Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas[1]

Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
UNICAMP, CLE / IFCH
itala@cle.unicamp.br

Hércules de Araujo Feitosa
Departamento de Matemática
UNESP, Faculdade de Ciências
haf@fc.unesp.br

Introdução

A lógica, ciência do raciocínio dedutivo, estuda a relação de conseqüência dedutiva, tratando entre outras coisas das inferências válidas; ou seja, das inferências cujas conclusões têm que ser verdadeiras quando as premissas o são. A lógica pode, portanto, ser considerada como "o estudo da razão" ou "o estudo do raciocínio".

O objetivo da lógica consiste, então, na menção e estudo dos princípios lógicos usados no raciocínio dedutivo. Sob essa concepção, temos a *lógica dedutiva*.

Podemos, entretanto, considerar uma outra lógica, a *lógica indutiva*, que se ocupa não das inferências válidas, mas das inferências verossímeis. Consideremos o seguinte argumento:

O sol tem nascido todos os dias.
Logo, o sol nascerá amanhã.

Obviamente este argumento não é dedutivo e, portanto, não é logicamente válido. A(s) premissa(s), ainda que verdadeira(s), não implica(m) logicamente a conclusão, embora esta possua uma certa plausibilidade.

A lógica contemporânea tem se convertido em disciplina matemática, a *lógica matemática*, com características próprias, dedutiva; é o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos. Nesse sentido, para estudarmos o tipo de enfoque da lógica matemática, devemos examinar os métodos utilizados pelos matemáticos.

A lógica, particularmente sob a acepção dedutiva, constitui a ciência subjacente às investigações no domínio do puramente racional.

Porém, existe uma única razão? Existe uma única lógica?

Um dos objetivos deste texto consiste em discutir essas duas questões.

Faremos uma síntese, sucinta, sobre o desenvolvimento da lógica até o princípio do século XX. Discutiremos a crise dos paradoxos e o surgimento das lógicas não-clássicas.

Os lógicos contemporâneos edificam linguagens artificiais adequadas para lidar com a relação de conseqüência, linguagens essas que possuem duas dimensões relevantes: a sintática e a semântica.

Para trabalharmos numa teoria formal, é necessário explicitarmos sua linguagem: seus símbolos e as regras de combinação às quais estão sujeitos estes símbolos, para a construção dos termos e fórmulas (expressões bem formadas). Entre as fórmulas bem formadas da linguagem são especificados os axiomas (leis básicas). As regras independem do significado dos símbolos. Através dos axiomas e regras de dedução, são demonstrados os teoremas da teoria.

---

[1] Este trabalho corresponde a uma versão, com pequenas alterações, do texto produzido pelos autores para o mini-curso 'História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas', ministrado pela professora Ítala no "V Seminário Nacional de História da Matemática", ocorrido na UNESP, Rio Claro, em abril de 2003.

À dimensão combinatória de uma linguagem, chamamos de *dimensão sintática*.

A *dimensão semântica* de uma linguagem leva em consideração os objetos extralingüísticos, aos quais os símbolos e expressões da linguagem se referem, e o significado dos mesmos. Lida com os conceitos de estrutura, validade de fórmulas e modelo.

As teorias contemporâneas, construídas sobre linguagens, axiomas lógicos, axiomas não-lógicos específicos e regras de dedução, são constituídas pela teoria formal – axiomática e pela semântica.

Os resultados relativos à completude, consistência, decidibilidade, m*etateoremas* importantes, estabelecem a relação entre essas duas dimensões.

Entretanto, até princípios do século XX, havia uma única lógica: pura, formal ou teórica, fundada por Aristóteles (384 a 322 a. C.) e cujo sistematizador mais importante foi Frege (1848-1925).

1. Um pouco de história e os paradoxos auto-referenciais

Apresentamos nesta seção aspectos da história da lógica e uma discussão de alguns dos famosos paradoxos auto-referenciais.

1.1. De Aristóteles ao final do século XIX e a sistematização da lógica clássica

A história da lógica antiga inicia-se propriamente com Aristóteles, no século IV a. C. (384-322 a. C.).

Na antiguidade, os gregos foram preponderantes no cultivo, prática e gosto pelo argumento. Entre os predecessores de Aristóteles (Platão, sem dúvida) devemos chamar a atenção para o trabalho dos sofistas, classe de tutores privados da Grécia antiga; e convém mencionarmos que paradoxos e argumentos falaciosos, argumentos que, de premissas aparentemente verdadeiras e por passos aparentemente válidos, levam a conclusões aparentemente falsas, eram conhecidos na Grécia antiga.

A maior parte da contribuição relevante de Aristóteles, para a lógica, encontra-se no grupo de trabalhos conhecidos como ***Organon***, mais especificamente nos ***Analytica Priora*** e no ***De Interpretatione***.

Aristóteles criou a *teoria do silogisimo* e axiomatizou-a de diversas formas. Iniciou o desenvolvimento da lógica modal, lidando com as noções de necessidade, possibilidade e contingência: uma sentença ***A*** é *contingente* se ***A*** é não necessária, porém não impossível. É famosa a questão dos futuros contingentes de Aristóteles. Exemplo: Haverá uma batalha naval amanhã.

1.1.1. Teoria dos silogismos

A *teoria dos silogismos* constitui um dos primeiros sistemas dedutivos já propostos.

Filósofos e historiadores da lógica consideram a teoria do silogismo como a mais importante descoberta em toda a história da lógica formal, pois não constitui apenas a primeira teoria dedutiva, mas também um dos primeiros sistemas axiomáticos construídos.

Modernamente, podemos interpretá-la como um fragmento da lógica de primeira ordem, ou seja, do cálculo de predicados de primeira ordem.

Consideremos, de imediato, como intuitivamente claro em termos pré-formais, o uso de variáveis e símbolos de predicados e o significado dos operadores lógicos para: existencial ($\exists$, “existe”), universal ($\forall$, “para todo”), negação ($\neg$, “não”), conjunção ($\wedge$, “e”), disjunção ($\vee$, “ou”), condicional ($\rightarrow$ “se ... então”), e bicondicional ($\leftrightarrow$, “equivalente” ou “se, e somente se”).

A teoria dos silogismos, em sua linguagem, lida com *termos* (substantivos ou idéias), que podem ser *termos gerais*, ou *termos singulares*; e com *predicados*. São exemplos de termos gerais: “homem”, “número”, etc; são exemplos de termos singulares: “Sócrates”, "dois", etc; são exemplos de predicados: "mortal", "par", etc.

A teoria dos silogismos trata de *proposições categóricas*, no sentido de "incondicionais"; e de *proposições singulares*. "Todo homem é mortal" é um exemplo de proposição categórica; e "Sócrates é mortal" e "Pedro é um homem" são exemplos de proposições singulares.

Há quatro tipos de proposições categóricas, que diferem entre si em *qualidade*, pois afirmam ou negam; e em *quantidade*, pois são universais ou particulares. São os seguintes os quatros tipos de proposições:

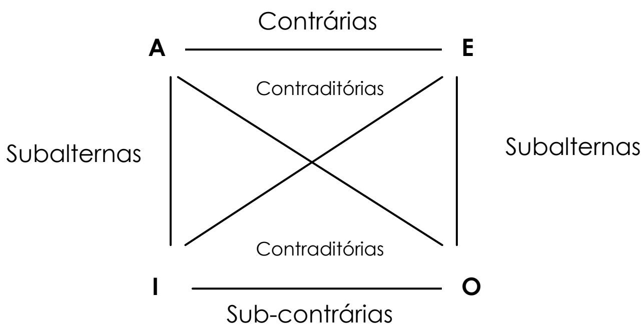
- *Afirmação universal*: Todos os *S* são *P*.
  Notação: **A**

- *Negação universal*: Nenhum *S* é *P*.
  Notação: **E**

- *Afirmação particular*: Alguns *S* são *P*.
  Notação: **I**

- *Negação particular*: Alguns *S* não são *P*.
  Notação: **O**

Aristóteles estabeleceu as relações entre esses quatro tipos de proposições categóricas através de seu famoso *quadrado das proposições*:



- **A** e **O**, e **I** e **E** são *contraditórias*.
  Não podem ser ambas verdadeiras; e não podem ser ambas falsas.

- **A** e **E** são *contrárias*.
  Não podem ser ambas verdadeiras; mas podem ser ambas falsas.

- **I** e **O** são *subcontrárias*.
  Não podem ser ambas falsas; mas podem ser ambas verdadeiras.

- **I** é *subalterna* de **A** e **O** é *subalterna* de **E**.
  Se **A** é verdadeira, então **I** é verdadeira.
  Se **E** é verdadeira, então **O** é verdadeira.

O que é um silogismo?

Um *silogismo* é uma regra de inferência que deduz uma proposição categórica – a *conclusão* – a partir de duas outras, chamadas *premissas*. Cada uma das premissas contém um termo comum com a conclusão – o *termo maior* e o *termo menor*, respectivamente; e um termo comum com a outra premissa – o *termo médio*.

Exemplo de silogismo:

Todo animal é mortal.
(Premissa maior – contém o termo maior (mortal) e o termo médio (animal))

Todo homem é um animal.
(Premissa menor – contém o termo menor (homem) e o termo médio (animal))

Todo homem é mortal.
(Conclusão – contém o termo menor (homem) e o termo maior (mortal)).

Observamos que "mortal", o termo maior da premissa maior, é o predicado da conclusão; "homem", o termo menor da premissa menor, é o sujeito da conclusão; e "animal" é o termo médio.

Os silogismos estão divididos em figuras, de acordo com a colocação do termo médio nas premissas. São quatro as figuras possíveis, sendo as três primeiras devidas a Aristóteles e a última acrescentada posteriormente:

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**
M – P	P – M	M – P	P – M
S – M	S – M	M – S	M – S
S – P	S – P	S – P	S – P

Dentro de cada figura, os silogismos se dividem em *modos*, de acordo com a combinação, quantidade e qualidade, isto é, de acordo com a presença das proposições categóricas **A**, **E**, **I** ou **O**.

O exemplo acima é um caso da *Figura 1*, modo **A A A**, ou, mais especificamente:

M	**A**	*P*
S	**A**	*M*
S	**A**	*P*

Segundo a interpretação do lógico e filósofo polonês J. Lukasiewicz, na verdade, Aristóteles lida com o silogismo como um condicional, cujo antecedente é uma conjunção de duas proposições categóricas e o conseqüente é uma terceira proposição categórica.

A tradição diz que o silogismo é um conjunto de três afirmações categóricas, duas das quais são as premissas e a terceira é a conclusão.

Assim sendo, um silogismo válido pode ter premissas verdadeiras e conclusão verdadeira; uma premissa falsa e conclusão verdadeira; e uma premissa falsa e conclusão falsa.

Um silogismo, portanto, para ser válido, não pode ter premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Um exemplo clássico de silogismo válido é o seguinte:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

Apresentamos, a seguir, um exemplo de silogismo não válido:

Cada homem é um ser vivo.
Algum bípede é um ser vivo.
Nenhum homem é um ser vivo.

Aristóteles parece não ter percebido que sua silogística pressupunha uma teoria lógica mais geral, a das proposições. De fato, mencionava "silogismos a partir de hipóteses", parecendo referir-se a alguns princípios de lógica das proposições por ele não explicitados.

1.1.2. Até Frege e Cantor

Existem sérios indícios para associarmos a origem da lógica das proposições a Theophrastus, com os megáricos (escola de lógicos e dialéticos socráticos do 4º século) e aos estóicos. Theophrastus deu uma importante contribuição à lógica das expressões substantivas (de Aristóteles); mas foi Galeno, um dos dois maiores médicos da Antigüidade, quem deu a última e maior contribuição para a lógica das expressões substantivas na Antigüidade, desenvolvendo a teoria da propagação do silogismo. Galeno tem a importância de ter sido o transmissor da lógica grega para os pesquisadores árabes dos primeiros tempos medievais.

A escola megárica foi famosa por Eubúlides, crítico de Aristóteles. Alguns paradoxos, como o do mentiroso, são devidos a essa escola: "Um homem que diz que está mentindo, fala a verdade"? Discutiram também sobre a veracidade da implicação, como um conceito funcional de verdade.

Entre os estóicos, escola Stoa, com diferenças substanciais em relação ao Lyceum (Platão), encontram-se discussões sobre a conjunção, disjunção (exclusiva e não exclusiva), negação e esquema de inferência.

Parece, entretanto, que a lógica tem sido um produto exclusivo da cultura ocidental.

Os árabes nada desenvolveram independentemente dos gregos. A lógica dos indianos, comparada com a dos gregos, não é significativa – parece que a lógica das proposições foi antecipada por alguns lógicos budistas, sendo que a lógica das expressões substantivas foi mais firmemente desenvolvida, sem atingir, entretanto, o nível da silogística aristotélica; a lógica indiana se desenvolveu independentemente da lógica grega, e foi severamente limitada pelo não uso de variáveis. A lógica chinesa, nada relevante, lidou essencialmente com questões relativas a dilemas morais e práticos, por um lado, e com interpretações místicas da vida, de outro – não avançou além do estágio alcançado pelos sofistas, no século V a. C.

Durante os cinco séculos que se seguiram ao fim da Antigüidade, pouco ou nada se fez, com significado, no campo da lógica. Como parte do curriculum básico – o trivium – a lógica era tratada como um tópico subsidiário para estudantes de leis e teologia; juntamente com a gramática e retórica, a lógica havia sido considerada parte das "artes liberais" na educação clássica, situada num grupo separado da aritmética, geometria, astronomia e música.

Na lógica medieval podemos destacar três ramos: os bizantinos, os árabes e os escolásticos, estes últimos parecendo os mais frutíferos. São encontradas versões das lógicas de expressões substantivas – abandonaram o uso de variáveis –, lógicas das proposições e lógicas das expressões modais, as duas últimas entre os escolásticos.

O clima intelectual que se estabeleceu com o Renascimento e o Humanismo não propulsionou o desenvolvimento da lógica.

A lógica moderna iniciou-se no século XVII, com Leibniz, e começou a se desenvolver em parceria com a matemática.

Leibniz influenciou seus contemporâneos e sucessores com seu programa ambicioso para a lógica, que para ele tinha deixado de ser uma "diversão de pesquisadores" e começara a tomar a forma de uma "matemática universal". Seu programa buscava a construção de uma linguagem universal, baseada em um alfabeto do pensamento.

