UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

Sistemas de dedução para lógicas modais proposicionais

por

ALINE VIEIRA MALANOVICZ
T.I.01 PPGC-UFRGS

Trabalho Individual I

Prof. Dr. Luís da Cunha Lamb
Orientador

Prof. Dr. Tiarajú Asmuz Diverio
Co-Orientador

Porto Alegre, outubro de 2002.

Sumário

Resumo

Este trabalho apresenta uma descrição sucinta dos fundamentos de lógicas modais (propriedades como derivabilidade, relação de conseqüência, completude e corretude), bem como de seus principais sistemas de dedução. As lógicas modais tratam de argumentos que envolvem os conceitos de necessidade, possibilidade, impossibilidade e contingência da verdade (ou da falsidade) de uma sentença. Dessa forma, oferecem um aumento acentuado da capacidade de expressar estruturas de espaço, estado ou tempo, comparativamente à capacidade apresentada pela lógica clássica. O interesse nessas lógicas é justificado, pois elas são utilizadas para especificar e raciocinar sobre propriedades comportamentais de modelos e aplicações em Ciência da Computação.

Entre os sistemas dedutivos descritos, estão incluídos o sistema axiomático, o sistema de dedução natural, o sistema de *tableaux*, o sistema de resolução e os sistemas rotulados. Cada um dos sistemas dedutivos é descrito em um capítulo individual. Ao final do texto, é apresentada a comparação estabelecida entre os sistemas de prova estudados. Por fim, são esboçadas as conclusões e trabalhos futuros suscitados pela pesquisa.

Palavras-chave: lógicas modais, sistemas dedutivos para lógicas modais, dedução natural para lógicas modais, *tableaux* modais, resolução para lógicas modais, sistemas dedutivos rotulados, comparação entre sistemas dedutivos para lógicas modais.

1 Introdução

Os aspectos teóricos da computação, incluindo as lógicas, têm fundamental importância para a Ciência da Computação. Proporcionam não só um adequado embasamento teórico necessário para um correto e amplo entendimento da ciência envolvida na computação, como também mais um estágio na formação do desenvolvimento de um raciocínio lógico (cada vez mais necessário em todas as subáreas da computação), no desenvolvimento de demonstrações e de suas técnicas, tanto formal, como informalmente. Assim, um raciocínio seguindo algumas regras simples e universalmente aplicáveis pode constituir uma prova precisa, mas que pode ser adequadamente seguida em uma argumentação informal. Também é importante destacar o desenvolvimento da capacidade de abstração. Assim, propriedades abstratas podem ser especificadas e estudadas independentemente de estruturas e de implementações.

1.1 Lógicas modais

Uma lógica é um sistema formal, ou seja, um sistema de manipulação de símbolos contendo uma linguagem formalmente descrita e um conjunto de regras previamente estabelecido para manipulá-los. Essas regras permitem estabelecer relações (inferências, ou seja, argumentos que têm premissas e conclusão) entre as sentenças e definem quais são as inferências válidas (aquelas nas quais a verdade das premissas "garante" a verdade da conclusão).

As lógicas modais tratam de argumentos que envolvem os conceitos de necessidade, possibilidade, impossibilidade e contingência da verdade (ou da falsidade) de uma sentença. Assim, uma sentença pode ser "(necessariamente) verdadeira", "(necessariamente) falsa", "contingente" ou "possível", conforme a necessidade da verdade da proposição em relação ao mundo a que ela se refere. As lógicas modais aceitam todos os teoremas da Lógica Clássica e suplementam-nos, estendendo a linguagem (apresentando novos operadores) e criando novos teoremas. Dessa forma, existe um aumento acentuado da capacidade de expressar estruturas de espaço, estado ou tempo, comparativamente à capacidade apresentada pela lógica clássica.

Lógicas Modais já foram empregadas para facilitar o estabelecimento e a prova de propriedades na área de especificação e verificação de programas. Também já foram utilizadas em Inteligência Artificial, para o desenvolvimento de programas com facilidades para inferências com base no conhecimento de agentes e para modelar agentes capazes de executar tarefas cooperativas que envolvem a interação de conhecimento, ação e planejamento. Mais recentemente, a modelagem de sistemas multiagentes tem sido tema de intensa investigação [FAG95]. Uma das principais áreas de aplicação das lógicas modais é a Inteligência Artificial. A formalização de propriedades relacionadas a tais sistemas tem sido efetuada através de diversas lógicas modais.

1.2 Apresentação do trabalho

O presente trabalho teve como objetivo pesquisar os principais sistemas de dedução para lógicas modais, pois essas lógicas são utilizadas para especificar e raciocinar sobre propriedades comportamentais de modelos e aplicações em Ciência da Computação. Além disso, foram estudadas as propriedades fundamentais de sistemas lógicos como derivabilidade, relação de conseqüência, completude e corretude.

O texto está organizado segundo a seqüência de pesquisas realizadas para a composição do mesmo: inicialmente, são apresentados os principais sistemas da lógica modal proposicional e suas propriedades fundamentais. Esses assuntos estão distribuídos nos capítulos 2 e 3 do trabalho. Após, são apresentados os fundamentos dos principais sistemas de provas para lógica modal proposicional: Dedução Natural; *Tableaux*; Resolução; e Sistemas Rotulados. Cada um dos sistemas dedutivos é descrito em um capítulo individual. Ao final do texto, é apresentada a comparação estabelecida entre os sistemas de prova estudados. Por fim, são esboçadas as conclusões e trabalhos futuros suscitados pela pesquisa.

2 Fundamentos de Lógica Modal

Este capítulo pode servir como uma introdução concisa à lógica modal. Nossa apresentação é baseada em [GAB2001]. Definimos alguns sistemas modais básicos.

2.1 Sistemas axiomáticos modais

A lógica modal originou-se na filosofia. O criador dos primeiros sistemas modais, Lewis [LL32] construiu-os como uma ferramenta auxiliar em suas tentativas de resolver os paradoxos da implicação “material” (isto é, booleana). Um desses paradoxos é “Se a Lua é feita de queijo verde, então $2 * 2 = 4$”. Temos que considerar essa declaração como verdadeira na lógica booleana se concordamos que $2 * 2 = 4$. Sua idéia era substituir a implicação material “se α então β” pela implicação “estrita” “é necessário que se α então β”. Para esse propósito, Lewis construiu cinco sistemas axiomáticos com nomes simples: **S1, S2, S3, S4** e **S5**. Embora Lewis nunca tenha esclarecido seu entendimento das noções de *necessidade* e *possibilidade*, pelo menos dois de seus sistemas, **S4** e **S5**, tornaram-se celebridades em *lógica modal.*

Aproximadamente ao mesmo tempo em que Lewis formulou **S4** [LL32], a mesma lógica também foi construída por Orlov [ORL28] e Gödel [GOD33]. Entretanto, seus objetivos eram diferentes. Ambos tentaram interpretar a lógica intuicionista de Brouwer, encaixando-a na lógica clássica estendida com um operador “é provável”, significando “há uma prova de que”.

Ao contrário de Lewis, que usou o operador necessidade implicitamente, tendo escondido suas propriedades na implicação estrita, Orlov e Gödel adicionaram-no à lógica clássica proposicional explicitamente, obtendo então a *linguagem modal proposicional* (***ML***).

Definição 1 {*Alfabeto de **ML***} O *alfabeto* de ***ML*** consiste de

- uma lista (fixa, contavelmente infinita) $p_0, p_1, \ldots$ de *variáveis proposicionais*;
- as *constantes lógicas*: $\top$ (“verdadeira”) e $\bot$ (“falsa”);
- os *conetivos lógicos booleanos*: $\wedge$ (“e”), $\vee$ (“ou”), $\rightarrow$ (“implica”) e $\neg$ (“não”);
- os *operadores modais*: $\Box$ (“é necessário”) e $\Diamond$ (“é possível”);
- os *símbolos de pontuação*:) e (.

Variáveis proposicionais podem ser pensadas como selecionadas de proposições arbitrárias – sentenças em alguma linguagem (digamos, natural) cujo conteúdo pode ser avaliado como verdadeiro ou não verdadeiro. Iniciando a partir dessas variáveis e das constantes lógicas, construímos indutivamente *fórmulas bem formadas* (*wff*) de ***ML*** (***ML**-fórmulas*, para resumir, ou simplesmente fórmulas, se ***ML*** é subentendida) com a intenção de representar as proposições compostas:

Definição 2 {*Fórmulas bem formadas de **ML** (**ML**-fórmulas)*}

- todas as variáveis proposicionais e as constantes $\top$ e $\bot$ são ***ML**-fórmulas* (estas são chamadas *fórmulas atômicas*, ou simplesmente *átomos*);
- se α e β são ***ML**-fórmulas*, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\neg\alpha)$, $(\Box\alpha)$ e $(\Diamond\alpha)$ também o são. De acordo com [GAB2001], para ser absolutamente precisos, devemos adicionar aqui que nenhum outro objeto, diferente daqueles definidos acima, pode ser chamado de ***ML**-fórmula*. Nunca formularemos declarações como esta explicitamente, confiando no bom senso do leitor.

Notação 1 Algumas vezes, usamos $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ como abreviação para $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$.

Notação 2 Em nossa metalinguagem, podemos denotar variáveis proposicionais (*átomos*) por letras romanas minúsculas tais como *p, q, r*, possivelmente com subscritos ou sobrescritos.

Notação 3 Letras gregas minúsculas tais como α, β, χ são reservadas para fórmulas.

Notação 4 Letras gregas maiúsculas Σ, Δ, Γ, etc. são reservadas para conjuntos de fórmulas.

Para simplificar a notação, usamos as seguintes convenções na representação de fórmulas:

Convenção 1 {*Precedência de operadores*} Assumimos que $\neg$, $\Box$ e $\Diamond$ têm precedência mais alta que $\wedge$ e $\vee$, os quais, por sua vez, são mais fortes que $\to$ e $\leftrightarrow$, e omitimos aqueles parênteses que podem ser univocamente recuperados de acordo com essa prioridade de conetivos.

Portanto, a *ML-fórmula*

$$(\Diamond(p_0 \vee (\Box p_1) \to (p_1 \wedge (\Box p_0))))$$

pode ser resumida para

$$\Diamond(p_0 \vee \Box p_1 \to p_1 \wedge \Box p_0)$$

Em vez de $(\ldots((\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3) \vee \ldots \vee \alpha_n)$ e $(\ldots((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3) \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, escrevemos, respectivamente, $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \ldots \vee \alpha_n$ e $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, ou $\bigvee^n_{i=1}\alpha_i$ e $\bigwedge^n_{i=1}\alpha_i$.

Por definição, $\bigvee_{i\in\emptyset}\alpha_i$ é $\bot$, e $\bigwedge_{i\in\emptyset}\alpha_i$ é $\top$.

Notação 5 Dada uma fórmula α, escrevemos $\alpha(q_1,\ldots, q_n)$ para indicar que todas as variáveis proposicionais que ocorrem em α estão entre $q_1,\ldots, q_n$.

Notação 6 Dada uma fórmula α, *sub*α denota o conjunto de todas as *subfórmulas* de α. Digamos, se α é $\Box(p_0 \wedge p_1 \to \Diamond p_0 \vee p_1)$, então

$$sub\alpha = \{p_0, p_1, p_0 \wedge p_1, \Diamond p_0, \Diamond p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1 \to \Diamond p_0 \vee p_1, \alpha\}.$$

Supõe-se que um sistema lógico em geral, e um sistema modal em particular, separe e descubra essas fórmulas que representam certas proposições "verdadeiras", não importando quais valores (proposições) são designados para suas variáveis. Há dois meios principais de definir lógicas: o *semântico* e o *sintático*. Usualmente, as definições semântica e sintática complementam-se uma à outra: aquela explica o significado (pretendido) das constantes e dos conetivos lógicos, e esta nos oferece uma máquina de raciocínio.

Ilustramos a abordagem semântica relembrando a semântica clássica da sublinguagem ***L*** de ***ML*** que resulta da omissão dos operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ e de todas as fórmulas que os contenham. Há uma interpretação muito simples dessa linguagem baseada na suposição de que toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Tendo designado um desses valores-verdade ***V*** (para verdadeira) ou ***F*** (para falsa) para cada variável proposicional, podemos então computar o valor-verdade de uma ***L****-fórmula* (sob essa designação) usando as conhecidas "tabelas-verdade booleanas", que refletem as interpretações de conetivos lógicos acima:

β	c	$\beta \wedge c$	$\beta \vee c$	$\beta \to c$	$\neg\beta$
F	***F***	***F***	***F***	***V***	***V***
F	***V***	***F***	***V***	***V***	***V***
V	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	***V***	***V***	***V***	***V***	***F***

(naturalmente, as constantes lógicas $\top$ e $\bot$ são sempre avaliadas como ***V*** e ***F***, respectivamente). A *lógica clássica proposicional* ***Cl*** pode ser definida então como o conjunto de todas aquelas ***L****-fórmulas* que são verdadeiras sob qualquer designação como essa.

Agora, retornando à lógica modal, vemos que essa definição semântica de ***Cl*** não pode ser estendida para a linguagem modal de uma forma direta. A razão aparente é que os operadores modais não são *funcionalmente-verdadeiros*: os valores-verdade de uma fórmula da forma $\Box\alpha$ podem depender não apenas do fato de α ser verdadeira ou falsa. Por exemplo, a maioria de nós provavelmente concorda que a proposição "é necessário que $2 * 2 = 4$" é verdadeira, enquanto "é necessário que a OTAN bombardeie Belgrado" é inegavelmente falsa, embora ambas as proposições "$2 * 2 = 4$" e "a OTAN bombardeia Belgrado" sejam verdadeiras.[1]

Essa pode ser uma das razões por que as primeiras lógicas modais foram definidas de outro jeito, *sintático*, com a ajuda de *sistemas de inferência* (*cálculos*). No que segue, apresentamos os sistemas de inferência no estilo de Hilbert. Para definir um sistema como esse, temos que indicar quais fórmulas são consideradas como *axiomas* do sistema e especificar suas *regras de inferência*. Uma derivação de uma fórmula α no sistema é uma seqüência finita de fórmulas a qual termina em α e tal que cada fórmula da seqüência ou é também um axioma, ou é obtida a partir de fórmulas anteriores da seqüência pela aplicação de uma das regras de inferência. A *lógica* desse sistema de inferência é definida então como o conjunto de todas as fórmulas deriváveis. Para colocar de outra forma, a lógica definida pelo sistema é o menor conjunto de fórmulas que contém os axiomas e é fechado sob as regras de inferência.

Por exemplo, a lógica clássica proposicional ***Cl*** pode ser definida pelo seguinte cálculo no estilo de Hilbert:

[1] Estes exemplos são de [GAB2001] e foram escritos em 27 de abril de 1999.

Axiomas:	
(A1)	$p_0 \to (p_1 \to p_0)$,
(A2)	$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2))$,
(A3)	$p_0 \wedge p_1 \to p_0$
(A4)	$p_0 \wedge p_1 \to p_1$,
(A5)	$p_0 \to (p_1 \to p_0 \wedge p_1)$,
(A6)	$p_0 \to p_0 \vee p_1$,
(A7)	$p_1 \to p_0 \vee p_1$,
(A8)	$(p_0 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_0 \vee p_1 \to p_2))$,
(A9)	$\perp \to p_0$,
(A10)	$p_0 \vee (p_0 \to \perp)$.

Regras de inferência:	
Modus ponens (*MP*): dadas as fórmulas α e $\alpha \to \beta$, deriva β;	$\dfrac{\alpha\ ,\ \alpha \to \beta}{\beta}$
Substituição (*Subst*): dada a fórmula $\alpha\ (p_1,...,p_n)$, deriva a fórmula $\alpha\ \{\beta_1/p_1,...,\beta_n/p_n\}$ que é obtida, substituindo-se uniformemente as fórmulas $\beta_1,...,\beta_n$ no lugar das variáveis $p_1,...,p_n$ em α , respectivamente.	$\dfrac{\alpha\ (p_1,...,p_n)}{\alpha\ \{\beta_1/p_1,...,\beta_n/p_n\}}$

Assim como o bem conhecido *teorema da completude e da corretude* da lógica clássica proposicional diz, a lógica definida por esse cálculo coincide com ***Cl*** [CHA97, END72].

O cálculo acima não envolve o conetivo $\neg$, nem a constante $\top$. Podemos defini-los como abreviações:

$$\neg\alpha = \alpha \to \perp,$$

$$\top = \perp \to \perp.$$

(Essas abreviações estão de acordo com a semântica clássica no sentido em que os valores-verdade do lado direito e do lado esquerdo dessas igualdades são os mesmos sob qualquer designação.) Além disso, na lógica clássica, podemos reduzir mais o número de conetivos lógicos básicos, digamos, para $\wedge$ e $\neg$, ou para $\vee$ e $\neg$, definindo

$$\alpha \to \beta = \neg(\alpha \wedge \neg\beta),$$

$$\alpha \vee \beta = \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta),$$

$$\perp = p_0 \wedge \neg p_0$$

Em relação à lógica modal, se concordarmos em aceitar os princípios de raciocínio da lógica proposicional, então o cálculo modal pode ser construído, adicionando-se ao cálculo do estilo de Hilbert para ***Cl*** esses axiomas e regras de inferência que refletem nosso entendimento dos operadores modais. Um conjunto de ***ML****-fórmulas* que contém os axiomas (A1)–(A10), o axioma modal

$$\mathbf{K} \quad \Box(p_0 \to p_1) \to (\Box p_0 \to \Box p_1),$$

e é fechado sobre *MP* (*Modus Ponens*), *Subst* e a regra de

Necessitação (*Nec*): dado α, derive $\Box\alpha$.	$\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

é chamado de *lógica modal*. Na verdade, tais lógicas são usualmente chamadas lógicas modais *normais*. O operador possibilidade $\Diamond$ pode ser considerado como uma abreviação para $\neg\Box\neg$ (ou podemos adicionar o axioma $\Diamond p_0 \leftrightarrow \neg\Box\neg p_0$). A *lógica modal mínima* é denotada por **K**: é definida pelo sistema de inferência que contém (A1)–(A10) e **K** como seus axiomas, e *MP*, *Subst* e *Nec* como suas regras de inferência. Todas as outras lógicas modais $\boldsymbol{L}$ podem ser obtidas, estendendo-se esse sistema com um conjunto Σ (possivelmente infinito) de *axiomas extras*. Nesse caso, escrevemos

$$\boldsymbol{L} = \mathbf{K} \oplus \Sigma.$$

Se Σ pode ser escolhido finito, então chamamos $\boldsymbol{L}$ de *finitamente axiomatizável.*

Notação 7 Em geral, dada uma lógica modal L e um conjunto Δ de *ML-fórmulas*,

$$\boldsymbol{L} \oplus \Delta$$

denota a menor lógica modal que contém $\boldsymbol{L} \cup \Delta$. Escrevemos $\boldsymbol{L} \oplus \alpha$ se $\Delta = \{\alpha\}$.

Usando essa notação, podemos definir os sistemas **S4** e **S5** de Lewis como segue:

$$\mathbf{S4} = \mathbf{K} \oplus \Box p_0 \to \Box\Box p_0 \oplus \Box p_0 \to p_0,$$

$$\mathbf{S5} = \mathbf{S4} \oplus \Diamond p_0 \to \Box\Diamond p_0.$$

O $\Box$ de **S5** pode ser lido também como "*Eu sei que*" ou "*Fulano acredita que*". Aceitando um ou mais dos axiomas de **S5** como propriedades de *conhecimento* ou *crença*, podemos obter novos sistemas modais, como **T** e **K4**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{K} \oplus \Box p_0 \to p_0,$$

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p_0 \to \Box\Box p_0.$$

Uma discussão mais detalhada dessas *lógicas epistêmicas* pode ser encontrada em [FAG95].

A interpretação de $\Box$ como "é obrigatório" e $\Diamond$ como "é permitido" oferece outra família de lógicas modais conhecidas como *deônticas*. É um princípio natural de raciocínio sobre normas (vindas da lei, da moral, etc.) que tudo o que é obrigatório é permitido. A lógica deôntica mínima **D** que reflete esse princípio é definida como

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Box p_0 \to \Diamond p_0.$$

2.2 Semânticas de mundos possíveis

A interpretação de provabilidade do operador necessidade $\Box$ e sua relação com o intuicionismo deram um forte ímpeto aos estudos matemáticos em lógica modal. Essa *semântica relacional* também foi inventada por filósofos como Kripke [KRI59, KRI63].[2] Na filosofia, essa semântica pode ser reconhecida no entendimento Leibnizeano da necessidade como verdade em todos os *mundos possíveis*. Vamos imaginar um sistema de "mundos" que pode ter algumas alternativas (por exemplo, como uma alternativa para nosso mundo, podemos considerar um outro mundo, em que a OTAN não bombardeie Belgrado). Denotando a *relação de alternatividade* por *R*,

[2] [GAB2001] chama a atenção para uma nota de rodapé no início da Seção 2 em [KRI63].

escrevemos $\omega R\omega_1$ para dizer que ω_1 é um mundo alternativo (ou possível) para ω. Todo mundo ω "vive" sob as leis da lógica clássica: uma proposição atômica é ou verdadeira ou falsa nele, e os valores-verdade de proposições não-modais compostas são determinados pelas tabelas-verdade booleanas. Uma fórmula modal $\Box\alpha$ é então considerada verdadeira em ω se α é verdadeira em todos os mundos ω_1 tal que $\omega R\omega_1$. Uma fórmula modal $\Diamond\alpha$ é então considerada verdadeira em ω se α é verdade em pelo menos um mundo ω_1 tal que $\omega R\omega_1$. Não é difícil capturar essa cena intuitiva em uma definição precisa.

Definição 3 {*Estrutura*} Sistemas de mundos com relações de alternatividade podem ser representados por estruturas relacionais $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R} \rangle$ nas quais $\boldsymbol{W}$ é um conjunto não-vazio, e $\boldsymbol{R}$ é uma relação binária em $\boldsymbol{W}$. Tais estruturas são conhecidas na lógica modal como *estruturas de Kripke* ou simplesmente *estruturas*.

Definição 4 {*Mundos*} Os elementos de $\boldsymbol{W}$ são chamados *mundos*, *estados*, ou, de maneira mais neutra, *pontos*.

Definição 5 {*Relação de acessibilidade*} Se $\omega\boldsymbol{R}\omega_1$, dizemos que ω_1 é *acessível* a partir de ω, ou que ω *vê* ω_1. Outros sinônimos são: ω_1 é um *sucessor* de ω; ω é um predecessor de ω_1.

Definição 6 {*Valoração*} Uma *valoração* em uma estrutura $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R} \rangle$ é um mapeamento **v** que associa com cada variável proposicional p de $\boldsymbol{ML}$ um conjunto $\mathbf{v}(p)$ de pontos em $\boldsymbol{W}$ (que é entendido como o conjunto desses mundos em que p é verdadeira).

Definição 7 {*Modelo*} Um *modelo de Kripke* para $\boldsymbol{ML}$ é um par $\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{F}, \mathbf{v} \rangle$, em que $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R} \rangle$ é uma estrutura, e **v** é uma valoração em $\boldsymbol{F}$. Dizemos que o modelo **M** é baseado na estrutura $\boldsymbol{F}$, ou que $\boldsymbol{F}$ é a estrutura básica de **M**.

Definição 8 {*Semântica (relação-verdade)*} Seja α uma *ML-fórmula*, e ω um mundo em W. A *relação-verdade* $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \alpha$, lida como

"α é verdadeira em ω em **M**"

é definida por indução na construção de α como segue:

$(\mathbf{M}, \omega) \vDash p$	sse	$\omega \in \mathbf{v}(p)$ (p é uma variável proposicional);
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \top$;		
não $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \bot$;		
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta \wedge \chi$	sse	$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta$ e $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \chi$;
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta \vee \chi$	sse	$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta$ ou $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \chi$;
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta \rightarrow \chi$	sse	$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta$ implica $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \chi$;
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \neg\beta$	sse	não $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \beta$;
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \Box\beta$	sse	$(\mathbf{M}, \omega_1) \vDash \beta$ para todo $\omega_1 \in \boldsymbol{W}$ tal que $\omega R\omega_1$;
$(\mathbf{M}, \omega) \vDash \Diamond\beta$	sse	$(\mathbf{M}, \omega_1) \vDash \beta$ para algum $\omega_1 \in \boldsymbol{W}$ tal que $\omega R\omega_1$.

