de eliminação e introdução dos operadores modais e a regra ilustrada. Os sistemas em questão serão chamados de '$DNK_{\Box}K_{\blacksquare}$' seguido do nome da regra discutida, nos casos bimodais; e '$DNK_{[\mathbf{a}]}K_{[\mathbf{b}]}K_{[\mathbf{c}]}$' seguido do nome da regra discutida, nos casos trimodais.

Ademais, discutiremos interpretações que podem ser dadas às fórmulas derivadas, o que sugerirá aplicações dos sistemas formados por tais regras.

5.3.1 Acarretamento ($RA_{\Box\blacksquare}$), $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$

m	$w\mathcal{S}w'$	
n	$w\mathcal{R}w'$	$m\ RA_{\Box\blacksquare}$

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}A_{\Box\blacksquare}} \Box\varphi \rightarrow \blacksquare\varphi$

1	$\mid\ w : \Box\varphi$	Hip.
2	$\mid\ \mid\ w\mathcal{S}w'$	Hip.
3	$\mid\ \mid\ w\mathcal{R}w'$	2 $RA_{\Box\blacksquare}$
4	$\mid\ \mid\ w' : \varphi$	1, 3 $E\Box$
5	$\mid\ w : \blacksquare\varphi$	2—4 $I\blacksquare$
6	$w : \Box\varphi \rightarrow \blacksquare\varphi$	1—5 $I\rightarrow$

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}A_{\Box\blacksquare}} \blacklozenge\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

1	$\mid\ w : \blacklozenge\varphi$	Hip.
2	$\mid\ w\mathcal{S}w'$	1 $E\blacklozenge$
3	$\mid\ w' : \varphi$	1 $E\blacklozenge$
4	$\mid\ w\mathcal{R}w'$	2 $RA_{\Box\blacksquare}$
5	$\mid\ w : \Diamond\varphi$	3, 4 $I\Diamond$
6	$w : \blacklozenge\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	1—5 $I\rightarrow$

$\Box\varphi \rightarrow \blacksquare\varphi$ é geralmente adotada como axioma em sistemas nos quais a modalidade '$\blacksquare$' é subalterna à modalidade '$\Box$'. Exemplos:

- Ao interpretarmos '$\Box$' e '$\blacksquare$' como necessidade lógica e necessidade física, respectivamente, a fórmula $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$ expressa que toda necessidade lógica é uma necessidade física. Por contraposição, $\blacklozenge\varphi \to \Diamond\varphi$ expressa que toda possibilidade física é uma possibilidade lógica.

- Ao interpretarmos '$\Box$' e '$\blacksquare$' como obrigatoriedade legal a nível federal e obrigatoriedade legal a nível estadual (para um estado específico da federação), respectivamente, a fórmula $\Box\varphi \to \blacksquare\varphi$ expressa que aquilo que for obrigatório na federação é obrigatório no estado.

- Em geral, lógicas epistêmico–doxásticas contam com o axioma $K\varphi \to B\varphi$; o qual expressa que tudo o que for conhecido também é acreditado.

5.3.2 Inversão ($RB_{\Box\blacklozenge}$), $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$

m	$w\mathcal{R}w'$	
n	$w'\mathcal{S}w$	m $RB_{\Box\blacklozenge}$

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}B_{\Box\blacklozenge}} \Diamond\blacksquare\varphi \to \varphi$

1	$\mid$ $w : \Diamond\blacksquare\varphi$	Hip.
2	$\mid$ $w\mathcal{R}w'$	1 $E\blacklozenge$
3	$\mid$ $w' : \Box\varphi$	1 $E\blacklozenge$
4	$\mid$ $w'\mathcal{S}w$	2 R $RB_{\Box\blacklozenge}$
5	$\mid$ $w : \varphi$	3, 4 $E\Box$
6	$w : \Diamond\blacksquare\varphi \to \varphi$	1—5 $I \to$

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}B_{\Box\blacklozenge}} \varphi \to \Box\blacklozenge\varphi$

1	$\mid$ $w : \varphi$	Hip.
2	$\mid$ $\mid$ $w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$\mid$ $\mid$ $w'\mathcal{S}w$	2 R $RB_{\Box\blacklozenge}$
4	$\mid$ $\mid$ $w' : \blacklozenge\varphi$	1, 3 $I\blacklozenge$
5	$\mid$ $w : \Box\blacklozenge\varphi$	2—4 $I\Box$
6	$w : \varphi \to \Box\blacklozenge\varphi$	1—5 $I \to$

Observe que dos dois teoremas acima segue $\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}B_{\Box\blacklozenge}} \Diamond\blacksquare\varphi \rightarrow \Box\blacklozenge\varphi$.

Em abordagens axiomáticas das lógicas temporais, geralmente são adotados como axiomas os esquemas de fórmula $\varphi \rightarrow GP\varphi$ e $\varphi \rightarrow HF\varphi$. A interpretação de $\varphi \rightarrow GP\varphi$ é 'se [é o caso que] φ, então sempre será o caso que alguma vez foi o caso que φ'. Já $\varphi \rightarrow HF\varphi$ é interpretada como 'se [é o caso que] φ, então sempre foi o caso que alguma vez viria a ser o caso que φ'.

5.3.3 $RT_{\Box+\blacksquare}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é reflexiva

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \underline{w\mathcal{R}w} & \text{Hip.} \\
 & \quad\Sigma & \\
n & w : \varphi & \\
\hline
(n+1) & \underline{w\mathcal{S}w} & \text{Hip.} \\
 & \quad\Pi & \\
o & w : \varphi & \\
\end{array}
$$
$$
(o+1) \quad w : \varphi \qquad m\text{—}n,\ n+1\text{—}o\ RT_{\Box+\blacksquare}
$$

$RT_{\Box+\blacksquare}$ lida com duas subprovas, assim como $E\vee$. Esta semelhança não é mera coincidência, uma vez que $\forall w(\langle w, w\rangle \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \Leftrightarrow (\langle w, w\rangle \in \mathcal{R} \vee \langle w, w\rangle \in \mathcal{S}))$. Ou seja, um mundo w acessa a si próprio por meio de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ sse w acessa a si próprio por meio de $\mathcal{R}$ ou por meio de $\mathcal{S}$. Como estamos falando de uma $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ reflexiva, teremos que qualquer mundo acessa a si próprio por meio $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$.

$\vdash_{DNK_\Box K_\blacksquare T_{\Box+\blacksquare}} (\Box\varphi \wedge \blacksquare\varphi) \rightarrow \varphi$

1	$w : \Box\varphi \wedge \blacksquare\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w$	Hip.
3	$w : \Box\varphi$	1 $E\wedge$
4	$w : \varphi$	3, 2 $E\Box$
5	$w\mathcal{S}w$	Hip.
6	$w : \blacksquare\varphi$	1 $E\wedge$
7	$w : \varphi$	6, 5 $E\blacksquare$
8	$w : \varphi$	2—4, 5—7 $RT_{\Box+\blacksquare}$
9	$w : (\Box\varphi \wedge \blacksquare\varphi) \rightarrow \varphi$	1—8 $I\rightarrow$

$\vdash_{DNK_\Box K_\blacksquare T_{\Box+\blacksquare}} \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi)$

1	$w : \varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w$	Hip.
3	$w : \Diamond\varphi$	1, 2 $I\Diamond$
4	$w : \Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi$	3 $I\vee$
5	$w\mathcal{S}w$	Hip.
6	$w : \blacklozenge\varphi$	1, 5 $I\blacklozenge$
7	$w : \Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi$	6 $I\vee$
8	$w : \Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi$	2—4, 5—7 $RT_{\Box+\blacksquare}$
9	$w : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \blacklozenge\varphi)$	1—8 $I\rightarrow$

5.3.4 $RT_{\Box\blacksquare}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é reflexiva

n	$w\mathcal{R}w'$	$RT_{\Box\blacksquare}$
$(n+1)$	$w'\mathcal{S}w$	$RT_{\Box\blacksquare}$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Diferentemente de outras regras introduzidas neste capítulo, $RT_{\Box\blacksquare}$ permite introduzir fórmulas relacionais novas em qualquer passo da derivação independentemente de quaisquer outras já presentes.

$\vdash_{DNK_\square K_\blacksquare T_{\square\blacksquare}} \square\blacksquare\varphi \to \varphi$

1	$w : \square\blacksquare\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	$RT_{\square\blacksquare}$
3	$w'\mathcal{S}w$	$RT_{\square\blacksquare}$
4	$w' : \blacksquare\varphi$	1, 2 $E\square$
5	$w : \varphi$	4, 3 $E\blacksquare$
6	$w : \square\blacksquare\varphi \to \varphi$	1—5 $I \to$

$\vdash_{DNK_\square K_\blacksquare T_{\square\blacksquare}} \varphi \to \Diamond\blacklozenge\varphi$

1	$w : \varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	$RT_{\square\blacksquare}$
3	$w'\mathcal{S}w$	$RT_{\square\blacksquare}$
4	$w' : \blacklozenge\varphi$	3, 1 $I\blacklozenge$
5	$w : \Diamond\blacklozenge\varphi$	2, 4 $I\Diamond$
6	$w : \varphi \to \Diamond\blacklozenge\varphi$	1—5 $I \to$

Em lógicas dinâmicas, $[\mathbf{a_1}][\mathbf{a_2}]\varphi \to \varphi$ significa que, se a execução das ações $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ (nesta ordem) sempre resulta em φ, então φ já é o caso. Assim, esta fórmula serve para indicar que a ação $\mathbf{a_2}$ reverte qualquer efeito de $\mathbf{a_1}$.