Leibniz, em seu ***Dissertatio de arte combinatória***, publicado em 1666, introduz o projeto da construção de um sistema exato e universal de notação, uma linguagem simbólica universal baseada em um alfabeto do pensamento, a *língua characterica universalis*, que deveria ser como uma álgebra. Essa linguagem propiciaria um conhecimento *fundamental de todas as coisas*. Leibniz acrescentou a seu trabalho o projeto da construção de um *calculus ratiocinator*, ou cálculo da razão.

Apesar do programa de Leibniz, na forma introduzida por ele, não ser teoricamente exeqüível, o *calculus ratiocinatur* constituiu um importante precursor da metodologia da lógica contemporânea.

Leibniz antecipou o uso dos quantificadores. E em vários de seus trabalhos chamou a atenção sobre a lei da identidade ("A é A", ou "todo A é A") – "verdade primitiva da razão" – e da lei da (não-) contradição, parecendo considerá-las suficientes para a demonstração das verdades que independem da experiência, ou de todos os princípios da matemática.

Entretanto, as contribuições de Leibniz para a lógica permaneceram, na maioria, não publicadas durante sua vida, tendo ficado desconhecidas até o princípio do século XX. Parte de sua obra foi publicada em **Erdmann 1840** e **Gerhardt 1890** (ver **Gerhardt 1978**) e, em 1903, Louis Couturat, filósofo da matemática francês, publicou a obra **Opuscules et fragments inédits de Leibniz** (ver **Couturat 1903**).

Historicamente, apenas generalidades do programa de Leibniz teriam influenciado os lógicos que o sucederam.

Se seus trabalhos tivessem sido publicados no século XVII, o reviver da lógica, que só ocorreu no final do século XIX, talvez tivesse ocorrido bem mais cedo.

Immanuel Kant pouco contribuiu para a lógica, em sua obra, mas sua influência foi grande, devido à sua reputação em outros campos do conhecimento. No prefácio de seu **Kritik der reinen Vernunft**, edição de 1787, afirma explicitamente que a lógica não tinha dado qualquer passo importante, para frente ou para trás, desde Aristóteles, e parecia, sob toda aparência, estar acabada e completa.

Devemos mencionar, entre os precursores da lógica contemporânea: Boole (1847) e De Morgan (1847 e 1860) em álgebra da lógica; Peirce, precursor da pesquisa moderna, que introduziu a definição de ordem simples, o primeiro tratamento do cálculo proposicional como um cálculo com dois valores de verdade e a definição de igualdade, tendo iniciado em 1881 o tratamento dos fundamentos da aritmética; Schröder; e McColl que, em 1877, construiu o primeiro cálculo de proposições.

Os primeiros cálculos da lógica, introduzidos por esses autores, não chegaram a constituir sistemas no sentido da lógica moderna, mas cálculos num sentido menos rigoroso.

Apesar do trabalho precursor de Leibniz, Boole, de Morgan e Peirce, que já se contrapunham à posição de Kant, o verdadeiro fundador da lógica moderna foi Gottlöb Frege. O pensamento de Frege, praticamente desconhecido, foi descoberto por Bertrand Russel.

Os passos essenciais para a introdução do método logístico foram dados em 1879, no **Begriffsschrift** (**Frege 1977**). O livro contém, pela primeira vez, o cálculo proposicional em sua forma logística moderna, a noção de função proposicional, o uso de quantificadores e a análise lógica de prova por indução matemática.

O **Begriffsschrift** de Frege só é comparável, na história da lógica, aos **Analytica Priora** de Aristóteles.

Frege foi um dos precursores da distinção entre linguagem e meta-linguagem.

Em 1884, Frege adota a tese – *logicismo* – de que a aritmética é um ramo da lógica, no sentido de que todos os termos da aritmética podem ser definidos com o auxílio apenas de termos lógicos e todos os teoremas da aritmética podem ser provados a partir dos axiomas lógicos. Essa posição é rigorosamente apresentada por Frege em 1893 (ver **Frege 1879, 1890, 1893, 1966, 1977** e **1986**).

Em 1874, George Cantor publica seu primeiro trabalho sobre a *denumerabilidade dos conjuntos infinitos*. Constrói uma nova teoria do infinito, onde uma coleção de objetos, mesmo que infinita, é concebida como uma entidade completa.

Em 1895 e 1897, Cantor publica seus principais trabalhos sobre *números ordinais* e *números cardinais*, resultado de três décadas de pesquisa (ver **Cantor 1874, 1895** e **1897**).

Para Cantor, um *conjunto* era "qualquer coleção de objetos num todo M, definidos e separados de nossa intuição ou pensamento". Intuitivamente, um conjunto seria uma seleção de elementos satisfazendo uma dada propriedade.

Essa aceitação ingênua de qualquer coleção como um conjunto propiciou, no começo do século XX, o aparecimento de paradoxos nos fundamentos da nascente teoria de conjuntos.

Com o *paradoxo de Cantor*, relativo ao maior número cardinal, Russell obteve o famoso *paradoxo de Russell* e comunicou-o a Frege, em 1902. Como esse paradoxo pode ser obtido a partir dos axiomas lógicos por ele mesmo introduzidos, Frege acreditou que os fundamentos de sua construção da aritmética estivessem destruídos.

Dedekind, que também trabalhava na época nos fundamentos da aritmética, sustou a publicação de seu livro.

No Apêndice do segundo volume do **Grundgesetze der Arithmetik**, publicado em 1903, Frege tratou de sugerir alterações nos axiomas originalmente introduzidos, procurando evitar as inconsistências, porém, não logrou solucionar os problemas.

1.2. Os paradoxos auto-referenciais

Os paradoxos lógicos auto-referenciais são contradições que envolvem a lógica. Entretanto, não contêm nenhuma falha lógica óbvia (ver **D'Ottaviano 1990**).

Segundo Bertrand Russel, todos eles envolvem a auto-referência, ou seja, incorporam falácias do tipo "círculo vicioso".

Os paradoxos lógicos podem ser semânticos ou sintáticos.

Os paradoxos sintáticos envolvem apenas conceitos e notações de teoria de conjuntos, enquanto os paradoxos semânticos também fazem uso de conceitos como "denotar", "verdadeiro", "adjetivos", etc, os quais não estão necessariamente na linguagem matemática usual.

Indicamos alguns paradoxos bastante conhecidos. Outros podem ser encontrados em **Whitehead & Russel 1973**, p. 60.

1.2.1. *Paradoxo de Cantor* (Paradoxo sintático, Cantor, 1899)

O Paradoxo de Cantor envolve certos conhecimentos da teoria de números cardinais.

O *número cardinal* de um conjunto *y*, denotado por $\overline{\overline{y}}$, é definido como o conjunto de todos os conjuntos x equipotentes a *y*, isto é, os conjuntos *x* que estão em correspondência biunívoca com *y*. Intuitivamente, o número cardinal de *y* corresponde ao número de elementos de *y*.

Dados dois conjuntos *y* e *z*, definimos que $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$ quando *y* é equipotente a um subconjunto de z; e $\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{z}}$, se $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$ e $\overline{\overline{y}} \neq \overline{\overline{z}}$.

Se *y* é subconjunto de z, então, $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$.

Seja $\mathcal{P}(y)$ o conjunto de todos os subconjuntos de *y*.

Teorema de Cantor: Para qualquer conjunto y, $\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(y)}}$.

Teorema de Schröder-Bernstein: Se *y* e *z* são conjuntos, tais que $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$ e $\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{y}}$, então $\overline{\overline{y}} = \overline{\overline{z}}$.

Agora, seja V o conjunto universal. Como V é o conjunto de todos os conjuntos, $\mathcal{P}$(V) é um subconjunto de V e, portanto, $\overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \leq \overline{\overline{V}}$; por outro lado, pelo Teorema de Cantor, $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}}$, o que é uma contradição.

1.2.2. *Paradoxo de Russell* (Paradoxo sintático, Russell, 1902)

Bertrand Russell procurou provar que havia uma falha na demonstração de Cantor, no sentido de que não existe um cardinal maior que todos os outros; e uma falha no sistema de

Frege. Definiu o conjunto *R*, conhecido como *conjunto de Russell*, que deu origem ao Paradoxo de Russell.

Considerando um conjunto como qualquer coleção de objetos, conjuntos podem ser elementos de conjuntos e podem existir conjuntos que são elementos de si mesmo.

Consideremos o conjunto *R*, constituído por todos os conjuntos x tais que x não é elemento de si mesmo. Em notação contemporânea de teoria de conjuntos:

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Pela definição de *R*, se *R* for elemento de *R*, deve satisfazer à propriedade definidora do conjunto *R* e, portanto, $R \in R$ implica $R \notin R$; por outro lado, se *R* não for elemento de *R*, não deve satisfazer à propriedade que caracteriza os elementos de *R* e, portanto, $R \notin R$ implica $R \in R$. Assim sendo, $R \in R$ é "equivalente" a $R \notin R$.

O Paradoxo de Russell, na própria linguagem dos trabalhos de Frege, fê-lo duvidar dos fundamentos de seus trabalhos.

1.2.3. *Paradoxo de Burali-Forti* (Paradoxo sintático, Burali-Forti, 1887)

Este paradoxo é semelhante ao Paradoxo de Cantor, e é relativo ao conjunto $\boldsymbol{O_n}$ de todos os números ordinais, na teoria de números ordinais.

Para a sua compreensão é necessário um conhecimento mínimo sobre os números ordinais.

1.2.4. *Paradoxo do Mentiroso* (Paradoxo semântico)

Um homem diz: "Eu estou mentindo".

Se ele estiver mentindo, então o que ele diz é verdade e, portanto, ele não está mentindo; se ele não estiver mentindo, então o que ele diz é verdade e, portanto, ele está mentindo. Logo, *ele está mentindo* é "equivalente" a *ele não está mentindo*.

O Paradoxo do Cretense, conhecido na antiguidade (Paulo, Epístola a Tito, I: 12), é semelhante ao Paradoxo do Mentiroso. O filósofo cretense Epimênides disse: "Todo cretense é mentiroso". Se o que Epimênides disse é verdade, então, como ele é um cretense, é falso o que ele disse e, portanto, existe um cretense que não é mentiroso. Logo, se todo cretense é mentiroso, então existe um cretense que não é mentiroso.

Como o raciocínio acima não é logicamente impossível, o Paradoxo de Epimênides não é um paradoxo genuíno.

1.2.5. *Paradoxo de Berry* (Paradoxo semântico, Berry, 1906)

Existe apenas um número finito de sílabas na língua inglesa. Portanto, existe apenas um número finito de expressões contendo menos que quarenta sílabas. Logo, existe apenas um número finito de inteiros positivos que são denotados por uma expressão do Inglês contendo menos que quarenta sílabas.

Seja *k* "*the least positive integer which is not denoted by an expression in the English language containing fewer than forty syllables*"[2].

A frase grifada contém menos que quarenta sílabas e denota o inteiro *k*.

[2] "O menor inteiro positivo que não é denotado por uma expressão do Inglês contendo menos que quarenta sílabas".

1.2.6. ***Paradoxo de Grelling*** (Paradoxo semântico, Grelling, 1908)

Um adjetivo é chamado *autológico* se a propriedade por ele denotada se verifica para ele próprio; é chamado *heterológico*, em caso contrário.

Como exemplo, temos o adjetivo "polissilábico", que é autológico; e o adjetivo "monossilábico", que é heterológico.

Consideremos o adjetivo "heterológico". Se ele for heterológico, então ele não é heterológico; se ele não for heterológico, então ele é heterológico. Ou seja, *"heterológico" ser heterológico* é "equivalente" a *não ser heterológico*.

1.2.7. ***Paradoxo do Barbeiro*** (Paradoxo Semântico)

Em uma cidade vive um barbeiro que barbeia aqueles habitantes e apenas aqueles que não se barbeiam a si mesmos.

Observamos que, se o barbeiro se barbeia a si mesmo, então ele não se barbeia a si mesmo. E vice-versa.

1.2.8. ***Mais alguns Paradoxos***

Pegue uma folha de papel. Em um lado, escreva: *A sentença do outro lado do papel é falsa*. No outro, escreva: *A sentença do outro lado é verdadeira*.

Pegue outra folha de papel. Em um lado escreva: *A sentença do outro lado deste papel é verdadeira*. No outro lado: *A sentença do outro lado é falsa ou Deus existe*.

Deus existe?

1.3. Teoria dos tipos e teorias dos conjuntos

Em 1908, na abertura do "IV Congresso Internacional de Matemática", realizado em Roma, Poincaré conclamou a comunidade matemática para que fosse encontrada uma solução para a crise dos paradoxos, que parecia abalar os fundamentos da matemática (ver **Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, 1909**, p. 182).

Nessa ocasião, Zermelo e Russell já trabalhavam na busca de princípios fundamentais sobre os quais uma teoria consistente (que não permitisse contradições) pudesse ser construída.

Entretanto, não se deve imaginar que o objetivo da axiomatização fosse apenas evitar os paradoxos. Frege e Dedekind, que buscavam fundamentar a aritmética, não estavam motivados pelos paradoxos.

Russell e Whitehead, com a publicação dos **Principia Mathematica** em 1910, 1912 e 1913 (ver **Whitehead & Russell 1973**), inauguram um novo período na história da lógica, solucionando o problema das antinomias semânticas e sintáticas (ver **D'Ottaviano 1990**). Introduzem a *teoria ramificada de tipos*, um sistema que incorpora o esquema de notação lógica de Peano (1894-1908) e estabelece uma hierarquia de tipos e coleções.

A *teoria dos conjuntos*, nascente no começo do século XX, teve suporte para resistir à crise dos paradoxos. Dois sistemas de teoria de conjuntos evoluíram dos trabalhos de Zermelo (1908), Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Neumann (1925-1929), Bernays (1937-1954) e Gödel (1940): a Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (Teoria ZF) e a Teoria de Conjuntos von Neumann-Bernays-Gödel (Teoria GBN). O Sistema NF de Quine e a Teoria Tarski-Morse-Kelley surgiram posteriormente.

As teorias de conjuntos (ver **Halmos 1970**, **Di Prisco 1997** e **Hrbacek & Jech 1978**) apresentam solução parcial para o problema dos paradoxos, eliminando os paradoxos sintáticos da matemática, e constituem sistemas potentes para a fundamentação da matemática.

2. A lógica clássica

A lógica clássica, na sua parte elementar, versa essencialmente sobre os chamados conectivos lógicos de negação, conjunção, disjunção, implicação e bicondicional, sobre os quantificadores existencial e universal e sobre o predicado de igualdade; e sobre algumas de suas extensões, como por exemplo, certos sistemas de teorias de conjuntos e certos cálculos de predicados de ordem superior.