Notação 8 Se $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \alpha$ não é válida, então escrevemos $(\mathbf{M}, \omega) \nvDash \alpha$ e dizemos que **M** *refuta* α em ω. Ao invés de $(\mathbf{M}, \omega) \vDash \alpha$ e $(\mathbf{M}, \omega) \nvDash \alpha$, escrevemos simplesmente $\omega \vDash \alpha$ e $\omega \nvDash \alpha$, se **M** é subentendido.

Definição 9 {*Conjunto-verdade*} O conjunto-verdade de α em M é definido como $\mathbf{v}(\alpha) = \{\omega \in W \mid \omega \vDash \alpha\}$.

Definição 10 {*Satisfação e validade*} Seja $\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{F}, \mathbf{v}\rangle$ um modelo baseado na estrutura $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}\rangle$. A fórmula α é dita verdadeira em **M** (em símbolos: $\mathbf{M} \vDash \alpha$) se $\omega \vDash \alpha$ para todo $\omega \in \boldsymbol{W}$, isto é, se $\mathbf{v}(\alpha) = \boldsymbol{W}$. Dualmente, α é satisfeita em **M** se $\mathbf{v}(\alpha)$ não é vazio. Dizemos que α é válida na estrutura $\boldsymbol{F}$ (ou que $\boldsymbol{F}$ valida α) e escrevemos $\boldsymbol{F} \vDash \alpha$ se $\mathbf{v}(\alpha) = \boldsymbol{W}$ para toda valoração **v** em $\boldsymbol{F}$, ou, equivalentemente, se α é verdadeira em todos os modelos baseados em $\boldsymbol{F}$. A fórmula α é satisfatível em $\boldsymbol{F}$, se é satisfeita em algum modelo baseado em $\boldsymbol{F}$. E α é válida em $\boldsymbol{F}$ sse $\neg\alpha$ não é satisfatível em $\boldsymbol{F}$.

Definição 11 {*Estrutura para um conjunto de fórmulas*} Para um conjunto Γ de *ML-fórmulas*, dizemos que $\boldsymbol{F}$ é uma estrutura para Γ se todas as fórmulas de Γ são válidas em $\boldsymbol{F}$. Nesse caso, escrevemos $\boldsymbol{F} \vDash \Gamma$. Uma fórmula α é Γ-satisfatível se é satisfatível em uma estrutura para Γ.

Agora podemos dar uma caracterização semântica de (pelo menos alguma) lógica modal, estabelecendo uma conexão entre lógicas e estruturas. Seja C uma classe arbitrária de estruturas. Não é difícil verificar que

$$\mathbf{Log}\, C = \{\alpha \in \boldsymbol{ML} \mid \forall \boldsymbol{F} \in C : \boldsymbol{F} \vDash \alpha \}$$

é uma lógica modal. É chamada *lógica de C*.

Definição 12 {*Corretude*} Uma lógica modal $\boldsymbol{L}$ é dita ser *correta com respeito a C* (ou *C-correta*) se $\boldsymbol{F} \vDash \alpha$ para todo $\alpha \in \boldsymbol{L}$ e todo $\boldsymbol{F} \in C$, isto é, $\boldsymbol{L} \subseteq \mathbf{Log}\, C$.

Definição 13 {*Completude*} $\boldsymbol{L}$ é *completa com respeito a C* (ou *C-completa*) se $\alpha \in \boldsymbol{L}$ sempre que α é válida em qualquer estrutura em C, isto é, $\mathbf{Log}\, C \subseteq L$. ω

Definição 14 {*Determinação*} Dizemos que $\boldsymbol{L}$ é *determinada* (ou *caracterizada*) por C se $\boldsymbol{L}$ é tanto *C-correta* como *C-completa*, isto é, $\boldsymbol{L} = \mathbf{Log}\, C$.

Definição 15 {*Kripke-completude*} Se $\boldsymbol{L}$ é determinada por alguma classe de estruturas, chamamos $\boldsymbol{L}$ de *Kripke-completa*.

É importante notar que uma lógica $\boldsymbol{L}$ *Kripke-completa* pode ser caracterizada por diferentes classes de estruturas (veremos alguns exemplos no texto que segue). Se $\boldsymbol{L}$ é *Kripke-completa*, então é claramente determinada pela classe $\boldsymbol{FrL}$ de todas as estruturas para $\boldsymbol{L}$, isto é, $\boldsymbol{L} = \mathbf{Log}\, \boldsymbol{FrL}$.

Uma característica muito interessante da semântica de mundos possível é que muitas lógicas modais padrão são determinadas por classes "naturais" de estruturas. Vejamos primeiro quais tipos de estruturas correspondem às lógicas modais apresentadas na seção precedente. Antes de tudo, temos:

Teorema 1 K *é determinado pela classe de todas as estruturas*.

Antes de descrever as classes de estruturas para as outras lógicas, relembramos as propriedades que uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ pode apresentar:

Definição 16 {*Transitividade*} Uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ é dita *transitiva* se

$$\forall \omega, \omega_1, \omega_2 \in \boldsymbol{W}\ (\omega R \omega_1 \wedge \omega_1 R \omega_2 \rightarrow \omega R \omega_2).$$

Definição 17 {*Reflexividade*} Uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ é dita *reflexiva* se

$$\forall \omega \in \boldsymbol{W}\ \omega R \omega.$$

Definição 18 {*Quasi-ordem*} Uma relação transitiva e reflexiva sobre W é considerada uma *quasi-ordem* sobre W.

Notação 9 Denotamos por $\boldsymbol{R}^*$ o *fechamento reflexivo e transitivo* de uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre $\boldsymbol{W}$ (em outras palavras, $\boldsymbol{R}^*$ é a menor ordem parcial sobre $\boldsymbol{W}$ que contém $\boldsymbol{R}$).

Definição 19 {*Simetria*} Uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ é dita *simétrica* se

$$\forall \omega, \omega_1 \in \boldsymbol{W}\ (\omega R \omega_1 \rightarrow \omega_1 R \omega).$$

Definição 20 {*Relação de equivalência*}Uma relação de ordem parcial simétrica é dita uma *relação de equivalência* sobre $\boldsymbol{W}$. Se

$$\forall \omega, \omega_1 \in \boldsymbol{W}\ \omega R \omega_1,$$

então R é dita ser *universal* sobre $\boldsymbol{W}$.

Definição 21 {*Serialidade*} $\boldsymbol{R}$ é *serial* sobre $\boldsymbol{W}$ se

$$\forall \omega \in \boldsymbol{W}\ \exists \omega_1 \in \boldsymbol{W}\ \omega R \omega_1.$$

Definição 22 {*Serialidade de estrutura*} Dizemos que uma estrutura $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R} \rangle$ é serial se $\boldsymbol{R}$ é serial sobre $\boldsymbol{W}$

Definição 23 {*Ordem parcial de estrutura*} $\boldsymbol{F}$ é uma estrutura parcialmente ordenada, ou simplesmente uma ordem parcial, se $\boldsymbol{R}$ é uma ordem parcial sobre $\boldsymbol{W}$, e assim por diante.

Um dos primeiros resultados marcantes obtidos por Kripke [KRI59, KRI63] foi o seguinte teorema de completude (veja [HC96], [CHA97]):

Teorema 2 *As lógicas* **D, T, K4, S4** *e* **S5** *são Kripke-completas.*

- **FrD** *é a classe de todas as estruturas seriais*;
- **FrT** *é a classe de todas as estruturas reflexivas*;
- **FrK4** *é a classe de todas as estruturas transitivas*;
- **FrS4** *é a classe de todas as estruturas parcialmente ordenadas*;
- **FrS5** *é a classe de todas as estruturas com relações de acessibilidade de equivalência*.

Note que **S5** também é determinado pela classe de todas as estruturas universais, que é uma subclasse própria de **FrS5**. A classe de estruturas seriais claramente coincide com a classe de estruturas que validam a fórmula $\Diamond\top$; de fato, $\Diamond\top$ é um axioma alternativo extra de **D**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top.$$

Estruturas para **GL** são um pouco mais complexas.

Definição 24 {*Irreflexividade*} Uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ é dita ser *irreflexiva* se $\omega \boldsymbol{R} \omega$ não é válida para nenhum $\omega \in \boldsymbol{W}$.

Definição 25 {*Ordem parcial estrita*} Uma relação irreflexiva e transitiva é conhecida como uma *ordem parcial estrita*.

Definição 26 {*Ordem parcial estrita Noetheriana*} Uma ordem parcial estrita R é chamada *Noetheriana* se não há *cadeia ascendente infinita* $\omega_0 R \omega_1 R \omega_2 \ldots$ de pontos em $\boldsymbol{W}$. O seguinte resultado é devido a Segerberg [SEG71]:

Teorema 3 GL é *Kripke-completa.* **FrGL** *é a classe de todas as ordens parciais estritas Noetherianas.*

Muitas outras classes de estruturas “matematicamente naturais” também deram ímpeto às lógicas modais “razoáveis”. Aqui estão alguns exemplos. O significado de algumas dessas lógicas é bem explicado em [GAB2001].

$$\mathbf{Alt} = \mathbf{K} \oplus \Diamond p_0 \to \Box p_0,$$

$$\mathbf{DAlt} = \mathbf{Alt} \oplus \Box p_0 \to \Diamond p_0 = \mathbf{D} \oplus \Diamond p_0 \to \Box p_0,$$

$$\mathbf{KD45} = \mathbf{K4} \oplus \Box\, p_0 \to \Diamond\, p_0 \oplus \Diamond\, p_0 \to \Box\Diamond p_0,$$

$$\mathbf{D4.3} = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box^+ p_0 \to p_1) \vee \Box(\Box^+ p_1 \to p_0),$$

$$\mathbf{GL.3} = \mathbf{GL} \oplus \Box(\Box^+ p_0 \to p_1) \vee \Box(\Box^+ p_1 \to p_0),$$

$$\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} \oplus \Box(\Box p_0 \to p_1) \vee \Box(\Box p_1 \to p_0),$$

$$\mathbf{Grz} = \mathbf{S4} \oplus \Box(\Box(p_0 \to \Box p_0) \to p_0) \to p_0.$$

Aqui, por definição, $\Box^+\alpha = \alpha \wedge \Box\alpha$ e $\Diamond^+\alpha = \alpha \vee \Diamond\alpha$.

Definição 27 Uma relação binária $\boldsymbol{R}$ sobre um conjunto $\boldsymbol{W}$ é

- *anti-simétrica* se $\forall\omega,\omega_1 \in \boldsymbol{W}\,(\omega R\omega_1 \wedge \omega_1 R\omega \to \omega = \omega_1)$;
- *funcional* se $\forall\omega,\omega_1,\omega_2 \in \boldsymbol{W}\,(\omega R\omega_1 \wedge \omega R\omega_2 \to \omega_1 = \omega_2)$;
- *Euclideana* se $\forall\omega,\omega_1,\omega_2 \in \boldsymbol{W}\,(\omega R\omega_1 \wedge \omega R\omega_2 \to \omega_1 R\omega_2)$;
- *fracamente conectada* se $\forall\omega,\omega_1,\omega_2 \in \boldsymbol{W}\,(\omega R\omega_1 \wedge \omega R\omega_2 \to \omega_1 R\omega_2 \vee \omega_1 = \omega_2 \vee \omega_2 R\omega_1)$.

Definição 28 {*Ordem parcial*} Uma relação transitiva, reflexiva e anti-simétrica $\boldsymbol{R}$ é chamada de *ordem parcial*.

Definição 29 {*Ordem parcial Noetheriana*} Uma ordem parcial é *Noetheriana* se não há *cadeia ascendente infinita* $\omega\boldsymbol{R}\omega_1\boldsymbol{R}\omega_2...$ de pontos em $\boldsymbol{W}$.

Teorema 4 As lógicas **Alt, DAlt, KD45, K4.3, GL.3, S4.3** e **Grz** são *Kripke-completas*.

FrAlt = {***F*** | ***F*** *é funcional*};

FrDAlt = {***F*** | ***F*** *é funcional e serial*};

FrKD45 = {***F*** | ***F*** *é serial, transitiva e Euclideana*};

FrK4.3 = {***F*** | ***F*** *é transitiva e fracamente conectada*};

FrGL.3 = {***F*** | ***F*** *é ordem parcial estrita fracamente conectada Noetheriana*};

FrS4.3 = {***F*** | ***F*** *é ordem parcial fracamente conectada*};

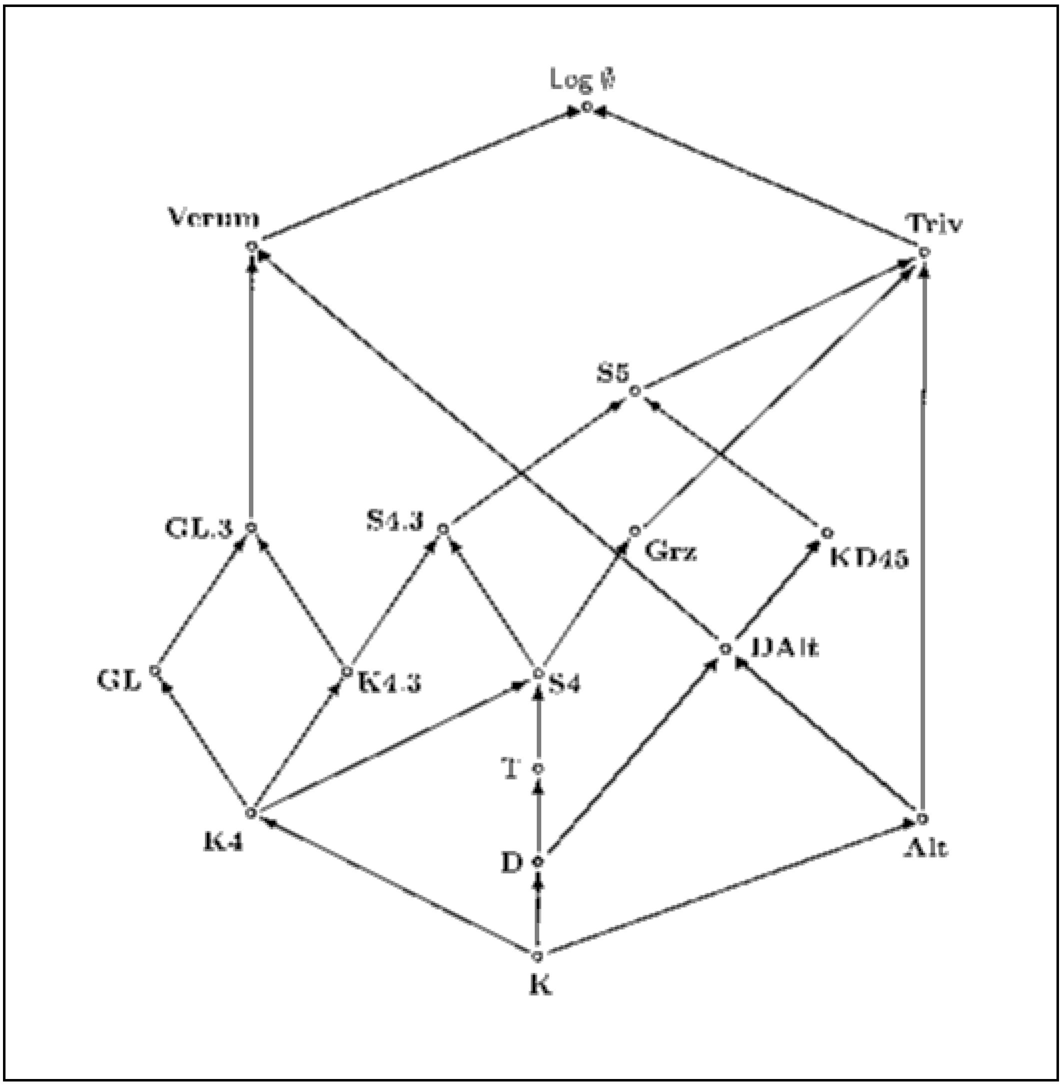
FrGrz = {***F*** | ***F*** *é ordem parcial Noetheriana*}.

Definimos lógicas modais como certos conjuntos de ***ML****-fórmulas*. É natural perguntar qual das lógicas construídas é “mais forte” ou “mais fraca” em relação à inclusão $\subseteq$ da teoria dos conjuntos. A família de todas as lógicas modais, junto com $\subseteq$, forma uma estrutura que os algebristas chamam de *reticulado*. **K** é o elemento ínfimo (o menor) do reticulado. O maior (mais amplo) é claramente $\mathbf{Log}_0$, isto é, o conjunto de todas as ***ML****-fórmulas*, chamado de *lógica inconsistente* (porque contém tanto α quanto $\neg\alpha$). Uma observação interessante, devida a Makinson [MAK71], é que há precisamente duas lógicas modais consistentes máximas (com respeito a $\subseteq$). São elas

$$\mathbf{Verum} = \mathbf{Log}\{\bullet\} = \mathbf{K4} \oplus \Box p,$$

$$\mathbf{Triv} = \mathbf{Log}\{\circ\} = \mathbf{K4} \oplus \Box p \leftrightarrow p,$$

onde $\bullet$ denota um único ponto irreflexivo (isto é, a estrutura $\langle\{\omega\}, \varnothing\rangle$), e $\circ$, um único ponto reflexivo (isto é, a estrutura $\langle\{\omega\}, \langle\omega,\omega\rangle\rangle$). Portanto, cada lógica modal consistente está contida ou em **Verum** ou em **Triv** ou em ambas. Em outras palavras, de acordo com o teorema de Makinson, pelo menos uma das estruturas $\bullet$ ou $\circ$ é uma estrutura para qualquer lógica modal consistente.



3 Apresentação Axiomática

Os teoremas da lógica modal proposicional podem ser obtidos através de um sistema axiomático de apresentação. Neste capítulo, apresentaremos o sistema axiomático para a lógica clássica proposicional e uma extensão dele para cada sistema da lógica modal que estamos considerando. Esta apresentação é baseada em [COS92], onde podemos encontrar explicações gerais sobre a apresentação axiomática da lógica modal proposicional.

Por conveniência, o conjunto de axiomas que utilizaremos considera somente os símbolos "$\neg$", "$\rightarrow$" e "$\Box$" como primitivos. Os símbolos "$\wedge$", "$\vee$" e "$\Diamond$" podem ser introduzidos por definição como segue:

Definição 30 $\{\wedge\}$ $(\alpha \wedge \beta) = \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

Definição 31 $\{\vee\}$ $(\alpha \vee \beta) = (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

Definição 32 $\{\Diamond\}$ $(\Diamond\alpha) = (\neg\Box\neg\alpha)$

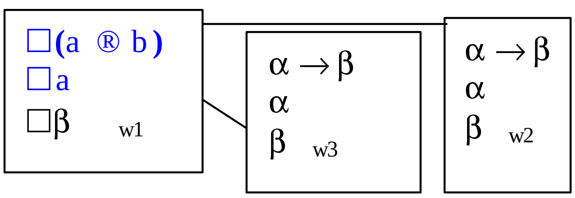
O símbolo $\leftrightarrow$ também pode ser introduzido pela definição abaixo:

Definição 33 $\{\leftrightarrow\}$ $(\alpha \leftrightarrow \beta) = ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$

3.1 Sistema K

Os conjuntos de axiomas e regras de inferência que utilizaremos para apresentação do sistema **K** da lógica modal proposicional são mostrados abaixo:

K $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
(Qualquer relação de acessibilidade)



Definição 34 {*Esquema de Axiomas*} Se α, β e χ são fórmulas, então as seguintes fórmulas são axiomas:

AXM1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

AXM2 $(\chi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\chi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\chi \rightarrow \beta))$

AXM3 $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$

K $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

Definição 35 {*Regras de Inferência*} As regras de inferência que utilizaremos para a formação do sistema dedutivo da lógica modal proposicional, utilizando a apresentação axiomática, são (onde α e β são fórmulas, e Γ é um conjunto de fórmulas):

Modus Ponens (*MP*)	**Necessitação** (*Nec*)
$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha,\ \Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta)}{\Gamma \vdash \beta}$	$\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \Box\alpha}$

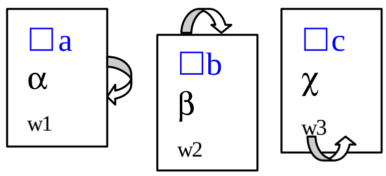
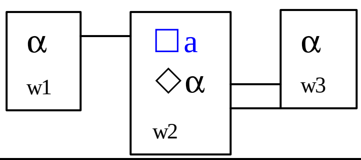
É importante observar que, diferentemente da regra *modus ponens*, para a aplicação da regra *necessitação*, a fórmula α não pode depender de nenhuma hipótese; em outras palavras, α deve ser um teorema da lógica.

Tabela 1 *Esquema de axiomas e regras de inferência do sistema* **K**

Sistema K	
Esquema de Axiomas	**Regras de Inferência**
⇨ α, β e χ são fórmulas	⇨ α e β são fórmulas ⇨ Γ é um conjunto de fórmulas
AXM1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ **AXM2** $(\chi \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\chi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\chi \rightarrow \beta))$ **AXM3** $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$	**Modus Ponens** (***MP***) $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha,\ \Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta)}{\Gamma \vdash \beta}$
K $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$	**Necessitação** (***Nec***) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \Box\alpha}$

3.2 Sistemas T, D, K4, S4, KB, B e S5

Apresentaremos a seguir os sistemas de apresentação axiomática para as lógicas modais proposicionais **T**, **D**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5**, juntamente com uma ilustração de sua relação de acessibilidade característica e um exemplo de configuração da estrutura correspondente. (As setas representam a relação de acessibilidade; a seta curva representa a reflexividade; as fórmulas em destaque são as verdades iniciais que nos permitem deduzir as demais fórmulas.)

Sistema T Os axiomas e regras de inferência do sistema **K** mais o seguinte esquema de axioma: **T** $\Box\alpha \rightarrow \alpha$.	**T** $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ $\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ (Relação de acessibilidade reflexiva) 
Sistema D Os axiomas e regras de inferência do sistema **K** mais *um dos* seguintes esquemas de axioma: **D** $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$. **D’** $\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\alpha$.	**D** $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ **OU** **D’** $\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\alpha$ $\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ (Relação de acessibilidade serial) 

Sistema K4

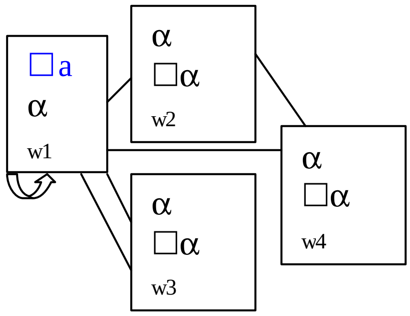
Os axiomas e regras de inferência do sistema **K** mais o seguinte esquema de axioma:

K4 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$.

K4 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade transitiva)



Sistema S4

Os axiomas e regras de inferência do sistema **T** mais o axioma **K4**.

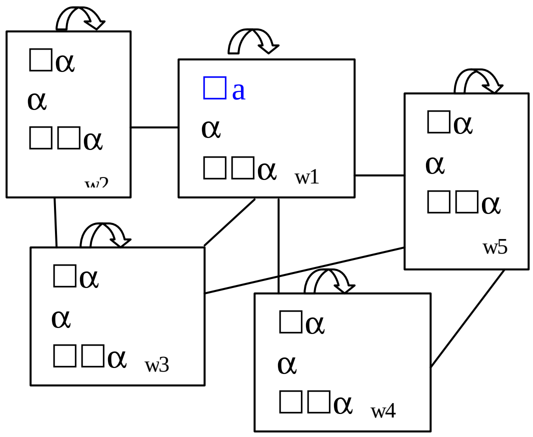
S4

K4 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

$\oplus$ **T** $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade reflexiva e transitiva – pré-ordem)



Sistema KB

Os axiomas e regras de inferência do sistema **K** mais um dos seguintes esquemas de axioma:

B $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$.