5.3.5 Comutatividade ($RC_{\blacksquare\square}$), $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

l	$w\mathcal{R}w'$	
m	$w'\mathcal{S}w''$	
n	$w\mathcal{S}w'''$	l, m $RC_{\blacksquare\square}$
$(n+1)$	$w'''\mathcal{R}w''$	l, m $RC_{\blacksquare\square}$

Contanto que w''' seja novo na derivação.

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}C_{\blacksquare\Box}} \blacksquare\Box\varphi \to \Box\blacksquare\varphi$

1	$w : \blacksquare\Box\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	Hip.
3	$w'\mathcal{S}w''$	Hip.
4	$w\mathcal{S}w'''$	2, 3 $RC_{\blacksquare\Box}$
5	$w'''\mathcal{R}w''$	2, 3 $RC_{\blacksquare\Box}$
6	$w''' : \Box\varphi$	1, 4 $E\blacksquare$
7	$w'' : \varphi$	6, 5 $E\Box$
8	$w' : \blacksquare\varphi$	3—7 $I\blacksquare$
9	$w : \Box\blacksquare\varphi$	2—8 $I\Box$
10	$w : \blacksquare\Box\varphi \to \Box\blacksquare\varphi$	1—9 $I \to$

$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}C_{\blacksquare\Box}} \Diamond\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\Diamond\varphi$

1	$w : \Diamond\blacklozenge\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{R}w'$	1 $E\Diamond$
3	$w' : \blacklozenge\varphi$	1 $E\Diamond$
4	$w'\mathcal{S}w''$	3 $E\blacklozenge$
5	$w'' : \varphi$	3 $E\blacklozenge$
6	$w\mathcal{S}w'''$	2, 4 $RC_{\blacksquare\Box}$
7	$w'''\mathcal{R}w''$	2, 4 $RC_{\blacksquare\Box}$
8	$w''' : \Diamond\varphi$	7, 5 $I\Diamond$
9	$w : \blacklozenge\Diamond\varphi$	6, 8 $I\blacklozenge$
10	$w : \Diamond\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge\Diamond\varphi$	1—9 $I \to$

Este caso de comutatividade dos operadores modais de parâmetros distintos é interessante em diversas aplicações de lógicas multimodais:

- Em lógicas dinâmicas, a fórmula $[\mathbf{a_1}][\mathbf{a_2}]\varphi \to [\mathbf{a_2}][\mathbf{a_1}]\varphi$ expressa que, se a execução das ações $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$, nesta ordem, sempre resulta em φ, então o mesmo resultado sempre será obtido se a ordem de execução for invertida.

- Em lógicas deôntico-temporais, a fórmula $OG\varphi \to GO\varphi$ expressa a imutabilidade de um sistema de regras. Se é obrigatório que φ sempre será o caso, então sempre será obrigatório φ.

- Em lógicas epistêmico-temporais, a fórmula $KG\varphi \to GK\varphi$ expressa a memória perfeita. Se é sabido que φ sempre será o caso, então sempre se saberá que φ.

5.3.6 $R4_{\Box\blacksquare\Box}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$

l	$w\mathcal{S}w'$	
m	$w'\mathcal{R}w''$	
n	$w\mathcal{R}w''$	l, m $R4_{\Box\blacksquare\Box}$

$\vdash_{DNK_\Box K_\blacksquare 4_{\Box\blacksquare\Box}} \Box\varphi \to \blacksquare\Box\varphi$

1	$w : \Box\varphi$	Hip
2	$w\mathcal{S}w'$	Hip.
3	$w'\mathcal{R}w''$	Hip.
4	$w\mathcal{R}w''$	2, 3 $R4_{\Box\blacksquare\Box}$
5	$w'' : \varphi$	1, 4 $E\Box$
6	$w' : \Box\varphi$	3—5 $I\Box$
7	$w : \blacksquare\Box\varphi$	2—6 $I\blacksquare$
8	$w : \Box\varphi \to \blacksquare\Box\varphi$	1—7 $I \to$

$\vdash_{DNK_\Box K_\blacksquare 4_{\Box\blacksquare\Box}} \blacklozenge\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$

1	$w : \blacklozenge\Diamond\varphi$	Hip.
2	$w\mathcal{S}w'$	1 $E\blacklozenge$
3	$w' : \Diamond\varphi$	1 $E\blacklozenge$
4	$w'\mathcal{R}w''$	3 $E\Diamond$
5	$w'' : \varphi$	3 $E\Diamond$
6	$w\mathcal{R}w''$	2, 4 $R4_{\Box\blacksquare\Box}$
7	$w : \Diamond\varphi$	6, 5 $I\Diamond$
8	$w : \blacklozenge\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$	1—7 $I \to$

Em lógicas epistêmico-doxásticas, as fórmulas $K_i\varphi \to B_iK_i\varphi$ e $B_i\varphi \to K_iB_i\varphi$ expressam a capacidade de instrospecção positiva de um agente cognoscente i. Ou seja, o agente i reconhece as próprias crenças e o próprio conhecimento.

5.3.7 Regras trimodais

Nos casos trimodais, forcar-nos-emos em desenvolver regras que permitem derivar $[\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi \rightarrow [\mathbf{c}]\varphi$, $[\mathbf{c}]\varphi \rightarrow [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi$ e $([\mathbf{a}]\varphi \wedge [\mathbf{b}]\varphi) \rightarrow [\mathbf{c}]\varphi$. O interesse específico nestes esquemas de fórmula se deve ao fato destas expressarem a definição de um conceito relativo a um parâmetro modal por meio de outros dois conceitos relativos a outros dois parâmetros modais. Por exemplo, podemos expressar que uma ação **c** é definida pelas ações **a** e **b** executadas em sequência e nesta ordem por $[\mathbf{c}]\varphi \leftrightarrow [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi$. Ou ainda, podemos expressar que conhecimento é crença justificada por $K\varphi \leftrightarrow (B\varphi \wedge J\varphi)$.[7]

Aqui utilizaremos as relações de acessibilidade $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e C; as quais correspondem aos parâmetros **a**, **b** e **c**, respectivamente.

$R4^{-1}_{\mathbf{abc}}$, $C \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

l	wCw'	
m	$w\mathcal{A}w''$	l $R4^{-1}_{\mathbf{abc}}$
n	$w''\mathcal{B}w'$	l $R4^{-1}_{\mathbf{abc}}$

Contanto que w'' seja nova na derivação.

$R4_{\mathbf{cab}}$, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \subseteq C$

l	$w\mathcal{A}w'$	
m	$w'\mathcal{B}w''$	
n	wCw''	l, m $R4_{\mathbf{cab}}$

[7] A rigor, não precisamos de uma regra específica para derivar $[\mathbf{c}]\varphi \rightarrow ([\mathbf{a}]\varphi \wedge [\mathbf{b}]\varphi)$, pois isto pode ser feito adotando duas variações da Regra de Acarretamento.

$$RA_{\mathbf{a+bc}}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

$$\begin{array}{lll}
l & w\mathcal{C}w' & \\
m & \quad \underline{w\mathcal{A}w'} & \text{Hip.} \\
 & \quad \Sigma & \\
n & \quad w'' : \varphi & \\
(n+1) & \quad \underline{w\mathcal{B}w'} & \text{Hip.} \\
 & \quad \Pi & \\
o & \quad w'' : \varphi & \\
(o+1) & w'' : \varphi & l, m\text{—}n, n+1\text{—}o\ RA_{\mathbf{a+bc}}
\end{array}$$

A seguir, exemplos de derivações envolvendo as três regras apresentadas.

$$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}4^{-1}_{\mathbf{abc}}} [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi \to [\mathbf{c}]\varphi$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \quad \underline{w : [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi} & \text{Hip.} \\
2 & \quad\quad \underline{w\mathcal{C}w'} & \text{Hip.} \\
3 & \quad\quad w\mathcal{A}w'' & 2\ R4^{-1}_{\mathbf{abc}} \\
4 & \quad\quad w''\mathcal{B}w' & 2\ R4^{-1}_{\mathbf{abc}} \\
5 & \quad\quad w'' : [\mathbf{b}]\varphi & 1, 3\ E[\mathbf{a}] \\
6 & \quad\quad w' : \varphi & 5, 4\ E[\mathbf{b}] \\
7 & \quad w : [\mathbf{c}]\varphi & 2\text{—}6\ I[\mathbf{c}] \\
8 & w : [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi \to [\mathbf{c}]\varphi & 1\text{—}7\ I\to
\end{array}$$

$$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}4_{\mathbf{cab}}} [\mathbf{c}]\varphi \to [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \quad \underline{w : [\mathbf{c}]\varphi} & \text{Hip.} \\
2 & \quad\quad \underline{w\mathcal{A}w'} & \text{Hip.} \\
3 & \quad\quad\quad \underline{w'\mathcal{B}w''} & \text{Hip.} \\
4 & \quad\quad\quad w\mathcal{C}w'' & 2, 3\ R4_{\mathbf{cab}} \\
5 & \quad\quad\quad w'' : \varphi & 1, 4\ E[\mathbf{c}] \\
6 & \quad\quad w' : [\mathbf{b}]\varphi & 3\text{—}5\ I[\mathbf{b}] \\
7 & \quad w : [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi & 2\text{—}6\ I[\mathbf{a}] \\
8 & w : [\mathbf{c}]\varphi \to [\mathbf{a}][\mathbf{b}]\varphi & 1\text{—}7\ I\to
\end{array}$$

$$\vdash_{DNK_{\Box}K_{\blacksquare}A_{\mathbf{a+bc}}} ([\mathbf{a}]\varphi \wedge \mathbf{b}]\varphi) \to [\mathbf{c}]\varphi$$

1	$w : [\mathbf{a}]\varphi \wedge \mathbf{b}]\varphi$	Hip.
2	wCw'	Hip.
3	$w\mathcal{A}w'$	Hip.
4	$w : [\mathbf{a}]\varphi$	1 $E\wedge$
5	$w' : \varphi$	4, 3 $E[\mathbf{a}]$
6	$w\mathcal{B}w'$	Hip.
7	$w : [\mathbf{b}]\varphi$	1 $E\wedge$
8	$w' : \varphi$	7, 6 $E[\mathbf{b}]$
9	$w' : \varphi$	2, 3—5, 6—8 $RA_{\mathbf{a+bc}}$
10	$w : [\mathbf{c}]\varphi$	2—9 $I[\mathbf{c}$
11	$w : ([\mathbf{a}]\varphi \wedge \mathbf{b}]\varphi) \to [\mathbf{c}]\varphi$	1—10 $I \to$

Terminamos este capítulo alcançando mais um objetivo desta tese: tratar de forma genérica e abrangente a dedução natural rotulada para lógicas multimodais. No próximo capítulo, tentaremos dar um passo além e abordar as lógicas modais de primeira ordem.