Caracteriza-se como uma lógica de proposições, lógica sentencial com uma única categoria semântica básica.

Na porção não elementar – teoria de conjuntos – investiga a noção de pertinência e outras noções alternativas.

A partir da obra de Frege, a lógica clássica adquiriu forma quase definitiva, extensa e consistente nos ***Principia Mathematica*** de Whitehead e Russell.

No seu estado atual é poderosa e encerra toda a velha silogística aristotélica, convenientemente reformulada. Por outro lado, a matemática tradicional, num certo sentido, pode reduzir-se à lógica clássica, pois pode ser toda definível a partir da idéia de conjuntos.

Apresentamos aqui, de forma sucinta e do ponto de vista contemporâneo, uma síntese da lógica aristotélica tradicional, hoje chamada lógica clássica.

Em seus escritos, Aristóteles caracteriza a lógica como uma ciência do raciocínio, posteriormente entendida como estabelecedora das formas válidas de raciocínio [inferências válidas], a qual repousava sobre três princípios fundamentais: (i) *Princípio da identidade* - todo objeto é idêntico a si mesmo; (ii) *Princípio da não contradição* - uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e (iii) *Princípio do terceiro excluído* - toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

Na sua vestimenta contemporânea, a lógica é vista como sistema formal dedutivo, edificado sobre linguagem formal, a qual teria a incumbência de eliminar dubiedades interpretativas.

Assim sendo, veremos a lógica clássica, num primeiro momento, como o cálculo proposicional clássico, um bonito e elegante, porém, limitado sistema dedutivo, que é estendido para o cálculo de predicados. Posteriormente, destacamos as teorias de primeira ordem, tal como na moderna lógica matemática (como referência, **Mendelson 1964** e **Shoenfield 1967**).

2.1. O cálculo proposicional clássico

Os elementos básicos do cálculo proposicional clássico (CPC) são as *proposições*, expressões escritas ou faladas, que admitem um *valor de verdade*: '0' *falso*, ou '1' *verdadeiro*.

A partir de *proposições simples* ou *atômicas*, podemos formar *proposições compostas* ou *moleculares* através do uso de conectivos lingüísticos. São conectivos importantes para a lógica as expressões 'não', 'e', 'ou', 'se, ... então', e 'se, e somente se'.

Como uma contra partida formal às proposições, usaremos as *fórmulas*, que são expressões da linguagem formal subjacente à lógica. Usaremos uma quantidade finita ou infinita e enumerável de *variáveis proposicionais*, p_1, p_2, p_3, ..., associadas às proposições atômicas.

Assim, cada variável proposicional é uma fórmula, denominada *fórmula atômica*. A partir destes átomos, considerando que **A** e **B** são fórmulas, temos as seguintes correspondências formais para as proposições compostas: $\neg$**A** (negação de **A**), **A**$\wedge$**B** (conjunção de **A** e **B**), **A**$\vee$**B** (disjunção de **A** e **B**), **A**$\rightarrow$**B** (condicional de **A** para **B**) e **A**$\leftrightarrow$**B** (bicondicional entre **A** e **B**).

A maneira mais simples e intuitiva de se atribuir uma semântica para o cálculo proposicional é através das funções de valoração.

Uma *valoração* é uma função $\overline{v}$ que atribui para cada variável proposicional p um dos valores de verdade 0 ou 1, isto é, $\overline{v}$: {p_1, p_2, p_3, ...} → {0, 1}.

Dada uma valoração $\overline{v}$ existe uma maneira única de estender esta valoração para todas as fórmulas do CPC, respeitando as tabelas seguintes, para cada um dos conectivos proposicionais:

	¬
0	**1**
1	**0**

∧	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

∨	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

→	0	1
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**

↔	0	1
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**

Assim, para cada valoração $\overline{v}$, a sua extensão única é dada por:

v(¬**A**) = ¬ v(**A**)
v(**A**∧**B**) = v(**A**) ∧ v(**B**)
v(**A**∨**B**) = v(**A**)∨ v(**B**)
v(**A**→**B**) = v(**A**) → v(**B**)
v(**A**↔**B**) = v(**A**) ↔ v(**B**).

Conhecidas as interpretações dadas para os conectivos, podemos construir a tabela de verdade de uma forma proposicional qualquer, como no exemplo a seguir:
Seja **A** a fórmula (p→q)→(¬p), então:

p	q	p→q	¬p	**A**
0	0	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
1	1	1	0	**0**

Uma fórmula **A** é *válida* (*tautologia*) quando, para toda valoração v, tem-se que v(**A**) = 1, ou seja, em sua tabela de verdade ocorre apenas o valor lógico verdadeiro '1'. Indicamos que **A** é uma fórmula válida por ⊨ **A**.

Como exemplo, vejamos que p∨¬p é uma tautologia, pois:

p	¬p	**p∨¬p**
1	0	**1**
0	1	**1**

Uma fórmula **A** é *logicamente equivalente* a uma fórmula **B** se as respectivas tabelas de verdade são coincidentes. Uma fórmula **A** *implica logicamente* uma fórmula **B**, se **B** é verdadeira (v(**B**) = 1) toda vez que **A** é verdadeira (v(**A**) = 1).

Com isso, **A** é equivalente a **B** se, e somente se, **A**↔**B** é uma tautologia, o que é indicado por **A** ⇔ **B**. E **A** implica **B** quando, e apenas quando, **A**→**B** é uma tautologia, indicado por **A** ⇒ **B**.

Proposição 2.1.1.: No CPC valem as seguintes equivalências:

(**A**∧**B**) ⇔ ¬(**A**→¬**B**)
(**A**∨**B**) ⇔ ((**A**→**B**)→**B**)
(**A**↔**B**) ⇔ (**A**→**B**)∧(**B**→**A**).

Dessa maneira, toda fórmula é equivalente a uma outra onde ocorrem apenas os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$.

O CPC pode ser formalizado pelos seguintes axiomas e regra de dedução ou inferência:

Axiomas:

Existe uma quantidade infinita de axiomas, especificados por meio de um dos três seguintes esquemas de axiomas:

Ax_1 $(\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}))$
Ax_2 $((\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})) \rightarrow ((\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})))$
Ax_3 $((\neg\mathbf{B}\rightarrow \neg\mathbf{A}) \rightarrow ((\neg\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}))$.

Regra de inferência:

A única regra de inferência é a Regra de *Modus Ponens* (MP), que diz: se **A** e **B** são fórmulas então, de **A** e $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$, obtemos **B**.

Observação: não é difícil verificar que todos os axiomas do CPC são tautologias.

Uma *demonstração* é uma seqüência finita de fórmulas $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ tal que, para $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{A}_i$ é um axioma ou é obtida de dois membros anteriores da seqüência pelo uso da Regra de Inferência MP. Quando isto ocorre, a seqüência $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ é uma *demonstração* de $\mathbf{A}_n$ e a fórmula $\mathbf{A}_n$ é um *teorema* do CPC.

Os axiomas também são teoremas e as suas demonstrações são seqüências de um único membro. Quando $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ é uma demonstração, então $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k$, para $k < n$, é também uma demonstração e, portanto, $\mathbf{A}_k$ é um teorema.

Seja Δ um conjunto de fórmulas do CPC. Uma seqüência $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ de fórmulas é uma *dedução* a partir de Δ se, para cada $1 \leq i \leq n$, vale uma das seguintes condições: (i) $\mathbf{A}_i$ é um axioma; (ii) $\mathbf{A}_i$ é um membro de Δ; (iii) $\mathbf{A}_i$ segue a partir de dois membros prévios da seqüência por uma aplicação de MP.

Neste caso, $\mathbf{A}_n$ é deduzido de Δ ou é uma conseqüência de Δ. Se **A** é o último membro de uma dedução a partir de Δ, escrevemos $\Delta \vdash \mathbf{A}$.

Teorema 2.1.2.: (*Teorema da Dedução*) Seja $\Delta\cup\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ um conjunto de fórmulas. Se $\Delta\cup\{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$, então $\Delta \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. ■

Usualmente denotamos $\Delta\cup\{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$ por $\Delta, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ e, em geral, $\Delta\cup \{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n\} \vdash \mathbf{B}$, por $\Delta, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$.

Teorema 2.1.3.: (*Teorema da Correção*) Cada teorema é uma fórmula válida. ■

Teorema 2.1.4.: (*Teorema da Completude Fraca*) Se a fórmula **A** é uma tautologia, então é um teorema. ■

Corolário 2.1.5.: (*Teorema da Adequação*) A fórmula **A** é um teorema se, e somente se, **A** é uma tautologia. ■

Um conjunto Γ de fórmulas é *consistente* se, para nenhuma fórmula **A** ocorre que **A** e $\neg\mathbf{A}$ sejam deduzidas a partir de Γ, ou seja, não temos $\Gamma \vdash \mathbf{A}$ e $\Gamma \vdash \neg\mathbf{A}$. Caso contrário, Γ é *inconsistente*.

Vamos entender o CPC como o conjunto de todos os seus teoremas.

Proposição 2.1.6.: O cálculo proposicional clássico (CPC) é consistente. ■

Sejam v uma valoração e **A** uma fórmula do CPC. A valoração v é um *modelo* para **A** ou v *satisfaz* **A**, quando $v(\mathbf{A}) = 1$. Indicamos isto por $v \vDash \mathbf{A}$. Uma valoração v é um *modelo para um conjunto* Γ de fórmulas quando $v(\mathbf{B}) = 1$, para cada fórmula $\mathbf{B} \in \Gamma$. Isto é denotado por $v \vDash \Gamma$.

A fórmula **B** é *conseqüência semântica* da fórmula **A**, quando todo modelo de **A** é também modelo de **B** e escrevemos $\{\mathbf{A}\} \vDash \mathbf{B}$. A fórmula **B** é *conseqüência semântica* de Γ, quando todo modelo de Γ é também modelo de **B**, o que denotamos por $\Gamma \vDash \mathbf{B}$.

Proposição 2.1.7.: Se $\Gamma \vdash \mathbf{A}$, então $\Gamma \vDash \mathbf{B}$. ■

Corolário 2.1.8.: Se Γ tem modelo, então Γ é consistente. ■

Teorema 2.1.9.: Se Γ é consistente, então Γ tem modelo. ■

Corolário 2.1.10.: (*Teorema da Completude Forte*) Se $\Gamma \vDash \mathbf{A}$, então $\Gamma \vdash \mathbf{A}$. ■

Proposição 2.1.11.: Se $\Gamma \vDash \mathbf{A}$, então existe um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, tal que $\Gamma_0 \vDash \mathbf{A}$. ■

Um sistema formal **S** é *decidível* se para toda fórmula **A** de **S** podemos determinar se **A** é um teorema de **S** ou se **A** não é um teorema de **S**.

Proposição 2.1.12.: O CPC é decidível. ■

2.2. O cálculo de predicados de primeira ordem

O CPC é um sistema bastante simples e elegante, mas não consegue dar conta de deduções muito ingênuas, como a seguinte:

Todos os animais são mortais (1)	premissa
Alguns répteis são animais (1)	premissa
$\therefore$ Alguns répteis são mortais (1)	conclusão.

Certamente este argumento é válido, mas no CPC teríamos que indicar as premissas, por exemplo, por **A** e **B** e a conclusão por **C**. Contudo, não é verdadeiro que $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$.

Introduzimos o cálculo de predicados de primeira ordem, indicado por $\mathcal{L}$, que estende o cálculo proposicional CPC e caracteriza ambientes apropriados para a construção e discussão de uma grande quantidade de teorias matemáticas relevantes e que não podem ser abordadas no ambiente proposicional.

Embora semelhantes, os desenvolvimentos sintáticos de $\mathcal{L}$ são mais gerais do que no CPC.

O *alfabeto* de $\mathcal{L}$ é determinado pelo seguinte:

(1) uma quantidade enumerável de variáveis: $v_1, v_2, ..., v_n, ...$;
(2) conectivos lógicos: $\neg$ e $\rightarrow$;
(3) quantificador universal: $\forall$;
(4) símbolos auxiliares:) e (;
(5) relação binária de igualdade: =;
Para I, J e K $\subseteq \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$,
(6) símbolos relacionais $\{R_i\}_{i \in I}$, junto com uma função T_0: $I \rightarrow \mathbb{N}^*$ que caracteriza, para cada $i \in I$, a aridade $T_0(i)$ de R_i;
(7) símbolos funcionais $\{f_j\}_{j \in J}$, junto com uma função T_1: $J \rightarrow \mathbb{N}^*$ que caracteriza, para

cada $j \in J$, a aridade $T_1(j)$ de f_j;
(8) constantes individuais $\{a_k\}_{k \in K}$.

Os símbolos de (1) a (5) são os símbolos lógicos presentes em todas as teorias de primeira ordem. Já os símbolos não lógicos, indicados de (6) a (8), são particulares para cada teoria tratada. Os símbolos de uma teoria podem não ocorrer em outra.

Os *termos* de $\mathcal{L}$ são as seguintes concatenações de símbolos:
(i) todas as variáveis e constantes individuais são termos;
(ii) se f_j é um símbolo funcional de aridade $T_1(j) = n$ e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $f_j(t_1, ..., t_n)$ também é um termo;
(iii) os termos são gerados exclusivamente pelas regras (i) e (ii).

As *fórmulas atômicas* de $\mathcal{L}$ são definidas por:
(i) se t_1 e t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica denominada *igualdade*;
(ii) se R_i é um símbolo relacional com aridade $T_0(j) = n$ e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $R_i(t_1, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica;
(iii) as fórmulas atômicas são geradas exclusivamente pelas regras (i) e (ii).

A linguagem de predicados pode não contar com um símbolo para a relação de igualdade, mas neste caso, faz-se necessário pelo menos um outro símbolo relacional para a geração das fórmulas atômicas.

As *fórmulas* de $\mathcal{L}$ são definidas por:
(i) toda fórmula atômica é uma fórmula;
(ii) se **A** e **B** são fórmulas, então $(\neg \mathbf{A})$ e $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ são fórmulas;
(iii) se **A** é uma fórmula e x é uma variável, então $(\forall x\mathbf{A})$ é uma fórmula;
(iv) as fórmulas são geradas exclusivamente pelas regras (i) - (iii).

Os símbolos $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ são definidos da mesma maneira que no CPC.