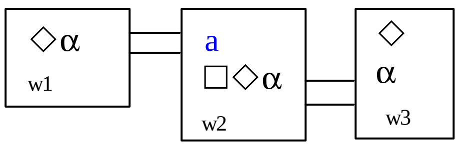
B' $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$.

KB

B $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ **OU** **B'** $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade simétrica)



<table>
<tr>
<td>

Sistema B

Os axiomas e regras de inferência do sistema **T** mais o axioma **B** (ou, equivalentemente, **B**').

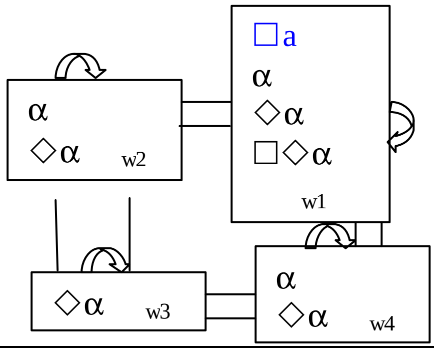
</td>
<td>

B $\alpha \to \Box\Diamond$? **OU B'** $\Diamond\Box\alpha \to \alpha$

$\oplus$ **T** $\Box\alpha \to \alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade reflexiva e simétrica)



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Sistema S5

Os axiomas e regras de inferência do sistema **S4** mais o axioma **B** (ou, equivalentemente, **B**').

O sistema **S5** é, entretanto, geralmente apresentado através dos axiomas e regras do sistema **T** mais o esquema de axioma: **S5** $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$.

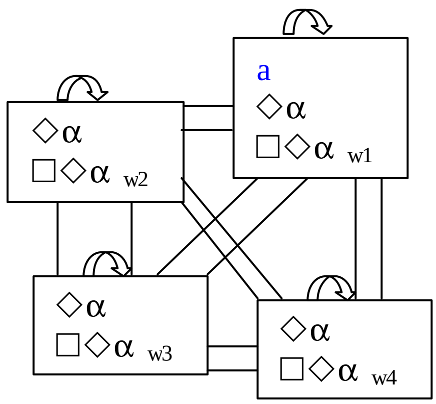
</td>
<td>

S5 $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

$\oplus$ **T** $\Box\alpha \to \alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade reflexiva, simétrica e transitiva – equivalência)



</td>
</tr>
</table>

Tabela 2 *Axiomas característicos dos sistemas* **T, D, K4, S4, KB, B** *e* **S5**

Sistemas	**Axiomas (além daqueles do Sistema K)**				
	T	**D ou D'**	**K4**	**B ou B'**	**S5**
T	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$				
D		$\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ **OU** $\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\alpha$			
K4			$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$		
S4	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$		$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$		
KB				$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ **OU** $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$	
B	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$			$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ **OU** $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$	
S5	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$				$\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
S5 alternativo	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$		$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$	$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ **OU** $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$	

3.3 Principais Propriedades

O sistema dedutivo determina um conjunto gerado a partir do conjunto de axiomas, por aplicações das regras de inferência, a saber, o conjunto dos teoremas. Da mesma forma, o sistema semântico determina um conjunto das fórmulas válidas. Poderíamos perguntar, então, se o conjunto dos teoremas é um subconjunto do conjunto das fórmulas válidas. Esta questão é abordada pelo *teorema da corretude*, que estabelece que se uma fórmula é provada pelo sistema dedutivo, então ela é válida. Assim, o teorema de corretude vem mostrar que o sistema dedutivo está de acordo com o significado dado às fórmulas, ou em outras palavras, que o sistema dedutivo tem um "respaldo nas nossas observações sobre as coisas do 'mundo real' sendo tratado". Entre as várias conclusões importantes que podemos extrair desse teorema, destacamos a seguinte: como no mundo real não pode acontecer que algo *seja* e *não seja* ao mesmo tempo, temos, pela corretude, que não pode acontecer $\vdash \alpha$ e $\vdash \neg\alpha$.

Da mesma forma, poderíamos perguntar se o conjunto das fórmulas válidas é um subconjunto do conjunto dos teoremas. Esta questão é tratada pelo *teorema da completude*, que vem estabelecer que o sistema dedutivo é suficiente para gerar todas as fórmulas válidas.

Nesta seção, demonstraremos os teoremas de corretude e de completude do sistema axiomático da lógica modal proposicional **D**. As demonstrações para os outros sistemas da lógica modal são omitidas.

A seguinte convenção será adotada:

Notação 10 Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Escrevemos $\Gamma \vdash \alpha$ quando α for derivável de Γ através do sistema de apresentação axiomática, e escreveremos $\Gamma \nvdash$? quando não for.

Notação 11 Escreveremos $\Gamma \vDash \alpha$ quando α for válida em todos os modelos nos quais os membros de Γ forem todos válidos, e $\Gamma \nvDash$ caso contrário.

3.3.1 Teorema da corretude

Teorema 5 {*Corretude do sistema axiomático*} Sejam Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \vDash \alpha$.

Prova: A idéia é mostrar que o conjunto de axiomas é logicamente implicado por qualquer fórmula (e portanto é válido em qualquer estrutura) e que as regras preservam satisfatibilidade. Então poderemos estabelecer a conclusão por indução.

CASO 1: α é um axioma da lógica.

⇨ α é do tipo $p \to (q \to p)$.

Afirmamos que toda estrutura é um modelo para α, isto é, $\omega \Vdash \alpha$, para todos os mundos possíveis ω em qualquer estrutura. Suponhamos, por contradição, que existe um mundo possível ω em alguma estrutura tal que $\omega \nVdash \alpha$:

$\omega \nVdash \alpha$

sse $\omega \nVdash (p \to (q \to p))$

sse não $(\omega \Vdash (p \to (q \to p)))$, (pela definição de $\nVdash$)

sse não $(\omega \nVdash p$ ou $\omega \Vdash (q \to p))$, (pela semântica de $\to$)

sse não $(\omega \nVdash p$ ou $(\omega \nVdash q$ ou $\omega \Vdash p))$, (pela semântica de $\to$)

sse não $(\omega \nVdash p$ e não $(\omega \nVdash q$ ou $\omega \Vdash p)$

sse não não $\omega \Vdash p$ e não $(\omega \nVdash q$ ou $\omega \Vdash p)$, (pela definição de $\nVdash$)

sse $\omega \Vdash p$ e não $\omega \nVdash q$ e não $\omega \Vdash p$

Que é uma contradição. Portanto, não pode existir um mundo possível em uma estrutura que não satisfaça α.

⇨ Os axiomas **AXM2** e **AXM3** são tratados de forma análoga.

⇨ α é do tipo $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$:

Suponhamos, por contradição, que existe uma estrutura $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v})$ com um mundo possível $\omega \in \boldsymbol{W}$ tal que:

$$\omega \nVdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

então, pela definição de $\nVdash$ e pela semântica de $\rightarrow$, temos:

$$\omega \Vdash \Box(p \rightarrow q) \text{ e } \nVdash (\Box p \rightarrow \Box q)$$

Notação 12 O símbolo $\forall$ representará a expressão “para todo”, e o símbolo $\exists$ representará a expressão “existe”.

Por um lado, temos:

$\omega \Vdash \Box(p \rightarrow q)$

sse $\omega' \Vdash (p \rightarrow q)$, $\forall\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$, (pela semântica de $\Box$)

sse $\omega' \nVdash p$ ou $\omega' \Vdash q$, $\forall\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$, (pela semântica de $\rightarrow$)

Por outro lado, temos:

$\omega \Vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$

sse não $\omega \Vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$ (pela definição de $\nVdash$)

sse não ($\omega \nVdash \Box p$ ou $\omega \Vdash \Box q$), (pela semântica de $\rightarrow$)

sse $\omega \Vdash \Box p$ e $\omega \nVdash \Box q$,

sse $\omega \Vdash \Box p$ e NÃO $\omega \Vdash \Box q$, (pela definição de $\nVdash$)

sse $\omega' \Vdash p$, $\forall\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$ e
não ($\omega'' \Vdash q$, $\forall\omega'' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega'') \in \boldsymbol{R}$, (pela semântica de $\Box$)

sse $\omega' \Vdash p$, $\forall\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$ e $\exists\omega'' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega'') \in \boldsymbol{R}$ e
não $\omega'' \Vdash q$

que contradiz a conclusão acima.

⇨ α é do tipo $\Box p \rightarrow \Diamond p$:

Suponhamos, por contradição, que existe uma estrutura $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v})$ com um mundo possível $\omega \in \boldsymbol{W}$, tal que:

$$\omega \nVdash (\Box p \rightarrow \Diamond p)$$

então, pela definição de $\nVdash$ e pela semântica de $\rightarrow$, temos:

$$\text{não } (\nVdash \Box p \text{ ou } \Vdash \Diamond p)$$

Logo,

$$\omega \Vdash \Box p \text{ e } \omega \nVdash \Diamond p$$

Do primeiro componente da conjunção $\omega \Vdash \Box p$, pela semântica de $\Box$, obtemos:

$$\omega \Vdash p, \forall\omega' \in \boldsymbol{W} \text{ tal que } (\omega, \omega') \in \boldsymbol{R} \qquad (*)$$

Do segundo, também obtemos:

$\omega \nVdash \Diamond p$

sse não $\omega \Vdash \Diamond p$, (pela definição de $\nVdash$)

sse não $\exists\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$ e $\omega' \Vdash p$, (pela semântica de $\Diamond$)

sse não $\omega' \Vdash p$, $\forall\omega' \in \boldsymbol{W}$, tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$. (**)

Assim como se apresentam, os dois componentes (*) e (**) da conjunção acima ainda não constituem uma contradição, pois, a fim de obtermos uma, é preciso que haja pelo menos um mundo possível $\omega' \in \boldsymbol{W}$ tal que $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$. Como o sistema da lógica modal que estamos considerando é o sistema **D**, que restringe as estruturas àquelas com relação de acessibilidade serial, podemos afirmar que existe pelo menos um mundo acessível a partir de ω e, portanto, a contradição fica estabelecida.

CASO 2: $\alpha \in \Gamma$. Claramente, $\Gamma \vDash \alpha$.

CASO 3: α é obtida por *modus ponens* a partir de β e $\beta \rightarrow \alpha$, onde, pela hipótese de indução, $\Gamma \vDash \beta$ e $\Gamma \vDash (\beta \rightarrow \alpha)$.

Então, temos que, para todo $\omega \in \boldsymbol{W}$, se todos os membros de Γ forem satisfeitos em ω, então $\omega \Vdash \beta$ e $\omega \Vdash (\beta \rightarrow \chi)$.

Pela semântica de $\rightarrow$, temos que

$$\omega \Vdash (\beta \rightarrow \alpha) \text{ sse}$$

$$\omega \nVdash \beta \text{ ou } \omega \Vdash \alpha. \ (*)$$

Como, para todo $\omega \in \boldsymbol{W}$ em que todos os membros de Γ são satisfeitos, também β é satisfeita, podemos concluir, a partir de (*), que, em todos esses mundos possíveis, α também é satisfeita. Portanto, $\Gamma \vDash \alpha$.

CASO 4: $\Box\alpha$ é obtida a partir de α por aplicação da regra de *Necessitação* (***Nec***), segundo a qual, pela hipótese de indução, $\Gamma \vDash \alpha$. Em outras palavras, α é satisfeita em todos os mundos possíveis de qualquer estrutura que são modelos para todos os membros de Γ. Então, pela semântica de $\Box$, $\Box\alpha$ é satisfeita em todos esses mundos possíveis. Logo, $\Gamma \vDash \Box\alpha$.

3.3.2 Teorema da completude

Nesta seção, apresentaremos a prova do teorema de completude para o sistema **D** da lógica modal proposicional. Para tanto, faz-se necessária a apresentação de alguns conceitos.

Definição 36 {*Consistência de fórmula*} Dizemos que uma fórmula α é *consistente* se e somente se $\neg\alpha$ não for provável na lógica ($\nvdash \neg\alpha$).

Definição 37 {*Consistência de conjunto de fórmulas*} Um conjunto finito de fórmulas, digamos $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, é dito *consistente* se e somente se a negação da conjunção de seus membros não puder ser provada ($\nvdash \neg(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$).

Definição 38 {*Conjunto maximal consistente*} Um conjunto consistente de fórmulas é chamado *maximal consistente* se ele contém α ou $\neg\alpha$, para todas as fórmulas α.

Definição 39 {*Propriedades de conjuntos consistentes*} Algumas propriedades dos conjuntos consistentes são (onde S é um conjunto maximal consistente qualquer e α, β são fórmulas):

- $S \vdash \alpha$, então $\alpha \in S$;
- $\alpha \in S$ ou $\neg\alpha \in S$;
- Se $\alpha \in S$ e $(\alpha \rightarrow \beta) \in S$, então $\beta \in S$.

Lema 6 As seguintes afirmações são equivalentes (onde α é uma fórmula):

- Se $\omega \Vdash \alpha$, para todo mundo ω de qualquer estrutura, então $\vdash \alpha$;
- Qualquer fórmula consistente é satisfatível.

Prova: Suponhamos que a primeira afirmação acima seja o caso para uma fórmula α, ou seja (onde ω é qualquer mundo de qualquer estrutura):

Se $\omega \Vdash \alpha$, então $\vdash \alpha$ sse

Se $\nvdash \alpha$, então $\omega \nVdash \alpha$ sse

Se $\neg\alpha$ é consistente, então existe uma estrutura $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v} \rangle$ com $\omega' \in \boldsymbol{W}$

tal que $\omega' \Vdash \neg\alpha$ sse

Qualquer fórmula consistente é satisfatível.

Assim, tudo de que precisamos agora para provar a completude da lógica é encontrar um método para construirmos um modelo para uma fórmula consistente dada. O método que apresentaremos consiste em construir todo um conjunto maximal consistente a partir do conjunto consistente formado pela fórmula original, e então apresentar um modelo para ele.

Lema 7 {*Construção de Lindenbaum*} Qualquer conjunto consistente pode ser estendido a um conjunto maximal consistente.

Prova: A prova deste lema pode ser encontrada na maioria dos livros de textos de lógica clássica, tais como [SHO67, END72], e não será apresentada aqui ([COS92] ressalta que é bastante utilizado na demonstração do teorema da compacidade). Mostraremos, entretanto, como obter tal extensão.

Seja S um conjunto consistente de fórmulas. Primeiramente, geramos uma enumeração de todas as fórmulas. Agora, criamos uma seqüência de conjuntos de fórmulas $S_0, S_1, \ldots$, da seguinte forma:

Seja $S_0 = S$;

$S_{i+1} = S_i \cup \{\alpha_i\}$ se consistente, ou $S_i \cup \{\neg\alpha_i\}$ caso contrário

Seja Γ a união de todos os S_is. Assim, Γ é um conjunto maximal consistente e contém S.

Lema 8 Se um conjunto de fórmulas do tipo $\{\Box\alpha_1, \ldots, \Box\alpha_n, \neg\Box\beta\}$ é consistente, então $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ é consistente.

Prova: Suponhamos, por contradição, que o conjunto $\{\Box\alpha_1, \ldots, \Box\alpha_n, \neg\Box\beta\}$ seja consistente e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ inconsistente. Então:

$$\vdash \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta)$$

Logo, por necessitação (***Nec***), temos:

$$\vdash \Box\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta)$$

Pelo axioma **D'**, temos:

$$\vdash \Box\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\Box(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta)$$

Então, por *modus ponens* (***MP***), obtemos:

$$\vdash \neg\Box(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta)$$

Finalmente, usando a afirmação acima e o teorema abaixo (a prova deste teorema é omitida):

$$\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$$

Obtemos, por *modus ponens* (***MP***):

$$\vdash \neg(\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n \wedge \Box\neg\beta)$$

Então $\{\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n \wedge \Box\neg\beta)\}$ é inconsistente e, pelo axioma **D'** e *modus ponens* (***MP***), podemos concluir que $\{\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n \wedge \neg\Box\beta)\}$ é inconsistente, o que contradiz a hipótese.

A prova da completude das lógicas modais requer não somente a criação de um conjunto maximal consistente, mas todo um sistema de conjuntos maximais consistentes Γ_1, Γ_2, …, construídos da seguinte forma:

Γ_1 é obtido, estendendo o conjunto dado a um conjunto maximal consistente, através da construção de Lindenbaum;

Para todo Γ e para toda fórmula do tipo $\neg\Box\alpha \in \Gamma$, geramos um novo conjunto maximal consistente Γ_j, subordinado a Γ_i começando com α e o conjunto $S = \{\beta \mid \Box\beta \in \Gamma_i\}$. (Note que o conjunto $\{\neg\alpha\} \cup S$ é consistente, pelo Lema 8.)

Agora, apresentamos um modelo $A = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v} \rangle$ para o sistema construído acima, com as seguintes características:

- A cada Γ_i do sistema de conjuntos maximais consistentes corresponde um mundo possível, que chamamos de ω_i. ***W*** é o conjunto de todos esses mundos possíveis.
- Para todos os mundos possíveis ω_i, ω_j, $\langle \omega_i, \omega_j \rangle \in \boldsymbol{R}$ se e somente se o correspondente Γ_j for subordinado ao conjunto Γ_i.
- $\boldsymbol{v}(\omega_i, p) = \boldsymbol{V}$ se $p \in \Gamma_i$; e $\boldsymbol{v}(\omega_i, p) = \boldsymbol{F}$, caso contrário, para todos os mundos possíveis $\omega_i \in \boldsymbol{W}$, todo símbolo proposicional p, e Γ_i é o conjunto maximal consistente associado a ω_i.

É fácil verificar que $A = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v} \rangle$ definida acima é, de fato, uma estrutura. Verificaremos apenas que A satisfaz a restrição característica do sistema **D**, imposta à relação de acessibilidade ***R*** de ser serial, o que será demonstrado no lema a seguir.

Lema 9 Seja $A = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{v} \rangle$ uma estrutura como descrita acima. Então A satisfaz a restrição: "*Para todo mundo possível* $\omega \in \boldsymbol{W}$ *existe um mundo possível* $\omega' \in W$ *tal que* $(\omega, \omega') \in \boldsymbol{R}$."

Prova: Seja Γ_i qualquer conjunto maximal consistente da construção acima. Então, para cada fórmula α, temos que $\Box\alpha \in \Gamma_i$, ou $\neg\Box\alpha \in \Gamma_i$, pela propriedade dos conjuntos maximais consistentes. Dessa forma, temos as possibilidades:

- $\neg\Box\alpha \in \Gamma_i$. Logo, pela construção do sistema de conjuntos maximais consistentes, existe um conjunto maximal consistente subordinado a Γ_i, digamos

Γ_j. Portanto, pela definição de *A*, existe um mundo possível $\omega_j \in \boldsymbol{W}$ correspondente a Γ_j tal que $\langle\omega_i, \omega_j\rangle \in \boldsymbol{R}$, onde $\omega_i \in \boldsymbol{W}$ é o mundo possível correspondente a Γ_i.

⇨ $\Box\alpha \in \Gamma_i$. Seja $\neg\beta = \alpha$. Então, pelo axioma **D**' e pela propriedade dos conjuntos maximais consistentes, temos que $(\Box\neg\beta \rightarrow \neg\Box\beta) \in \Gamma_i$. Logo, por *modus ponens*, $\neg\Box\beta \in \Gamma_i$. Agora, a conclusão é obtida como no caso anterior.

Finalmente, precisamos mostrar que *A* é um modelo para as fórmulas do sistema de conjuntos maximais consistentes. Para tanto, mostraremos, para toda fórmula α, que $\omega_i \Vdash \alpha$ sse $\alpha \in \Gamma_i$ e, caso contrário, $\omega_i \nVdash \alpha$. Esse resultado pode ser obtido através de uma indução na estrutura da fórmula, como apresentado a seguir:

⇨ α é um símbolo proposicional

- O resultado é assegurado pelas definições da estrutura *A* e da relação de satisfatibilidade ($\Vdash$).

⇨ A fórmula é da forma $\neg\alpha$.

- Suponhamos que $\alpha \in \Gamma_i$, então $\neg\alpha \notin \Gamma_i$, pela propriedade de conjunto maximal consistente, e ω_i α, pela hipótese indutiva. Logo, $\omega_i \Vdash \alpha$, pela definição de satisfatibilidade. Por outro lado, se $\alpha \notin \Gamma i$, então $\neg\alpha \in \Gamma_i$, pela propriedade de conjunto maximal consistente, e $\omega_i \Vdash \alpha$, pela hipótese da indução. Logo $\omega_i \Vdash \neg\alpha$.

⇨ A fórmula é da forma $\alpha \vee \beta$:

- Se $\alpha \vee \beta \in \Gamma_i$, então $\alpha \in \Gamma_i$ ou $\beta \in \Gamma_i$, pois, se $\alpha, \beta \notin \Gamma_i$, então $\neg\alpha, \neg\beta \in \Gamma_i$, e, conseqüentemente, $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \in \Gamma_i$ e $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_i$, pela propriedade de conjunto maximal consistente. Isso contradiz a hipótese, pois não podemos ter $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_i$ e $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_i$, uma vez que Γ_i é um conjunto consistente. Vamos supor, então, que uma das duas fórmulas α ou β, digamos α, pertence a Γ_i, então $\omega_i \Vdash \alpha$, pela hipótese de indução. Logo, $\omega_i \Vdash (\alpha \vee \beta)$, pela definição de $\Vdash$. Se ambos estão em Γ_i, então o resultado segue pelo mesmo argumento.
- Se, por outro lado, $(\alpha \vee \beta) \notin \Gamma_i$, então $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_i$, pela propriedade de conjunto maximal consistente e, com argumento similar, $\neg\alpha, \neg\beta \in \Gamma_i$. Portanto, $\alpha, \beta \notin \Gamma_i$. Então, pela hipótese indutiva, $\omega_i \Vdash \alpha$ e $\omega_i \Vdash \beta$, e, conseqüentemente, $\omega_i \Vdash (\alpha \vee \beta)$, pela definição de $\Vdash$.

⇨ A fórmula é da forma $\Box\alpha$:

- Se $\Box\alpha \in \Gamma_i$, então $\alpha \in \Gamma_j$, para todo conjunto Γ_j subordinado a Γ_i, pela construção do sistema de conjuntos maximais consistentes. Logo, $\omega_j \Vdash \alpha$, para todo mundo possível $\omega_j \in \boldsymbol{W}$ tal que $\langle\omega_i, \omega_j\rangle \in \boldsymbol{R}$, pela hipótese de indução. Portanto, $\omega_i \Vdash \Box\alpha$.

Se $\Box\alpha \notin \Gamma_i$, então $\neg\Box\alpha \in \Gamma_i$, pela propriedade de conjunto maximal consistente, e $\neg\alpha \in \Gamma_j$ para algum conjunto Γ_j subordinado a Γ_i, pela construção do sistema de conjuntos maximais consistentes. Logo, $\omega_j \Vdash \neg\alpha$, pela hipótese indutiva. Então $\omega_j \nVdash \alpha$ e, portanto, $\omega_i \nVdash \Box\alpha$, pela definição da relação de satisfatibilidade. Assim, $\omega_i \Vdash \neg\Box\alpha$, pela definição de $\Vdash$.

4 Dedução Natural

No capítulo anterior, foi descrito, para uma família de lógicas modais, um sistema axiomático, que é correto e completo com respeito à semântica de mundos possíveis de Kripke. Alguns registros sobre sistemas de dedução natural existentes para lógicas modais são dados aqui. Esta apresentação é baseada no trabalho de [COS92].

O sistema de dedução natural para a lógica modal foi proposto por Fitch ([FIT52]). A prova de uma fórmula da lógica modal no sistema de dedução natural pode implicar a criação de subprovas, de acordo com as modalidades envolvidas. Assim, se estamos interessados em provar $\Diamond\alpha$, podemos criar uma subprova para α. Essas subprovas correspondem a uma mudança de mundo e à verificação da validade da fórmula nesse outro mundo.