Capítulo 6

Lógica Modal de Primeira Ordem

Neste capítulo discutiremos as lógicas modais de primeira ordem, um tópico repleto de dificuldades técnicas e filosóficas.

Começaremos na Seção 6.1 introduzindo a notação com a qual trabalharemos. Na Seção 6.2 discutiremos algumas questões metafísicas concernentes a estas lógicas. Na Seção 6.3 apresentamos um método de dedução natural rotulada para algumas destas lógicas.

6.1 Notação

Neste capítulo lidaremos com duas assinaturas, uma básica (a qual chamaremos de $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$) e outra que estende a primeira com símbolos funcionais e de identidade (a qual chamaremos de $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}f}$).

O sistema que desenvolvemos conta apenas com a assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$, enquanto que a assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}f}$ será utilizada apenas para a discussão filosófica.

O vocabulário da assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$ conta com:

- as letras minúsculas, italizadas, com ou sem subíndices numéricos, 'a', 'b', 'c' e 'd', como *constantes individuais* (a, a_0, a_1,..., b, b_0, b_1...)

- as letras minúsculas, italizadas, com ou sem subíndices numéricos, 'x', 'y' e 'z', como *variáveis individuais* (x, x_0, x_1,..., y, y_0, y_1...)
- as letras maiúsculas, italizadas com ou sem subíndices numéricos, 'P', 'Q', 'R' e 'S', como símbolos de *predicado* (P, P_0, P_1,..., Q, Q_0, Q_1...)
- os operadores lógicos clássicos, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$
- os operadores modais, $\Box$ e $\Diamond$
- os quantificadores, $\forall$ e $\exists$
- os símbolos auxiliares, '(' e ')'.

Eventualmente, recorreremos a abusos de notação e utilizaremos sequências de letras romanas minúsculas como constantes individuais, e sequências de letras romanas maiúsculas como símbolos de predicado.

Na metalinguagem, utilizaremos '$\mathbf{c}$', '$\mathbf{c}'$', '$\mathbf{c}''$'... para representar quaisquer constantes individuas; assim como utilizaremos '$\mathbf{v}$', '$\mathbf{v}'$', '$\mathbf{v}''$'... para representar quaisquer variáveis individuais. Contantes e variáveis individuais serão chamadas de *termos individuais*, os quais serão representados na metalinguagem por '$\mathbf{t}$', '$\mathbf{t}'$', '$\mathbf{t}''$' etc.

Ainda quanto à metalinguagem, utilizaremos letras gregas minúsculas — 'φ', 'ψ', 'χ' etc. — para representar fórmulas quaisquer. Utilizaremos a notação '$\varphi(\mathbf{t})$' para indicar que um termo $\mathbf{t}$ ocorre em uma fórmula φ. Quando utilizarmos '$\varphi(\mathbf{t})$' e '$\varphi(\mathbf{t}')$' no mesmo contexto, significará que as fórmulas em questão são semelhantes e diferem entre si apenas pelos termos individuais.

As *fórmulas atômicas* de $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$ são definidas da seguinte maneira: se P é um predicado n-ário e $\mathbf{c}$ ... $\mathbf{c}'$ são n constantes individuais, então $P(\mathbf{c}, ..., \mathbf{c}')$ é uma fórmula atômica.

Observe que todos os predicados zero-ários são, automaticamente, fórmulas atômicas.

Finalmente, a definição recursiva de *fórmulas bem-formadas* da assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$ é a seguinte:

- Todas as fórmulas atômicas pertencem à assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$
- Se $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$, então $\neg\varphi, \Box\varphi, \Diamond\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$.
- Se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$, então $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$
- Se $\varphi(\mathbf{c}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$ e a varivél $\mathbf{v}$ não ocorre em $\varphi(\mathbf{c})$, então $\forall\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}), \exists\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$; onde $\varphi(\mathbf{v})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{c})$ substituindo zero ou mais ocorrências de $\mathbf{c}$ por $\mathbf{v}$
- Nada mais pertence à assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$

A assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}f}$ estende $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$ pela adição do predicado binário '=' e de símbolos funcionais. Para estes, reservamos as letras '*f*', '*g*' e '*h*' minúsculas, italizadas, com ou sem subíndices numéricos.

Chamaremos de *parâmetros individuais* as constantes ou funções n-árias aplicadas a n parâmetros individuais; os quais serão representados na metalinguagem por '$\mathbf{i}$', '$\mathbf{i}'$', '$\mathbf{i}''$' etc. Parâmetros individuais também serão considerados termos individuais.

A definição de fórmula bem-formada na assinatura $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}f}$ é a mesma que a definição em $\mathcal{L}_{\mathbf{mq}}$, bastando ajustar a definição de fórmula atômica:

- Se P é um predicado n-ário e $\mathbf{i}$ ... $\mathbf{i}'$ são n parâmetros individuais, então $\varphi(\mathbf{i}, ..., \mathbf{i}')$ é uma fórmula atômica.

Ademais, quando o predicado em questão for '=', escreveremos '$(\mathbf{t} = \mathbf{t}')$'. Eventualmente, omitiremos os parênteses, quando isto não comprometer a leitura da fórmula.

6.2 Questões metafísicas

Desde a antiguidade, filósofos se indagam sobre as relações entre propriedades e identidade de indivíduos ou objetos.

Heráclito (c. 535 AEC — c. 475 AEC) afirmou que um homem não pode entrar duas vezes no mesmo rio, pois nem o rio e nem o homem são mais os mesmos; sugerindo que a identidade se altera assim que as propriedades se alteram.

Aristóteles (384 AEC — 322 AEC) dedicou boa parte da sua obra distinguindo entre predicados essenciais – i.e. predicados que determinam a identidade de um objeto, tais como '*humano*' e '*animal*' – e predicados contingentes, tais como '*senta-se*' e '*corre*'.

Plutarco (46 EC — 120 EC) ilustrou o problema com o Navio de Teseu, um navio no qual o lendário herói Teseu teria navegado e os atenienses vinham preservando desde então. Com o tempo, as tábuas apodreciam e eram trocadas, assim como a vela e, eventualmente, o mastro. Quando fossem trocadas todas peças do barco, ainda seria o mesmo navio que Teseu navegou? Ainda seria o mesmo navio se mais da metade das peças fossem trocadas? O navio ainda era o mesmo depois de uma mera tábua ter sido trocada? Digamos que as peças antigas fossem guardadas e alguém construísse um navio com estas; qual seria o navio de Teseu, o reformado ou o reconstruído com as peças antigas?

Estes questionamentos impactam na lógica modal de primeira ordem, uma vez que esta permite que um mesmo indivíduo tenha diferentes propriedades em diferentes mundos possíveis. Por exemplo, podemos elaborar um modelo no qual em um mundo possível, tal como no mundo atual, Tancredo Neves morreu em 1985 antes de assumir a presidência; em outro mundo possível, ele assume a presidência e faz um bom governo; em mais outro mundo, ele assume a presidência e faz um péssimo governo; e ainda, podemos elaborar um mundo possível onde ele sequer vence as eleições de 1985. Contudo, como podemos considerar indivíduos tão diferentes e alegar que sejam todos a mesma pessoa? Existe algum critério para atribuirmos propriedades diferentes a um mesmo indivíduo, ou seria legítimo elaborarmos um modelo no qual há um mundo onde Tancredo Neves é uma capivara no zoológico de Uberlândia?[1]

Este problema, conhecido como *problema da identidade transmundana*, acompanha a lógica modal desde seus primórdios. Para David Lewis, indivíduos existem em um único mundo, ainda que estes tenham contrapartes em outros mundos.[2] Assim, segundo Lewis, a proposição 'Tancredo Neves poderia ter sobrevivido e assumido a presidência' significa que, em algum mundo possível, há uma contraparte de Tancredo Neves a qual sobreviveu e assumiu a presidência.

S. Kripke rejeita a teoria de Lewis;[3] pois, dada uma proposição versando sobre uma pessoa, Lewis a interpreta como versando sobre outra pessoa. Ora, uma proposição como 'eu poderia ter tomado tais e tais decisões, o que afetaria minha vida de tal e tal forma' tem uma carga psicológica forte justamente por estar falando de *mim*, *minhas* decisões e *minha* vida. Eu não daria a menor importância, se esta proposição tratasse de outra pessoa em outro mundo, por mais que esta pessoa fosse semelhante a mim.