O *quantificador existencial* é definido da seguinte maneira:

$$(\exists x)\mathbf{A} =_{df} \neg(\forall x)\neg\mathbf{A}.$$

Ocorrência livre e ligada de uma variável: se **A** é uma fórmula atômica e x ocorre em **A**, então x *ocorre livre* em **A**. Se x ocorre livre em A e $x \neq y$, então x *ocorre livre* em $(\forall y)\mathbf{A}$. Se x ocorre livre em **A**, então x *ocorre livre* em $\neg\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$. Quando x não ocorre livre em **A**, então x *ocorre ligada* em **A**.

Quando escrevemos $(\forall y)\mathbf{A}$ dizemos que **A** está no *escopo* do quantificador $(\forall y)$. Uma variável x está ligada em $(\forall x)\mathbf{A}$ ou não é livre em $(\forall x)\mathbf{A}$. Se y é uma variável distinta de x, então y é livre [ligada] em $(\forall x)\mathbf{A}$ se ela é livre [ligada] em **A**.

Uma variável x pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula. Na fórmula $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \rightarrow (\exists y)R(x, y)$, a primeira ocorrência de x é ligada, ao passo que a segunda é livre. As duas ocorrências da variável y são ligadas.

Quando desejamos destacar algumas das variáveis livres de **A**, indicamos isto por $\mathbf{A}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Isto não significa que $x_1, x_2, ..., x_n$ são todas, nem que não existam outras variáveis livres em **A**. Com isto, de maneira semelhante ao CPC, se desejamos substituir todas as ocorrências das variáveis livres $x_1, x_2, ..., x_n$ pelos termos $t_1, t_2, ..., t_n$ em **A**, escrevemos $\mathbf{A}(t_1, t_2, ..., t_n)$.

A *substituição* de uma variável x por um termo t em **A**, indicada por A[x/t], é dada por:
(i) se **A** é atômica, então A[x/t] resulta da permuta de todas as ocorrências de x em **A** pelo termo t;

(ii) $(\neg\mathbf{A})[x/t] =_{df} \neg\mathbf{A}[x/t]$;
(iii) $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})[x/t] =_{df} \mathbf{A}[x/t] \rightarrow (\mathbf{B})[x/t]$;
(iv) $(\forall x)\mathbf{A}\ [x/t] =_{df} (\forall x)\mathbf{A}$ [sem alterações] e
$(\forall y)\mathbf{A}[x/t] =_{df} (\forall y)\mathbf{A}[x/t]$, para cada variável y distinta de x.

Sejam **A** uma fórmula e t um termo de $\mathcal{L}$. O termo t é *livre para* x em **A** se nenhuma ocorrência livre de x em **A** está no escopo de qualquer quantificador $(\forall y)$, quando y é uma variável de t.

Exemplos:
(a) O termo y é livre para x em $R_1(x)$, mas y não é livre para x em $(\forall y)R_1(x)$.
(b) Se $T_1(2) = 2$, $T_0(1) = 1$ e $T_0(2) = 2$, o termo $f_2(x, z)$ é livre para x em $(\forall y)R_2(x, y) \rightarrow R_1(x)$, mas não é livre em $(\exists z)(\forall y)(R_2(x, y)\rightarrow R_1(x))$, pois z é uma variável de $f_2(x, z)$ e ocorre no escopo do quantificador $(\exists z)$ e, portanto, $(\forall z)$.

Uma *sentença* é uma fórmula sem variáveis livres.

Em $\mathcal{L}$, são as sentenças que serão interpretadas como verdadeiras ou falsas.

Quando **A**, **B** e **C** são fórmulas quaisquer de $\mathcal{L}$, o cálculo de predicados com igualdade é determinado pelo seguinte conjunto de axioma e regras.

Axiomas
(i) Proposicionais:
Ax_1 $(\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}))$
Ax_2 $((\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})) \rightarrow ((\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})))$
Ax_3 $((\neg\mathbf{B}\rightarrow \neg\mathbf{A}) \rightarrow ((\neg\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}))$

(ii) Quantificacionais:
Ax_4 $(\forall x)(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A}\rightarrow(\forall x)\mathbf{B})$, x não ocorre livre em **A**
Ax_5 $(\forall x)\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}(x/t)$, isto é, **B** é obtida de **A** pela substituição de toda ocorrência livre de x em **A** por um termo t livre para x

(iii) Da igualdade:
Ax_6 $(\forall x)(x = x)$
Ax_7 $x = y \rightarrow (\mathbf{A}(x, x)\rightarrow\mathbf{A}(x, y))$, onde $\mathbf{A}(x, y)$ vem de $\mathbf{A}(x, x)$ pela substituição de alguma, mas não necessariamente todas, ocorrência livre de x por y e tal que y é livre para as ocorrências de x as quais ele substitui.

Regras de inferência

MP $\mathbf{A}, \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B} \vdash \mathbf{B}$

Gen $\mathbf{A} \vdash (\forall x)\mathbf{A}$.

Os conceitos de dedução, demonstração, teorema, consistência e inconsistência coincidem com os do CPC.

Proposição 2.2.1.: (*Teorema da Dedução*) Sejam Γ, $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ uma dedução e x uma variável livre para **A**. Se na dedução de **B** a partir de $\Gamma\cup\{\mathbf{A}\}$, a Regra de Generalização $(\forall x)\mathbf{C}_i$ não é aplicada em qualquer fórmula $\mathbf{C}_i$ que depende de **A**, então $\Gamma \vdash \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$. ■

Corolário 2.2.2.: Se uma dedução Γ, $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ não envolve quantificações sobre variáveis livres de **A**, então $\Gamma \vdash \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$. ■

Corolário 2.2.3.: Se **A** é uma sentença e Γ, **A** $\vdash$ **B**, então $\Gamma \vdash$ **A**$\to$**B**. ■

Teorema 2.2.4.: O cálculo de predicados $\mathcal{L}$ é consistente. ■

Para outros metaresultados precisamos da semântica de primeira ordem. Deixaremos a mera manipulação de símbolos e criamos ambientes de trabalho sobre os quais os matemáticos usualmente desenvolvem os seus trabalhos. Estes ambientes são denominados de estruturas matemáticas e são particularmente caracterizados por suas: constantes, relações e funções.

Dada uma linguagem de primeira ordem, uma *estrutura* $\mathcal{A}$ associada a esta linguagem é determinada pela seguinte quádrupla:

(i) um conjunto não vazio A, denominado o *universo* ou *domínio* de $\mathcal{A}$;

(ii) uma família $\{R_i^{\mathcal{A}}\}_{i\in I}$, para cada $i \in I$, onde $R_i^{\mathcal{A}}$ é uma relação definida sobre A, de aridade $T_0(i)$, ou seja, $T_0(i) = n$ e $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$;

(iii) uma família $\{f_j^{\mathcal{A}}\}_{j\in J}$, para cada $j \in J$, onde $f_j^{\mathcal{A}}$ é uma função definida sobre A, de aridade $T_1(j)$, ou seja, $T_1(j) = n$ e $f_j^{\mathcal{A}}: A^n \to A$;

(iv) uma família $\{a_j^{\mathcal{A}}\}_{k\in K}$ de constantes de $\mathcal{A}$.

Usamos as letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... para indicar as estruturas e as letras A, B, C, ... para os respectivos universos.

Indicamos uma estrutura por $\mathcal{A} = (A, \{R_i^{\mathcal{A}}\}_{i\in I}, \{f_j^{\mathcal{A}}\}_{j\in J}, \{a_j^{\mathcal{A}}\}_{k\in K})$.

Consideremos uma linguagem de primeira ordem L e $\mathcal{A} = (A, \{R_i^{\mathcal{A}}\}_{i\in I}, \{f_j^{\mathcal{A}}\}_{j\in J}, \{a_j^{\mathcal{A}}\}_{k\in K})$ uma estrutura para L. Uma interpretação ξ de L em $\mathcal{A}$ é uma função tal que:

$$\xi: \{R_i\}_{i\in I} \to = \{R_i^{\mathcal{A}}\}_{i\in I}$$
$$\xi(R_i) = R_i^{\mathcal{A}}$$
$$\xi: \{f_j\}_{j\in J} \to = \{f_j^{\mathcal{A}}\}_{j\in J}$$
$$\xi(f_j) = f_j^{\mathcal{A}}$$
$$\xi: \{a_k\}_{k\in K} \to = \{a_k^{\mathcal{A}}\}_{k\in K}$$
$$\xi(a_k) = a_k^{\mathcal{A}}.$$

A função ξ leva elementos simplesmente sintáticos, ou formais, da linguagem L em elementos de um universo um pouco mais concreto, onde damos significado ou interpretamos os entes sintáticos.

Por exemplo, consideremos a aritmética e a interpretemos na estrutura algébrica dada por $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, . , 0, 1)$, em que o domínio é o conjunto dos números naturais, a adição e a multiplicação são as operações usuais sobre os números naturais e as constantes 0 e 1 são interpretados pelos números 0 e 1 dos naturais.

Agora queremos considerar uma fórmula de uma certa teoria e saber quando esta pode ser validada em uma estrutura. Fazendo um paralelo com o cálculo proposicional, gostaríamos de saber quando a fórmula é verdadeira ou quando ela é válida.

Desde que no cálculo de predicados temos também a figura dos termos, precisamos entendê-los dentro das estruturas semânticas.

Sejam $a_1, ..., a_n \in A$ e consideremos que o conjunto das variáveis livres e ligadas de um termo $t(v_1, ..., v_n)$ esteja contido em $\{v_1, ..., v_n\}$. O *valor do termo* t em $a_1, ..., a_n$ é:

(i) $t(a_1, ..., a_n) = a_i$, quando $t = v_i$;

(ii) $t(a_1, ..., a_n) = a_k^{\mathcal{A}}$, quando $t = a_k$;

(iii) $t(a_1, ..., a_n) = f_j^{\mathcal{A}}(t_1(a_1, ..., a_n), ..., t_m(a_1, ..., a_n))$, quando $t = f_j(t_1, ..., t_m)$.

Seja **A** uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres e ligadas esteja contido em $\{v_1,$

..., $v_n\}$ e $a_1, ..., a_n \in A$. A estrutura $\mathcal{A}$ *satisfaz* a fórmula **A** se vale o seguinte:

(Caso 1) A fórmula **A** é atômica:

(i) se **A** é do tipo $t_1 = t_2$, então $a_1, ..., a_n$ satisfaz **A** na estrutura $\mathcal{A}$ quando $t_1(a_1, ..., a_n) = t_2(a_1, ..., a_n)$;

(ii) se **A** é do tipo $R_i(t_1, ..., t_k)$, $T_0(i) = k$ e $t_1(v_1, ..., v_n)$, então $a_1, ..., a_n$ satisfaz **A** em $\mathcal{A}$ se $R_i^{\mathcal{A}}(t_1(a_1, ..., a_n), ..., t_m(a_1, ..., a_n))$.

Denotamos a relação de satisfação, neste caso, por:

$$\mathcal{A} \vDash (t_1 = t_2)(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow t_1(a_1, ..., a_n) = t_2(a_1, ..., a_n)$$

$$\mathcal{A} \vDash R_i(t_1, ..., t_k)(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow R_i^{\mathcal{A}}(t_1(a_1, ..., a_n), ..., t_m(a_1, ..., a_n)).$$

(Caso 2) (i) **A** é do tipo $\neg$**B**: $\mathcal{A} \vDash \mathbf{A}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \nvDash \mathbf{B}(a_1, ..., a_n)$;

(ii) **A** é do tipo **B**$\to$**C**: $\mathcal{A} \vDash \mathbf{A}(a_1, ..., a_n)$ see $\mathcal{A} \nvDash \mathbf{B}(a_1, ..., a_n)$ou $\mathcal{A} \vDash \mathbf{C}(a_1, ..., a_n)$.

(Caso 3) (i) **A** é do tipo $(\forall v_i)$**B**, $1 \leq i \leq n$: $\mathcal{A} \vDash \mathbf{A}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \mathbf{B}(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)$, para todo $a \in A$.

Com esta definição, sabemos quando uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem é satisfeita em uma dada estrutura.

Assim, a fórmula $\mathbf{A}(v_1, ..., v_n)$ é *satisfatível* quando existem uma estrutura $\mathcal{A}$ e $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ tal que $\mathcal{A} \vDash \mathbf{A}(a_1, ..., a_n)$. Também dizemos que $\mathcal{A}$ é um *modelo* para $\mathbf{A}(v_1, ..., v_n)$.

A fórmula $\mathbf{A}(v_1, ..., v_n)$ é *válida* quando quaisquer que sejam a estrutura $\mathcal{A}$ e $(a_1, ..., a_n) \in A^n$, temos que $\mathcal{A} \vDash \mathbf{A}(a_1, ..., a_n)$.

Teorema 2.2.5.: (*Teorema da Completude de Gödel - 1930*) Seja **A** uma fórmula de $\mathcal{L}$. Então **A** é um teorema se, e somente se, **A** é uma fórmula válida. ■

Teorema 2.2.6.: O cálculo de predicados de primeira ordem $\mathcal{L}$ (clássico) é indecidível. ■

2.3. Teorias de primeira ordem

Agora estamos prontos para estender os cálculos estritamente lógicos para sistemas mais gerais, onde podemos analisar e discutir as teorias matemáticas.

Uma *teoria de primeira ordem* ou *teoria de* $\mathcal{L}$ é um conjunto consistente **T** de sentenças de $\mathcal{L}$.

Uma teoria **T** é *fechada* se, sempre que $\vdash_{\mathbf{T}} \mathbf{A}$, então $\mathbf{A} \in \mathbf{T}$, ou seja, **T** contém todas as suas conseqüências.

Denotamos o conjunto das sentenças de **T** por Sent(**T**). A teoria **T** é *completa* se $\{\mathbf{A} \in \text{Sent}(\mathbf{T}) \,/\, \vdash_{\mathbf{T}} \mathbf{A}\}$ é maximal e consistente.

Uma teoria **T*** é uma *subteoria* de **T** se $\mathbf{T}^* \subseteq \mathbf{T}$. Neste caso, também dizemos que **T** é uma extensão de **T***.

Um conjunto de *axiomas* Σ para **T** é um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$ com as mesmas conseqüências de **T**. A teoria **T** é *finitamente axiomatizável* se **T** tem um conjunto finito de axiomas não lógicos.

Podemos observar que **T** é sempre um conjunto de axiomas para **T**. O conjunto vazio $\varnothing$ é um conjunto de axiomas para os teoremas de $\mathcal{L}$.