Prawitz [PRA65] descreveu um sistema de dedução natural para as lógicas modais ***S4*** e ***S5***. Ele estendeu a dedução natural de Gentzen para lógica clássica [GEN34] com duas regras de inferência, [$\Box$E] e [$\Diamond$I], e duas regras de *dedução* “impróprias” (na terminologia de Gentzen), a [$\Box$I] e a [$\Diamond$E]. Essas duas regras são impróprias no sentido de que elas têm subderivações como suas premissas, e condições adicionais devem ser especificadas para definir o conjunto de suposições *descarregadas* e o tipo de fórmulas que pode ser usado com as subderivações. Essas condições adicionais diferem de lógica para lógica.

Fitting [FIT83] desenvolveu um meio mais simples de definir regras de dedução natural baseado na técnica de introduzir “caixas” para delimitar as subderivações usadas como premissas nas regras impróprias de Gentzen. Uma descrição das regras de dedução natural para conetivos clássicos e para operadores modais pode ser encontrada em [FIT83]. Alguns aspectos e características dessa abordagem são dados aqui.

Usando-se a técnica de caixas de Fitting, as suposições que aparecem na primeira linha com uma caixa são suposições que precisam ser descarregadas. Por exemplo, na regra [$\to$I] dada abaixo, a fórmula α é uma suposição nova adicionada com a subderivação e descarregada com o fechamento da caixa.

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \beta\end{array}}\quad [\to \mathrm{I}]}{\alpha \to \beta}$$

Além disso, fórmulas inferidas com uma caixa ou uma subderivação não podem ser usadas fora da caixa. Entretanto, é possível repetir fórmulas do lado de fora (acima) de uma caixa dentro da caixa, permitindo, portanto, o uso de fórmulas já inferidas ou de suposições mais globais. Isso é feito, especificando-se uma *regra de iteração*, que é algo similar às condições laterais de Gentzen para as regras impróprias. A prova com uma caixa é considerada uma derivação *subordinada* no sentido em que ela fornece a condição para a regra de inferência subjacente a ser aplicada. O mesmo princípio é aplicado às regras de inferência para operadores modais, seguindo a idéia das *derivações subordinadas* de Fitch [FIT52]. Fitting define um tipo particular de caixa chamado *caixa estrita*. Regras de inferência para operadores modais são dadas como regras para “criação” e “fechamento” de caixas e para fórmulas repetidas dentro da caixa. Caixas estritas podem ser pensadas como deduções que ocorrem dentro de um mundo acessível (alternativo). Portanto, nenhuma suposição descarregada é introduzida.

Dois tipos diferentes de caixas estritas são definidos, correspondendo, respectivamente, à interpretação de um mundo acessível *arbitrário* e de um mundo acessível *particular*. Entretanto, elas têm que ser usadas separadamente, gerando dois tipos diferentes de sistemas de dedução natural para lógicas modais, chamados *A-estilo* e *I-estilo*, respectivamente.

Esses estilos oferecem duas formas de considerarmos criações de provas. Em uma, a criação de uma subprova pode ser interpretada como a mudança para um mundo específico, como se estivéssemos procurando um contra-exemplo. Assim, se encontrarmos $\Diamond\alpha$ em uma prova, poderemos criar uma subprova com α e, se chegarmos a uma contradição, ou seja, se escrevermos duas fórmulas do tipo β e $\neg\beta$, então poderemos retorna, escrevendo essa contradição. O mesmo acontece com $\neg\Box\alpha$, para a qual podemos criar uma nova subprova com $\neg\alpha$, devido à interdefinibilidade dos operadores modais (mais adiante neste capítulo, apresentaremos um exemplo desse estilo de dedução).

Notação 13 Para simplificar a escrita, estaremos utilizando o símbolo "$\perp$" para representar contradição.

Nessa situação, se encontrarmos, no desenvolvimento da prova, $\Box\beta$ – que significa que β deve ser válida em todo mundo acessível a partir do atual –, poderemos escrever β na subprova. O mesmo raciocínio aplica-se ao encontrarmos $\neg\Diamond\beta$, que nos permitirá escrever $\neg\beta$ na subprova. Porém, como a relação de acessibilidade varia de acordo com o sistema que estamos utilizando, deveremos ter uma forma de aplicar essa regra para cada sistema da lógica modal. Por exemplo, se a relação de acessibilidade é reflexiva, então poderemos escrever β na prova atual também.

Chamaremos essa abordagem de *I-estilo*, como em [FIT83]. Nessa abordagem, "as mudanças de mundo" ocorrem de uma forma muito semelhante às que ocorrem no sistema de *tableau*, como veremos no capítulo seguinte.

A outra abordagem para criação de subprovas pode ser interpretada como a mudança para um mundo genérico qualquer. Assim, se encontramos $\Box\alpha$, podemos abrir uma subprova com α. Se, nessa subprova, pudermos concluir β, e como essa subprova pode ser interpretada como a verificação da fórmula em um mundo qualquer, ou seja, ela se aplica a todos os mundos acessíveis a partir do atual (mesmo que não haja nenhum), podemos retornar e concluir $\Box\beta$.

No sistema de dedução natural *A-estilo*, uma caixa estrita pode ser aberta em qualquer ponto de uma derivação para capturar a idéia de uma regra [$\Box$I]. De fato, uma regra chamada de *Fechamento de Caixa Estrita* permite a inferência de fórmulas da forma $\Box\alpha$ em qualquer lugar em que uma caixa desse tipo termine com uma fórmula α. Além disso, uma regra chamada *Regra da Iteração Estrita* também é definida para especificar as condições sob as quais fórmulas do lado de fora da caixa podem ser copiadas para dentro. Para a lógica modal básica **K**, uma fórmula α pode ser adicionada dentro de uma caixa estrita se uma fórmula da forma $\Box\alpha$ ocorrer do lado de fora dela. Isso pode ser visto como um tipo de regra [$\Box$E].

O entendimento das regras de dedução natural para os sistemas da lógica modal depende fortemente do conceito de relação de acessibilidade, que é uma noção semântica. Portanto, na maioria das vezes, explicaremos essas regras através do sistema semântico.

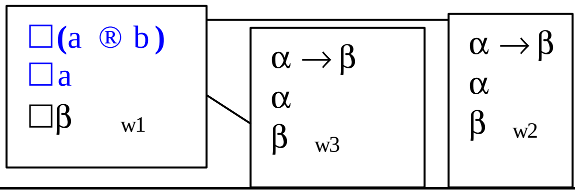
4.1 *I-estilo*

Apresentaremos a seguir as regras da abordagem ***I-estilo*** de dedução natural para a lógica modal proposicional, iniciando com o sistema **K**. Como o sistema **K** está contido em todos os outros sistemas que estamos considerando (embora haja sistemas não-normais que não contêm **K**), essas regras também devem ser aceitas nos outros sistemas, com os devidos ajustes e acréscimos necessários. Esses outros sistemas serão considerados mais adiante neste capítulo.

4.1.1 Sistema K

$$\mathbf{K}\ \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$$

(Qualquer relação de acessibilidade)



O conjunto de regras da abordagem *I-estilo* de dedução natural para o sistema **K** da lógica modal proposicional é formado pelas regras apresentadas a seguir (onde α, β e χ são fórmulas). Também apresentamos as restrições impostas às regras, bem como algumas explicações correspondentes às mesmas.

Vale lembrar que queremos, certamente, que os teoremas da lógica clássica proposicional sejam também teoremas da lógica modal proposicional, uma vez que estamos usando os mesmo conetivos lógicos com os mesmos significados. Portanto, as regras da lógica clássica proposicional também são regras da lógica modal proposicional.

REGRAS DE INTRODUÇÃO

$$\wedge\mathrm{I})\quad \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$$\vee\mathrm{I})\quad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

$$\to\mathrm{I})\quad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \hline \beta \\ \hline \alpha \to \beta\end{array}$$

A ocorrência da fórmula α ou ¬β a ser usada não pode estar dentro do escopo de nenhuma suposição não descarregada – obviamente que se ela estiver dentro de uma suposição descarregada, pela visibilidade do aninhamento, ela também não poderá ser usada. Assim, não pode depender de nenhuma hipótese.

$\neg$ I) $$\frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\alpha}$$

$\Box$ I) / $\neg\Diamond$ I) $$\frac{\alpha}{\Box\alpha} \qquad \frac{\neg\beta}{\neg\Diamond\beta}$$

$\Diamond$ I) –

$\neg\Box$ I)

As regras ¬I e ¬E tiveram uma reformulação não obrigatória, representando contradição por “⊥”.

Queremos não apenas que os teoremas da lógica proposicional sejam aceitos na lógica modal proposicional, mas que sejam aceitos necessariamente, ou seja, que sejam aceitos em todos os mundos possíveis. Esta é a explicação para a regra ¬◇I ou □I, que é chamada de *necessitação*.

REGRAS DE ELIMINAÇÃO

$\wedge$ E) $$\frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha\wedge\beta}{\beta}$$

As regras ¬I e ¬E tiveram uma reformulação (não obrigatória), representando a contradição por “⊥”.

$\vee$ E) $$\frac{\alpha\vee\beta \quad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}$$

A subprova da regra □E ou ¬◇E deve ser uma já anteriormente criada (por aplicação da regra ◇E ou ¬□E).

$\rightarrow$ E) $$\frac{\alpha \qquad \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$$

$\neg$ E) $$\frac{\bot}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha}$$

$\Box$ E) / $\neg\Diamond$ E) $$\begin{array}{c}\Box\alpha\\ \hline\hline \begin{array}{|c|}\hline \vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \hline\end{array}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\Diamond\beta\\ \hline\hline \begin{array}{|c|}\hline \vdots\\ \neg\beta\\ \vdots\\ \hline\end{array}\end{array}$$

O componente α ou ¬β de uma fórmula □α ou ¬◇β deve ser aceito em todos os mundos acessíveis a partir do atual. Portanto, como uma subprova pode ser interpretada como um mundo específico, ao encontrarmos uma fórmula □α ou ¬◇β poderemos também escrever α ou ¬β em uma subprova existente, através da regra □E ou ¬◇E. Também, a regra □E ou ¬◇E é, em geral, apresentada como uma regra à parte denominada *iteração*. Optamos por essa forma de apresentação para mantermos a padronização da apresentação do sistema de dedução natural.

$\Diamond$ E) / $\neg\Box$ E) $$\begin{array}{c}\Diamond\alpha\\ \hline\hline \begin{array}{|c|}\hline \alpha\\ \hline\end{array}\\ \vdots\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\Box\beta\\ \hline\hline \begin{array}{|c|}\hline \neg\beta\\ \hline\end{array}\\ \vdots\end{array}$$

Ao depararmos com uma fórmula do tipo ◇α ou ¬□β, podemos então afirmar que existe um mundo acessível a partir do atual onde α ou ¬β ocorre. Então, com a regra ◇ E ou ¬□ E, criamos uma subprova – transportamo-nos para esse mundo – para verificarmos essa situação.

REGRA DE RETORNO (RET)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}}{\bot}$$

Se, em uma subprova, podemos deduzir uma contradição ($\bot$), então as afirmações de que dispomos sobre esse "mundo possível" são também contraditórias. Então podemos voltar e afirmar a contradição "$\bot$". Esta é a justificativa para a regra RET.

Exemplo 1 Provaremos que a fórmula $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ é um teorema do sistema **K** da lógica modal proposicional:

1.	$\Box(\alpha \to \beta)$	(supos.)
2.	$\Box\alpha$	(supos.)
3.	$\neg\Box\beta$	(supos.)
4.	$\neg\beta$	(3, $\neg\Box$E)
5.	α	(2, $\Box$E)
6.	$\alpha \to \beta$	(1, $\Box$E)
7.	β	(5, 6, $\to$E)
8.	$\bot$	(7,4,RET)
9.	$\Box\beta$	(3, 8, $\neg$E)
10	$\Box\alpha \to \Box\beta$	(2, 9, $\to$I)
11.	$\Box(\alpha\to\beta) \to (\Box\alpha\to\Box\beta)$	(1, 10, $\to$I)

Exemplo 2 Provaremos que a fórmula $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$ é um teorema do sistema **K** da lógica modal proposicional:

1.	$\Diamond(\alpha \wedge \beta)$	(supos.)
2.	$\neg\Diamond\alpha$	(supos.)
3.	$\alpha \wedge \beta$	(1, $\Diamond$E.)
4.	α	(3, $\wedge$E)
5.	$\neg\alpha$	(2, $\neg\Diamond$E)
6..	$\bot$	(4, 5, RET)
7.	$\Diamond\alpha$	(2, 6, $\neg$E)
8.	$\neg\Diamond\beta$	(supos.)
9.	$\alpha \wedge \beta$	(1, $\Diamond$E)
10.	β	(9, $\wedge$E)
11.	$\neg\beta$	(8, $\neg\Diamond$E)
12.	$\bot$	(10,11,RET)
13.	$\Diamond\beta$	(8, 12, $\neg$E)
14	$\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$	(7, 13, $\wedge$I)
15.	$\Diamond(\alpha\wedge\beta)\to(\Diamond\alpha\wedge\Diamond\beta)$	(1, 14, $\to$I)

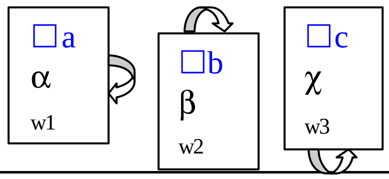
4.1.2 Sistemas **T**, **D**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5**

Apresentaremos a seguir as regras da abordagem *I-estilo* de dedução natural para os sistemas **T**, **D**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5** da lógica modal proposicional.

T $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

$\oplus$ **K** $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

(Relação de acessibilidade reflexiva)



Regras do sistema T: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **T** é formado pelas regras do sistema **K** mais a regra de eliminação:

$$\Box\ \mathbf{E})\ \frac{\Box\alpha}{\alpha} \qquad \frac{\neg\Diamond\beta}{\neg\beta}\ (\neg\Diamond\ \mathbf{E})$$

Essa regra justifica-se pelo fato de que, no sistema **T**, a relação de acessibilidade é reflexiva. Dessa forma, se uma fórmula deve ser aceita necessariamente – ou seja, em todos os mundos acessíveis – então ela deve ser aceita também no mundo atual, que é um mundo acessível, pela reflexividade da relação de acessibilidade.

Exemplo 3 Provaremos que a fórmula $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ é um teorema da lógica modal **T**.

1.	$\Box\alpha$	(supos.)
2.	α	(1, $\Box$E)
3.	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$	(1, 2, $\rightarrow$I)

Regras do sistema D: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **D** é formado pelas regras do sistema **K**, eliminando-se a restrição imposta à regra $\Box$E ou $\neg\Diamond$E, que limita a aplicação da regra somente a subprovas já existentes.

Isso se justifica, pois a relação de acessibilidade serial implica que sempre existe um próximo mundo possível. Então, ao encontrarmos uma fórmula do tipo $\Box\alpha$ ou $\neg\Diamond\beta$, podemos criar uma subprova para α ou $\neg\beta$, uma vez que sabemos que existe um mundo possível acessível a partir do atual.

Exemplo 4 Provaremos que a fórmula $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ é um teorema da lógica modal **D**:

1.	$\Box\alpha$	(supos.)
2.	$\neg\Diamond\alpha$	(supos.)
3.	α	(1, $\Box$E)
4.	$\neg\alpha$	(2, $\neg\Diamond$E)
5.	$\perp$	(3, 4, RET)
6.	$\Diamond\alpha$	(2, 5, $\neg$E)
7.	$\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	(1, 6, $\rightarrow$I)

Regras do sistema K4: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **K4** é formado pelas regras do sistema **K** mais a seguinte regra de iteração:

$\Box$ **IT**)	$\Box\alpha$	$\neg\Diamond\beta$
$\neg\Diamond$ **IT**)	$\vdots$	$\vdots$
	$\Box\alpha$	$\neg\Diamond\beta$
	$\vdots$	$\vdots$

Restrição: A subprova deve ser uma já existente.

Explicação: Como a relação de acessibilidade é transitiva, se uma fórmula α é aceita necessariamente, α deve ser aceita em todos os mundos acessíveis a partir do atual.

Pela transitividade, todos os mundos acessíveis a partir dos mundos acessíveis a partir do atual são acessíveis a partir do atual. Logo, α deve ser aceita também nesses mundos. Portanto α deve ser aceita necessariamente em todos os mundos acessíveis a partir do mundo atual. Dessa forma, se encontrarmos uma fórmula do tipo $\Box\alpha$ ou $\neg\Diamond\beta$ em uma prova, podemos escrever $\Box\alpha$ ou $\neg\Diamond\beta$ em qualquer subprova existente.

Regras do sistema S4: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **S4** é formado pelas regras dos sistemas **T** e **K4**.

Regras do sistema KB: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **KB** é formado pelas regras do sistema **K** mais a regra de introdução:

$\Diamond$I)	α	$\neg\beta$
$\neg\Box$I)	$\vdots$	$\vdots$
	$\Diamond\alpha$	$\neg\Box\beta$
	$\vdots$	$\vdots$

Restrição: A subprova deve ser uma já existente.

Explicação: Suponha que uma fórmula do tipo α ou $\neg\beta$ seja escrita em uma prova. Em termos do sistema semântico, α ou $\neg\beta$ é satisfeita em um mundo possível ω.

Como a relação de acessibilidade é simétrica, todos os mundos acessíveis a partir de ω acessam ω. Então, em cada um desses mundos, a fórmula $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$ é satisfeita. Dessa forma, se encontrarmos α ou $\neg\beta$ em uma prova, podemos escrever $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$ em qualquer subprova existente.

Exemplo 5 Provaremos que a fórmula $\alpha \to \Box\Diamond\alpha$ é um teorema da lógica modal **KB**:

1.	α	(supos.)
2.	$\neg\Box\Diamond\alpha$	(supos.)
3.	$\neg\Diamond\alpha$	(2, $\neg\Box$E)
4.	$\Diamond\alpha$	(1, $\Diamond$I)
5.	$\perp$	(3, 4, RET)
6.	$\Box\Diamond\alpha$	(2, 5, $\neg$E)
7.	$\alpha \to \Box\Diamond\alpha$	(1, 6, $\to$I)

Regras do sistema B: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **B** é formado pelas regras dos sistemas **T** e **KB**.

Regras do sistema S5: O conjunto das regras do sistema *I-estilo* de dedução natural para a lógica modal **S5** é formado pelas regras dos sistemas **B** e **K4**.

Exemplo 6 Provaremos que a fórmula $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ é um teorema da lógica modal **S5**:

1.	$\Diamond\alpha$	(supos.)
2.	$\neg\Box\Diamond\alpha$	(supos.)
3.	$\neg\Diamond\alpha$	(2, $\neg\Box$E)
4.	$\Diamond\Diamond\alpha$	(1, $\Diamond$I)
5.	$\Diamond\alpha$	(4, $\Diamond$E)
6.	$\neg\Diamond\alpha$	(3, $\neg\Diamond$IT)
7.	$\bot$	(5, 6, RET)
8.	$\bot$	(7, RET)
9	$\Box\Diamond\alpha$	(3, 8, $\neg$E)
10.	$\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$	(1, 9, $\rightarrow$I)

Podemos criar uma nova regra de iteração para fórmulas do tipo $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$ no sistema **S5**:

$\Diamond$**IT**) $\quad \Diamond\alpha \quad\quad \neg\Box\beta$

$\neg\Box$**IT**)

$\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots$

$\quad\quad \Diamond\alpha \quad\quad \neg\Box\beta$

$\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots$

Restrição: A subprova deve ser uma já existente.

Explicação: Consideremos uma estrutura $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \mathbf{v} \rangle$, cuja relação de acessibilidade $\boldsymbol{R}$ é simétrica e transitiva. Suponhamos que existam mundos possíveis $\omega, \omega_1 \in \boldsymbol{W}$ tal que $\langle \omega, \omega_1 \rangle \in \boldsymbol{R}$ e uma fórmula do tipo $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$, por exemplo, $\Diamond\alpha$, seja satisfeita em ω, ou seja, $\omega \Vdash \Diamond\alpha$.

Então existe um mundo $\omega_2 \in \boldsymbol{W}$ tal que $\langle \omega, \omega_2 \rangle \in \boldsymbol{R}$ e $\omega_2 \Vdash \alpha$. Pela simetria, temos que $\langle \omega_1, \omega \rangle \in \boldsymbol{R}$, e pela transitividade, $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in \boldsymbol{R}$. Portanto, $\omega_1 \Vdash \Diamond\alpha$. Então, se a relação é transitiva e simétrica, e encontramos uma fórmula do tipo $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$ em uma prova, poderemos escrever $\Diamond\alpha$ ou $\neg\Box\beta$ em uma subprova já existente.

Observação: O conjunto de regras de dedução natural formado pelas regras dos sistemas **B** e **K4** é suficiente para o sistema **S5**. A adição dessa regra ao conjunto vem facilitar sobremaneira a prova de várias fórmulas, como é o caso da prova da fórmula $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ no exemplo a seguir, que é bastante mais simples do que no exemplo anterior.

Exemplo 7 Provaremos que a fórmula $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ é um teorema da lógica modal S5, utilizando a regra $\Diamond$IT ou $\neg\Box$IT:

1.	$\Diamond\alpha$	(supos.)
2.	$\neg\Box\Diamond\alpha$	(supos.)
3.	$\neg\Diamond\alpha$	(2, $\neg\Box$E)
4.	$\Diamond\alpha$	(1, $\Diamond$IT)
5.	$\bot$	(3, 4, RET)
6.	$\Box\Diamond\alpha$	(2, 5, $\neg$E)
7.	$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$	(1, 6, $\rightarrow$I)

No sistema de dedução natural *I-estilo*, caixas estritas são introduzidas em uma prova somente depois da ocorrência de uma fórmula da forma $\Diamond\alpha$ (ou $\neg\Box\alpha$), agindo, portanto, como subprovas em um mundo acessível *particular*. Caixas estritas diferentes precisam ser abertas para diferentes fórmulas $\Diamond$, e um fechamento ocorre a qualquer momento em que $\bot$ seja provado na caixa, repetindo-o do lado de fora. O mesmo conjunto de regras de iteração estrita e regras especiais como para o sistema *A-estilo* é usado aqui, variando ainda de acordo com o tipo de lógica modal sob consideração. Para mostrar as diferenças entre este e o método *A-estilo*, uma prova em dedução natural *I-estilo* é dada para o mesmo exemplo acima.

O exemplo a seguir é uma derivação com o sistema de dedução natural *I-estilo* descrito acima. Nesse sistema, "$U \vdash_{I(K\{B,4\})} \alpha$" declara que há uma prova de α em dedução natural *I-estilo*. Caixas estritas são aqui representadas com uma linha dupla em cima.