Abaixo, discutiremos outras questões filosóficas, as quais consistem em um desdobramento do problema da identidade transmundana, e avaliaremos qual o impacto delas na nossa escolha de formalismo.

6.2.1 Domínios variáveis versus domínios constantes

Avaliemos adiante como nossas intuições acerca da relação entre *existência* e *modalidades* impacta o formalismo. Considere o exemplo a seguir.

[1]Ainda que, formalmente, tal modelo possa ser elaborado, a questão é se um modelo do tipo teria qualquer relevância filosófica e quais seriam os critérios de relevância.

[2]LEWIS, 1986

[3]KRIPKE, 1980

A proposição 'ninguém é filho biológico de Joseph Ratzinger' é (até onde sabemos) verdadeira. Afinal, Ratzinger foi Sumo Pontífice (os quais fazem voto de castidade) e não concebeu um filho antes de declarar seus votos. Contudo, Ratzinger poderia não ter escolhido a vida sacerdotal (ou ter quebrado seu voto) e eventualmente ter se tornado pai. Ou seja, a proposição 'poderia existir alguém que fosse filho de Joseph Ratzinger', $\Diamond\exists x\, FILHO(x, ratzinger)$, é (ao menos segundo esta intuição) verdadeira. Em contrapartida, se assumirmos como propriedade essencial de uma pessoa o seu material genético (e, consequentemente, sua ascendência), uma vez que o filho de Joseph Ratzinger nunca foi concebido, não há sequer uma pessoa na face da Terra que pudesse ser seu filho. Ou seja, a proposição 'existe alguém que poderia ser filho de Joseph Ratzinger', $\exists x \Diamond FILHO(x, ratzinger)$, é (segundo esta assunção) falsa.

Modelos de domínios variáveis captam a intuição descrita acima, uma vez que nesses modelos uma constante individual pode ter referentes em um mundo e não em outro. Desta forma, a fórmula $\Diamond\exists x\, FILHO(x, ratzinger) \wedge \neg\exists x \Diamond FILHO(x, ratzinger)$ pode ser satisfeita em um mundo w. Basta que w acesse um w' que satisfaça $FILHO(c, ratzinger)$ (para uma constante c qualquer), mas que a constante 'c' não tenha referente em w. Assim, $\exists x\, FILHO(x, ratzinger)$ é satisfeita em w' e, consequentemente, $\Diamond\exists x\, FILHO(x, ratzinger)$ é satisfeita em w; enquanto $\Diamond FILHO(c, ratzinger)$ não é satisfeita em w e, consequentemente, $\exists x \Diamond FILHO(x, ratzinger)$ também não é satisfeita.

Infelizmente, modelos de domínio variável cobram um preço alto por captar nossas intuições. Em um mundo onde a fórmula $\Diamond FILHO(c, ratzinger)$ não é satisfeita por 'c' não ter referente, também não são satisfeitas fórmulas como $\forall x P(x) \rightarrow P(c)$. Consequentemente, demonstrações em sistemas de lógica embasados nestes modelos não contam com a utilização de variáveis livres ou constantes arbitrárias. Isto impõe certas dificuldades no desenvolvimento de sistemas de dedução natural para lógicas embasadas em tais modelos.

A alternativa aos modelos de domínio variável são os modelos de domínio constante, ou seja, modelos nos quais todas as constantes da linguagem têm referentes em todos os mundos possíveis. Para algumas aplicações, tais modelos são aceitáveis ou até mesmo desejáveis. Por exemplo, considere um modelo no qual cada mundo possível descreve uma configuração legal de um tabuleiro de xadrez e a relação de acessíbilidade representa os movimentos legais que alteram a configuração do tabuleiro a cada turno. Em tal aplicação, é perfeitamente aceitável que possamos nos referir às peças que se encontram fora do tabuleiro. Ou seja, modelos de domínio constante parecem ser mais apropriados para lidar com problemas do tipo 'de quais formas posso dispor dos recursos que tenho em mãos' sem se preocupar com o que poderia existir ou deixar de existir.

Outra aplicação de modelos de domínio constante é na filosofia possibilista, uma corrente de pensamento que distingue entre a quantificação existencial e a propriedade de atualmente existir. Segundo o possibilismo, os possíveis filhos de Joseph Ratzinger existem em todos os mundos, ainda que, em certos mundos, careçam da propriedade de atualmente existir.

6.2.2 Distinção *de re* e *de dicto*

Com o potencial expressivo de uma linguagem de primeira–ordem, podemos distinguir quando um operador modal qualifica ao que as constantes individuais se referem (*de re*), ou qualifica o que se diz sobre elas (*de dicto*).

Por exemplo, considere a proposição 'necessariamente, todo solteiro não é casado', a qual podemos formalizar em uma linguagem modal de primeira–ordem por $\Box\forall x(SOLTEIRO(x) \rightarrow \neg CASADO(x))$. A posição do advérbio 'necessariamente' na sentença sugere que este caracterize a toda (sub)proposição 'todo solteiro não é casado'. A subproposição é atualmente verdadeira devido a uma mera questão linguística: os adjetivos ‘solteiro’ e ‘casado’ são antônimos. Ainda que todos os solteiros se casassem e todas pessoas casadas se divorciassem, a proposição ainda seria verdadeira. Portanto, ‘necessariamente, todo solteiro não é casado’ também é verdadeira e o advérbio ‘necessariamente’ desempenha uma função *de dicto*.

Agora, considere a proposição ‘todo solteiro necessariamente não é casado’, formalizável por $\forall x(SOLTEIRO(x) \rightarrow \Box\neg CASADO(x))$. A posição do advérbio ‘necessariamente’ na sentença sugere que este caracterize os solteiros; desempenhando, assim, uma função *de re*. Intuitivamente, a proposição é falsa, uma vez que indivíduos podem mudar seu estado civil de forma que ninguém é necessariamente solteiro. Em um modelo que formalize nossa intuição, um mundo possível w no qual uma fórmula $SOLTEIRO(c)$ é verdadeira (para alguma constante c) acessa um mundo w' no qual $CASADO(c)$ também é verdadeira; ainda que não haja mundos nos quais $SOLTEIRO(c) \wedge CASADO(c)$ seja verdadeira.

Consideremos outro exemplo, ‘todo candidato pode ser eleito ao cargo’, formalizável por $\forall x(CANDIDATO(x) \rightarrow \Diamond ELEITO(x))$. A sentença significa que todo candidato é elegível. Assim, o verbo ‘poder’ está caracterizando os indivíduos, ou seja, desempenhando um papel *de re*.

Compare isto com ‘é possível que todo candidato seja eleito ao cargo’, formalizável por $\Diamond\forall x(CANDIDATO(x) \rightarrow ELEITO(x))$. O que a proposição sugere é que seja acessível um mundo no qual todos que se candidataram a um certo cargo foram eleitos, ou seja, uma modalidade *de dicto*. Ora, dependendo do cargo em questão (digamos que presidente da república), a proposição é evidentemente falsa.

Em vista destas questões, devemos tomar cuidado ao escolher com qual sistema trabalhar, pois em alguns sistemas esta distinção entre *de re* e *de dicto* colapsa. Por exemplo, considere as fórmulas $\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\forall x\varphi(x)$ e

$\Box\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall\Box x\varphi(x)$; conhecidas respectivamente como *Fórmula de Barcan* (*FB*) e *Fórmula de Barcan Inversa* (FB^{-1}), em referência à filósofa e lógica americana Ruth Barcan Marcus. Em um sistema na qual ambas são demonstráveis, tem-se $\forall x\Box\varphi(x) \leftrightarrow \Box\forall x\varphi(x)$, o que é interpretável como um colapso particular da distinção distinção *de re*/*de dicto*. A propósito, FB^{-1} é demonstrável no sistema **K** de primeira ordem, enquanto *FB* é demonstrável no sistema **B** de primeira ordem, tal como demonstrado a seguir.

$\vdash_{\mathbf{B}} \forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\forall x\varphi(x)$

1	$\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\varphi(c)$	*LC*
2	$\neg\Box\varphi(c) \rightarrow \neg\forall x\Box\varphi(x)$	1 *LC*
3	$\Box\neg\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\neg\forall x\Box\varphi(x)$	2 *RR*
4	$\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Diamond\Box\varphi(c)$	3 *LC* e $\Box//\Diamond$
5	$\Diamond\Box\varphi(c) \rightarrow \varphi(c)$	*B*
6	$\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$	4, 5 *LC*
7	$\forall y(\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$	6 *LC*
8	$\forall y(\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow (\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \forall x\varphi(x))$	*LC*, instância de $\forall y(\psi \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi(x))$
9	$\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \forall x\varphi(x)$	8, 7 *MP*
10	$\Box\Diamond\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\forall x\varphi(x)$	9 *RR*
11	$\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\Diamond\forall x\Box\varphi(x)$	*B*
12	$\forall x\Box\varphi(x) \rightarrow \Box\forall x\varphi(x)$	11, 10 *LC*

$\vdash_{\mathbf{K}} \Box\forall x\varphi(x) \to \forall\Box x\varphi(x)$

1	$\forall x\varphi(x) \to \varphi(c)$	*LC*
2	$\Box\forall x\varphi(x) \to \Box\varphi(c)$	1 *RR*
3	$\forall y(\Box\forall x\varphi(x) \to \Box\varphi(y))$	2 *LC*
4	$\forall y(\Box\forall x\varphi(x) \to \Box\varphi(y)) \to (\Box\forall x\varphi(x) \to \forall x\Box\varphi(x))$	*LC*
5	$\Box\forall x\varphi(x) \to \forall x\Box\varphi(x)$	4, 3 *LC*

6.2.3 Igualdade

Mais uma vez, confiramos nossas intuições e vejamos o que estas têm a dizer sobre a interação entre a relação de *igualdade* e modalidades.