Agora, apresentamos formalmente algumas importantes teorias matemáticas. Como algumas dessas teorias advêm de anteriores pelo acréscimo de novos axiomas, indicamos este acréscimo pelo símbolo +.

(a) Teoria das ordens parciais

Consideremos uma linguagem de primeira ordem com um símbolo relacional binário $\leq$. Os axiomas seguintes determinam a teoria das ordens parciais:

OP_1 $(\forall x)\ (x \leq x)$

OP_2 $(\forall x \forall y)\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow (x = y))$

OP_3 $(\forall x \forall y \forall z)\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow (x \leq z))$.

(b) Teoria das ordens lineares ou totais

Mesma linguagem da teoria de ordem parcial, com:

OP_1 - OP_3 +

OL_4 $(\forall x \forall y)\ (x \leq y \vee y \leq x)$.

(c) Teoria das ordens lineares densas

Mesma linguagem, com:

OP_1 - OP_3 + OL_4 +

OLD_5 $(\forall x \forall y)\ ((x \leq y \wedge x \neq y) \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge x \neq z \wedge z \neq y))$.

(d) Teoria das relações de equivalência

Consideremos uma linguagem de primeira ordem com um símbolo relacional binário $\sim$ e os axiomas:

EQ_1 $(\forall x)\ (x \sim x)$

EQ_2 $(\forall x \forall y)\ ((x \sim y) \rightarrow (y \sim x))$

EQ_3 $(\forall x \forall y \forall z)\ ((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow (x \sim z))$.

Um *modelo* para uma teoria de primeira ordem é uma estrutura de primeira ordem na qual todos os teoremas da teoria são satisfatíveis.

Teorema 2.3.1.: (*Teorema da Completude Forte*) Sejam **T** uma teoria de primeira ordem e $\Gamma \cup A$ um conjunto de sentenças de **T**. Então, $\Gamma \vdash_{\mathbf{T}} A$ see $\Gamma \vDash_{\mathbf{T}} \mathbf{A}$. ■

Corolário 2.3.2.: A teoria **T** é consistente se, e somente se, **T** tem modelo. ■

Finalmente, introduzimos uma última e importante teoria de primeira ordem.

(e) Teoria dos números ou Aritmética **Ar**

Consideremos uma linguagem de primeira ordem com igualdade, acrescida de dois símbolos funcionais + e ., para a adição e multiplicação; um símbolo funcional s, para a função sucessor; e duas constantes 0 e 1, com os axiomas:

A_1 $(\forall x)(s(x) \neq 0)$

A_2 $(\forall x \forall y)(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

A_3 $(\forall x)(x + 0 = x)$

A_4 $(\forall x \forall y)(x + s(y) = s(x + y))$

A_5 $(\forall x)(x.0 = 0)$

A_6 $(\forall x \forall y)(x.s(y) = (x.y) + x)$

A_7 (Esquema de axiomas para cada **A**)

Seja $\mathbf{A}(x_0, x_1, ..., x_n)$, na qual x_0 não ocorre ligada. Então:

$(\forall x_1 ... \forall x_n)[((\mathbf{A}(0, x_1, ..., x_n) \wedge (\forall y)(\mathbf{A}(y, x_1, ..., x_n) \rightarrow \mathbf{A}(s(y), x_1, ..., x_n))) \rightarrow \mathbf{A}(y, x_1, ..., x_n)]$.

O modelo natural ou "standard" para a aritmética é determinado pelo conjunto de todos os números naturais, junto com as operações de adição e multiplicação de naturais, a operação de sucessor, bem como as constantes 0 (zero) e 1 (um).

Além do interesse intrínseco desta teoria matemática, observamos que o seu modelo natural é o ambiente elementar e necessário para o desenvolvimento de quase tudo em matemática. Apesar disso, os resultados seguintes impõem limites consideráveis no processo recursivo axiomático que vimos tratando até aqui. Existem mais informações no modelo do que podemos obter no sistema formal correspondente.

Teorema 2.3.3.: (*Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel - 1931*) Se **Ar** é consistente, então existe uma fórmula **C** indecidível em **Ar**. ■

Teorema 2.3.4.: (*Segundo Teorema de Incompletude de Gödel*) Se **Ar** é consistente, então não é possível demonstrar a consistência de **Ar** dentro do sistema. ■

Assim, não podemos obter uma demonstração da consistência de **Ar** com recursos próprios do sistema **Ar**. Isto não significa que **Ar** seja inconsistente, ou mesmo que não se possa demonstrar a sua consistência através de outros métodos, o que, aliás, é o caso. Mas, estas demonstrações de consistência devem fazer uso de outros dispositivos além daqueles dispostos em **Ar**, ou dos procedimentos finitários pretendidos.

2.4. Primeiros passos na lógica

Indicamos, na bibliografia, textos clássicos, alguns textos introdutórios publicados em Português e alguns outros mais específicos.

Para estudantes iniciantes e ainda com dificuldades na leitura em Inglês, os seguintes textos poderiam ser pontos de partida: **Castrucci 1975**, **Alencar Filho 1986** e **Daghlian 1988** são recomendados para leitores que preferem as exatas; **Nolt 1991** e **Salmon 1984** são indicados para filósofos e oriundos de outras disciplinas das humanidades.

Um recente e bom texto introdutório de lógica, em Português, é **Mortari 2001**.

Para os que pretendem estudar lógica mais seriamente, indicamos: **Kleene 1952**, **Mendelson 1964**, **Shoenfield 1967** e **Bell & Machover 1977**. São clássicos.

São ainda bons textos para lógica matemática **Hamilton 1978** e **Ebbinghaus, Flum & Thomas 1984**.

3. As lógicas não-clássicas

Discutimos, nesta seção, o florescer das lógicas não-clássicas, destacando algumas das principais classes de tais lógicas.

3.1. O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX

Neste parágrafo, utilizando **da Costa 1992**, apresentamos algumas considerações sobre a matemática do século XIX, que muito influenciou a cultura e o pensamento em geral do século XX e contribuiu, direta ou indiretamente, para o surgimento da lógica matemática e, principalmente, das lógicas não-clássicas.

O século XIX foi um dos períodos áureos da matemática. Um dos marcos fundamentais foi o surgimento das geometrias não-euclidianas – geometrias distintas da geometria clássica – com os trabalhos de Lobachevski e Bólyai e, posteriormente, com os de Riemann.

Segundo da Costa, o surgimento das geometrias não-euclidianas talvez tenha sido um dos maiores acontecimentos na história da cultura e, até hoje, tais geometrias são motivações heurísticas ou analógicas para a construção das lógicas não-clássicas. Vasiliev e Lukasiewicz, na construção de seus sistemas não-clássicos, declararam-se motivados pelo surgimento das geometrias não-euclidianas.

Quanto à "geometria de Riemann", deve-se considerar não apenas a formalização usual da geometria riemanniana, mas também a teoria geral dos espaços de Riemann, com a concepção riemanniana de espaço, que mudou radicalmente a noção de espaço e constitui uma modificação tão radical quanto aquela provocada pela geometria de Lobatchevski e Bólyai.

Outra criação importante do século XIX foi a construção e desenvolvimento da geometria projetiva; com os trabalhos de Desargues, Poncelet e Chasles entre outros, uma geometria mais geral que a euclidiana e que se afasta da noção usual de espaço.

Todos os historiadores da matemática, que se interessam pelos princípios da geometria, consideram que o desenvolvimento da geometria projetiva pode ser comparado ao impacto, ainda que com menor intensidade, da geometria de Euclides; principalmente quando a geometria projetiva passou a desenvolver-se num plano puramente abstrato. O fato de que a geometria derivava de certos axiomas puramente formais não era claro na época.

Pela mesma época do surgimento das geometrias não-euclidianas, é criada a geometria a um número qualquer de dimensões, principalmente por Grassmann e Cayley. Esta geometria desenvolveu-se de forma abstrata, podendo tornar-se independente da geometria física, que é a ciência que estuda o espaço físico real.

Houve ainda uma grande revolução na área da álgebra, com a construção, por Hamilton, das álgebras não-comutativas.

A partir da criação do primeiro sistema matemático no qual a operação de multiplicação não é comutativa, Hamilton e toda a escola inglesa passaram a conceber a álgebra como algo abstrato. Ao mesmo tempo, Grassmann criou toda a álgebra linear, com a teoria dos espaços vetoriais.

Nesse sentido, com Hamilton e Grassmann efetuou-se uma mudança radical na maneira de se encarar a matemática, que passou a se tornar abstrata, começando a separar-se das ciências naturais, especialmente da física. A matemática francesa tardou a adquirir essa visão da matemática, que para os alemães já era bastante clara, pois no início do século XX, com Poincaré e outros, a matemática era algo difícil de se separar da física.

Outro processo fundamental foi a evolução do método axiomático, graças ao trabalho pioneiro de Peano e sua escola e de vários matemáticos alemães, coroado na obra de Hilbert. O grande mérito da concepção genial e revolucionária de Hilbert está claro em um célebre discurso de 1900, em que afirma que no verdadeiro método axiomático se deveria tratar de todas as possibilidades lógicas existentes.

É necessário ainda mencionar o processo, de origem principalmente alemã, de aritmetização da análise.

Até meados do século XX, os matemáticos franceses em geral concebiam a matemática como algo de natureza intuitiva, uma espécie de ciência física. Os matemáticos alemães, principalmente a partir da influência de Cantor, conceberam a matemática como uma ciência puramente abstrata, assumindo que era necessário reconstruí-la logicamente, o que causou impactos sérios, já por nós discutidos.

Finalmente, temos a obra de Cantor, o criador da teoria de conjuntos, com a modificação definitiva de paradigma que ela ocasionou.

Considera-se que só existem duas coisas que se comparam à obra de Cantor: a edificação da matemática grega e a criação da análise infinitesimal por Leibniz e Newton.

A grande lição de Cantor resume-se em uma frase célebre: "A essência da matemática radica na sua completa liberdade". Ou seja, é possível desenvolvê-la em plano totalmente independente do mundo físico real.

O século XIX nos legou a visão abstrata cantoriana e a visão concreta francesa de Poincaré, Borel, Lesbegue, etc.

A matemática e a lógica de hoje são espécies de sínteses da posição francesa e da alemã.

Da Costa finaliza seu artigo resumindo alguns aspectos da história da matemática que influenciaram a criação da lógica atual e das lógicas não-clássicas: "as geometrias não-euclidianas sugeriram a possibilidade de lógicas diferentes da clássica; a geometria projetiva contribuiu para que se concebesse a lógica de maneira formal e abstrata; as obras de

Cayley, Grassmann e Hamilton corroboraram a importância dos desenvolvimentos provocados pelo impacto das geometrias não-euclidianas; o cantorismo conduziu às axiomatizações da teoria de conjuntos e à formulação das chamadas lógicas abstratas; e a concepção matemática de Poincaré e de outros matemáticos franceses desembocou no construtivismo contemporâneo das lógicas intuicionistas".

3.2. Século XX: a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas

A teoria de conjuntos usual, sobre a qual se pode fundamentar a aritmética (e, portanto, toda a matemática tradicional), mantém a lógica clássica, com seus princípios básicos – as leis básicas do pensamento Aristotélico –, como lógica subjacente.

Entretanto, os paradoxos da teoria de conjuntos e questões não solucionadas sobre o conceito de infinito deixavam ainda aos lógicos problemas relativos à fundamentação da matemática.

O programa de Hilbert, a partir de 1902, tinha por objetivo provar que tais dificuldades podiam ser superadas, mediante uma formalização adequada que permitisse a demonstração metateorética da consistência da aritmética e, portanto, da matemática. **Hilbert & Bernays 1934** (segunda edição em 1939) é um tratado de lógica moderna e contém as idéias de Hilbert sobre os fundamentos da matemática, caracterizando a distinção entre linguagem objeto e metalinguagem (na terminologia de Hilbert, entre matemática e metamatemática).

Entretanto, os famosos Teoremas de Incompetude de Gödel, publicados em 1931, destruíram o programa de Hilbert:

- (*Primeiro Teorema*) Se a aritmética, **Ar**, é consistente, então existe uma fórmula **C**, na linguagem de **Ar**, tal que nem **C**, nem tampouco ¬**C** podem ser demonstradas em **Ar**.
- (*Segundo Teorema*) Se o sistema formal **Ar** é consistente, então não é possível demonstrar a sua consistência dentro do sistema **Ar**.

Uma conseqüência desses resultados é que qualquer sistema formal, por mais bem construído que seja, se satisfaz certas condições essenciais da aritmética dos números naturais, então admite sentenças verdadeiras, porém não demonstráveis no sistema.

Já no final do século XIX, alguns trabalhos pioneiros, buscando soluções não-aristotélicas para algumas questões lógicas, foram precursores das lógicas não-clássicas em geral, como os de MacColl.

Nas primeiras décadas do século XX, vários filósofos e matemáticos, motivados por questões e objetivos algumas vezes distintos, criaram novos sistemas lógicos, diferentes da lógica aristotélica.

Podemos afirmar que as lógicas não-clássicas diferenciam-se da lógica clássica por:

(i) Poderem estar baseadas em linguagens mais ricas em formas de expressão;
(ii) Poderem estar baseadas em princípios inteiramente distintos; ou
(iii) Poderem ter uma semântica distinta.

Haack 1974 considera duas categorias principais de *lógicas não-clássicas*: as que são apresentadas como *complementares da clássica* e as *lógicas alternativas* a ela.

As do primeiro tipo não infringem os princípios básicos da lógica clássica e não questionam sua validade universal, apenas ampliam e complementam o seu escopo. Em geral, a linguagem clássica é enriquecida com a introdução de novos operadores. São exemplos de lógicas complementares, as *lógicas modais*, com os operadores modais de possibilidade e necessidade; as *lógicas deônticas*, com os operadores deônticos proibido, permitido, indiferente e obrigatório; as *lógicas do tempo*, com operadores temporais, relevantes para os fundamentos da física e para a lingüística; as *lógicas epistêmicas, lógicas imperativas*, etc.

As *lógicas heterodoxas* (*alternativas*, *desviantes*), rivais da lógica clássica, foram concebidas como novas lógicas, destinadas a substituir a lógica clássica em alguns domínios do saber. Derrogam princípios básicos da lógica clássica.

As lógicas heterodoxas nas quais não vale a lei reflexiva da identidade, são chamadas *lógicas não-reflexivas*, como, por exemplo, a lógica quântica. Alguns sistemas não-reflexivos fortes englobam a lógica clássica.