Exemplo 8 {*Dedução Natural I-estilo*}Considere a lógica modal **K**{**B,4**}. Seja $\langle S,U\rangle$ a teoria modal dada por $S=\{\}$ e $U = \{\Box\Box p \rightarrow r\}$ e seja α a fórmula modal $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box\Diamond r$. Então $U \vdash_{I(\mathbf{K}\{\mathbf{B,4}\})} \alpha$. Um esboço de derivação de $U \vdash_{I(\mathbf{K}\{\mathbf{B,4}\})} \alpha$ é dado abaixo, com os passos fáceis omitidos e alguma reescrita equivalente das fórmulas

(1) $\Box(p \wedge q)$

(2) $\neg(\Box\Box p \wedge \neg r)$

(3) $\neg\Box\Diamond r$

(4) $\neg\Diamond r$

(5) $\neg\Box(\Box\Box p \wedge \neg r)$

(6) $\Box(p \wedge q)$

(7) $\neg(\Box\Box p \wedge \neg r)$

(8) $p \wedge q$

(9) $\Box(p \wedge q)$

(10) $\neg r$

(11) $\neg\Box\Box p$

(12) $\neg\Box p$

(13) $\Box(p \wedge q)$

(14) $\neg p$

(15) $p \wedge q$

(16) p

(17) $\bot$

(18) $\bot$

(19) $\bot$

(20) $\bot$

(21) $\bot$

(22) $\Box\Diamond r$

(23) $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box\Diamond r$

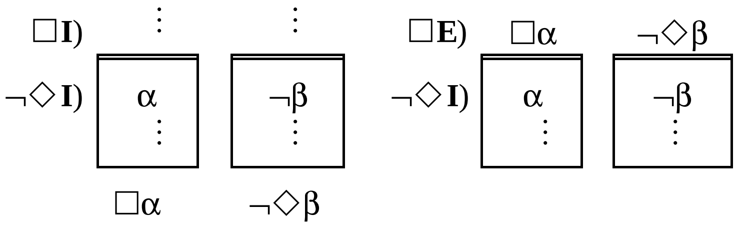
Nessa derivação, (1) é uma suposição nova, introduzida usando a regra de dedução natural clássica [®I]. (2) é uma reescrita equivalente da fórmula assumida em U e (3) é a nova suposição introduzida usando a regra clássica [¬I]. (4) é obtida por aplicação da regra de "criação" de uma caixa estrita a (3), enquanto (5) e (6) são obtidas por aplicação da regra de iteração restrita a (2) e (1) respectivamente. Depois, a regra de criação de uma caixa estrita é aplicada novamente a (5), inferindo a fórmula (7), enquanto (8), (9) e (10) são obtidas por aplicação da regra de iteração estrita duas vezes a (6) e a (4) respectivamente. (11) é obtida aplicando a regra clássica [®E] a (7) e (10), respectivamente, permitindo que uma caixa estrita nova seja aberta, na qual (12) é adicionada pela regra de criação e (13) é adicionada pela regra de iteração estrita. Por causa da fórmula (12), outra caixa estrita é aberta, onde (14) e (15) são adicionadas por razões similares àquelas dadas para (12) e (13). Finalmente, a aplicação da regra clássica [∧E] permite que (16) seja inferida, a qual, junto com (14) dá a inconsistência (17). Uma vez que uma inconsistência tenha sido derivada, a caixa mais interna pode ser fechada, repetindo-se a inconsistência do lado de fora da caixa (18). (19), (20) e (21) também são derivadas dessa maneira. Portanto, (22) e (23) são obtidas pela aplicação de [¬I] a (3) e (21), e por aplicação de [®I] a (1) e (22).

4.2 A-estilo

Como para a abordagem *I-estilo*, faremos a apresentação das regras de dedução natural *A-estilo* para a lógica modal proposicional começando pelo sistema **K**, com explicações um pouco mais detalhadas e, então, apresentaremos as regras para os outros sistemas que estamos considerando.

4.2.1 Sistema K

O conjunto de regras da abordagem *A-estilo* de dedução natural para o sistema **K** da lógica modal proposicional é formado pelas regras de dedução natural para a lógica clássica proposicional mais as seguintes regras:



Restrição: Na aplicação da regra □I ou ¬◇I, a ocorrência da fórmula α ou ¬β na subprova não pode depender de nenhuma hipótese (da qual □α ou ¬◇β não dependa).

Explicações: Ao encontrarmos uma fórmula do tipo □α ou ¬◇β em uma prova, em termos de semântica isso reflete que □α ou ¬◇β é satisfeita em um mundo possível ω e que α ou ¬β é satisfeita em todos os mundos acessíveis a partir de ω. Então podemos criar uma subprova com a aplicação da regra □E ou ¬◇E e escrever a fórmula α ou ¬β. A grande diferença para a abordagem *I-estilo* é que, naquela abordagem, uma subprova corresponde a um mundo acessível (a partir do atual) específico, e a subprova que estamos criando agora, nesta abordagem, *A-estilo*, representa um mundo acessível (a partir do atual) genérico qualquer. Assim, se encontrarmos uma fórmula do tipo α ou ¬β em uma subprova, podemos retornar e escrever □α ou ¬◇β por aplicação da regra □I ou ¬◇I.

Exemplo 9 Provaremos que a fórmula $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ é um teorema do sistema **K** da lógica modal proposicional:

1.	$\Box(\alpha \to \beta)$	(supos.)
2.	$\Box\alpha$	(supos.)
3.	α	(2, $\Box$E)
4.	$\alpha \to \beta$	(1, $\Box$E)
5.	β	(3, 4, $\to$E)
6.	$\Box\beta$	(5, $\Box$I)
7.	$\Box\alpha \to \Box\beta$	(2, 6, $\to$I)
8.	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	(1, 7, $\to$I)

4.2.2 Sistemas **T**, **D**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5**

Apresentaremos a seguir as regras da abordagem *A-estilo* de dedução natural para os sistemas **T**, **D**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5** da lógica modal proposicional. Ilustrações das relações de acessibilidade de cada sistema podem ser conferidas no capítulo anterior.

Regras do sistema D: O conjunto de regras da abordagem *A-estilo* de dedução natural para o sistema **D** da lógica modal proposicional é formado pelas regras do sistema **K** mais a seguinte regra:

$$\Diamond\mathbf{I})\ \frac{\Box\alpha}{\Diamond\alpha}$$

Explicação: Isso se justifica pois a relação de acessibilidade serial implica que sempre existe um próximo mundo possível. Então, ao encontrarmos uma fórmula do tipo $\Box\alpha$, como α deve ser aceita em todos os mundos acessíveis a partir do atual, e uma vez que sabemos que existe um mundo acessível a partir do atual, então podemos afirmar que α é aceita nesse mundo. Portanto, α é possível, ou seja, $\Diamond\alpha$.

Exemplo 10 Provaremos que a fórmula $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$ é um teorema da lógica modal **D**:

1.	$\Box\alpha$	(supos.)
2.	$\Diamond\alpha$	(1, $\Diamond$I)
3.	$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$	(1, 2, $\to$I)

Regras dos sistemas T, K4, S4, KB, B e S5: As regras específicas da abordagem *A-estilo* de dedução natural para os sistemas **T**, **K4**, **S4**, **KB**, **B** e **S5** são as mesmas de cada sistema na abordagem *I-estilo*.

O exemplo a seguir é uma derivação com o sistema de dedução natural *A-estilo* descrito acima. Nesse sistema, "$U \vdash_{A(\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{B,4}\})} \alpha$" declara que existe uma prova da fórmula α em dedução natural *A-estilo*, onde as suposições locais em U são usadas em qualquer ponto da prova, exceto nas caixas estritas. Caixas estritas são aqui representadas com uma linha dupla em cima (adotando a notação de Fitting), e usa-se a regra de iteração estrita associada com $\boldsymbol{K}\{\mathbf{B,4}\}$. (Nenhuma regra especial adicional é necessária para essa classe de lógicas.)

Definição 40 {*Regra de Iteração Estrita*} Se S é o conjunto das fórmulas que ocorrem acima, mas no mesmo nível que uma caixa estrita (uma fórmula α e uma caixa (estrita) são ditas *de mesmo nível* se ocorrem dentro da mesma caixa), então pode ser adicionado à caixa estrita qualquer membro do conjunto:

$$S^{\#} = \{\alpha \mid \Box\alpha \in S\} \cup \{\Box\alpha \mid \Box\alpha \in S\} \cup \{\neg\Box\alpha \mid \neg\alpha \in S\}$$

Exemplo 11 {*Dedução natural A-estilo*} Considere a lógica modal **K**{**B,4**}. Seja $\langle S,U\rangle$ a teoria modal dada por $S = \{\}$ e $U = \{\Box\Box p \to r\}$ e seja α a fórmula modal $\Box(p \wedge q) \to \Box\Diamond r$. Então $U \mid\!-_{A(\boldsymbol{K}\{\mathbf{B,4}\})}\, \alpha$

Novamente, um esboço de derivação de $U \mid\!-_{A(\mathbf{K}\{\mathbf{B,4}\})}\alpha$ é dado abaixo, com os passos fáceis omitidos e alguma reescrita equivalente de fórmulas incluída por simplicidade. É útil considerar a *Regra de Iteração Restrita* associada com a lógica em consideração.

(*1*)	$\Box(p \wedge q)$
(*2*)	$\Box(p \wedge q)$
(*3*)	$p \wedge q$
(*4*)	p
(*5*)	$\Box p$
(*6*)	$\Box\Box p$
(*7*)	$\Box\Box p \to r$
(*8*)	r
(*9*)	$\neg\Box\neg r$
(*10*)	$\Diamond r$
(*11*)	$\Box\Diamond r$
(*12*)	$\Box(p \wedge q) \to \Box\Diamond r$

Na derivação acima, (*1*) *é uma suposição nova introduzida usando a regra de dedução natural clássica* [®*I*]. (*2*) *é obtida por aplicação da regra de iteração a* (*1*) *na primeira caixa estrita, enquanto* (*3*) *é obtida por aplicação da regra de iteração estrita a* (*2*) *na segunda caixa estrita* (*interna*). (*4*) *é obtida a partir de* (*3*) *usando a regra clássica* [*ÙE*] [FIT83], *e* (*5*) *é obtida usando a regra de fechamento da caixa estrita mais interna.* (*6*) *é obtida usando a regra de fechamento da caixa estrita externa,* (*7*) *é a suposição dada em U,* (*8*) *é obtida pela aplicação da regra clássica* [®*E*]. *Depois, outra caixa estrita é aberta, na qual* (*9*) *é adicionada pela aplicação da regra de iteração estrita a* (*8*). (*10*) *é uma reescrita equivalente simples de* (*9*). *O fechamento dessa última caixa estrita dá* (*11*), *e finalmente* (*12*) *é obtida por aplicação da regra* [®*I*] *a* (*1*) *e* (*11*).

As provas da corretude e da completude desses dois sistemas ("estilos") de dedução natural com respeito à semântica de Kripke podem ser encontradas em [FIT83].

5 *Tableaux*

Esta apresentação baseia-se no texto de [PRI2001], em que também se encontram os *tableaux* para a lógica clássica proposicional. Os *tableaux* para lógica modal são similares a esses, exceto pelas seguintes modificações.

> Primeira: Em cada nó da árvore há uma fórmula e um número natural (0, 1, 2, …), da forma: α,i; ou algo da forma irj, onde i e j são números naturais. Intuitivamente, números diferentes indicam mundos possíveis diferentes; α,i significa que α é verdadeira no mundo i; e irj significa que o mundo i tem acesso ao mundo j. Evitaremos usar r como variável proposicional onde isso puder levar a confusão.
>
> Segunda, a lista inicial para o *tableau* inclui $\alpha,0$ para todas as premissas α (se houver alguma), e $\neg\beta,0$, onde β é a conclusão.
>
> Terceira, as regras para os conetivos de funções-verdade são as mesmas que na lógica não-modal, exceto que o número associado com cada fórmula é também associado com seus descendentes imediatos. Portanto, a regra para a disjunção, por exemplo, é:

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B, i & \\ \diagup & & \diagdown \\ A, i & & B, i \end{array}$$

Há quatro regras novas para os operadores modais:

$\neg\Box\alpha,i$ $\vert$ $\Diamond\neg\alpha,i$	$\neg\Diamond\alpha,i$ $\vert$ $\Box\neg\alpha,i$	$\Box\alpha,i$ irj $\vert$ α,j	$\Diamond\alpha,i$ $\vert$ irj α,j

Na regra para $\Box$ (terceira da esquerda para a direita), ambas as fórmulas acima da seta devem estar presentes para a regra ser disparada, e ela é aplicada para *cada mundo j*. Na regra para $\Diamond$ (quarta da esquerda para a direita), o número j deve ser *novo*, isto é, ele não deve ter ocorrido no ramo em nenhum lugar acima.

Finalmente, um ramo está fechado se e somente se para alguma fórmula α e um número i, tanto α,i como $\neg\alpha,i$ ocorrerem no ramo. Deve ser o mesmo i em ambos os casos. (Não é óbvio, mas, como no caso proposicional, cada *tableau* do tipo que estamos tratando aqui é finito.) Apresentamos alguns exemplos de *tableaux*:

(i) $\square(\alpha \to \beta) \wedge \square(\beta \to \chi) \vdash \square(\alpha \to \chi)$.

$$\square(\alpha \to \beta) \wedge \square(\beta \to \chi),\ 0$$
$$\neg\square(\alpha \to \chi),\ 0$$
$$\square(\alpha \to \beta),\ 0$$
$$\square(\beta \to \chi),\ 0$$
$$\Diamond\neg(\alpha \to \chi),\ 0$$
$$0r1 \qquad (1)$$
$$\neg(\alpha \to \chi),\ 1 \qquad (1)$$
$$\alpha,\ 1$$
$$\neg\chi,\ 1$$
$$\alpha \to \beta,\ 1 \qquad (2)$$
$$\beta \to \chi,\ 1 \qquad (2)$$

$\neg\alpha,\ 1$	$\beta,\ 1$
$\times$	

$\neg\beta,\ 1$	$\chi,\ 1$
$\times$	$\times$

As linhas marcadas (1) são obtidas pela aplicação da regra para $\Diamond$ à linha imediatamente acima delas. As linhas marcadas (2) são os resultados de duas aplicações da regra para $\square$ aos conjunctos da premissa.

(ii) $\vdash \Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$.

$$\neg(\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)),\ 0$$
$$\Diamond(\alpha \wedge \beta),\ 0$$
$$\neg(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta),\ 0$$

$\neg\Diamond\alpha,\ 0$	$\neg\Diamond\beta,\ 0$	
$\square\neg\alpha,\ 0$	$\square\neg\beta,\ 0$	
$0r1$	$0r1$	(1)
$\alpha \wedge \beta,\ 1$	$\alpha \wedge \beta,\ 1$	(1)
$\alpha,\ 1$	$\alpha,\ 1$	
$\beta,\ 1$	$\beta,\ 1$	
$\neg\alpha,\ 1$	$\neg\beta,\ 1$	(2)
$\times$	$\times$	

As linhas marcadas (1) resultam de uma aplicação da regra para $\Diamond$ à fórmula do segundo nó do *tableau*. A linha marcada (2) resulta de aplicações da regra para $\Box$ a $\Box\neg\alpha$, 0 (ramo da esquerda) e $\Box\neg\beta$, 0 (ramo da direita).

(iii) $\nvdash (\Diamond p \wedge \Box\neg q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond p$

$\neg((\Diamond p \wedge \Diamond\neg q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond p)$, 0

$\Diamond p \wedge \Diamond\neg q$, 0

$\neg\Diamond\Box\Diamond p$, 0

$\Diamond p$, 0

$\Diamond\neg q$, 0

$\Box\neg\Box\Diamond p$, 0 (1)

$0r1$ (2)

p, 1 (2)

$\neg\Box\Diamond p$, 1(3)

$\Diamond\neg\Diamond p$, 1

$1r2$

$\neg\Diamond p$, 2

$\Box\neg p$, 2

$0r3$ (4)

$\neg q$, 3 (4)

$\neg\Box\Diamond p$, 3 (5)

$\Diamond\neg\Diamond p$, 3

$3r4$

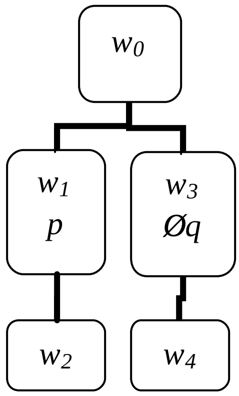
$\neg\Diamond p$, 4

$\Box\neg p$, 4

As linhas marcadas (2) resultam de uma aplicação da regra para $\Diamond$ à quarta linha do *tableau*. As linhas marcadas (4) resultam de uma aplicação da mesma regra à quinta linha do *tableau*. Note que, como os exemplos mostram, quando aplicamos a regra para $\Diamond$, podemos ter que voltar e aplicar a regra para $\Box$ novamente, para o novo mundo (novo número) que foi introduzido. Portanto, a linha marcada (3) resulta de uma primeira aplicação da regra à linha (1). A linha (5) resulta de uma segunda aplicação. Por essa razão, se estamos assinalando nós para mostrar que terminamos de lidar com eles, nunca deveríamos assinalar um nó da forma $\Box\alpha$, pois podemos ter que voltar e usá-lo novamente.

Contramodelos podem ser lidos a partir de um ramo aberto de um *tableau* de uma maneira natural. Para cada número i que ocorre no ramo, há um mundo ω_i; $\omega_i R\omega_j$ se e somente se irj ocorre no ramo; para cada parâmetro proposicional p, se p,i ocorre no ramo, $\boldsymbol{v}_{\omega i}(p)=1$ se $\neg p,i$ ocorre no ramo, $\boldsymbol{v}_{\omega i}(p)=0$ (e se não, $\boldsymbol{v}_{\omega i}(p)$ pode ser qualquer coisa).

Portanto, o contramodelo dado pelo ramo aberto (e somente por ele) do último exemplo é como segue: $\boldsymbol{W}=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. $\omega_0 R \omega_1$, $\omega_1 R \omega_2$, $\omega_0 R \omega_3$, $\omega_3 R \omega_4$. Não há outros mundos relacionados por R. $\boldsymbol{v}_{\omega 1}(p)=1$, $\boldsymbol{v}_{\omega 3}(q) = 0$; em outros casos, v é arbitrária. A interpretação pode ser representada assim:



Usando as condições-verdade, podemos verificar diretamente que a interpretação funciona. Como p é verdadeira em ω_1, $\Diamond p$ é verdadeira em ω_0. Similarmente, $\Diamond\neg q$ é verdadeira em ω_0. Portanto, o antecedente é verdadeiro em ω_0. ω_2 não acessa mundo algum; então $\Diamond p$ é falsa em ω_2, e $\Box\Diamond p$ é falsa em ω_1. Similarmente, $\Box\Diamond p$ é falsa em ω_3. Portanto, não há qualquer mundo ao qual ω_0 possa ter acesso no qual $\Box\Diamond p$ seja verdadeira. Portanto, $\Diamond\Box\Diamond p$ é falsa em ω_0. Disso segue, então, que $(\Diamond p \wedge \Diamond\neg q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond p$ é falsa em ω_0.

Os *tableaux* recém descritos são corretos e completos com respeito à semântica. A prova é dada a seguir.

As provas da corretude e da completude para ***K*** são essencialmente variações e extensões das provas de corretude e completude para a lógica proposicional, que podem ser encontradas em [PRI2001]. Redefinimos crença e a interpretação induzida.

Definição 41 {*Crença*} Seja $I = \langle W, R, v\rangle$ qualquer interpretação modal, e seja b qualquer ramo de um *tableau*. Então I é *faithful a b* se e somente se houver um mapeamento f dos números naturais para W tal que:

Para cada nó α,i em b, α é verdadeira em $f(i)$ em I.

Se irj está em b, $f(i)Rf(j)$ em I.

Dizemos que *f mostra que I* é *faithful a b.*

Lema 10 {*Lema da corretude*} Seja b qualquer ramo de um *tableau*, e $I = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}\rangle$ qualquer interpretação. Se I é *faithful a b*, e uma regra de *tableau* é aplicada a ele, então ele produz pelo menos uma extensão, *b'*, tal que I é *faithful a b*'.

Prova: Seja f uma função que mostra que I é *faithful a b*. A prova procede por uma consideração caso-a-caso das regras de *tableau.* Os casos para as regras proposicionais são descritos em [PRI2001]. Suponha, por exemplo, que $\alpha\wedge\beta,i$ está em b, e que aplicamos a regra para conjunção para dar um ramo estendido contendo α,i e β,i. Como I é *faithful a b*, $\alpha\wedge\beta$ é verdadeira em $f(i)$. Portanto, α e β são verdadeiras em $f(i)$. Portanto, i é *faithful* à extensão de b.

Consideraremos apenas regras modais em detalhe. Considere a regra para $\Diamond$ negado. Suponha que $\neg\Diamond\alpha,i$ ocorre em b, e que aplicamos a regra para estender o ramo com $\Box\neg\alpha,i$. Como I é *faithful a b*, $\neg\Diamond\alpha$ é verdadeira em $f(i)$. Portanto, $\Box\neg\alpha$ é verdadeira em $f(i)$ (veja [PRI2001]). Portanto, I é *faithful* à extensão de b. A regra para $\Box$ negado é similar (também veja [PRI2001]).

Isso leva às regras para $\Box$ e $\Diamond$. Suponha que $\Box\alpha,i$ esteja em b, e que aplicamos a regra para $\Box$. Como I é *faithful a b*, $\Box\alpha$ é verdadeira em $f(i)$. Além disso, para todo i e j tal que irj está em b, $f(i)Rf(j)$. Portanto, pelas condições verdade para $\Box$, α é verdadeira em $f(i)$, e portanto I é *faithful* à extensão do ramo. Finalmente, suponha que $\Diamond\alpha,i$ está em b e aplicamos a regra para $\Diamond$ para obter nós da forma irj e α,j. Como I é *faithful a b*, $\Diamond\alpha$ é verdadeira em $f(i)$. Portanto, para algum $\omega \in W$, $f(i)R\omega_I$ e α é verdadeira em ω. Seja f' o mesmo que f exceto que $f'(j)=\omega$. Note que f também mostra que I é *faithful a b*, pois f e f' diferem só em j; isso não ocorre com b. Além disso, por definição, $f'(i)Rf'(j)$, e α é verdadeira em $f'(j)$. Portanto, f' mostra que I é *faithful ao* ramo estendido.

Teorema 11 {*Teorema da corretude para* **K**} Para Σ finito, se $\Sigma \vdash \alpha$ então $\Sigma \vDash \alpha$.

Prova: Suponha que $\Sigma \nvDash \alpha$. Então há uma interpretação $I = \langle W, R, v\rangle$ que torna todas as premissas verdadeiras e α falsa, em algum mundo ω. Seja f qualquer função tal que $f(0) = \omega$. Isso mostra que I é *faithful* à lista inicial. A prova é agora exatamente a mesma que no caso não-modal. (A prova é omitida, podendo ser encontrada em [PRI2001].)

Definição 42 {*Interpretação induzida*} Seja b um ramo aberto de um *tableau*. A interpretação $I = \langle W, R, v\rangle$ induzida por b é definida como descrito anteriormente. $W = \{\omega_i \mid i \text{ ocorre em } b\}$. $\omega_i R\omega_j$ sse irj ocorre em b. Se p,i ocorre em b, então $v_{\omega i}(p)=1$; se $\neg p,i$ ocorre em b, então $v_{\omega i}(p)=0$ (e caso contrário $v_{\omega i}(p)$ pode ser qualquer coisa que gostemos).

Lema 12 {*Lema da completude*} Seja b qualquer ramo completo aberto de um *tableau*. Seja $I = \langle W, R, v\rangle$ a interpretação induzida por b. Então:

se α,i está em b, então α é verdadeira em ω_i

se $\neg\alpha,i$ está em b, então α é falsa em ω_i

Prova: A prova é feita por indução na complexidade de α. Se α é atômica, o resultado é verdadeiro por definição. Se α ocorre em b, e é da forma $\beta\vee\chi$, então a regra para disjunção foi aplicada a $\beta\vee\chi,i$. Portanto, ou β,i ou χ,i está em b. Pela hipótese de indução, ou β ou χ é verdadeira em ω_i. Portanto, $\beta Ú\chi$ é verdadeira em ω_i, como exigido. O caso para $\neg(\beta Ú\chi)$ é similar, como são os casos para as outras funções verdade. Agora, suponha que α seja da forma $\Box\beta$. Se $\Box\beta,i$ está em b, então para todo j tal que irj está em b, β,j está em b. Por construção e pela hipótese de indução, para todo ω_j tal que $\omega_j R\omega_j$, β é verdadeira em ω_j. Portanto, $\Box\beta$ é verdadeira em ω_j, como exigido. Se $\neg\Box\alpha,i$ está em b, então $\Diamond\neg\alpha,i$ está em b; portanto, para algum j, irj e $\neg\alpha,j$ estão em b. Pela hipótese de indução, $\omega_i R\omega_j$ e α é falsa em ω_j. Portanto, $\Box\alpha$ é falsa em ω_i como exigido. O caso para $\Diamond$ é similar.

Teorema 13 {*Teorema da completude*} Para Σ finito, se $\Sigma \vDash \alpha$ então $\Sigma \vdash \alpha$.

Prova: Suponha que $\Sigma \nvdash \alpha$. Dado um ramo aberto do *tableau*, a interpretação que ele induz torna todas as premissas verdadeiras em ω_0 e α falsa em ω_0 pelo Lema da Completude. Portanto, $\Sigma \nvDash \alpha$.

5.1 Tableaux para lógicas modais normais

As regras do *tableau* para ***K*** podem ser estendidas para trabalhar com outros sistemas normais. Essencialmente, isso é feito, adicionando-se regras que introduzem mais informações sobre R nos ramos. Como essa informação surge quando a regra para $\Box$ é aplicada, o efeito dela é aumentar o número de aplicações daquela regra.