No contexto da matemática, é bastante razoável admitir que igualdades envolvendo apenas constantes e funções aplicadas a constantes — tal como '2+2=4' — são necessárias. Entretanto, em outros contextos, isto não parece ser o caso. Um nome próprio e uma descrição definida podem ter o mesmo referente em um mundo, mas não em outro. Por exemplo, 'Barack Hussein Obama II' e '44º presidente dos E.U.A.' têm o mesmo referente no mundo atual, mas não em mundos nos quais o resultado da eleição de 2008 foi distinto.

Contudo, ao aplicarmos o *Princípio de Indiscernibilidade dos Idênticos* (*PII*), $\mathbf{i} = \mathbf{i}' \to (\varphi(\mathbf{i}) \to \varphi(\mathbf{i}'))$, obtemos que todas as igualdades são necessárias, tal como demonstrado abaixo.

1	$\mathbf{i} = \mathbf{i}' \to (\Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}) \to \Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}'))$	LC, instância de *PII*
2	$\Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}) \to (\mathbf{i} = \mathbf{i}' \to \Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}'))$	1 LC
3	$\mathbf{i} = \mathbf{i}$	LC
4	$\Box(\mathbf{i} = \mathbf{i})$	3 *RN*
5	$\mathbf{i} = \mathbf{i}' \to \Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}')$	2, 4 *MP*

Se os únicos parâmetros individuais da linguagem na qual estamos trabalhando são as constantes, a solução para este problema é simples: assumimos que constantes individuais fazem o papel de nomes próprios (mas não de descrições definidas) e que nomes próprios sejam designadores rígidos (*i.e.* designam o mesmo referente em todos os mundos possíveis).

Todavia, se a linguagem contar com funções, fica mais difícil de aceitar o teorema $\mathbf{i} = \mathbf{i}' \to \Box(\mathbf{i} = \mathbf{i}')$, dependendo das funções e da modalidade com as quais estamos lidando. Por exemplo, considere uma lógica modal de primeira-ordem que conta com o operador epistêmico 'K' — o qual é lido como '*é sabido (por um agente cognoscente ideal) que*' ou '*é necessário, em vista do que se sabe, que*' — e a função '*mae*', a qual identifica a mãe biológica dos referentes de cada constante. Assim, nesta linguagem teríamos a seguinte instância do teorema em questão: $mae(c) = d \to K(mae(c) = d)$ (para quaisquer constantes c e d). Ou seja, os agentes cognoscentes ideais sabem quem é a mãe de cada indivíduo no modelo. Por mais idealizados que estes agentes sejam, esta não é uma assunção interessante.

Por razões como esta, deve-se considerar restrições no *PII*, de forma que não seja válido substituir dois termos idênticos em quaisquer fórmulas.

6.3 Sistema *DNKPO*

GABBAY (1996) desenvolveu um sistema rotulado para lógicas modais de primeira ordem de domínio variável, no qual as constantes também recebem rótulos. Assim, o problema discutido em 6.2.1 sobre como lidar com constantes, se estas têm referentes em alguns mundos e não em outros, é resolvido, uma vez que os rótulos indicam em quais mundos cada constante tem referente.

Nós percebemos que ao fazer algumas alterações nas regras do sistema de Gabbay, o sistema resultante permite demonstrar certas fórmulas válidas em modelos de domínio constante, assim como impedir certas provas de fórmulas inválidas em tais modelos.

Entretanto não logramos êxito em demonstrar a corretude e completude do nosso sistema (o qual chamaremos de *DNKPO*), mas os resultados já obtidos são promissores.

As constantes do sistema *DNKPO* serão rotuladas por meio de superíndices. Para facilitar a leitura, passaremos a utilizar as letras 'u' e 'v', além do 'w', para designar rótulos. Também precisaremos adequar as regras introduzidas no Capítulo 4, a começar pelas regras hipotéticas cuja hipótese levantada é uma fórmula rotulada. Nestes casos, se ocorrer uma constante na fórmula, estabelece-se que o rótulo da constante deverá ser o mesmo que o da fórmula. Ou seja, podemos levantar uma hipótese na forma $w : \varphi(\mathbf{c}^w)$, mas não na forma $w : \varphi(\mathbf{c}^u)$ (quando $w \neq u$).

Também precisamos fazer algumas adequações para as regras referentes aos operadores modais. Caso lidemos com fórmulas nas quais não ocorrem constantes, a aplicação das regras é idêntica a como foi descrito em 4.1.1. Caso contrário, as regras seguirão os seguintes esquemas:

Introdução de $\Box$

$$\begin{array}{l|l l}
m & \underline{w\mathcal{R}u} & \text{Hip.} \\
 & \Sigma & \\
n & u : \varphi(\mathbf{c}^{v}) &
\end{array}$$

$(n+1)$ $w : \Box\varphi(\mathbf{c}^{w})$ m—n $I\Box$

Contanto que u seja novo na derivação.

Eliminação de $\Box$

m	$w : \Box\varphi(\mathbf{c}^{w})$	
n	$w\mathcal{R}u$	
o	$u : \varphi(\mathbf{c}^{w})$	m, n $E\Box$

Introdução de $\Diamond$

m	$u : \varphi(\mathbf{c}^{v})$	
n	$w\mathcal{R}u$	
o	$w : \Diamond\varphi(\mathbf{c}^{w})$	m, n $I\Diamond$

Eliminação de $\Diamond$

m	$w : \Diamond\varphi(\mathbf{c}^{w})$	
n	$w\mathcal{R}u$	m, n $I\Diamond$
$(n+1)$	$u : \varphi(\mathbf{c}^{w})$	m, n $I\Diamond$

Contanto que u seja novo na derivação.

Ou seja, nas regras de introdução dos operadores modais, os rótulos das contantes que ocorrem na conclusão serão os mesmos que o rótulo desta. Por outro lado, nas regras de eliminação dos operadores modais, os rótulos das contantes que ocorrem na conclusão serão os mesmos que o rótulo da premissa.

Agora vejamos as regras para lidar com os quantificadores:

Introdução de $\forall$

m	$w : \varphi(\mathbf{c}^{w})$	
n	$w : \forall\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v})$	m $I\forall$

Onde $\varphi(\mathbf{v})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{c})$ substituindo todas ocorrências de $\mathbf{c}$ por $\mathbf{v}$, contanto que $\mathbf{c}$ não ocorra em premissa ou hipótese vigente e $\mathbf{v}$ não ocorra em $\varphi(\mathbf{c})$.

Eliminação de $\forall$

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \forall \mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}) & \\
n & w : \varphi(\mathbf{c}^{w}) & m\ E\forall
\end{array}
$$

Onde $\varphi(\mathbf{c})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{v})$ substituindo todas ocorrências de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{c}$.

Introdução de $\exists$

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \varphi(\mathbf{c}^{u}) & \\
n & w : \exists\varphi(\mathbf{v}) & m\ I\exists
\end{array}
$$

Onde $\varphi(\mathbf{v})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{c})$ substituindo zero ou mais ocorrências de $\mathbf{c}$ por $\mathbf{v}$, contanto que $\mathbf{v}$ não ocorra em $\varphi(\mathbf{c})$.

Eliminação de $\exists$

$$
\begin{array}{lll}
l & w : \exists \mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}) & \\
m & \quad \vert\ \underline{w : \varphi(\mathbf{c}^{w})} & \text{Hip.} \\
 & \quad \vert\ \quad \Sigma & \\
n & \quad \vert\ \quad w : \psi & \\
o & w : \psi & l, m\text{—}n\ E\exists
\end{array}
$$

Onde $\varphi(\mathbf{c})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{v})$ substituindo todas ocorrências de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{c}$, contanto que $\mathbf{c}$ seja nova na derivação e não ocorra em ψ.

Vamos discutir as regras, principalmente suas restrições.

A Regra de Eliminação do $\forall$ é bem simples: dado que, em um mundo w, tudo tem uma propriedade expressa por φ, então $\mathbf{c}$ em específico também tem a mesma propriedade no mesmo mundo. Um requerimento da regra é que toda ocorrência da variável sob o escopo do quantificador eliminado seja, na fórmula derivada, substituída pela mesma constante, o que evita que sejam derivadas fórmulas abertas. Ademais, **c** recebe o mesmo rótulo que a fórmula concluída.

Já a Regra de Introdução do $\forall$ é mais complicada. A princípio, não se pode, dado que uma certa constante tem, em um certo mundo, uma certa propriedade expressa por φ, inferir que tudo no mesmo mundo tenha a mesma propriedade. Caso contrário, seriam demonstráveis fórmulas como $\varphi(c) \rightarrow \forall x\varphi(x)$. Contudo, se a constante em questão não ocorre em premissa ou hipótese vigente, então φ é demonstrável para qualquer outra constante, o que legitima a introdução do universal. Ademais, a premissa e a constante substituída pela variável devem ter o mesmo rótulo.