Nas *lógicas paracompletas* não é válido o princípio do terceiro excluído, ou seja, pode existir fórmula ***A*** tais que nem ***A*** e nem a negação de ***A*** não são teoremas. São lógicas paracompletas as *lógicas intuicionistas* e as *lógicas polivalentes*.

Uma solução radical para o problema dos paradoxos foi defendida por Brouwer e sua escola intuicionista, considerando que os paradoxos não podem ser derivados e, portanto, não têm significado, se obedecermos às estruturas intuicionistas. De fato, na época do surgimento da lógica intuicionista não se tinha ainda a garantia última de que não se podia derivar paradoxos nesse sistema, tinha-se apenas a expectativa de que dada as peculiaridades dos sistemas intuicionistas, a consistência da aritmética intuicionista fosse mais facilmente verificada.

Nas lógicas polivalentes as proposições podem assumir outros valores de verdade entre o verdadeiro (1) e o falso (0).

O princípio da (não-) contradição é derrogado nas lógicas relevantes e na maioria das lógicas paraconsistentes.

Nas *lógicas relevantes*, introduzidas em **Ackermann 1956** e especialmente desenvolvidas em **Anderson & Belnap 1976**, a idéia básica é a obtenção de uma implicação (*entailment* ou *implicação relevante*) livre dos chamados paradoxos da implicação material.

Uma teoria é *consistente* se não existe uma fórmula **A** de sua linguagem tal que **A** e a negação de **A** sejam teoremas; é inconsistente, em caso contrário; e é trivial se toda fórmula de sua linguagem é teorema.

Toda teoria dedutiva baseada na lógica clássica é inconsistente se, e somente se, é trivial.

Uma lógica é dita *paraconsistente* se pode ser usada como a lógica subjacente para teorias inconsistentes e não triviais, que são chamadas *teorias paraconsistentes*.

A grande relevância das teorias paraconsistentes, no que concerne aos paradoxos, é que eles podem ser naturalmente absorvidos pela teoria, sem quebra da força lógica, ou seja, sem trivialização.

Existem vários outros tipos de lógicas não-clássicas como, por exemplo, as *lógicas difusas* (*lógicas fuzzy*).

Não podemos também deixar de mencionar certos sistemas interessantes, com simultaneamente várias das características de algumas das lógicas citadas.

A lógica moderna evoluiu muito e, com relação a alguns tipos de lógica, seria difícil poder identificá-las como complementares da clássica, ou heterodoxos.

O surgimento das lógicas heterodoxas deu origem, sem dúvida, a importantes problemas filosóficos. Porém, seu significado parece ainda não ter sido debatido em profundidade.

Apresentamos, a seguir, considerações específicas sobre o surgimento das lógicas polivalentes, intuicionistas, modais e paraconsistentes.

3.3. Lógicas polivalentes

Jan Łukasiewicz (1876-1956) introduziu seus sistemas de lógicas polivalentes como uma tentativa de investigar as proposições modais e as noções de possibilidade e necessidade intimamente relacionadas com tais proposições.

Durante a idade média, entretanto, podemos encontrar sinais de abordagens polivalentes nos trabalhos de Duns Scotus, William de Ockham e Peter de Rivo. No final do século XIX, algumas tentativas de construções trivalentes aparecem em MacColl e Peirce.

Łukasiewicz, professor de filosofia na Universidade de Varsóvia, em 1910 publicou um livro, em polonês, na série Studium Krytyczne e, em alemão, um artigo no *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie,* ambos sobre o princípio da (não-) contradição em Aristóteles.

Nesses trabalhos, Łukasiewicz discute a relevância e necessidade de se provar o princípio da (não-) contradição e analisa os argumentos construídos para esclarecê-lo.

No artigo, traduzido para o inglês em 1971, na *Review of Metaphysics,* apresenta uma "exposição historicamente crítica" das três formulações aristotélicas do princípio da (não-) contradição e também critica, conclusivamente, as tentativas de Aristóteles para justificá-las.

Łukasiewicz finalmente rejeita a visão aristotélica de que o princípio da (não-) contradição é o último e maior dos princípios lógicos. E conjectura que, como no caso das geometrias não-euclidianas, "uma revisão fundamental das leis básicas da lógica de Aristóteles poderia, talvez, levar a novos sistemas não-aristotélicos de lógica", caracterizando-se assim como um dos precursores das lógicas não-clássicas em geral.

Os argumentos utilizados por Łukasiewicz são analisados, em detalhe, em **Priest & Routley 1989** e discutidos em **D'Ottaviano 1990a**.

De acordo com **Woleński 1989**, os trabalhos de Łukasiewicz sobre o princípio da (não-) contradição despertaram muito interesse entre jovens estudantes e filósofos poloneses, tendo desencadeado frutíferas discussões sobre a possibilidade da criação de lógicas não-aristotélicas, e tendo sido escritos vários trabalhos sobre o conceito de existência, a veracidade de sentenças envolvendo a noção de futuro, sobre determinismo, indeterminismo, o princípio da (não-) contradição e o princípio do terceiro excluído.

Łukasiewicz, apesar de ter publicado, ainda em 1910, um outro artigo sobre o princípio do terceiro excluído, manteve-se silencioso sobre essas questões até 1916, quando, ao publicar seus comentários a respeito de um livro de Zaremba sobre aritmética teórica, voltou a enfatizar que a precisão em matemática era usualmente medida pelas regras da lógica tradicional, porém que isso tinha se tornado insuficiente.

Em 1918, quando se afastava temporariamente da Polônia, em seu discurso de despedida, Łukasiewicz mencionou, sem divulgar detalhes, que tinha construído um sistema de lógica trivalente.

Em 1920, finalmente, ao retornar à Polônia, Łukasiewicz proferiu duas conferências em Łvov, uma sobre o conceito de possibilidade e outra sobre a lógica trivalente, na qual introduziu uma matriz-base para a descrição dos conectivos do sistema.

É interessante observarmos que Łukasiewicz, ao assumir a existência de sentenças às quais deveria ser atribuído um terceiro valor de verdade, distinto dos clássicos verdadeiro ou falso, não rejeitou os princípios lógicos da (não-) contradição ou do terceiro excluído, tendo, entretanto, conectado sua solução com a negação do princípio metalógico da bivalência.

As proposições modais investigadas por Łukasiewicz são proposições construídas tendo como modelo uma das seguintes expressões: *é possível que p, não é possível que p, é possível que não-p (é contingente que p)* e *não é possível que não-p (é necessário que p)*.

A frase '*é possível que p*' foi tomada como primitiva e Łukasiewicz expressou seu significado através de três asserções modais, por ele consideradas como básicas, por razões intuitivas e históricas. E explicou que não seria possível dar uma interpretação, através das tábuas de verdade clássicas, para o operador de possibilidade, compatível com as três propriedades básicas por ele enunciadas.

Baseando-se nesse resultado, Łukasiewicz concluiu que, para que fosse possível dar uma interpretação da tábua de verdade para o conectivo proposicional de possibilidade, seria necessário considerar uma semântica para o cálculo proposicional na qual as proposições pudessem admitir mais valores de verdade que os clássicos verdadeiro e falso.

Como está explicado em **Łukasiewicz & Tarski 1930,** Łukasiewicz escolheu os valores de verdade possíveis, inspirado numa passagem de **Aristóteles 1978 -** Capítulo IX, sobre os futuros contingentes e determinismo.

Assim sendo, para proposições *p* do tipo "haverá uma batalha naval amanhã", Łukasiewicz atribuiu um valor de verdade $v(p)$ intermediário entre a verdade (1) e o falso (0), o qual foi denotado por ½.

Łukasiewicz introduziu seu cálculo proposicional trivalente $\boldsymbol{L_3}$ através da matriz M = ({0,

½, 1}, {1}, ¬, →), em que {0, ½, 1} é o conjunto dos valores de verdade, {1} o conjunto de valores distinguidos de verdade e os operadores ¬ (de negação) e → (de implicação) definidos através das seguintes tabelas de verdade:

p	¬p
0	1
½	½
1	0

→	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

O conectivo de possibilidade *M* é definido por:

$$M(p) =_{df} \neg p \to p,$$

tendo como tábua correspondente:

p	Mp
0	0
½	1
1	1

Os conectivos de disjunção, conjunção, necessidade e equivalência são definidos a partir dos anteriores.

Em 1922, Łukasiewicz generalizou seu cálculo proposicional trivalente para uma lógica com qualquer número finito de valores lógicos. E, a seguir, generalizou-a para cálculos com número infinito de valores de verdade. Definiu uma família $\boldsymbol{L_n}$ de sistemas polivalentes com *n* valores de verdade, *n* = 2, 3, ... $\aleph_0$, $\aleph_1$.

Independentemente de Łukasiewicz e motivado por propriedades formais das proposições, **Post 1921** também introduziu uma hierarquia de cálculos finitovalentes, os sistemas $\boldsymbol{P_n}$, $n \geq 3$, distintos dos sistemas $\boldsymbol{L_n}$, $n \geq 3$.

Uma exposição detalhada dos sistemas polivalentes de Łukasiewicz foi publicada em **Łukasiewicz & Tarski 1930** (ver **Tarski 1956** e **Borkowski 1970**).

É importante observarmos que o cálculo proposicional bivalente de Łukasiewicz coincide com o cálculo proposicional clássico; e todas as lógicas *n*-valentes de Łukasiewicz, com *n* finito ou infinito, são subsistemas do cálculo proposicional clássico (quando entendidos como conjuntos de teoremas).

Łukasiewicz havia conjecturado quais seriam as axiomáticas adequadas para seu cálculo trivalente $\boldsymbol{L_3}$ e para seu cálculo $\aleph_0$-valente $\boldsymbol{L_{\aleph_0}}$. As axiomáticas para os cálculos $\boldsymbol{L_3}$ e $\boldsymbol{L_n}$ (com *n* finito) foram introduzidas por **Wajsberg 1931** e **1935**.

Wajsberg 1935 mencionou ter provado a conjectura de Łukasiewicz relativa à axiomatização do cálculo $\boldsymbol{L_{\aleph_0}}$, porém sua demonstração nunca apareceu publicada.

A primeira demonstração publicada da conjectura de Łukasiewicz foi a de **Rose & Rosser 1958**.

Como referência bibliográfica para o estudo das lógicas polivalentes em geral, indicamos **Malinowski 1993**.

3.4. Lógicas intuicionistas e modais

O fundador do chamado intuicionismo é o matemático holandês L. E. Brouwer (1881 - 1966). No início do século XX apresentou a idéia de que qualquer verdade matemática é o resultado de uma construção intelectual baseada na intuição mental da série de números. Uma conseqüência dessa suposição filosófica é que pode acontecer que não tenhamos uma construção (uma prova) nem para a proposição **A** e nem para sua negação não-**A**. Segue-se então que a chamada Lei do Terceiro Excluído "**A** ou não-**A**" deve ser rejeitada, não podendo ser usada como um instrumento em demonstrações matemáticas. Dada sua atitude mentalística, Brouwer era crítico em relação ao uso do formalismo lógico, mas seu aluno A. Heyting apresentou, em 1930, um cálculo formal que é igual ao clássico com a o-missão da Lei do Terceiro Excluído. Kolmogorov, em 1925, já havia introduzido, entretanto, a primeira axiomatização para a lógica intuicionista (ver **Kolmogorov 1977**).

A lógica intuicionista de Heyting é um subsistema (enquanto conjunto de teoremas) da lógica clássica, ao passo que as lógicas modais são extensões lingüísticas e axiomáticas dela. A lógica modal era um ramo altamente desenvolvido das lógicas antiga e medieval e, assim, chamá-la de "não-clássica" soa como uma injúria não intencional à sua venerável tradição. No entanto, quando a lógica foi reconstruída, no século XIX, como uma ciência rigorosa, não havia espaço para um tratamento lógico de conceitos modais, ou seja, para as noções de necessário, possível, impossível e contingente.

C. I. Lewis (1883 - 1964), o pai da lógica modal contemporânea, dirigiu seu ataque à lógica matemática não tanto pela proposta desta de reduzir a lógica modal à teoria da quantificação, mas por seu questionável tratamento da implicação. Como é bastante conhecido, a implicação russelliana – o condicional material – de fato reduz toda sentença da forma "se **A**, então **B**" para a disjunção "não-**A** ou **B**", com o resultado paradoxal de que se um destes disjuntos é verdadeiro, a implicação como um todo também é verdadeira. Lewis conjeturou que a interpretação correta de "se *p*, então *q*" é: "é impossível que *p* seja verdadeiro e *q* falso", empregando assim essencialmente a noção modal de possibilidade. Para axiomatizar a noção de implicação em um sentido estrito, Lewis introduziu não um, mas cinco diferentes sistemas, com poderes crescentes ($\boldsymbol{S_1} - \boldsymbol{S_5}$), introduzindo dessa maneira, pela primeira vez, a inquietante pluralidade de sistemas lógicos dedicados a axiomatizar a mesma noção. Infelizmente, mesmo sendo capaz de provar que seus cinco sistemas eram distintos, ele não forneceu procedimentos de decisão para esses sistemas.

No final dos anos 50, vários lógicos – Hintikka, Kanger, Montague, Kripke – conseguiram associar uma semântica a sistemas modais fortes e fornecer um procedimento de decisão para eles.

3.5. Lógicas paraconsistentes

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, num certo sentido, restringido. Podemos mesmo dizer que, se a força desse princípio é restringida num sistema lógico, então o sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes.

De fato, nas lógicas paraconsistentes o princípio da (não-) contradição, na forma $\neg(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{A})$, não é necessariamente não válido, porém, em toda lógica paraconsistente, de uma fórmula **A** e sua negação $\neg$**A** não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula **B**.

Apesar da filosofia oriental ter sido, em geral, mais tolerante com a inconsistência que a ocidental, abordagens paraconsistentes não foram tão excepcionais na Antigüidade clássica, tendo sido assumidas por diversas escolas filosóficas, como, por exemplo, pelos sofistas, megáricos e estóicos.

Podemos dizer, entretanto, que o pensamento paraconsistente começa no ocidente com Heráclito de Éfeso.

Desde Heráclito, diversos filósofos, entre eles Hegel, Marx, Engels e os materialistas dialéticos contemporâneos têm proposto a tese de que as contradições são fundamentais para a compreensão da realidade.

No começo do século XX, a paraconsitência foi, definitivamente, descoberta por vários estudiosos, todos eles trabalhando independentemente.

Em 1910, além da publicação do artigo e livro de Łukasiewicz, temos a publicação do primeiro artigo de Vasiliev sobre lógicas não-clássicas, e a segunda edição revisada do texto básico da teoria dos objetos de Meinong.