Notação 14 As propriedades de reflexividade, simetria, transitividade e serialidade serão representadas, neste texto, pelos símbolos ρ, σ, τ e η, respectivamente.

Notação 15 As estruturas que possuem uma relação reflexiva, simétrica, transitiva ou serial sobre o seu conjunto de mundos possíveis serão representadas, neste texto, por **K**ρ, **K**σ, **K**τ e **K**η, respectivamente.

As regras para reflexividade, simetria e transitividade são:

$$\begin{array}{ccc} \rho & \sigma & \tau \\ & & irj \\ \cdot & irj & jrk \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ iri & jri & irk \end{array}$$

A regra para reflexividade significa que, se *i* é qualquer inteiro no *tableau*, introduzimos *iri*. Ela pode então ser aplicada ao mundo 0 após a lista inicial, e, portanto, após a introdução de qualquer inteiro novo. As duas outras regras são auto-explicativas. Note que, se a aplicação da regra resultasse apenas na repetição de linhas que já estão no *tableau*, ela não seria aplicada. Portanto, por exemplo, se aplicamos a regra da simetria a *irj* para obter *jri*, não a aplicamos novamente a *jri* para obter *irj*. As seções seguintes dão exemplos de *tableaux* para K_ρ, K_σ e K_τ, respectivamente.

$\vdash_{K\rho} \Box p \to p$:

$$\begin{array}{c} \neg(\Box p \to p),0 \\ 0r0 \\ \Box p,0 \\ \neg p,0 \\ p,0 \\ \times \end{array}$$

A última linha é obtida a partir de $\Box p$,0, pois 0*r*0. Como $\Box p \to p$ não é válida em **K**, isso mostra que K_ρ é uma extensão própria de **K**. (Isto é, K_ρ não é o mesmo que **K**.)

$\vdash_{K\sigma} p \to \Box\Diamond p$:

$$\begin{array}{c} \neg(p \to \Box\Diamond p),0 \\ p,0 \\ \neg\Box\Diamond p,0 \\ \Diamond\neg\Diamond p,0 \\ 0r1 \\ \neg\Diamond p,1 \\ 1r0 \\ \Box\neg p,1 \\ \neg p,0 \\ \times \end{array}$$

A última linha segue do fato de que $\Box\neg p$,1, pois 1*r*0. Como $p \to \Box\Diamond p$ não é válido em ***K***, isso mostra que K_σ é uma extensão própria de ***K***.

$\vdash_{K\tau} \Box p \to \Box\Box p$:

$$\begin{array}{c} \neg(\Box p \to \Box\Box p),0 \\ \Box p,0 \\ \neg\Box\Box p,0 \\ \Diamond\neg\Box p,0 \\ 0r1 \\ \neg\Box p,1 \\ \Diamond\neg p,1 \\ 1r2 \\ \neg p,2 \\ 0r2 \\ p,2 \\ \times \end{array}$$

Quando adicionamos $1r2$ ao *tableau* por causa da regra da $\Diamond$, já temos $0r1$; portanto, adicionamos $0r2$. Como $\Box p$ é válida em 0, uma aplicação da regra para $\Box$ imediatamente fecha o *tableau*. Como $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ não é válida em $\boldsymbol{K}$, isso mostra que K_τ é uma extensão própria de $\boldsymbol{K}$.

Para sistemas "compostos", todas as regras relevantes devem ser aplicadas. Pode haver alguma interação entre elas. Para sabermos disso, adotamos o seguinte procedimento. Mundos novos são normalmente introduzidos pela regra da $\Diamond$. Aplicamos essa regra primeiro. Então computamos todos os fatos novos sobre r que precisam ser adicionados, e adicionamo-los. Finalmente, retornamos, se necessário, e aplicamos a regra da $\Box$ sempre que os fatos novos sobre r exigirem isso. O procedimento é ilustrado no *tableau* seguinte, demonstrando que $\vdash_{K\sigma\tau}\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. Por uma questão de brevidade, escrevemos mais de uma informação sobre r na mesma linha.

$$\neg(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p),0$$
$$\Diamond p,0$$
$$\neg\Box\Diamond p,0$$
$$0r1$$
$$p,1$$
$$1r0,\ 1r1,\ 0r0$$
$$\Diamond\neg\Diamond p,0$$
$$0r2$$
$$\neg\Diamond p,2$$
$$2r0,\ 2r2,\ 1r2,\ 2r1$$
$$\Box\neg p,2$$
$$\neg p,2$$
$$\neg p,1$$
$$\neg p,0$$
$$\times$$

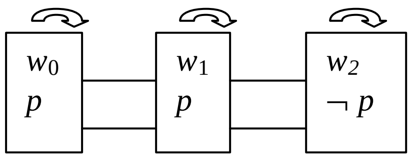
A linha $\Diamond\neg\Diamond p,0$ exige a construção de um mundo novo, 2, com uma aplicação da regra da $\Diamond$. Isso é feito nas duas linhas seguintes. Adicionamos então toda a informação nova sobre r que a criação do mundo 2 exige. $2r0$ é adicionado em razão da simetria; $2r2$ é adicionado em razão da transitividade e do fato de que temos $2r0$ e $0r2$; $1r2$ é adicionado em razão da transitividade e do fato de que temos $1r0$ e $0r2$; similarmente, $2r1$ é adicionado em razão da transitividade. Simetria e transitividade não exigem outros fatos sobre r. Na construção de um *tableau*, traçar um diagrama da estrutura de mundos pode ajudar.

Contramodelos lidos a partir de um ramo aberto de um *tableau* incorporam a informação sobre r da maneira óbvia. Portanto, considere o seguinte *tableau*, que mostra que $\nvdash_{K\rho\sigma}\Box p \rightarrow \Box\Box p$:

$$\neg(\Box p \rightarrow \Box\Box p),0$$
$$0r0$$
$$\Box p,0$$
$$\neg\Box\Box p,0$$
$$p,0$$
$$\Diamond\neg\Box p,0$$
$$0r1$$
$$\neg\Box p,1$$
$$1r1,\ 1r0$$
$$p,1$$
$$\Diamond\neg p,1$$

$1r2$
$\neg p,2$
$2r2,\ 2r1$

O contramodelo é $\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}\rangle$, onde $\boldsymbol{W} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, R é tal que $\omega_0 R\omega_0$, $\omega_1 R\omega_1$, $\omega_2 R\omega_2$, $\omega_0 R\omega_1$, $\omega_1 R\omega_0$, $\omega_1 R\omega_2$ e $\omega_2 R\omega_1$, e v é tal que $v_{\omega 0}(p)=v_{\omega 1}(p)=1$, $v_{\omega 2}(p)=0$. Em imagens:



Os sistemas de *tableau* acima são todos corretos e completos com respeito às suas respectivas semânticas. A prova disso é dada mais adiante neste capítulo.

5.1.1 *Tableaux* infinitos

A regra de *tableau* para a serialidade, já utilizando a notação introduzida anteriormente, é como segue (o símbolo η denota *serialidade,* conforme a Notação 14):

$$\begin{array}{c} \eta \\ \cdot \\ \downarrow \\ irj \end{array}$$

Ela é aplicada a qualquer inteiro i em um ramo, dado que não há nada da forma irj no ramo, e o j em questão deve ser, portanto, *novo.*

Deve-se tomar cuidado na aplicação dessa regra. Se ela for aplicada toda vez tão cedo quanto se possa fazê-lo, iremos para um regresso infinito a partir do qual nunca retornaremos. Por exemplo, quando introduzimos j (como j é novo), temos que introduzir um novo k e adicionar jrk, e então um novo l e adicionar krl e assim por diante.

A regra está correta, entretanto, dado que não a aplicamos imediatamente onde fazê-lo evitaria que outras regras fossem aplicadas. Ela ainda deve ser aplicada em algum momento, é claro (a não ser que o *tableau* feche antes). Corretude e completude para a regra são provadas mais adiante neste capítulo.

O *tableau* seguinte demonstra que $\vdash_{K\eta} \Box p \to \Diamond p$.

$$\begin{array}{c} \neg(\Box p \to \Diamond p),0 \\ \Box p,0 \\ \neg\Diamond p,0 \\ \Box\neg p,0 \\ 0r1 \\ p,1 \\ \neg p,1 \\ \times \end{array}$$

Essa inferência não é válida em ***K***. Portanto, $K\eta$ é uma extensão própria de ***K***.

Mesmo com a regra aplicada dessa maneira, entretanto, se o *tableau* falha em fechar, ele será infinito, como o *tableau* seguinte, que demonstra que $\nvdash_{K\eta} \Box p$, ilustra:

$$\begin{array}{c} \neg\Box p,0 \\ \Diamond\neg p,0 \\ 0r1 \\ \neg p,1 \end{array}$$

$1r2$

$2r3$

¼

O *tableau* é infinito, mas o (único) ramo ainda está aberto. Portanto, a inferência não é inválida ainda. O ramo também especifica um contramodelo, embora esse também seja infinito. Ele pode ser representado assim:

$$\boxed{\omega_0} \rightarrow \overset{\neg p}{\boxed{\omega_1}} \rightarrow \boxed{\omega_2} \rightarrow ¼$$

Isso não significa que os únicos contramodelos para $\Box p$ em $K\eta$ sejam infinitos. Por exemplo, o seguinte não será, como pode ser verificado facilmente:

$$\boxed{\omega_0 \quad \neg p}$$

Se uma inferência não é válida em relações de acessibilidade seriais, entretanto, e tem um contramodelo finito, o procedimento de *tableau* não o encontrará. Tais modelos podem ser encontrados por tentativa e erro: faça uma adivinhação; veja se funciona; se não, tente fazer uma mudança apropriada; veja se funciona; se não, tente fazer uma mudança apropriada; etc.

Não é apenas o sistema K_η que pode permitir o desenvolvimento de *tableaux* infinitos; mesmo K_τ pode permitir o desenvolvimento deles. Considere o *tableau* que mostra que

$\nvdash K_\tau \neg(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p)$:

$$\neg\neg(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p),0$$
$$\Diamond p \wedge \Box\Diamond p,\ 0$$
$$\Diamond p,0$$
$$0r1$$
$$p,1$$
$$\Diamond p,1$$
$$1r2$$
$$p,2$$
$$0r2$$
$$\Diamond p,2$$
$$2r3$$
$$p,3$$

¼

Toda vez que abrimos um novo mundo i, a transitividade nos dá $0ri$. E como $\Box\Diamond p$ é válido em 0, a regra da $\Box$ exige que escrevamos $\Diamond p,i$, que exige que abramos um mundo novo…

Novamente, entretanto, um contramodelo infinito pode ser lido a partir do ramo aberto:

$$\boxed{\omega_0} \rightarrow \overset{p}{\boxed{\omega_1}} \rightarrow \overset{p}{\boxed{\omega_2}} \rightarrow \overset{p}{\boxed{\omega_3}} \rightarrow \ldots$$

Este é um exemplo muito simples, entretanto. Em geral, é freqüentemente muito difícil estabelecer que um *tableau* é infinito e aberto, e é uma tarefa ainda mais difícil reconhecer um contramodelo quando ele é um.

Usualmente, é muito mais fácil encontrar um contramodelo mais simples por tentativa e erro. Portanto, é fácil o suficiente estabelecer que a seguinte interpretação é um contramodelo para a inferência do último exemplo:

$$\boxed{\omega_0 \quad \neg p}$$

Observação 1 Não escolhemos os exemplos K_ρ, K_σ, K_τ e K_η ao acaso. Os princípios mostrados que são válidos em cada caso são, em certo sentido, os princípios *característicos* das lógicas K_ρ, K_σ, K_τ e K_η. Além disso, tecnicamente, cada um, quando adicionado a algum sistema de axiomas para K, dá uma axiomatização completa da lógica.

Consideraremos agora o sistema **S5**; ele é especial. Para ver como, seja uma *u*-interpretação – "*u*" para universal – uma interpretação na qual *R* satisfaz a seguinte condição: para todo ω_1 e ω_2, $\omega_1 R \omega_2$ – todos se relaciona com todos.

Em uma *u*-interpretação, *R* "cai fora do desenho" completamente. Podemos apenas também definir uma *u*-interpretação como um par $\langle \boldsymbol{W}, v \rangle$ onde as condições verdade para $\Box$ são simplesmente: $u_\omega(\Box\alpha)=1$ se e somente se para todo $\omega' \in \boldsymbol{W}$, $u_{\omega'}(\alpha)=1$; e similarmente para $\Diamond$.

Tableaux para K_v também podem ser formulados de maneira muito simples: *r* nunca é mencionada. A aplicação da regra da $\Diamond$ a $\Diamond\alpha, i$ dá uma linha nova da forma α, j (*j* novo); e, à aplicação da regra da $\Box$ a $\Box\alpha, i$, adicionamos α, j para todo *j*. Por exemplo, $\vdash_{Ku} \Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$:

$$\begin{array}{c}
\neg(\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha),0 \\
\Diamond\alpha,0 \\
\neg\Box\Diamond\alpha,0 \\
\Diamond\neg\Diamond\alpha,0 \\
\alpha,1 \\
\neg\Diamond\alpha,2 \\
\Box\neg\alpha,2 \\
\neg\alpha,0 \\
\neg\alpha,1 \\
\neg\alpha,2 \\
\times
\end{array}$$

Agora, $K_{\rho\sigma\tau}$ e K_u são, de fato, equivalentes, no sentido em que $\Sigma \models_{K\rho\sigma\tau} a$ se e somente se $\Sigma \models_{Kv} a$. Metade desse fato é óbvia. É fácil verificar que, se uma relação satisfaz a condição *u*, ela satisfaz as condições reflexiva, simétrica e transitiva. Portanto, se a verdade é preservada em todos os mundos de todas as $\rho\sigma\tau$-interpretações, ela é preservada em todos os mundos de todas as *u*-interpretações. Portanto, se $\Sigma \models_{K\rho\sigma\tau} a$, então $\Sigma \models_{Ku} a$. A inversa não é tão óbvia (sua prova é dada a seguir.)

Por causa da equivalência entre K_u e $K_{\rho\sigma\tau}$, o nome ***S5*** tende a ser usado, indiferentemente, para ambos os sistemas. Vale lembrar que há ainda muitas outras lógicas modais normais.

5.1.2 Provas de teoremas

Apresentamos, nesta seção, provas para os teoremas enunciados ao longo deste capítulo.

Teorema 14 {*Corretude para* K_ρ, K_σ, K_τ e K_η} Os *tableaux* para K_ρ, K_σ, K_τ e K_η são corretos com respeito a sua semântica.

Prova: A prova é como para **K** (Teorema 11 e [PRI2001]). Tudo que precisamos fazer é verificar que o Lema da Corretude ainda funciona, dadas as regras novas. Então suponha que *f* mostra que *I* é *faithful a b* e que então aplicamos uma das regras:

Para *reflexividade*: obtemos *iri*, mas $f(i)Rf(i)$ pois *R* é reflexiva.

Para *simetria*: como *irj* está em *b*, $f(i)Rf(j)$, mas então $f(j)Rf(i)$ pois *R* é simétrica, como exigido.

Para *transitividade*: como *irj* e *jrk* estão em *b*, $f(i)Rf(j)$ e $f(j)Rf(k)$. Portanto $f(i)Rf(k)$ pois *R* é transitiva, como exigido.

Para *serialidade*: i ocorre em b, e aplicamos a regra para obter irj, onde j é novo. Sabemos que, para algum $\omega \in \boldsymbol{W}$, $f(i)R\omega$. Seja f' o mesmo que f exceto que $f'(j)=\omega$. Como j não ocorre em b, f' mostra que I é *faithful a* b. Além disso, $f'(i)Rf'(j)$ por construção. Portanto, f' mostra que I é *faithful ao* ramo estendido.

Teorema 15 Os *tableaux* para sistemas com qualquer combinação de reflexividade, simetria, transitividade e serialidade são corretos com respeito a sua semântica.

Prova: Apenas combinamos cada um dos argumentos individuais.

Teorema 16 {*Completude para* K_ρ, K_σ, K_τ e K_η} Os *tableaux* para K_ρ, K_σ, K_τ e K_η são completos com respeito a sua semântica.

Prova: A prova é como para $\boldsymbol{K}$ (como no Teorema 13 e em [PRI2001]). Tudo o que temos que fazer, além disso, é verificar que a interpretação induzida pelo ramo aberto, b, é do tipo exigido.

Para *reflexividade*: para todo $\omega_i \in \boldsymbol{W}$, iri ocorre em b (pela regra da reflexividade), portanto, por definição de R, $\omega_i R \omega_i$.

Para *simetria*: para ω_i, ω^j *Î* $\boldsymbol{W}$, suponha que $\omega_i R \omega_j$. Então irj ocorre em b; mas então jri ocorre em b (pela regra da simetria). Portanto, $\omega_j R \omega_i$, como exigido.

Para *transitividade*: para ω_i, ω_j, $\omega_k \in \boldsymbol{W}$, suponha que $\omega_i R \omega_j$ e $\omega_j R \omega_k$. Então irj e jrk ocorrem em b; mas então irk ocorre em b (pela regra da transitividade). Portanto, $\omega_i R \omega_k$, como exigido.

Para *serialidade*: se $\omega_i \in \boldsymbol{W}$ então, para algum j, irj está em b. Portanto, para algum j, $\omega_i R \omega_j$, como exigido.

Teorema 17 Os *tableaux* para sistemas com qualquer combinação de reflexividade, simetria, transitividade e serialidade são completos com respeito a suas semânticas.

Prova: Apenas combinamos cada um dos argumentos individuais.

Teorema 18 $\Sigma \vDash_{K\rho\sigma\tau} \alpha$ sse $\Sigma \vDash_{K\upsilon} \alpha$.

Prova: A prova da esquerda para a direita é como estabelecemos anteriormente. Da direita para a esquerda: suponha que $\Sigma \vDash_{K\rho\sigma\tau} \alpha$. Seja $I = \langle \boldsymbol{W}, R, v\rangle$ uma $\rho\sigma\tau$-interpretação, tal que, para algum $\omega \in \boldsymbol{W}$, todos os membros de Σ são verdadeiros em ω, mas α não. Seja $\boldsymbol{W}'=\{\omega'; \omega R\omega'\}$ ($\boldsymbol{R}$ é uma relação de equivalência, e $\boldsymbol{W}'$é apenas a classe de equivalência de ω). Seja $I' = \langle \boldsymbol{W}', R', v'\rangle$, onde R' e I' são as restrições de R e I, respectivamente, para $\boldsymbol{W}'$. Então I' é uma u-interpretação. Por exemplo, se $\omega, \omega_1 \in \boldsymbol{W}'$, $\omega R'\omega$ e $\omega R'\omega_1$. Então $\omega R'\omega$, por simetria, e $\omega R'\omega_1$, por transitividade. Um fato mais crucial ainda é que se $\omega \in \boldsymbol{W}'$ e $\omega R\omega_1$ então $\omega_1 \in \boldsymbol{W}'$. Por exemplo, $\omega R\omega$ e $\omega R\omega_1$ implicam $\omega R\omega_1$. Portanto, se $\omega \in \boldsymbol{W}'$, R e R' relacionam ω a exatamente os mesmos mundos (*).

Agora, se pudermos estabelecer que, para todo $\omega \in \boldsymbol{W}'$, e para toda α, os valores verdade de α em I e I' são os mesmos, teremos o que queremos. Esse fato é estabelecido por indução sobre a construção de α. Para variáveis, isto é verdade por definição. Para conetivos de função-verdade, o resultado é direto. O caso para $\Box$ é como segue; o resultado para $\Diamond$ é similar. Suponha que $\omega \in \boldsymbol{W}'$.

$I'_\omega(\Box\alpha)=1$

sse para todo $\omega_1 \in \boldsymbol{W}'$, tal que $\omega R'\omega_1$, $I'_\omega(\alpha)=1$
sse para todo $\omega_1 \in \boldsymbol{W}'$, tal que $\omega R'\omega_1$, $I_\omega(\alpha)=1$
sse para todo $\omega_1 \in \boldsymbol{W}$, tal que $\omega R\omega_1$, $v'_\omega(\alpha)=1$
sse $I_\omega(\Box\alpha)=1$

A primeira e a última linha são válidas em virtude das condições verdade de $\Box$. A segunda linha é válida pela hipótese de indução. A terceira linha é válida por (*).

6 Cálculo de Resolução

Um método de resolução foi apresentado por [ROB65] para provar teoremas da lógica clássica e teorias axiomáticas baseadas nele. Modificações desse método, corretas e completas para o cálculo modal proposicional **S5** foram descritas por [MIN81]. Nossa apresentação é baseada no trabalho de [MIN89], que propõe uma modificação simples na regra de resolução clássica, permitindo obter sistemas corretos e completos para as lógicas modais mais "populares", em particular para **S4**, **K**, **K4** e **T**. Descreveremos seu esquema geral que permite estabelecer a completude do cálculo construído dessa forma para sistemas modais que tenham formulações do tipo Gentzen com a propriedade de subfórmula.

6.1 O método de resolução para lógica clássica proposicional

Um método de resolução para um dado sistema lógico C é determinado, apresentando-se fórmulas de um tipo especial, chamadas *disjuntos*, uma regra (ou regras) de dedução **R**, que nos permite obter certos disjuntos a partir de outros e chamada *regra de resolução*, e também um algoritmo que reduza uma fórmula arbitrária $\boldsymbol{F}$ do sistema C a uma lista finita D_F de disjuntos. A *completude* de um método de resolução significa que a dedutibilidade de $\boldsymbol{F}$ em C implica a dedutibilidade do disjunto especial vazio a partir de D_F de acordo com a regra **R**. A corretude é a implicação inversa: a dedutibilidade do disjunto vazio a partir de D_F implica a dedutibilidade de $\boldsymbol{F}$ em C.

Definição 43 {*Literal***}** No caso do cálculo clássico proposicional, variáveis proposicionais e suas negações são chamadas de *literais*.

Notação 16 Se L é um literal, então $\overline{L}$ denota o literal contrário, isto é, o resultado de adicionar uma negação se L não contém uma, ou de apagar a negação, se L contém uma.

Definição 44 {*Disjunto*} Um *disjunto* é qualquer disjunção de literais. O disjunto vazio, não contendo um único literal, é denotado por $\varnothing$ e é identificado com a constante "falsa" (?).

Uma convenção permite-nos identificar disjuntos que diferem apenas na ordem de seus literais e cancelar repetições de literais em um disjunto, isto é, essa convenção permite-nos considerar disjuntos como conjuntos de literais.

Definição 45 {*Regra de resolução***}** A *regra de resolução* para o cálculo de declarações clássico tem a forma

$$\frac{\mathbf{D} \vee \boldsymbol{L};\ \mathbf{D'} \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{\mathbf{D} \vee \mathbf{D'}}$$

Notação 17 Denotaremos a *regra de resolução* para o cálculo de declarações clássico por **R**.

Dois métodos para reduzir uma fórmula arbitrária do cálculo de declarações clássico para um sistema de disjuntos são descritos na literatura.

O primeiro consiste em transformar a negação da fórmula sob consideração em uma forma normal conjuntiva através de um algoritmo bem conhecido que inclui, em particular, a aplicação da distributividade. Isso leva, no pior caso, a um crescimento exponencial da fórmula que está sendo processada e não é melhor, de jeito algum, do que a transformação para uma forma normal conjuntiva da própria fórmula (e não de sua negação), que produz imediatamente uma resposta para a questão de sua dedutibilidade.

O segundo algoritmo para reduzir uma fórmula para um sistema de disjuntos, que servirá como nosso modelo, consiste em *introduzir novas variáveis* com o objetivo de diminuir a complexidade da fórmula.

Escreveremos isso em termos de *seqüentes* $H \to \alpha$, onde α é uma fórmula, e H é uma conjunção de disjuntos. Cada passo da ação do algoritmo transformará cada seqüente em $H' \to \alpha'$, onde H' contém H, e α' é mais simples do que α, tanto quanto possível, isto é, até que α seja reduzido para um literal. Quando isso ocorre, H~, $\overline{\alpha}$ é declarado ser o sistema de disjuntos exigido, onde H~ é o resultado da “fragmentação” de H em disjuntos (isto é, substituindo símbolos de conjunção por vírgulas) e $\overline{\alpha}$ é o literal contrário a α.