Ainda, a Regra $I\forall$ requer que se substitua, na conclusão, todas as ocorrências de uma constante da premissa pela variável sob escopo do quantificador introduzido. Este requerimento impede, por exemplo, que a partir de $w : \varphi(c) \rightarrow \varphi(c)$, seja inferido $w : \forall x(\varphi(c) \rightarrow \varphi(x))$. Além disto, para evitar que uma variável ocorra no escopo de dois quantificadores, a variável introduzida na conclusão não pode ocorrer na premissa.

Quanto à Regra de Introdução do $\exists$, ela é bem simples: dado que uma contante **c** tem uma propriedade expressa por φ em um mundo w, infere-se que existe algo (designado pela variável **v**) no mundo w que possui esta propriedade. A regra $I\exists$ confere a liberdade de substituir tantas ocorrências de uma constante quanto for necessário. Por exemplo, a partir de uma fórmula rotulada $w : P(c^u) \land Q(c^u)$, podemos inferir (por meio de $I\exists$) todas as fórmulas rotuladas a seguir:

$$w : \exists x(P(c^u) \land Q(c^u))$$
$$w : \exists x(P(x) \land Q(c^u))$$
$$w : \exists x(P(c^u) \land Q(x))$$

$$w : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

Repare que $I\exists$ é bem permissiva em relação às demais regras para quantificadores, uma vez que ela é aplicável mesmo quando o rótulo da fórmula e da constante são distintos. Contudo, todas as ocorrências da constante substituida devem conter o mesmo rótulo. Assim, a partir de $w : P(c^u) \wedge Q(c^v)$ pode-se obter $w : \exists x(P(x) \wedge Q(c^v))$ ou $w : \exists x(P(c^u) \wedge Q(x))$, mas não $w : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$. Ademais, para evitar que uma variável ocorra no escopo de dois quantificadores, a variável introduzida na conclusão não pode ocorrer na premissa.

Por fim, a Regra de Eliminação do $\exists$ é bem mais complicada. Dado que em um mundo w existe alguém/alguma coisa com a propriedade φ, levanta-se uma hipótese na qual se designa este indivíduo com uma constante $\mathbf{c}$ nova na derivação e com o rótulo w. A partir desta hipótese, deriva-se uma fórmula ψ com rótulo w, na qual a constante $\mathbf{c}$ não ocorre. Então a hipótese é descatada e se conclui $w : \psi$.

6.4 Exemplos de derivação

A seguir, provemos exemplos de derivação no sistema que desenvolvemos. Nos cinco primeiros exemplos, serão demonstrados teoremas de *DNKPO*; enquanto no sexto exemplo demonstraremos a Fórmula de Barcan utilizando a regra *RB*, introduzida em 4.2.4. Chamaremos o sistema obtido a partir de *DNKPO* pela adição da *RB* de *DNKBPO*.

$\vdash_{DNKPO} \exists x \Diamond \varphi(x) \to \Diamond \exists x \varphi(x)$

1	$\quad w : \exists x \Diamond \varphi(x)$	Hip.
2	$\quad\quad w : \Diamond \varphi(\mathbf{c}^w)$	Hip.
3	$\quad\quad w\mathcal{R}u$	2 $E\Diamond$
4	$\quad\quad u : \varphi(\mathbf{c}^w)$	2 $E\Diamond$
5	$\quad\quad u : \exists x \varphi(x)$	4 $I\exists$
6	$\quad\quad w : \Diamond \exists x \varphi(x)$	3, 5 $I\Diamond$
7	$\quad w : \Diamond \exists x \varphi(x)$	1, 2—6 $E\exists$
8	$w : \exists x \Diamond \varphi(x) \to \Diamond \exists x \varphi(x)$	1—7 $I \to$

$\vdash_{DNKPO} \exists x \Box \varphi(x) \to \Box \exists x \varphi(x)$

1	$\quad w : \exists x \Box \varphi(x)$	Hip.
2	$\quad\quad w : \Box \varphi(c^w)$	Hip.
3	$\quad\quad\quad w\mathcal{R}u$	Hip.
4	$\quad\quad\quad u : \varphi(c^w)$	2, 3 $E\Box$
5	$\quad\quad\quad u : \exists x \varphi(x)$	4 $I\exists$
6	$\quad\quad w : \Box \exists x \varphi(x)$	3—5 $I\Box$
7	$\quad w : \Box \exists x \varphi(x)$	1, 2—6 $E\exists$
8	$w : \exists x \Box \varphi(x) \to \Box \exists x \varphi(x)$	1—7 $I \to$

$\vdash_{DNKPO} \Diamond\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\Diamond\varphi(x)$

1	$w : \Diamond\forall x\varphi(x)$	Hip.
2	$w\mathcal{R}u$	1 $E\Diamond$
3	$u : \forall x\varphi(x)$	1 $E\Diamond$
4	$u : \varphi(c^u)$	3 $E\forall$
5	$w : \Diamond\varphi(c^w)$	4, 2 $I\Diamond$
6	$w : \forall x\Diamond\varphi(x)$	5 $I\forall$
7	$w : \Diamond\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\Diamond\varphi(x)$	1—6 $I \rightarrow$

$\vdash_{DNKPO} \Box\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\Box\varphi(x)$

1	$w : \Box\forall x\varphi(x)$	Hip.
2	$w\mathcal{R}u$	Hip.
3	$u : \forall x\varphi(x)$	1, 2 E□
4	$u : \varphi(c^u)$	3 $E\forall$
5	$w : \Box\varphi(c^w)$	1—4 $I\Box$
6	$w : \forall x\Box\varphi(x)$	5 $I\forall$
7	$w : \Box\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\Box\varphi(x)$	1—6 I→

$\vdash_{DNKPO} \exists x\forall y\Box R(x,y) \rightarrow \forall x\Box\exists yR(y,x)$

1	$w : \exists x\forall y\Box R(x,y)$	Hip.
2	$w : \forall y\Box R(c^w, y)$	Hip.
3	$w : \Box R(c^w, d^w)$	2 $E\forall$
4	$w\mathcal{R}u$	Hip.
5	$u : R(c^w, d^w)$	3, 4 $E\Box$
6	$u : \exists yR(y, d^w)$	$I\exists$
7	$w : \Box\exists yR(y, d^w)$	4—6 $I\Box$
8	$w : \forall x\Box\exists yR(y,x)$	7 $I\forall$
9	$w : \forall x\Box\exists yR(y,x)$	1, 7—8 $E\exists$
10	$\exists x\forall y\Box R(x,y) \rightarrow \forall x\Box\exists yR(y,x)$	1—9 $I \rightarrow$

$\vdash_{DNKBPO} \forall x \Box \varphi(x) \rightarrow \Box \forall x \varphi(x)$

1	$w : \forall x \Box \varphi(x)$	Hip.
2	$w : \Box \varphi(c^w)$	1 $E\forall$
3	$w \mathcal{R} u$	Hip.
4	$u \mathcal{R} w$	3 RB
5	$u : \Diamond \Box \varphi(c^u)$	2, 4 $I\Diamond$
6	$u \mathcal{R} v$	5 $E\Diamond$
7	$v : \Box \varphi(c^u)$	5 $E\Diamond$
8	$v \mathcal{R} u$	6 RB
9	$u : \varphi(c^u)$	7, 8 $E\Box$
10	$u : \forall x \varphi(x)$	9 $I\forall$
11	$w : \Box \forall x \varphi(x)$	3—10 $I\forall$
12	$w : \forall x \Box \varphi(x) \rightarrow \Box \forall x \varphi(x)$	1—11 $I \rightarrow$

Observe que esta derivação não está normalizada. A fim de obter o consequente $\Box \forall x \varphi(x)$ com o rótulo w, precisávamos antes obter a fórmula $\forall x \varphi(x)$ com o rótulo u. Contudo, não podíamos fazê-lo aplicando $I\forall$ em uma fórmula na qual ocorre a constante c com o rótulo w. A fim de contornar as restrições na regra de Introdução do $\forall$, obtemos na linha 5 uma fórmula por meio de $I\Diamond$ e, logo nas linhas 6 e 7, aplicamos $E\Diamond$; introduzindo assim uma constante nova na derivação.

Ainda não sabemos se *DNKPO* ou *DNKBPO* são normalizáveis.

Infelizmente, este capítulo termina com resultados faltantes. Esperamos que as questões em aberto estimulem outros pesquisadores a abordarem estes problemas.

Capítulo 7

Considerações Finais

Tal como nos comprometemos na Introdução, abordamos o médoto de dedução natural rotulada para lógicas modais, de forma mais ampla e intuitiva do que tem sido feito. Como resultado, apresentamos várias regras de inferência, a partir das quais pode ser elaborado e aplicado um sistema de dedução natural para alguma lógica (multi)modal.

A seguir, apresentaremos um sumário das regras tratadas nesta tese. Ademais, discutiremos questões a serem estudadas em pesquisas futuras.

7.1 Sumário das regras de inferência

Listamos todas as regras de inferência para dedução natural rotulada discutidas nesta tese. A fim de enfatizar a generalidade das regras, utilizaremos a notação de lógicas dinâmicas tratada no Capítulo 5.

Este sumário serve como um "kit" de elaboração de sistemas de lógicas modais normais que estendem a lógica clássica. Qualquer que seja o sistema elaborado, deve-se adotar todas as regras para os operadores clássicos, assim como uma versão de cada regra de introdução e eliminação dos operadores modais para cada parâmetro modal do sistema.