A *teoria de objetos de Meinong* incluía objetos contraditórios, os quais, devido à sua natureza, têm características contraditórias e são susceptíveis de tratamento lógico.

A teoria de Meinong parece ter influenciado o trabalho de Łukasiewicz em sua fase inicial.

Meinong trabalhou dentro da lógica tradicional e nenhum deles, Meinong, Łukasiewicz ou Vasiliev usou lógica moderna simbólica.

Podemos afirmar, entretanto, que os dois verdadeiros precursores da lógica paraconsistente são J. Łukasiewicz e N. Vasiliev.

Vasiliev era médico, professor de filosofia na Universidade de Kazan, Rússia. Parece não ter tido conhecimento dos trabalhos de Łukasiewicz de 1910, mas seus argumentos sobre a possibilidade da construção de lógicas não-aristotélicas são muito semelhantes. É interessante ter ele também argumentado que a lei do terceiro excluído aparecia na "mente de Aristóteles com o objetivo de refutar seus adversários, e não por razões lógicas".

Entre 1910 e 1913 (ver **Arruda 1990**) publicou, em russo, uma série de quatro artigos, nos quais apresentou suas idéias sobre a possibilidade de derrogação de algumas formas da lei do terceiro excluído e da lei da (não-) contradição.

Arruda 1977 apresenta três abordagens diferentes às idéias intuitivas de Vasiliev, relativas à sua lógica imaginária de dimensão 3, obtendo em cada caso uma lógica paraconsistente. Arruda afirma acreditar que qualquer possível formalização da lógica imaginária de Vasiliev deveria conduzir necessariamente a uma lógica paraconsistente, e não a uma lógica polivalente, como aparece em **Church 1936** e **Kline 1965**, entre outros.

Jaśkowski, um dos discípulos de Łukasiewicz, motivado por diversos problemas relativos a contradições, particularmente os concernentes a "raciocínios convincentes que levam a duas conclusões contraditórias", construiu o primeiro sistema de lógica paraconsistente. Seus dois artigos foram publicados em 1948 e 1949, em polonês, tendo a primeira tradução para o inglês, de **Jaśkowski 1948**, aparecido apenas em **Jaśkowski 1969**.

De acordo com **Arruda 1989**, as principais motivações de Jaśkowski para a construção de seu sistema são as seguintes: o problema da sistematização de teorias que contêm contradições, como ocorre na dialética; o estudo de teorias nas quais existem contradições causadas pela "vaguidade"; e o estudo direto de algumas teorias empíricas cujos postulados ou princípios básicos são contraditórios.

Jaśkowski salientou claramente a diferença entre sistemas contraditórios, que incluem duas teses tais que uma contradiz a outra, e sistemas supercompletos, nos quais todas as fórmulas são teses, e considerou que a lógica clássica não é adequada para o estudo de sistemas contraditórios porém não super-completos.

Baseado nessas idéias, Jaśkowski propôs o problema da construção de um cálculo proposicional com as seguintes propriedades:

(i) Quando aplicado a sistemas contraditórios não levaria sempre à sua supercompletude;
(ii) Deveria ser suficientemente rico para permitir inferências práticas;
(iii) Deveria ter uma justificativa intuitiva.

Jaśkowski construiu sua própria solução, apenas no nível proposicional, obtida a partir do sistema modal $\boldsymbol{S_5}$, conhecida como *lógica discussiva* ou *discursiva* e denotada por $\boldsymbol{D_2}$.

A lógica discussiva é compreendida como uma formalização da lógica do discurso e, além de ser paraconsistente, é também não-adjuntiva.

As idéias subjacentes à construção do sistema $\boldsymbol{D_2}$ são bastante interessantes e conectam as lógicas discussivas com outras classes de lógicas não-clássicas recentemente estudadas, como, por exemplo, as *lógicas doxásticas* e as *lógicas não-monotônicas*, estas últimas de interesse para a ciência da computação.

3.5.1. Newton Carneiro Affonso da Costa

Apesar de Jaśkowski ter construído um cálculo proposicional paraconsistente, podemos dizer que o brasileiro N. C. A. da Costa é o verdadeiro fundador da lógica paraconsistente.

Nos anos 50, sem conhecer os trabalhos de Jaśkowski sobre o sistema $\boldsymbol{D_2}$, da Costa começou a desenvolver suas idéias sobre a importância do estudo das teorias contraditórias.

Em 1958 e 1959, da Costa publicou, em português, seus primeiros trabalhos '*Uma nota sobre o conceito de contradição*' e '*Observação sobre o conceito de existência em matemática*'. **Da Costa 1958** propõe o seguinte *Princípio de Tolerância em Matemática:*

> "*do ponto de vista sintático e semântico, toda teoria é aceitável, desde que não seja trivial*".

As idéias de da Costa estavam completamente desenvolvidas em 1963 (ver **da Costa 1963 e 1963a**), quando começou a publicar uma série de artigos, contendo suas hierarquias de lógicas de primeira ordem para o estudo de teorias inconsistentes e não-triviais. **Da Costa 1963** introduz os sistemas $\boldsymbol{C_n}$, $1 \leq n \leq \omega$ e começa com as seguintes palavras:

> Falando sem rigor, a idéia central deste artigo é a seguinte: um sistema formalizado baseado na lógica clássica (ou lógica intuicionista, ou algumas lógicas polivalentes...), se inconsistente é trivial, no sentido de que todas as suas proposições são demonstráveis; então, deste ponto de vista, ele não tem nenhum interesse matemático. Entretanto, por muitas razões, como por exemplo, a análise comparativa com sistemas consistentes, e para uma análise metamatemática adequada do princípio em consideração, é conveniente estudar 'diretamente' os sistemas inconsistentes. Mas para tal estudo é necessário construir novos tipos de lógica elementar apropriados para lidar com tais sistemas.

Uma visão geral dos resultados publicados entre 1963 e 1974 está em **da Costa 1974**.

Da Costa construiu inicialmente uma hierarquia de cálculos proposicionais $\boldsymbol{C_n}$, $1 \leq n \leq \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) O princípio da contradição, na forma $\neg(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{A})$, não deveria ser válido em geral;
(ii) De duas premissas contraditórias **A** e $\neg\mathbf{A}$, não deveríamos deduzir qualquer fórmula **B**;
(iii) Eles deveriam conter os mais importantes esquemas e regras da lógica clássica compatíveis com as duas primeiras condições.

A seguir, da Costa estendeu os $\boldsymbol{C_n}$ a uma hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem $\boldsymbol{C_n^*}$, $1 \leq n \leq \omega$; de cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade $\boldsymbol{C_n^=}$, $1 \leq n \leq \omega$; de cálculos de descrições $\boldsymbol{D_n}$, $1 \leq n \leq \omega$; e de teorias de conjuntos $\boldsymbol{NF_n}$, $1 \leq n \leq \omega$, inconsistentes porém aparentemente não-triviais.

Da Costa, seus discípulos e colaboradores, em especial Arruda (entre 1964 e 1983), têm pesquisado vários sistemas paraconsistentes, tendo obtido resultados relativos à decidibilidade dos sistemas, estruturas algébricas a eles correspondentes, teoria de modelos, significado filosófico e relações com outros tipos de lógicas não-clássicas.

Com colaboradores poloneses, discípulos de Jaśkowski, da Costa axiomatizou e desenvolveu resultados relativos ao sistema $\boldsymbol{D_2}$ de Jaśkowski e outras lógicas discussivas.

Desde 1964 as lógicas de da Costa têm sido largamente estudadas por muitos lógicos de vários países, como Austrália, Bulgária, Itália, Polônia, Rússia e Estados Unidos, tendo muitos autores contribuído para o desenvolvimento dessas lógicas e da lógica paraconsistente em geral.

O primeiro livro enciclopédico sobre lógica paraconsistente é **Priest**, **Routley & Norman 1989**.

Em julho de 2003 realizou-se em Toulouse, França, o "III World Congress on Paraconsistency". O primeiro realizou-se em Ghent, Bélgica, em 1997; o segundo, em Juquehy, São Sebastião, São Paulo, organizado pela Sociedade Brasileira de Lógica e pelo Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, em 2000 (ver **Carnielli, Coniglio & D'Ottaviano 2002**).

Considerações finais

Com a crise dos paradoxos, no início do século XX, a publicação dos *Principia* e a criação das teorias de conjuntos, a "ciência acabada" de Kant passou por significativas transformações, que desencadearam em grande desenvolvimento, com a criação de várias áreas de pesquisa, e caracterizaram-na sob certos aspectos como disciplina da matemática.

O desenvolvimento das lógicas não-clássicas em geral tem aberto várias áreas de pesquisa e propiciado a solução de importantes questões da matemática, dos fundamentos da física e da ciência da computação.

Várias aplicações das lógicas polivalentes têm sido estudadas e desenvolvidas, tais como à teoria de circuitos elétricos, à lingüística, à programação de computadores e à teoria das probabilidades, tendo Reichenbach tentado utilizá-las nos fundamentos da mecânica quântica.

Porém, nos dias atuais, o interesse pelas lógicas polivalentes está crescendo rapidamente, devido principalmente às suas recentes aplicações inovadoras no tratamento da informação em condições de incerteza e aos problemas que daí se originam, inclusive de computabilidade e complexidade. Para o estudo dessas aplicações, o tratamento algébrico é imprescindível. Como referência, indicamos **Cignoli, D'Ottaviano & Mundici 1995** e **2000**.

Um dos avanços recentes da lógica modal que merece ser mencionado é a lógica dinâmica, ou seja, a lógica que representa processos de computação.

A lógica dinâmica pode ser vista como uma aplicação da lógica modal à informática, e oferece um exemplo significativo da incrível fertilidade da semântica de Kripke. As aplicações mais penetrantes da semântica modal podem, porém, ser encontradas no campo da lingüística. De fato, vários fragmentos do discurso comum têm sido analisados por meio de instrumentos derivados das lógicas modais: basta mencionar os tempos verbais (vide as lógicas do tempo – "tense logics") e os modos (vide as lógicas dos condicionais subjuntivos, a lógica imperativa, as lógicas interrogativas). Podemos também lembrar que o complicado mecanismo da chamada gramática de Montague é um subproduto da semântica modal.

A lógica paraconsistente está intimamente ligada a outros tipos de lógicas não-clássicas, especialmente à lógica dialética, lógica relevante, lógicas polivalentes e intuicionistas, lógica "difusa", à teoria geral da vaguedade e teoria dos objetos de Meinong, bem como às teses lógicas do "último" Wittgenstein.

O estudo das lógicas paraconsistentes, além de permitir a construção de teorias paraconsistentes, torna possível o estudo direto dos paradoxos lógicos e semânticos, sem tentar evitá-los; o estudo de certos princípios em toda sua força, como o princípio da compreensão na teoria de conjuntos; e talvez ele nos permita uma melhor compreensão do conceito de negação.

Entretanto, uma análise profunda e completa do significado filosófico e conseqüências filosóficas da lógica paraconsistente parece ainda não ter sido realizado.

Trabalhos recentes conectam a lógica paraconsistente com o estudo de teorias baseadas em *linguagens semanticamente fechadas*, com os *fundamentos da mecânica quântica* e do *cálculo infinitesimal*.

Entre as aplicações da lógica paraconsistente estão seu uso em ética, lógica doxástica e teoria das probabilidades.

Como afirma **Carnielli 1992**, é geralmente aceito que a obra de Frege tenha sido responsável por separar definitivamente a Lógica da Filosofia, e também da Matemática. A nova ciência, com métodos "exatos" como os da Matemática e interesses tão amplos como os da Filosofia, que lhe conferiam um caráter abstrato e idealizado, dedicava-se às conseqüências mais profundas de grandes simplificações universais. Criava-se para os lógicos a formidável tarefa de reorganizar os fundamentos da Matemática.

Com o surgimento das lógicas não-clássicas, houve o interesse e a possibilidade da formalização de universos de discurso mais complexos que o domínio matemático.

O amadurecimento da teoria da computabilidade colocou ainda em evidência dois fatos fundamentais: nem todos os procedimentos matemáticos são computáveis, e nem todos os que podem ser em princípio computáveis podem ser computados na realidade. Na verdade, dentre a grande quantidade de problemas reais de interesse tecnológico, poucos podem ser tratados computacionalmente de maneira factível, dentro das limitações humanas e mecânicas.

Surgiu, então, uma questão de grande relevância: estudar rigorosamente a inteligência humana e os processos cognitivos, e formalizar a criatividade e o processo humano de decisão.

Não é difícil perceber, portanto, além de novos e imprevistos usos da lógica clássica, a conexão entre as lógicas não-clássicas e a inteligência artificial, que tem como um de seus interesses os processos de raciocínio que podem ser formulados e controlados no universo matemático computável e, naturalmente, deve basear-se na lógica.

Estamos vivendo uma nova revolução da lógica, com o surgimento de novos paradigmas – ligados ao advento dos computadores e de novas áreas da ciência.

As lógicas paraconsistentes, entendidas como teorias formais que suportam teorias inconsistentes, porém, não triviais, constituem uma solução natural para o tratamento da questão da tolerância a falhas: um sistema inteligente tem que trabalhar sob imprecisão de linguagem, de especificações de todo tipo, e inclusive imprecisões de consistência. Outras soluções têm sido propostas, baseadas sempre em algum tipo de adaptação das regras lógicas, como é o caso, por exemplo, das *lógicas não-monotônicas*.

Outra classe importante de lógicas não-clássicas, sob o ponto de vista de tolerância a falhas, é a classe das *lógicas difusas*, ou *fuzzy logics*, hoje utilizadas com grande sucesso na tecnologia de ponta, principalmente na indústria japonesa.

A teoria das lógicas difusas iniciou-se em **Zadeh 1965**, com a introdução da primeira *teoria de conjuntos difusos*. O grande interesse nas lógicas difusas, tanto teórico quanto prático, tem gerado extensa literatura, porém podemos dizer que uma teoria das lógicas difusas ainda está pouco estruturada e estudada do ponto de vista matemático.

Hoje, vários sistemas ditos multilógicos, envolvendo nuances da racionalidade humana como crença, conhecimento, raciocínio por analogia, hipotético e temporal estão sendo estudados e analisados, fazendo com que a lógica como disciplina se consolide como uma área do conhecimento ao mesmo tempo muito abstrata e largamente aplicável.