Notação 18 Aplicamos o símbolo $\alpha[\beta]$ para separar uma determinada ocorrência (ou várias ocorrências) da fórmula β em α.

Nos esquemas de transformação dados abaixo, p denota uma variável proposicional nova, isto é, p não ocorre em H,α. A conjunção de disjunções adicionada a H é equivalente a $(p \leftrightarrow \beta)$, onde β é a fórmula substituída por p:

$$H \to \alpha[a \wedge b] \Rightarrow H \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee a) \wedge (\overline{p} \vee b) \to \alpha[p],$$

$$H \to \alpha[a \vee b] \Rightarrow H \wedge (\overline{p} \vee a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee p) \wedge (\overline{b} \vee p) \to \alpha[p],$$

$$H \to \alpha[a \to b] \Rightarrow H \wedge (\overline{p} \vee \overline{a} \vee b) \wedge (a \vee p) \wedge (\overline{b} \vee p) \to \alpha[p],$$

$$H \to \alpha[\neg a] \Rightarrow H \wedge (\overline{p} \vee \overline{a}) \wedge (a \vee p) \to \alpha[p].$$

Notação 19 Por H_α (no caso do cálculo clássico proposicional), denotamos a conjunção dos disjuntos obtidos de $\to\alpha$ como resultado da aplicação sucessiva dessas transformações tanto quanto possível, seguida pela transferência de um literal para a esquerda com negação, como descrito acima.

Exemplo 12 $\alpha = (((a \to b) \to a) \to a)$.

O seqüente inicial $\to\alpha$, dessa vez, é transformado em

$$(\overline{p} \vee \overline{a} \vee b) \wedge (a \vee p) \wedge (\overline{b} \vee p) \to ((p \to a) \to a)$$

ou, de maneira mais concisa, $H_1 \to ((p \to a) \to a)$; transformado então em

$$H_1 \wedge (\overline{q} \vee \overline{p} \vee a) \wedge (p \vee q) \wedge (\overline{a} \vee q) \to q \to a;$$

transformado então em

$$H_2 \wedge (\overline{r} \vee \overline{q} \vee a) \wedge (q \vee r) \wedge (\overline{a} \vee r) \to \overline{r},$$

isto é, em H_α. A dedução do disjunto vazio, de acordo com a regra de resolução apresentada anteriormente, a partir do sistema de disjuntos obtido assim tem a forma

q Ú r; `r

q; `q Ú `p Ú a

a Ú p; `p Ú a  `a Ú r; `r

a; `a.

$\varnothing$

A prova da corretude e da completude do método de resolução para o cálculo proposicional clássico é realizada em vários passos.

Lema 19 Uma fórmula α é dedutível no cálculo proposicional clássico se e somente se a fórmula H_α é inconsistente, isto é, sua negação $\neg H_\alpha$ é dedutível. Mais precisamente, as seguintes implicações (onde o asterisco denota uma certa substituição de fórmulas no lugar de variáveis proposicionais) são dedutíveis:

$$\alpha \to \neg H_\alpha,$$

$$(\neg H_\alpha)^* \to \alpha,$$

Prova: Primeiro note que implicações análogas a esta são verdadeiras em qualquer passo de nosso algoritmo de redução, e que, nomeadamente, para quaisquer fórmulas H, J e β, as seguintes implicações (onde o asterisco denota a substituição de β no lugar da variável p), são dedutíveis:

$$(H \to J[\beta]) \to (H \wedge (p \leftrightarrow \beta) \to J[p]),$$

$$(H \wedge (p \leftrightarrow \beta) \to J[p])^* \to (H \to J[\beta]),$$

Portanto, se $H \to \boldsymbol{L}$ é o resultado do penúltimo passo da ação do algoritmo de redução (antes de transferir o literal $\boldsymbol{L}$ para a esquerda com a negação), então as implicações $\alpha \to (H \to \boldsymbol{L})$ e $(H \to \boldsymbol{L})^* \to \alpha$ permanecem válidas. Vale lembrar que $H_\alpha \equiv H \wedge \overline{\boldsymbol{L}}$. O lema está provado.

A asserção óbvia seguinte justifica a corretude da regra de resolução e, pela mesma prova, do método de resolução como um todo.

Lema 20 A conjunção das premissas da regra de resolução implica sua conclusão.

Prova: Temos $(D \vee L) \wedge (D' \vee \overline{L}) \to (D \vee D' \vee L) \wedge (D \vee D' \vee \overline{L}) \leftrightarrow D \vee D' \vee (L \wedge \overline{L}) \leftrightarrow D \vee D'$.

Teorema 21 {*Corretude do método de resolução*} Se $\varnothing$ é dedutível a partir de $\boldsymbol{D}_\alpha$ de acordo com a regra de resolução, então α é dedutível no cálculo proposicional clássico.

Prova: Seja $\varnothing$ dedutível a partir de $\boldsymbol{D}_\alpha$ de acordo com a regra de resolução. Então, pelo Lema 20, a conjunção dos disjuntos de $\boldsymbol{D}_\alpha$, isto é, a fórmula H_α, implica a constante "falsa". Pela mesma prova, H_α é inconsistente e, em virtude do Lema 19, α é dedutível.

A completude do método de resolução é estabelecida de uma forma levemente mais complicada. Ela é fundamentada nas três asserções seguintes sobre dedutibilidade.

Notação 20 Denotaremos a regra de dedutibilidade por $\vdash$.

Notação 21 Diremos que o disjunto D' é um *enfraquecimento* do disjunto D (ou que D é um *fortalecimento* de D'), e escreveremos

$$\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}} \text{ ou } \boldsymbol{D} \,//\, \boldsymbol{D}',$$

se $\boldsymbol{D}$ estiver contido em $\boldsymbol{D}'$ como um conjunto, isto é, se cada literal de $\boldsymbol{D}$ também ocorrer em $\boldsymbol{D}'$. Em outras palavras, $\boldsymbol{D}'$ é obtido a partir de $\boldsymbol{D}$ pela inserção de literais, enquanto $\boldsymbol{D}$ é obtido a partir de $\boldsymbol{D}'$ pela exclusão deles.

Notação 22 A notação

$$\frac{\Gamma \vdash \boldsymbol{D}}{\Gamma' \vdash \boldsymbol{D}'} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma \vdash \boldsymbol{D} \,/\, \Gamma' \vdash \boldsymbol{D}'$$

significará que essa regra é admissível para o fortalecimento – mais precisamente, para que a dedutibilidade de $\boldsymbol{D}$ a partir da lista Γ de disjuntos de acordo com a regra de resolução implique a dedutibilidade a partir da lista Γ' de algum disjunto que reforce $\boldsymbol{D}$.

Lema 22 A dedutibilidade de acordo com a regra **R** é monotônica com respeito ao fortalecimento. Mais precisamente, se $\Gamma \vdash D$ e cada disjunto da lista Γ' é um fortalecimento de algum disjunto de Γ, então $\Gamma' \vdash D'$ para algum fortalecimento D' de D, onde a nova dedução pode diferir daquela dada apenas por exclusões de termos disjuntivos e aplicações inteiras da regra **R**.

Prova: A prova é realizada por indução na dedução dada $\Gamma \vdash \boldsymbol{D}$. Se $\boldsymbol{D} \in \Gamma$ (base de indução), então como $\boldsymbol{D'}$ tomamos aquele disjunto de Γ' que fortalece $\boldsymbol{D}$.

O passo de indução segue da monotonicidade da regra **R**. De fato, seja a última aplicação de **R** na dedução dada da forma

$$\frac{E \vee \boldsymbol{L};\qquad J \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{E \vee J}\ (\mathbf{R})$$

Se o fortalecimento da premissa da esquerda, que existe pela hipótese de indução, tem a forma E', isto é, o literal $\boldsymbol{L}$ é excluído, então o fortalecimento exigido da conclusão é também E', e a aplicação de **R** sob consideração é excluída. Agimos de maneira análoga no caso em que o fortalecimento da premissa do lado direito tem a forma

$$\frac{E' \vee \boldsymbol{L};\qquad J' \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{E' \vee J'}$$

que é exatamente o que é exigido.

Lema 23 $\Gamma,\ D \vdash E\ /\ \Gamma, (D \vee D') \vdash E \vee D'$.

Prova: É essencialmente quase suficiente adicionar o termo disjuntivo $\boldsymbol{D}$' a todos os disjuntos que dependam de $\boldsymbol{D}$ da dedução dada. Um argumento mais detalhado usa indução no tamanho da dedução, isto é, no número de aplicações da regra de resolução.

Base de indução. E é um dos disjuntos da lista Γ, $\boldsymbol{D}$. Se E coincide com $\boldsymbol{D}$, então $E \vee \boldsymbol{D'}$ coincide com $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D'}$ e tudo é óbvio. Mas se E pertence à lista Γ, então tomamos E como o disjunto de fortalecimento exigido $E \vee \boldsymbol{D'}$.

Passo de indução. Considere a última aplicação da regra de resolução na dedução dada:

$$\frac{E \vee \boldsymbol{L};\ J \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{E \vee J}$$

Na qual adicionar o termo disjuntivo $\boldsymbol{D'}$ preserva a regra de resolução, e em virtude do Lema 23, essa regra é invariante com respeito ao fortalecimento. Portanto, aplicando a hipótese indutiva às premissas da regra acima, estabelecemos a propriedade necessária de sua conclusão. No que segue, lidaremos freqüentemente com conceitos para o fortalecimento.

Para a prova da completude do método de resolução, vamos considerar um cálculo especial cujos objetos dedutíveis serão conjuntos finitos (inconsistentes) de disjuntos.

Definição 46 {*Cálculo* **P**}

Axiomas $\qquad \Gamma, \boldsymbol{L}, \overline{\boldsymbol{L}}$.

Regra de dedução

$$\frac{\Gamma, \boldsymbol{D};\qquad \Gamma, \boldsymbol{D}'}{\Gamma, \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'}$$

Lema 24 Uma lista de disjuntos é inconsistente se e somente se é dedutível no cálculo **P**, isto é, **P** é correto e completo.

Prova: A corretude (inconsistência segue a partir da dedutibilidade em **P**) é provada sem dificuldade por indução no tamanho de uma dedução em **P**. Provaremos a completude por indução no número de ocorrências do símbolo de disjunção de Γ.

Base de indução. Γ consiste de literais. Então a inconsistência de Γ é equivalente à presença de um par contrário, $\boldsymbol{L}, \overline{\boldsymbol{L}}$, isto é, ao fato de os elementos de Γ serem um axioma de **P**.

Passo de indução. $\Gamma = \Gamma', \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'$. Então a inconsistência de Γ é equivalente à inconsistência de ambos os conjuntos $\Gamma', \boldsymbol{D}$ e $\Gamma', \boldsymbol{D}'$. Aplicando a hipótese de indução e a regra de dedução do cálculo **P**, completamos a prova.

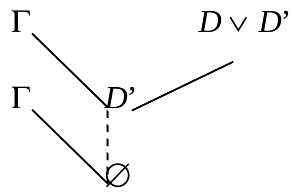
Lema 25

$$\frac{\Gamma, \boldsymbol{D} \vdash \varnothing; \qquad \Gamma, \boldsymbol{D}' \vdash \varnothing}{\Gamma, \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}' \vdash \varnothing}$$

onde ⊢ denota a dedutibilidade de acordo com a regra **R**.

Prova: Aplicando o Lema 24 à dedução dada do disjunto vazio a partir da lista $\Gamma, \boldsymbol{D}$, obtemos uma dedução do disjunto $\boldsymbol{D}'$ a partir de $\Gamma, \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'$.

Agora a segunda dedução dada (do disjunto vazio a partir da lista $\Gamma, \boldsymbol{D}'$) permite-nos obter uma dedução do disjunto vazio exigida a partir da lista $\Gamma, \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'$. Graficamente:



Teorema 26 Se uma conjunção de disjuntos da lista Γ é inconsistente, então $\Gamma \vdash \varnothing$.

Prova: Tendo em vista o Lema 24, é suficiente aplicar a indução sobre o tamanho da dedução no cálculo **P**. A base da indução é justificada com o auxílio de uma aplicação da regra **R**, e o passo de indução, com o auxílio do Lema 25.

Teorema 27 {*Completude do método de resolução*} Se α é dedutível no cálculo proposicional clássico, então $D_\alpha \vdash \varnothing$.

Prova: De acordo com o Lema 19, a fórmula H_α é inconsistente, e então o Teorema 26 produz o resultado exigido.

Definição 47 {*Regra de resolução reescrita*} Vamos agora escrever a regra de resolução na forma:

$$\frac{\dfrac{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{L}}{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}' \vee \boldsymbol{L};} \qquad \dfrac{\boldsymbol{D}' \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}' \vee \overline{\boldsymbol{L}}.}}{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'}$$

Definição 48 {*Regra* **R** *enfraquecida*} Para um enfraquecimento, a regra **R** pode ser substituída pela regra seguinte, em virtude de nossa convenção na identificação do disjunto vazio com o conjunto vazio:

$$\frac{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{L}; \boldsymbol{D} \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{\mathbf{D}} \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{L}; \boldsymbol{D} \vee \overline{\boldsymbol{L}}}{\boldsymbol{D} \vee \varnothing}$$

É precisamente essa última formulação que servirá como o modelo para a generalização. Para tanto, ela deve ser reescrita na forma:

$$\frac{\Sigma[\boldsymbol{L}]; \qquad \Sigma[\boldsymbol{L}]}{\Sigma[\varnothing]}$$

6.2 O método de resolução para lógica modal

Notação 23 Nesta seção, as letras D, E e F, com ou sem apóstrofes ou subscritos, denotarão disjunções de literais e expressões da forma $\Box L$ e $\Diamond L$.

Definição 49 Consideraremos *disjunções* quaisquer expressões da forma

$$D_1 \vee \Box(D_2 \vee \Box(D_3 \vee \ldots \vee \Box(D_{n-1} \vee \Box D_n) \ldots)),$$

onde, em particular, $n = 0$ (disjunção vazia) ou $n = 1$ é permitido, isto é, as disjunções no sentido da seção anterior são também disjunções neste novo sentido.

As regras de simplificação são $\Box \vdash \varnothing$ e também os canc elamentos de repetições e exclusões de termos disjuntivos vazios empregados anteriormente (que aumentarão quando a *regra de resolução reescrita* for aplicada "literalmente").

A *regra de resolução* terá a forma

$$\frac{\Sigma[\boldsymbol{L}]; \qquad \Sigma[\overline{\boldsymbol{L}}]}{\Sigma[\varnothing]} \qquad \frac{\Sigma[\Box\boldsymbol{L}]; \qquad \Sigma[\Diamond\,\overline{\boldsymbol{L}}]}{\Sigma[\varnothing]} \qquad (\mathbf{R})$$

isto é, a mesma forma que a última regra da seção anterior se assumimos que $\boldsymbol{L}$ tem a forma $\Box\boldsymbol{L}'$, onde $\boldsymbol{L}'$ é um literal, e levando em conta o fato de que $\Box\boldsymbol{a}$ pode ser definida em todos os sistemas sob consideração como $\neg\,\Box\alpha$, isto é, $\Box\boldsymbol{L}$ e $\Diamond\,\overline{\boldsymbol{L}}$ são contrários.

O enfraquecimento de regras representa o importante papel de transformar um sistema modal em outro. Adicionalmente à finalização da escrita de termos disjuntivos empregada na seção anterior, aqui também aplicaremos as outras transf ormações de enfraquecimento.

Definição 50 {*Transformações de enfraquecimento*}

$\boldsymbol{D}$? $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}'$	(? $\vee$),
$\Box\boldsymbol{D}$? $\boldsymbol{D}$	($\Box$?),
$\Box\boldsymbol{D}$? $\Box(\boldsymbol{D}' \vee \Box\boldsymbol{D})$	($\Box$? $\Box \vee \Box$),
$\Box(\Diamond\boldsymbol{L} \vee \boldsymbol{D})$? $\Diamond\boldsymbol{L} \vee \Box\boldsymbol{D}$	($\Box\Diamond$? $\Diamond \vee \Box$),
$\Box\boldsymbol{L}$? $\Diamond\boldsymbol{L}$	($\Box$? $\Diamond$),
$\Box(\Diamond\boldsymbol{L} \vee \boldsymbol{D})$? $\boldsymbol{L} \vee \Box\boldsymbol{D}$	($\Box$? $\Box$).

Podemos aplicar essas transformações a qualquer dos D_i da definição de *disjunção*, dado que o resultado tem novamente a forma de uma *disjunção*.

Definição 51 {*Transformações de enfraquecimento permitidas em cada sistema*} Eis uma lista de transformações de enfraquecimento permitidas em cada um dos sistemas modais sob consideração (os sistemas axiomáticos deles são dados abaixo):

K	(? $\vee$),
K4	(? $\vee$, $\Box$? $\Box \vee \Box$),
T	(? $\vee$, $\Box$?),
S4	(? $\vee$, $\Box$? , $\Box$? $\Box \vee \Box$),

G (? ∨, □ ? □ ∨ □, □◇ ? ◇ ∨ □, □ ? ◇),

Br (? ∨, □ ? , □ ? □).

Definição 52 {*Regra de resolução do sistema* **G**} A seguinte regra de resolução adicional será empregada no sistema *G*:

$$\frac{\Sigma[\Box(\Diamond \boldsymbol{L} \vee \overline{\boldsymbol{L}})]; \qquad\qquad \Sigma[\Diamond \boldsymbol{L}]}{\Sigma[\varnothing]}$$

A variante de um sistema *S* obtido assim será denotada por *SR*. Portanto, consideramos os sistemas ***KR, K4R, TR, S4R, GR*** e ***BrR***.

Notação 24 A notação $\begin{array}{c} D \\ \hline\hline D \end{array}$ ou $D \,//\, D'$,

agora significará que *D*' é obtido a partir de *D* por uma série de transformações de enfraquecimento permitidas no sistema sob consideração.

Notação 25 A notação $\Gamma \vdash \Sigma$ agora significa que Σ é obtido a partir de disjuntos que ocorrem em Γ, uma série de aplicações da regra (*R*), e enfraquecimentos (segundo a Notação 24), onde os enfraquecimentos devem preceder imediatamente uma aplicação da regra (*R*).

Em outras palavras, uma dedução consiste de uma série de aplicações de regras como:

$$\frac{\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \hline\hline \Sigma[\boldsymbol{L}]; \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma_2 \\ \hline\hline \Sigma[\boldsymbol{L} \end{array}}{\Sigma[\varnothing]} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \hline\hline \Sigma[\Box \boldsymbol{L}]; \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma_2 \\ \hline\hline \Sigma[\Diamond \overline{\boldsymbol{L}}] \end{array}}{\Sigma[\varnothing]} \qquad\qquad (\mathbf{R})$$

que também denotaremos por (*R*), bem como as configurações análogas para a *regra de resolução do sistema* **G** no caso do cálculo **G**. Consideraremos o *tamanho* da dedução como o número de aplicações da regra (*R*) de acordo com nosso novo entendimento.

Reduzir uma fórmula arbitrária α a uma conjunção de disjuntos H_α exige uma modificação do esquema de transformações da seção anterior, pois o teorema sobre uma substituição equivalente, necessário para a prova do Lema 19, adquire, em ***S4***, a forma seguinte:

Teorema 28 $\Box(\chi \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha[\chi] \leftrightarrow \alpha[\beta])$

Esse mesmo teorema, em sistemas mais fracos que contêm ***K***, adquire a forma seguinte:

Teorema 29 $\Box^{(n)}(\chi \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha[\chi] \leftrightarrow \alpha[\beta])$

Aqui, $\Box^{(n)}\boldsymbol{F}$ denota $\boldsymbol{F} \wedge \Box\boldsymbol{F} \wedge \Box\Box\boldsymbol{F} \wedge \ldots \wedge\Box \ldots \Box\boldsymbol{F}$ (*n* vezes), enquanto *n* denota o grau modal das ocorrências de *A* substituídas na fórmula α, isto é, o número máximo de ocorrências aninhadas dos símbolos modais □ e ◇ em cujo escopo são encontradas as ocorrências de *A* substituídas. Note que, para os sistemas que contêm o axioma **4** ($\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$), isto é, ***S4***, ***Q4*** e ***G***, é suficiente tomar $n = 1$ no Teorema 29, enquanto, para os sistemas que contêm o axioma ***T*** ($\Box a \rightarrow \alpha$), isto é, ***T***, ***S4*** e ***Br***, a fórmula $\Box^{(n)}$ pode ser substituída por $\Box^{n}\, a$.

Assim que uma formulação apropriada do teorema sobre uma substituição equivalente é encontrada, é fácil descrever a redução de profundidade necessária.

Notação 26 Para simplificar nossa notação, assumiremos que apenas os conetivos $\wedge$, $\neg$ e □ ocorrem em uma fórmula inicial:

$$H \to \alpha[q \wedge r] \ ? \ \ H \wedge \square^{(n)}(\overline{q} \vee \overline{r} \vee p) \wedge \square^{(n)}(\overline{p} \vee q) \wedge \square^{(n)}(\overline{p} \vee r) \to \alpha[p],$$

$$H \to \alpha[\neg q] \ ? \ \ H \wedge \square^{(n)}(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge \square^{(n)}(q \vee p) \to \alpha[p],$$

$$H \to \alpha[\square q] \ ? \ \ H \wedge \square^{(n)}(\overline{p} \vee \square q) \wedge \square^{(n)}(p \vee \lozenge \overline{q}) \to \alpha[p],$$

A reescrita das *transformações de enfraquecimento* da Definição 50 para os demais conetivos são omitidas.

Notação 27 A notação H_α é agora apresentada exatamente como na seção anterior, isto é, H_α denota a conjunção de disjuntos obtidos a partir de $\to\alpha$ como resultado da aplicação sucessiva de transformações tanto quanto possível, seguida pela transferência de um literal para o lado esquerdo com a negação.

Notação 28 D_α, assim como antes, é o resultado da exclusão de $\wedge$ de H_α.

Exemplo 13 Uma dedução de um disjunto vazio a partir de $\square(\overline{q} \vee r)$, $\square q$, $\lozenge r$ no sistema ***KR*** tem a forma

$$\dfrac{\dfrac{\square(\overline{q} \vee r); \qquad \dfrac{\square q}{\square(q \vee r)}}{\square r;} \qquad \lozenge \overline{r}}{\varnothing}$$

Esse sistema de disjuntos é obtido a partir do axioma ***K*** $\square(q \to r) \wedge \square q \to \square r$ mais rapidamente do que através do algoritmo geral.

Exemplo 14 Com a estrutura de trabalho do algoritmo geral, o axioma **K** reduz-se ao sistema de disjuntos

$$\overline{p} \vee \overline{q} \vee r,\ q \vee p,\ \overline{r} \vee p,\ \square(\overline{p} \vee \overline{q} \vee r),\ \square(q \vee p),\ \square(\overline{r} \vee p),$$

$$\overline{q} \vee \square p,\ q \vee \lozenge \overline{p},\ \square(\overline{q} \vee \square p),\ \square(q \vee \lozenge \overline{p}),$$

$$\overline{r} \vee \square q,\ r \vee \lozenge \overline{q},\ \square(\overline{r} \vee \square q),\ \square(r \vee \lozenge \overline{q}),$$

$$\overline{u} \vee \square r,\ u \vee \lozenge \overline{r},\ \square(\overline{u} \vee \square r),\ \square(u \vee \lozenge \overline{r}),$$

$$\overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{v},\ \ \overline{v} \vee q,\ \ \overline{v} \vee r,\ \ \overline{w} \vee \overline{v} \vee u,\ v \vee w,\ \ \overline{u} \vee w,\ \ \overline{w}.$$

Definição 53 Uma dedução do disjunto vazio através da regra (R) tem a forma (onde D_1, D_2 e D_3 são deduções de acordo com a regra de resolução ordinária (não modal)).

$$\dfrac{\dfrac{D_3}{\lozenge \overline{r};} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_1}{\square p}}{\square(p \vee \overline{q} \vee r);\ \square(\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)}}{\square(q \vee r);} \qquad \dfrac{\dfrac{D_2}{\square q}}{\square(q \vee r)}}{\square r}}{\varnothing,}$$

A prova da corretude do método de resolução não apresenta qualquer dificuldade agora – ela copia as provas da seção anterior. S denota qualquer um dos sistemas modais sob consideração.