7.1.1 Regras para os operadores clássicos

Introdução da Conjunção

$$\begin{array}{lll} m & w : \varphi & \\ n & w : \psi & \\ o & w : \varphi \wedge \psi & m, n\ I\wedge \end{array}$$

Eliminação da Conjunção

$$\begin{array}{lll} m & w : \varphi \wedge \psi & \\ n & w : \varphi & m\ E\wedge \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} m & w : \varphi \wedge \psi & \\ n & w : \psi & m\ E\wedge \end{array}$$

Introdução da Disjunção

$$\begin{array}{lll} m & w : \varphi & \\ n & w : \varphi \vee \psi & m\ I\vee \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} m & w : \psi & \\ n & w : \varphi \vee \psi & m\ I\vee \end{array}$$

Eliminação da Disjunção

$$\begin{array}{lll} l & w : \varphi \vee \psi & \\ m & \quad w : \varphi & \textbf{Hip.} \\ & \quad \Sigma & \\ n & \quad w' : \chi & \\ (n+1) & \quad w : \psi & \textbf{Hip.} \\ & \quad \Pi & \\ o & \quad w' : \chi & \\ (o+1) & w' : \chi & l, m\text{—}n, n+1\text{—}o\ E\vee \end{array}$$

Introdução da Implicação

$$\begin{array}{l|l l}
m & \underline{w : \varphi} & \text{Hip.} \\
 & \quad\Sigma & \\
n & w : \psi & \\
\end{array}$$

$$(n+1) \quad w : \varphi \to \psi \qquad m\text{—}n\ I \to$$

Eliminação da Implicação

$$\begin{array}{lll}
m & w : \varphi \to \psi & \\
n & w : \varphi & \\
o & w : \psi & m, n\ E \to
\end{array}$$

Introdução da Negação

$$\begin{array}{l|l l}
l & \underline{w : \varphi} & \text{Hip.} \\
 & \quad\Sigma & \\
m & w' : \psi & \\
 & \quad\Pi & \\
n & w' : \neg\psi & \\
\end{array}$$

$$o \quad w : \neg\varphi \qquad l\text{—}m, n\ I\neg$$

Observação: A ordem de m e n não importa; $o = m + 1$ ou $o = n + 1$.

Eliminação da Dupla Negação

$$\begin{array}{lll}
m & w : \neg\neg\varphi & \\
n & w : \varphi & m\ E\neg\neg
\end{array}$$

Reiteração: Dada uma fórmula φ com um rótulo w em uma linha n, pode-se introduzir $w : \varphi$ em uma linha m (onde $n < m$) contanto que (i) se $w : \varphi$ depende de uma hipótese, ela ainda está vigente, e (ii) a linha m esteja em um nível hipotético superior a n.

7.1.2 Regras de introdução e eliminação dos operadores modais

Introdução de $[\mathbf{a}_x]$

m	$w\mathcal{R}_x w'$	Hip.
	Σ	
n	$w' : \varphi$	
$(n+1)$	$w : [\mathbf{a}_x]\varphi$	m—n $I[\mathbf{a}_x]$

Contanto que w' seja novo na derivação.

Eliminação de $[\mathbf{a}_x]$

m	$w : [\mathbf{a}_x]\varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	
o	$w' : \varphi$	m, n $E[\mathbf{a}_x]$

Introdução de $\langle\mathbf{a}_x\rangle$

m	$w' : \varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	
o	$w : \langle\mathbf{a}_x\rangle\varphi$	m, n $I\langle\mathbf{a}_x\rangle$

Eliminação de $\langle\mathbf{a}_x\rangle$

m	$w : \langle\mathbf{a}_x\rangle\varphi$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	m, n $I\langle\mathbf{a}_x\rangle$
$(n+1)$	$w' : \varphi$	m, n $I\langle\mathbf{a}_x\rangle$

Contanto que w' seja novo na derivação.

7.1.3 Regras monomodais

Regra RD_x

n	$w\mathcal{R}_x w'$	RD_x

Contanto que w' seja nova na derivação e $w \neq w'$.

Regra RT_x

n	$w\mathcal{R}_x w$	RT_x

Regra $R4_x$

m	$w\mathcal{R}_x w'$	
n	$w'\mathcal{R}_x w''$	
o	$w\mathcal{R}_x w''$	$m, n\ R4_x$

Regra RB_x

m	$w\mathcal{R}_x w'$	
n	$w'\mathcal{R}_x w$	$m\ RB_x$

Regra $R5_x$

m	$w\mathcal{R}_x w'$	
n	$w\mathcal{R}_x w''$	
o	$w'\mathcal{R}_x w''$	$m, n\ R5_x$

Regra $R4_x^{-1}$

m	$w\mathcal{R}_x w'$	
n	$w\mathcal{R}_x w''$	$m\ R4_x^{-1}$
$(n+1)$	$w''\mathcal{R}_x w'$	$m\ R4_x^{-1}$

Sendo que w'' é nova na derivação.

Regra RG_x

l	$w\mathcal{R}_x w'$	
m	$w\mathcal{R}_x w''$	
n	$w'\mathcal{R}_x w'''$	$l, m\ RG_x$
$(n+1)$	$w''\mathcal{R}_x w'''$	$l, m\ RG_x$

Sendo que w''' é nova na derivação.

7.1.4 Regras multimodais

Acarretamento, RA_{xy}

m	$w\mathcal{R}_y w'$	
n	$w\mathcal{R}_x w'$	$m\ RA_{xy}$

Inclusão, RB_{xy}

m	$w\mathcal{R}_x w'$	
n	$w'\mathcal{R}_y w$	$m\ RB_{xy}$

Regra RT_{x+y}

$$
\begin{array}{lll}
m & \multicolumn{1}{|c}{w\mathcal{R}_x w} & \text{Hip.} \\
\cline{2-2}
 & \multicolumn{1}{|c}{\Sigma} & \\
n & \multicolumn{1}{|c}{w : \varphi} & \\
(n+1) & \multicolumn{1}{|c}{w\mathcal{R}_y w} & \text{Hip.} \\
\cline{2-2}
 & \multicolumn{1}{|c}{\Pi} & \\
o & \multicolumn{1}{|c}{w : \varphi} & \\
(o+1) & w : \varphi & m\text{—}n,\ n+1\text{—}o\ RT_{x+y}
\end{array}
$$

Regra RT_{xy}

n	$w\mathcal{R}_x w'$	RT_{xy}
$(n+1)$	$w'\mathcal{R}_y w$	RT_{xy}

Contanto que w' seja novo na derivação.

Regra $R4_{xyx}$

l	$w\mathcal{R}_y w'$	
m	$w'\mathcal{R}_x w''$	
n	$w\mathcal{R}_x w''$	$l, m\ R4_{xyx}$

Regra $R4^{-1}_{xyz}$

l	$w\mathcal{R}_z w'$	
m	$w\mathcal{R}_x w''$	$l\ R4^{-1}_{xyz}$
n	$w''\mathcal{R}_y w'$	$l\ R4^{-1}_{xyz}$

Contanto que w'' seja nova na derivação.

Regra $R4_{zxy}$

l	$w\mathcal{R}_x w'$	
m	$w'\mathcal{R}_y w''$	
n	$w\mathcal{R}_z w''$	$l,\ m\ R4_{zxy}$

Regra RA_{x+yz}

$$
\begin{array}{lll}
l & w\mathcal{R}_z w' & \\
m & \quad \underline{w\mathcal{R}_x w'} & \text{Hip.} \\
 & \quad \Sigma & \\
n & \quad w'' : \varphi & \\
(n+1) & \quad \underline{w\mathcal{R}_y w'} & \text{Hip.} \\
 & \quad \Pi & \\
o & \quad w'' : \varphi & \\
(o+1) & w'' : \varphi & l, m\text{—}n, n+1\text{—}o\ RA_{x+yz}
\end{array}
$$

7.1.5 Regras para sistemas de primeira ordem

Para qualquer regra hipotética na qual se levante uma hipótese $w : \varphi$, se ocorrer uma constante φ, esta terá o rótulo w.

Introdução de □

$$
\begin{array}{lll}
m & \quad \underline{w\mathcal{R}u} & \text{Hip.} \\
 & \quad \Sigma & \\
n & \quad u : \varphi(\mathbf{c}^v) & \\
(n+1) & w : \Box\varphi(\mathbf{c}^w) & m\text{—}n\ I\Box
\end{array}
$$

Contanto que u seja novo na derivação.

Eliminação de □

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \Box\varphi(\mathbf{c}^w) & \\
n & w\mathcal{R}u & \\
o & u : \varphi(\mathbf{c}^w) & m, n\ E\Box
\end{array}
$$

Introdução de ◇

$$
\begin{array}{lll}
m & u : \varphi(\mathbf{c}^v) & \\
n & w\mathcal{R}u & \\
o & w : \Diamond\varphi(\mathbf{c}^w) & m, n\ I\Diamond
\end{array}
$$

Eliminação de ◇

$$
\begin{array}{lll}
m & w : \Diamond\varphi(\mathbf{c}^w) & \\
n & w\mathcal{R}u & m, n\ I\Diamond \\
(n+1) & u : \varphi(\mathbf{c}^w) & m, n\ I\Diamond
\end{array}
$$

Contanto que u seja novo na derivação.

Introdução de $\forall$

$m \quad w : \varphi(\mathbf{c}^{w})$

$n \quad w : \forall\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}) \quad m\ I\forall$

Onde $\varphi(\mathbf{v})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{c})$ substituindo todas ocorrências de **c** por **v**, contanto que **c** não ocorra em premissa ou hipótese vigente e **v** não ocorra em $\varphi(\mathbf{c})$.