Uma das áreas científicas nas quais o Brasil é respeitado internacionalmente, com liderança indiscutível, é a área das lógicas não-clássicas, em particular das lógicas paraconsistentes, graças à Escola criada por seu fundador, Newton C. A. da Costa. Toda a obra de da Costa, os grupos de pesquisa com que colaborou e os que criou, seus discípulos e colaboradores do Brasil e do exterior, os títulos honoríficos e prêmios que tem recebido, atestam a importância de sua contribuição à Filosofia e à Ciência.

Em um livro recente, **Logiques Classiques e Non-Classiques: essai sur les fondements de la logique (da Costa 1997)**, da Costa discute as relações entre razão e lógica, bem como as conexões entre atividade racional, que é refletida pela lógica, e a experiência. Está interessado nas questões:

- Existe uma única razão?
- Existe uma única lógica?
- Estamos derrubando a lógica clássica?

A todas essas questões, da Costa responde negativamente – justifica sua crença de que a razão se constitui através da História, seguindo principalmente a contingência originada pelo progresso científico.

Nesse sentido, a natureza *a priori* da razão parece relativa. A razão se transforma em um elemento constitutivo da cultura de uma dada época tendo, portanto, conotações sociais e culturais, relativamente à sua própria história.

A despeito da ambigüidade do termo, da Costa considera que a razão é dialética, evoluindo de acordo com o avanço da ciência, sendo suas categorias históricas.

A razão não pode ser codificada *a priori*, via um determinado sistema lógico fixo.

Concordamos plenamente com da Costa – não existe uma única lógica, "a" lógica!

Não estamos derrogando a lógica clássica Aristotélica, pelo contrário, temos muita clareza sobre a enorme gama de situações cuja análise dela depende explicitamente.

Porém, com o advento das lógicas não-clássicas, e com o novo paradigma que elas vislumbram para o próprio século XXI, sabemos que não existe "uma" lógica, mas uma lógica melhor e mais adequada para cada tipo de problema.

Finalizamos com palavras de da Costa, o fundador da lógica paraconsistente:

> "A lógica é hoje um dos ramos mais empolgantes do conhecimento... e uma das maiores revoluções culturais de nossa época foi a edificação das lógicas não-clássicas, particularmente das lógicas heterodoxas, revolução semelhante à provocada no século XIX à descoberta das geometrias não-euclidianas".

Ou ainda, parodiando Shakespeare:

"Há, entre o céu e a terra, mais lógicas do que sonha tua vã filosofia"!

Agradecimentos:

Agradecemos as sugestões apresentadas pelos avaliadores deste texto, quase todas elas aqui incorporadas.

Referências Bibliográficas:

Ackermann, W. (1956) Begründung einer strengem Implikation, *The Journal of Symbolic Logic*, v. 21, p. 113-128.

Alencar Filho, E. (1986) **Iniciação à lógica matemática**. 16ª ed. São Paulo: Nobel.

Anderson, A.R., Belnap, N.D. (1976) **Entailment, the logic of relevance and necessity**. Princeton: Princeton University Press. v. 1.

Aristóteles (1978) De Interpretatione. Trans. E. M. Edghill. In: Hutchins, R. M. (Ed.). **Great books of the western world**. Chicago: Encyclopedia Britannica. v. 8, p. 25-36.

Arruda, A. I. (1977) On the imaginary logic of N. A. Vasiliev. In: Arruda, A. I., Costa, N. C. A. da, Chuaqui, R. (Ed.). **Non-classical logic, model theory and computability**. Amsterdam: North-Holland, p. 3-24.

Arruda, A. I. (1989) Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In: Priest, G., Routley, R., Norman, J. (Ed.). **Paraconsistent logic:** essays on the inconsistent. Philosofia Verlag.

Arruda, A. I. (1990) **N. A. Vasiliev e a lógica paraconsistente**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v. 7).

ATTI DEL IV CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI (1909), v. 1, Roma.

Bell, J. L., Machover, M. (1977) **A course in mathematical logic**. Amsterdam: North-Holland.

Bocheński, I.M. (1951) **Ancient formal logic**. Amsterdam: North-Holland.

Bólyai, J. The Science of Absolute Space. In: Bonola, R. **Non-euclidean geometry**. New York:

Dover, 1955. (Apêndice)

Bólyai, J., Bólyai, W. **Geometrische Untersuchungen**. Leipzig: Druck, 1913.

Bonola, R. **Non-euclidean geometry**: a critical and historical study of its development. New York: Dover, 1955.

Boole, G. (1958) **An investigation of the laws of thought**. New York: Dover. (Publicado originalmente em 1847).

Borkowski, L. (Ed.). (1970) **Selected works of J. Łukasiewicz**. Amsterdam: North-Holland.

Cantor, G. (1874) Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. J. Reine Angew. *Mathematische Annalen.*, v. 77, p. 258-262.

Cantor, G. (1895) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (erster Artikel). *Mathematische Annalen.*, v. 46, p. 481-512.

Cantor, G. (1897) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (zweiter Artikel). *Mathematische Annalen.*, v. 49, p. 207-246.

Cantor, G. (1955) **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**. New York: Dover.

Carnielli, W. A. (1992) Lógicas não-clássicas, teoria da informação e inteligência artificial. In: Évora, F. (Org.). Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v.11, p. 101-110.)

Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., D'Ottaviano, I. M. L. (Ed.). (2002) **Paraconsistency:** the logical way to the inconsistent. New York: Marcel Dekker, Inc. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, 228)

Carnielli, W. A., PIZZI, C. (2001) **Modalità e multimodalità**. Milano: Franco Angeli.

Castrucci, B. (1975) **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Nobel.

Chenique, F. (1974) **Compreendre la logic moderne**. Tome 1. Paris: Dunod.

Church, A. (1936) A bibliography of symbolic logic, *The Journal of Symbolic Logic,* v. 1, n. 4, p. 121-216.

Cignoli, R. L. O., D'Ottaviano, I. M. L., Mundici, D. (2000) **Algebraic foundations of many-valued reasoning**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (Trends in Logic, v.2)

Cignoli, R., D'Ottaviano, I. M. L., Mundici, D. (1995) **Álgebras associadas às lógicas de Łukasiewicz**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE (Coleção CLE, v. 12, 2 ed.).

Couturat, L. (Ed.). (1903) **Opuscules et fragments inédits de Leibniz**. Paris.

D'Ottaviano, I. M. L. (1990) Paradoxos auto-referenciais e as lógicas não-clássicas heterodoxas. *Ciência e Cultura*, v. 42, n. 2, p. 164-173.

D'Ottaviano, I. M. L. (1990a) On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, p. 89-152.

D'Ottaviano, I. M. L. (1992) A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In : Évora, F. (Org.). **Século XIX**: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v.11, p. 65-93.)

D'Ottaviano, I. M. L., Epstein, R. L. (1990) A paraconsistent many-valued propositional logic: J3 in **Epstein 1990**, p. 263-287.

da Costa, N. C. A. (1958) Nota sobre o conceito de contradição, *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, n. 1, NS, p. 6-8.

da Costa, N. C. A. (1959) Observações sobre o conceito de existência em Matemática, *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, n. 2, p. 16-19.

da Costa, N. C. A. (1963) **Sistemas formais inconsistentes** (Tese), Universidade Federal do Paraná, Brasil.

da Costa, N. C. A. (1963a) Calculs propositionels pour les systèmes formels inconsistents. *Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, n. 257, p. 3790-3793.

da Costa, N. C. A. (1974) On the theory of inconsistent systems, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* v. 11, p. 497-510.

da Costa, N. C. A. (1992) O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX. In : Évora, F. (Org.). **Século XIX**: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas : Universidade Estadual de Campinas –CLE. (Coleção CLE, v.11, p. 59-65.)

da Costa, N. C. A. (1997) **Logiques classiques et non-classiques:** essai sur les fondements de la logique. Paris : Masson (Culture Scientifique).

Daghlian, J. (1988) **Lógica e álgebra de boole**. São Paulo: Atlas.

de Morgan, A. (1847) **Formal logic:** or the calculus of inference, necessary and probable. London.

de Morgan, A. (1860) **Syllabus of a proposed system of logic**. London.

Di Prisco, C. (1997) **Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v. 20)

Ebbinghaus, H. D., Flum, J., Thomas, W. (1984) **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag.

Epstein, R. L. (1990) **The semantic foundations of logic.** Volume 1: Propositional logics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Erdmann, J. E. (Ed.). (1840) **G. W. Leibniz:** Opera philosophica quae extant latina gallica germânica omnia. Berlin. 2 v. (reeditado por Aalen em 1958).

Frege, G. (1966) **Grundgesetze der Arithmetik**. Hildesheim Georg Olms Verlag. (Reimpressão da edição de 1893).

Frege, G. (1977) **Begriffsschrift:** eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens. Hildesheim: Georg Olms Verlag. (Reimpressão da edição de 1879).

Frege, G. (1986) **Die Grundlagen der Arithmetik:** Eine logish mathematische Untersuchung über den Bregriff der Zahl. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Gerhardt, C. I. (Ed.). (1978) **Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz**. Hildesheim: Georg Olms Verlag. v. 7. (Reimpressão da edição de 1890).

Gödel, K. (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik,* v. 38, p. 173-198.

Haack, S. (1974) **Deviant logic**. Cambridge: Cambridge University Press.

Halmos, P. (1970) **Teoria ingênua dos conjuntos**. São Paulo: Polígono, Universidade de São Paulo.

Hamilton, A. G. (1978) **Logic for mathematicians**. Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1930) **Grundlagen der Geometrie**. Leipzig: Druck.

Hilbert, D., Bernays, P. (1934) **Grundlagen der Mathematik**. Berlin: Springer. 2v.

Hrbacek, K., Jech, T. (1978) **Introduction to set theory**. New York: Marcel Dekker.

Jaśkowski, S. (1948) Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, 1, 5, p. 55-77.

Jaśkowski, S. (1969) Propositional calculus for contradictory deductive systems, *Studia Logica*, n. 24, p. 143-157.

Kant, I. (1787) **Kritik der reinem Vernunft**. Riga : Johanen Friedrich Hartknoch.

Kleene, S. C. (1952) **Introduction to metamathematics**. Amsterdam: North-Holland.

Kline, G. (1965) N. A. Vasil'év and the development of many-valued logic. In: Tymieniecka, A.T. (Ed.). **Contributions to logic and methodology in honor of J. M. Bocheński**. Amsterdam: North-Holland, p. 315-326.

Kolmogorov, A.N. (1977) On the principle of excluded middle (1925). In: Heijenoort, J. (Ed.) **From Frege Gödel:** the source book in mathematical logic 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, p. 414-437.

Lobatchevski, N. (1955) Geometrical Researches on the Theory of Parallels. In: Bonola, R. **Non-euclidean geometry**. New York: Dover. (Apêndice)

Lobatchevski, N. (1988) *Zwei geometrische Abhandlungen*. Leipzig: Druck.

Logic, History of. (1960) In: **Encyclopaedia Britannica**. Chicago: Encyclopaedia Britannica, v. 14, p. 315-332.

Łukasiewicz, J. (1910) Über den Satz von Widerspruch bei Aristoteles. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovíe*: Classe de Philosophie, p. 15-38. Tradução para o inglês, por V. Weolin, em **Borkowski 1970**.

Łukasiewicz, J., Tarski, A. (1930) Untersuchungen über den Aussangenkalküls. *Comptes Rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, v.23, p. 30-50. Tradução para o inglês em **Tarski 1956** e **Borkowski 1970**.

Malinowski, G. (1993) **Many-valued logics**. Oxford: Clarendon Press.

Mates, B. (1972) **Elementary logic**. 2ª ed. New York: Oxford University Press.

McColl, S. (ed.). (1967) **Polish logic** 1920-1939. Oxford: Clarendon Press.

Mendelson, E. (1964) **Introduction to mathematical logic**. New York: D. Van Nostrand Company, Inc. (The University Series in Undergraduate Mathematics).

Mortari, C. A. (2001) **Introdução à lógica**. São Paulo: UNESP.

Nolt, J., Rohatyn, D. (1991) **Lógica**. Tradução de Mineko Yamashita e revisão técnica de Leila Zardo Puga. São Paulo: McGraw-Hill. (Coleção Schaum)

Pizzi, C. (1992) Considerações sobre as lógicas não-clássicas. In: Évora, F. (Org.). Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v.11, p. 95-99.)

Poincaré, H. (1952) **Science and hypothesis**. New York: Dover.

Post, E.L. (1921) Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, v.43, p. 163-185.

Priest, G., Routley, R. (1989) I First historical introduction: a preliminary history of paraconsistent and dialecthic approaches. In: Priest, G., Routley, R., Norman, J. (Ed.). **Paraconsistent logic:** essays on the inconsistent. Munich: Philosophia-Verlag, p. 3-75.

Priest, G., Routley, R., Norman, J. (Ed.). (1989) **Paraconsistent logic:** essays on the inconsistent. Munich: Philosophia-Verlag.

Rasiowa, H., Sikorski, R. (1968) **The mathematics of metamathematics**. 2ª ed. Waszawa: PWN - Polish Scientific Publishers.

Riemann, B. (1868) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, v. 13.

Rose, A., Rosser, J. B. (1958) Fragments of many-valued statement calculi. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 87, p. 1-53.

Salmon, W. C. (1984) **Lógica**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall.

Shoenfield, J. R. (1967) **Mathematical logic**. Reading: Addison-Wesley.

Tarski, A. (1956) **Logic, semantics, metamathematics**. Oxford: Clarendon.

Vasiliev, N. A. (1925) Imaginary (Non-Aristotelian) Logic. In: Congresso Internazionale di Filosofia, 5, Napoli. *Atti*... [S.l.] [s.n.].

Wajsberg, M. (1931) Aksjomatyzacja trówartosciowego rachunku zdan [Axiomatização do cálculo proposicional trivalente]. *Comptes Rendus dês séances de la Societé dês Sciences et dês Lettres de Varsovie*, Classe 3, v. 24, p. 126-148. Tradução para o inglês, por R. Gruchman e S. McColl, em **McColl 1967** e em **Surma 1977**.

Wajsberg, M. (1935) Beiträge zum Metaaussagenkalkül I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, v. 42, p. 221-242. Tradução para o inglês em **Surma 1977**.

Whitehead, A. N., Russell, B. (1973) **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press.

Woleński, J. (1989) **Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School**. Dordrecht: Kluwer. (Synthese Library, v. 198).

Zadeh, L. A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, v.8, p. 338-53.

Zadeh, L. A. (1983) The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty in Expert Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, v.11.