Eliminação de $\forall$

$m \quad w : \forall\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v})$

$n \quad w : \varphi(\mathbf{c}^{w}) \quad m\ E\forall$

Onde $\varphi(\mathbf{c})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{v})$ substituindo todas ocorrências de **v** por **c**.

Introdução de $\exists$

$m \quad w : \varphi(\mathbf{c}^{u})$

$n \quad w : \exists\varphi(\mathbf{v}) \quad m\ I\exists$

Onde $\varphi(\mathbf{v})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{c})$ substituindo zero ou mais ocorrências de **c** por **v**, contanto que **v** não ocorra em $\varphi(\mathbf{c})$.

Eliminação de $\exists$

$$
\begin{array}{lll}
l & w : \exists\mathbf{v}\varphi(\mathbf{v}) & \\
m & \quad\vert\ \underline{w : \varphi(\mathbf{c}^{w})} & \text{Hip.} \\
 & \quad\vert\ \quad\Sigma & \\
n & \quad\vert\ \quad w : \psi & \\
o & w : \psi & l, m\text{—}n\ E\exists
\end{array}
$$

Onde $\varphi(\mathbf{c})$ é obtida a partir de $\varphi(\mathbf{v})$ substituindo todas ocorrências de **v** por **c**, contanto que **c** seja nova na derivação e não ocorra em ψ.

7.2 Discussão e sugestões de pesquisas futuras

7.2.1 Além dos sistemas $G_{(l,m,n,o)}$

Nesta tese, nos focamos em sistemas normais cujos axiomas são instâncias do esquema $G_{(l,m,n,o)}$. Isto se justifica pelo fato de que estes sistemas são os mais estudados na literatura, e pode-se demonstrar que são corretos e completos em relação a classes de estruturas cuja relação de acessibilidade tem propriedades descritíveis pela lógica de primeira ordem.

Todavia, esta última razão não é característica apenas das instâncias de $G_{(l,m,n,o)}$. Por exemplo, o esquema de fórmula $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi)$, o qual é adotado como axioma em algumas lógicas deônticas, é caracterizado por estruturas cuja relação de acessibilidade é secundária reflexiva, $\forall w.(\exists w''.w\mathcal{R}w'') \Rightarrow w\mathcal{R}w$. Já o esquema de fórmula $\Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi)$, adotado como axioma em sistemas intermediários entre **S4** e **S5**, é caracterizado por $\forall w, w', w''.(w\mathcal{R}w' \& w\mathcal{R}w'') \Rightarrow (w'\mathcal{R}w'' \vee w''\mathcal{R}w')$.

Para obter sistemas de dedução natural rotulada equivalentes a sistemas axiomáticos que adotem estes axiomas, basta elaborar regras de dedução que descrevam as propriedades relacionais em questão.

Contudo, nem todos os sistemas de lógica modal normal gozam desta simplicidade.

Considere, por exemplo, o axioma GL, $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$. Este é um axioma típico das lógicas da provabilidade. Ao interpretarmos '$\Box$' como o predicado

'*Bew*' de Gödel, a fórmula expressa o teorema de Löeb.[1] O axioma *GL* é correto em relação a modelos de Kripke cuja relação de acessibilidade $\mathcal{R}$ é transitiva[2] e sua inversa, $\mathcal{R}^{-1}$, é bem–fundada.[3] Em contrapartida, não é demonstrável a completude do sistema *KGL*.[4]

Outro axioma problemático é a fórmula de McKinsey, $\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$, inversa da fórmula *G*.[5] Apenas em sistemas que contam com o Axioma *4*, a propriedade relacional em questão é $\forall w \exists w'(w\mathcal{R}w' \& \forall w''(w'\mathcal{R}w'' \Rightarrow w' = w''))$. Contudo, a propriedade relacional para a fórmula de McKinsey, independentemente do Axioma *4*, não pode ser expressa por lógica de primeira ordem.

Seria interessante averiguar se estas dificuldades podem ser contornadas em sistemas baseados em dedução natural rotulada.

7.2.2 Lógicas modais de primeira ordem

A dedução natural para lógicas de primeira ordem reserva bastante trabalho para o futuro. Ainda precisamos obter os resultados de completude, corretude e normalização para o sistema *DNKPO*.

Ademais, seria interessante estender este sistema para contemplar funções e o símbolo de identidade.

7.2.3 Lógicas multidimensionais

Nesta tese, restringimo-nos a tratar de lógicas multimodais obtidas pela fusão de lógicas monomodais. Contudo, fusão não é a única forma de combinar lógicas modais. Existe outra maneira, desenvolvida por GABBAY et al. (2003), chamada

[1] $Bew(\ulcorner(Bew(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi)\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\varphi\urcorner)$

[2] Tanto que o Axioma *4* é teorema de sistemas normais que adotem *GL* como axioma.

[3] Ou seja, $\forall S \subseteq \mathcal{W}(S \neq \varnothing \rightarrow \exists w \in S, \forall w' \in S, \langle w', w\rangle \notin \mathcal{R}^{-1})$

[4] Extensão do sistema **K** pela adição do axioma *GL*.

[5] $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

de *produto de lógicas*. Nos modelos para as lógicas resultantes deste tipo de combinação, as fórmulas são satisfeitas em n–uplas de mundos possíveis.

Dependendo da aplicação, lógicas obtidas por produto são mais interessantes que lógicas obtidas por fusão. Por exemplo, digamos que queremos elaborar uma lógica epistêmico–temporal na qual possamos formalizar os conceitos de *aprendizado* e *memória*. Nos modelos de lógicas epistêmicas, os mundos possíveis geralmente representam estados epistêmicos, enquanto que a relação de acessibilidade representa a concebivilidade destes estados. Já em lógicas temporais, mundos possíveis e relações de acessibilidade representam, respectivamente, instantes e a ordenação destes; se a lógica epistêmico–temporal em questão for obtida por fusão, esta distinção é perdida; enquanto que pelo método de produtos, os pares ordenados de mundos possíveis podem representar um certo estado epistêmico em um dado instante.

A despeito de que tanto o método de dedução natural rotulado quanto o método de produto de lógicas terem ambos sido desenvolvidos por Gabbay, não encontramos qualquer trabalho no qual o primeiro fosse aplicado ao segundo. Definitivamente, esta é mais uma área de interesse a ser explorada.

Capítulo 8

Referências Bibliograficas

- ANDERSON, A. ; JOHNSTONE, H., *Natural Deduction, the Logical Basis of Axiom Systems*, Belmont, EUA, 1962

- BOBZIEN, S., *Dialectical School*, In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =<http://plato.stanford.edu/archives/fall20 school/>

- CARNIELLI, W. ; CONIGLIO, M. E., Combining Logics, In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/logic-combining/>

- CARNIELLI, W. ; CONIGLIO, M. E., GABBAY, D.M.; GOUVEIA, P.; SERNADAS, C, *Analysis and Synthesis of Logics*, Springer, 2008

- CARNIELLI, W.; PIZZI, C. *Modalities and multimodalities*, Springer, 2008

- CHELLAS, B. F., *Modal Logic, an introduction*, Cambridge University Press, 1980

- FITCH, F., *Symbolic Logic*, NY : Roland Press, 1952

- FITTING, M.; MENDELSON, R.L., *First–Order Modal Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998

- GABBAY, D. M., *Labelled Deductive Systems*. Clarendon Press, 1996

- GABBAY, D. M., Labelled deductive systems: a position paper. In: Logic Colloquium '90: ASL Summer Meeting in Helsinki, 66–68, Springer-Verlag, Berlim, 1993

- GABBAY, D. M.; KURUCZ, A.; WOLTER, F.; ZAKHARYASCHEV, M., *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Elsevier, Amsterdã, 2003

- GENTZEN, G. . Untersuchungen über das logische Schliessen, In: *Mathematische Zeitschrift* 39, 1934/5

- GOLDBLAT, R. *Mathematical modal logic:* a view of its evolution, In: *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, Elsevier, Amsterdam, 2006

- HAWTHORN, J. *Natural Deduction in Normal Modal Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 31, Number 2, 1990

- HUGHES, G.E.; CRESSWELL, M.J. *A new introduction to modal logic*, Routledge, Nova Iorque, 1996

- INDRZEJCZAK, A., Natural Deduction, In: Internet Encyclopedia of Philosophy, URL =<http://www.iep.utm.edu/nat-ded/>, 2017

- KRIPKE, S., *Naming and Necessity*, Harvard University Press, 1980

- LEWIS, D.K., *On the Plurality of Worlds*, Blackwell, Oxford, 1986

- MEDEIROS, M. P. N., A new S4 classical modal logic in natural deduction, In: *Journal of Symbolic Logic Volume 71*, 2006

- MORTARI, C. A., Lógicas epistêmicas, In: *Nos limites da epistemologia analítica*, UFSC, Florianópolis, 1999

- PELLETIER, F. J., A Brief History of Natural Deduction, In: *History and Philosophy of Logic*, vol. 20, Taylor & Francis, 1999

- PRAWITZ, D., *Natural Deduction - A proof theoretical study*. Almquist and Wiksell, Stockholm, 1965

- PRIOR, A. N., *Time and Modality*, Oxford: Clarendon Press, 1957

- SIMPSON, A. K., *Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, University of Edinbungh, 1994

- VIGANÒ, L., *Labelled Non-Classical Logics*, Springer, 2000

- VOLPE, M., *Labeled Natural Deduction for Temporal Logics*, Ph.D. Thesis, Università degli Studi di Verona, 2011