Lema 30 A fórmula α é dedutível na formulação ordinária de S se e somente se H_α é inconsistente em S, isto é, $\neg H_\alpha$ é dedutível. Mais precisamente, a seguinte implicação é dedutível em S:

$$\alpha \to \neg H_\alpha; \qquad\qquad (\neg H_\alpha)^* \to \alpha$$

Lema 31 A conjunção das premissas da regra (R) (a premissa da regra de enfraquecimento) implicam sua conclusão.

Prova: *Regra* (*R*). Provamos por indução na construção do disjunto Σ (mais precisamente, no número n da Definição de *Disjuntos*) que a seguinte fórmula é dedutível:

$$\Sigma[\alpha] \wedge \Sigma[\beta] \to \Sigma[\alpha \wedge \beta]$$

Essa fórmula produz $\Sigma[\alpha \wedge `\alpha]$, isto é, $\Sigma[\emptyset]$, quando $\beta = `a$.

Definição 54 {*Regras de enfraquecimento*} Como em todos os sistemas sob consideração, temos as regras

$$\frac{\alpha \to \beta}{F \vee \alpha \to F \vee \beta} \qquad \frac{\alpha \to \beta}{\Box\alpha \to \Box\beta}$$

Isso é suficiente para notar que as implicações que correspondem às regras das *transformações de enfraquecimento de cada sistema* são dedutíveis em cada um dos sistemas sob consideração. As deduções necessárias podem ser construídas com o auxílio das formulações do tipo de Gentzen dadas abaixo.

Teorema 32 {*Corretude do método de resolução*} Se α é dedutível a partir de D_α no sistema **SR**, então α é dedutível em S.

Prova: A prova coincide com aquela da *Corretude do método de resolução* dada na seção anterior.

A completude das formulações R é estabelecida de acordo com o mesmo esquema que na seção anterior; entretanto, esforços adicionais são exigidos para provar o análogo do Lema 25.

As formulações do tipo de Gentzen dos sistemas sob consideração, usadas para provar a inconsistência de conjuntos de disjuntos, contêm o cálculo **P** da seção anterior, mas diferem em suas regras modais.

Definição 55 *Postulados proposicionais:*

$$\underline{\Gamma, \boldsymbol{L}, `\boldsymbol{L}} \qquad \frac{\Gamma, \boldsymbol{D}; \quad \Gamma, \boldsymbol{D}'}{\Gamma, \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{D}';}$$

Notação 29 $\Box\Gamma$ denota o resultado de adicionar $\Box$ antes de todos os disjuntos de Γ.

Definição 56 *Postulados modais:*

Sistema **K** $$\frac{\Gamma, \boldsymbol{L}}{\Pi, \Box\Gamma, \Diamond\boldsymbol{L}} \ (\Diamond\mathbf{K})$$

Sistema **K4** $$\frac{\Gamma, \Box\Gamma, \boldsymbol{L}}{\Pi, \Box\Gamma, \Diamond\boldsymbol{L}} \ (\Diamond\mathbf{K4})$$

Sistema **T** $\Diamond$**K** e $$\frac{A, \Box A, \Sigma}{\Box A, \Sigma} \ (\Box\mathbf{T})$$

Sistema **S4**
$$\frac{\Box\Gamma, \boldsymbol{L}}{\Pi, \Box\Gamma, \Diamond\boldsymbol{L}}\quad (\Diamond\mathbf{S4}) \text{ e } (\Box\mathbf{T})$$

Sistema **G**
$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box\, `\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}}{\Pi, \Box\Gamma, \Diamond\boldsymbol{L}}\quad (\Diamond \mathrm{G})$$

Sistema **Br** $\Diamond\boldsymbol{K}$, $\Box\boldsymbol{T}$ e
$$\frac{\boldsymbol{L}, \Gamma; \Box\Diamond\, `\boldsymbol{L}, \Gamma}{\Gamma}\quad (\mathrm{cut}_{Br}) \text{ “corte analítico”}$$

(onde a fórmula $\Box\boldsymbol{L}$ ocorre no menor conjunto da dedução sob consideração)

Lema 33 A dedutibilidade no sistema **SR** é monotônica com respeito ao fortalecimento. Isso segue de $\Gamma \vdash \boldsymbol{D}$ e do fato de que cada disjunto de Γ’ é um fortalecimento de algum disjunto de Γ (de acordo com as regras aceitas em *S*) e que $\Gamma' \vdash \boldsymbol{D}'$ para algum fortalecimento ***D***’ do disjunto ***D***.

Prova: Diferentemente das formulações ordinárias do método de resolução para a lógica clássica, não exigimos que a regra de enfraquecimento precedente (*R*) seja mínima. Se a dedução dada $\Gamma \vdash \boldsymbol{D}$ contém pelo menos uma aplicação da regra (*R*), então podemos tomar $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}$, adicionando os enfraquecimentos necessários $E'/\!/E$ para $E' \in \Gamma$. Mas se $\boldsymbol{D} \in \Gamma$, então é suficiente tomar um $\boldsymbol{D}' \in \Gamma'$ apropriado, o que completa a prova.

Lema 34 $\Gamma,\ D \vdash \mathrm{E} \,/\, \Gamma,\ D \vee D' \vdash E \vee D'$.

Prova: A prova é a mesma que para o Lema 23, porém agora devemos considerar não só a regra (**R**), mas também todas as regras de enfraquecimento.

Lema 35 Uma lista de disjuntos é inconsistente se e somente se ela é dedutível de acordo com as regras de nossa formulação do tipo de Gentzen do sistema *S*.

Prova: Formulações-padrão do tipo de Gentzen dos sistemas sob consideração ([CUR63], [LEI81], [FEY65]) lidam com seqüentes $\Gamma \rightarrow \Delta$. Substituindo $\Gamma \rightarrow \Delta$ por $\Gamma,\ \overline{\Delta}$ em todos os lugares em uma dedução, obtemos uma dedução de acordo com nossas regras. Para ***Br***, a prova usa os resultados de [MIN85].

Lema 36

(1) *Em todos os sistemas sob consideração*,
$$\frac{\boldsymbol{L}, \Gamma \vdash \Sigma \ \text{ e } \ \boldsymbol{L} \nvDash \Sigma}{\Gamma \vdash \boldsymbol{L} \vee \Sigma}$$

(2) *No sistema **GR***,
$$\frac{\Sigma[\Diamond\boldsymbol{L}]}{\Diamond\boldsymbol{L} \vee \Sigma[\varnothing]}$$

(3) *No sistema **GR***,
$$\frac{\Box\boldsymbol{L}, \Gamma \vdash \Sigma \ \text{ e } \ \Sigma \notin \Box\boldsymbol{L}, \Gamma}{\Gamma \vdash \Diamond\, \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma}$$

(4) *Nos sistemas **KR** e **TR***,
$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$$

(5) *Nos sistemas **K4R** e **GR***,
$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$$

(6) *No sistema **S4R***,
$$\frac{\Box\Gamma \vdash \Sigma}{\Box\Gamma \vdash \Box\Sigma}$$

(7) *No sistema* ***BrR***, $$\frac{\Box\Diamond \boldsymbol{L}, \Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma}$$

Explicações: (1) Se $\boldsymbol{L}$ não é usado nunca na dedução dada $\boldsymbol{L}, \Gamma \vdash \Sigma$, então $\Gamma \vdash \Sigma$ // $\Gamma \vdash \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma$. Caso contrário, adicionamos o termo disjuntivo $\overline{\boldsymbol{L}}$ a todos os disjuntos da dedução dada que dependem de $\boldsymbol{L}$ e verificamos que a dedutibilidade é preservada. Apenas as aplicações da regra (*R*) nas quais $\boldsymbol{L}$ é uma das premissas (para enfraquecimentos) precisam de verificação. Apenas o caso em que $\boldsymbol{L}$ é um literal excluído é de interesse. De todas as regras de enfraquecimento, apenas (? $\vee$) é aplicável a $\boldsymbol{L}$. Conseqüentemente, uma aplicação da regra (*R*) sob consideração tem a forma

$$\frac{\dfrac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{L} \vee \Sigma} \qquad \dfrac{\Theta}{\overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma}}{\Sigma}$$

Isso agora é suficiente para substituir o disjunto Σ por Θ e excluir a aplicação da regra (*R*) em consideração.

(2) Tendo escrito $\Sigma[\Diamond \boldsymbol{L}]$ na forma (1), tiramos $\Diamond \boldsymbol{L}$ do escopo de $\Box$, usando a transformação $\Box\Diamond$? $\Diamond \vee \Box$.

(3) Novamente é necessário considerar apenas o caso em que $\Box \boldsymbol{L}$ está diretamente envolvido em uma aplicação da regra (*R*). A configuração

$$\frac{\dfrac{\Box \boldsymbol{L}}{\Sigma[\Box \boldsymbol{L}]} \qquad \dfrac{\Theta}{\Sigma[\Box \overline{\boldsymbol{L}}]}}{\Sigma[\Box\varnothing] = \Sigma[\varnothing]}$$

é substituída por Θ, enquanto a relação Θ // $\overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma[\varnothing]$ está provada com a ajuda das relações (2) e ($\Box$? $\Diamond$):

$$\Theta \ // \ \Sigma[\Box \overline{\boldsymbol{L}}] \ // \ \Sigma[\Diamond \overline{\boldsymbol{L}}] \ // \ \Diamond \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma[\varnothing].$$

Os casos em que o par $\Box \boldsymbol{L}$, $\Diamond \overline{\boldsymbol{L}}$ é excluído, ou a regra (4) é aplicada são até mais simples – não é necessário aplicar $\Box$? $\Diamond$.

(4)–(6) Aplicar a indução no tamanho da dedução dada.

(7) Tratamos este caso como o mesmo que (1). Aplicações da regra de resolução que envolvam $\Box\Diamond \boldsymbol{L}$ têm a forma

$$\frac{\dfrac{\Box\Diamond \boldsymbol{L}}{\Diamond \boldsymbol{L} \vee \Sigma} \qquad \dfrac{\Theta}{\Box \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma}}{\Sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{\dfrac{\Box\Diamond \boldsymbol{L}}{\boldsymbol{D} \vee \Box(\Diamond \boldsymbol{L} \vee E)} \qquad \dfrac{\Theta}{\boldsymbol{D} \vee \Box(\Box \overline{\boldsymbol{L}} \vee E)}}{\boldsymbol{D} \vee \Box E}$$

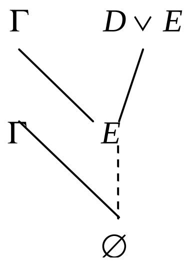
Substituímos a transição sob consideração pela configuração

$$\frac{\dfrac{\Theta}{\Box \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma}}{\overline{\boldsymbol{L}} \vee \Sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{\dfrac{\Theta}{\boldsymbol{D} \vee \Box(\Box \overline{\boldsymbol{L}} \vee E)}}{\boldsymbol{D} \vee \overline{\boldsymbol{L}} \vee \Box\Sigma}$$

Teorema 37 Se uma lista de disjuntos Γ é inconsistente em S, então Γ ⊢ ∅ em **SR**.

Prova: Aplicamos a indução no tamanho da dedução em nossa formulação do tipo de Gentzen de *S*. O axioma Γ, ***L***, `***L*** novamente se transforma em uma aplicação da regra (*R*). Permanece justificando as transições correspondentes às regras de dedução.

A regra de separação de disjunções Γ, ***D***; Γ, *E* / Γ, ***D*** ∨ *E* é justificada como segue (onde a dedução Γ, ***D*** ∨ *E* ⊢ *E* é obtida pelo Lema 34):



Regra ◇***K***. Pela hipótese de indução, temos Γ, ***L*** ⊢ ∅;

pelo Lema 36 (1), obtemos Γ ⊢ `***L*** ou Γ ⊢ ∅;

pelo Lema 36 (4), obtemos □Γ ⊢ □ `***L*** ou □Γ ⊢ ∅;

no primeiro caso, devemos aplicar a regra (*R*), enquanto no segundo já obtivemos ∅.

Regras ◇***K4*** *e* ***S4***. A transição é justificada de maneira análoga com o auxílio do Lema 36 (5), (6).

Regra ◇*G*. Pela hipótese de indução, temos Γ, □Γ, □ `***L***, ***L*** ⊢ ∅. Pelo Lema 36 (1), (3), (5) obtemos, para os enfraquecimentos, Γ ⊢ □(◇***L*** ∨ `***L***), e continuamos aplicando a regra (4).

Regra □***T***. Pela hipótese de indução, □α, α, Σ ⊢ ∅. Substituímos todas as referências a α por referências a □α e pelo enfraquecimento (□ ?).

Regra Cut$_{Br}$. Pela hipótese de indução, temos □◇ `***L***, Γ ⊢ ∅ e ***L***, Γ ⊢ ∅. Pelo Lema 36 (7), obtemos, para os enfraquecimentos, Γ ⊢ ***L***, que, junto com ***L***, Γ ⊢ ∅, produz Γ ⊢ ∅. O teorema está provado.

Teorema 38 {*Completude do método de resolução*} Se α é dedutível em S, então D_α ⊢ ∅ em *SR*.

Prova: Aplicamos o Lema 19 e o Teorema 37.

O esquema descrito neste capítulo é aplicável a muitas extensões do sistema ***K*,** segundo **[**MIN89**]**. Entretanto, foram estabelecidos limites nessa aplicabilidade pelos resultados de Maksimova [MAK79]. Ao mesmo tempo, a completude da formulação de resolução simples de ***S5***, descrita por [MIN81] segue imediatamente da completude do sistema ***TR*** e do fato de que uma redução a disjuntos sem modalidades iteradas é possível em ***S5***.

7 Sistemas Dedutivos Rotulados

Neste capítulo, é descrita uma abordagem nova para lógica modal, baseada em [BRO2002], aplicável a qualquer lógica de estrutura, que gera uma classe de formalismos cada um dos quais é sintaticamente mais caro do que o seu correspondente tradicional implícito, e descreve sua estrutura semântica associada de uma maneira natural. Esses sistemas são chamados de Sistemas Dedutivos Rotulados Modais (MLDS). A abordagem é inspirada pelo trabalho que Gabbay [GAB2001] vem desenvolvendo em uma estrutura de trabalho "LDS" unificante e muito geral, que eventualmente será usada para estudar as similaridades e as relações entre muitos estilos diferentes de lógicas.

As propostas de Gabbay [GAB94] para o desenvolvimento de Sistemas Dedutivos Rotulados são amplamente baseadas na observação de que a maioria das lógicas difere umas das outras apenas em aspectos "pequenos", relacionados a variações menores ou em suas teorias de prova ou em sua semântica. O mesmo é verdade para lógicas modais, pois suas diferenças são ditadas apenas por propriedades diferentes da relação de acessibilidade. Essas também impõem efetivamente condições extra sobre o uso da regra básica [*Nec*].

A metodologia LDS facilita uma maneira de representar esses tipos de variações explicitamente dentro da lógica, para permitir uma estrutura de trabalho básica e unificante na qual lógicas diferentes possam encontrar uma formalização comum. Isso é obtido, formando-se pares de informação lógica (isto é, *wff* – fórmulas bem formadas) com rótulos que "codificam" informações sobre as propriedades "metanível" explicitamente dentro da linguagem objeto. Além da teoria lógica rotuladora, é definida uma álgebra, a qual representa as propriedades que diferenciam uma lógica da outra. Regras de inferência agem sobre os dois componentes sintáticos, fórmulas lógicas e rótulos, de acordo com as propriedades desejadas dos conetivos da álgebra rotuladora.

Resultados recentes mostram que essa abordagem facilita realmente o desenvolvimento de um sistema de prova uniforme para uma ampla família de lógicas subestruturais [DG94], na qual modificações apropriadas da álgebra rotuladora implicam lógicas subestruturais diferentes, deixando o conjunto inteiro de regras de inferência inalterado. Resultados similares são mostrados neste trabalho para a família de lógicas modais. A álgebra rotuladora apresentada captura as informações sobre a relação de acessibilidade semântica entre os mundos possíveis.

7.1 A Linguagem Dedutiva Rotulada Modal

Uma das limitações da formalização implícita de lógicas modais é o fato de que suposições (ou teorias modais em geral) são avaliadas em apenas um mundo, o mundo atual. MLDS generaliza a noção de um mundo atual único. Fórmulas são associadas com rótulos que denotam explicitamente os mundos possíveis. Os rótulos são termos de uma "linguagem de rotulação", e as fórmulas são expressas em uma linguagem modal proposicional padrão L_M (definida em [BRO2002] – equivalente a ***ML*** definida no capítulo 2). Essas duas linguagens juntas definem a linguagem dedutiva rotulada modal básica.

Definição 57 {*Linguagem de rotulação L_L*} Uma linguagem L_L é uma linguagem de primeira ordem composta de:

$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ *um conjunto contável de símbolos constantes* *p, q, r, p_1, q_1, r_1,* ¼ *um conjunto contável de variáveis*

R *símbolo binário predicativo*

? , $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, = *conetivos lógicos*

$\forall$, $\exists$ *quantificadores*

As constantes e as variáveis de L_L denotam os mundos possíveis, e o predicado binário *R* formaliza a relação de acessibilidade entre os mundos possíveis. A linguagem acima permite que as noções semânticas de Kripke de estruturas e de estruturas de mundos possíveis sejam expressas sintaticamente. Em vez disso, a informação lógica é expressa na linguagem modal proposicional L_M. A combinação dessas duas linguagens dá uma linguagem dedutiva rotulada modal.

Definição 58 {*Linguagem dedutiva rotulada modal* (*MLDL*)} Dada a linguagem de rotulação L_L e a linguagem modal proposicional L_M, uma linguagem dedutiva rotulada modal proposicional (MLDL proposicional) é o par ordenado

$$\langle L_L, L_M \rangle$$

Para propósitos "prova-teoréticos", a linguagem de rotulação é estendida com conjuntos adicionais de termos, que serão usados somente em derivações. Especificamente, dois conjuntos de símbolos de funções "*skolem*" são definidos junto com um símbolo de função *succ*. A linguagem resultante é chamada de linguagem de rotulação semi-estendida.

Definição 59 {*Linguagem de rotulação semi-estendida Func(L_L,L_M)*} Seja L_L uma linguagem de rotulação e L_M uma linguagem modal proposicional. Seja $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$ o conjunto ordenado de todas as *wff*s de L_M[3]. A linguagem de primeira ordem *Func(L_L,L_M)* é definida como a linguagem L_L estendida com o símbolo funcional *succ* e os dois conjuntos de símbolos de função unária.

$$\{f_{\alpha 1},\ldots,f_{\alpha n},\ldots\} \text{ e } \{box_{\alpha 1},\ldots,box_{\alpha n},\ldots\}$$

Os termos da linguagem de rotulação L_L construídos usando os símbolos funcionais $f_{\alpha i}$ e $box_{\alpha i}$ exercem papéis particulares. Para cada mundo possível λ e fórmula modal α, $f_\alpha(\lambda)$ nomeia um mundo particular associado especificamente com α. Tais termos serão usados a qualquer momento em que as noções semânticas de Kripke da forma "há um mundo possível…" precisarem ser formalizadas. Em contraste, termos da forma $box_\alpha(\lambda)$ podem ser pensados como se referindo a qualquer mundo arbitrário associado especificamente com α. Esses termos serão usados a qualquer momento em que as noções semânticas de Kripke da forma "para todos os mundos possíveis…" precisem ser expressas.

A função *succ* é usada principalmente para lógicas modais que incluem a propriedade de serialidade. É uma função total que mapeia cada mundo possível para um mundo "existente". Entretanto, formalmente, $f_\alpha(\lambda)$, $box_\alpha(\lambda)$ e $succ(\lambda)$ são apenas termos de L_L e dentro de um modelo particular, podem mesmo referir-se ao mesmo mundo possível. O conjunto inteiro de termos rasos de *Func(L_L,L_M)* define o conjunto de rótulos. Como eles denotam mundos atuais e acessíveis, as expressões "rótulos" e "mundos possíveis" serão usadas de maneira intercambiável.

A MLDL facilita a formalização de dois tipos de informação:

(i) a que é válida em mundos possíveis particulares; e

[3] Assumimos uma ordenação canônica. O fato de que uma ordenação exista segue da definição indutiva normal de uma *wff* em uma linguagem modal L_M, segundo [BRO2002].

(ii) quais mundos estão na relação com quais outros e quais não estão.

Duas entidades sintáticas diferentes são definidas para capturar esses dois aspectos da linguagem, e são chamadas, respectivamente, de *unidades declarativas* e *R-literais*. Uma unidade declarativa é um par separado por dois-pontos da forma "fórmula modal**:**rótulo", expressando que uma fórmula modal é verdadeira em um mundo possível. Em um sentido muito geral, o símbolo "**:**" entre os dois componentes pode ser considerado como um tipo de predicado "É válido". (Essa interpretação será refletida na semântica.) O componente *rótulo* é um termo raso da linguagem $Func(L_L,L_M)$, e o componente modal é uma *wff* da linguagem modal proposicional L_M. Essa é a única entidade sintática que combina as duas entidades da linguagem dedutiva rotulada modal e é formalmente definida como segue.

Definição 60 {*Unidade declarativa*} Dada a linguagem $\langle L_L,L_M\rangle$, uma unidade declarativa é um par $\alpha{:}\lambda$ onde λ é um termo raso de $Func(L_L,L_M)$ e α é uma *wff* de L_M.

Uma unidade declarativa é dita ser atômica se o componente *wff* modal for uma fórmula atômica. No caso proposicional, considerado aqui, isso significa que a *wff* é apenas uma letra proposicional. Exemplos de unidades atômicas proposicionais são $p : \omega_0$ e $p : f\Diamond q(\omega_3)$. Unidades declarativas arbitrárias incluem *wffs* modais arbitrárias, por exemplo, $\Diamond p : \omega_1$ e $p \to r : f_q(\omega_1)$.

Um *R-literal* é qualquer literal raso da linguagem $Func(L_L,L_M)$ da forma $R(\lambda_1,\lambda_2)$ ou $\neg R(\lambda_1,\lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são rótulos, expressando que λ_2 é ou não é acessível a partir de λ_1. Exemplos de *R*-literais são $R(\omega_1,\omega_2)$, $\neg R(\omega_2,box_p(\omega_2))$ e $R(\omega_0,f_p(\omega_2))$. Para distinguir um *R*-literal de seu oposto pelo sinal, a noção de conjugado de um *R*-literal também é apresentada.

Definição 61 {*R*-literal} Dada a linguagem $\langle L_L,L_M\rangle$, um *R*-literal é um literal da forma $R(\lambda_1,\lambda_2)$ ou $\neg R(\lambda_1,\lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são termos rasos da linguagem $Func(L_L,L_M)$.

Definição 62 {*Conjugado de um R-literal*} Seja p um *R*-literal. O conjugado de p, escrito $\overline{p}$, é definido como

$\neg R(\lambda_1,\lambda_2)$ se $p = R(\lambda_1,\lambda_2)$

$R(\lambda_1,\lambda_2)$ se $p = \neg R(\lambda_1,\lambda_2)$

7.2 Teorias Dedutivas Rotuladas Modais

A sintaxe de MLDS permite que conjuntos arbitrários de fórmulas modais sejam associados com rótulos (diferentes), descrevendo não só um conjunto inicial de suposições locais (como na abordagem implícita), mas permitindo que várias teorias modais iniciais locais (distintas) sejam especificadas. Com a adição de *R*-literais, essas teorias locais podem ser declaradas ou como sendo independentes (usando *R*-literais negativos) ou como interagindo umas com as outras (usando *R*-literais positivos). Isso gera uma definição de uma teoria dedutiva rotulada modal mais geral do que a noção tradicional de uma teoria modal dada no capítulo 2. Isso contribui em direção à grande ajuda de oferecer um formalismo modal mais próximo das necessidades das aplicações (veja discussões em [BRO2002]).

Uma teoria dedutiva rotulada modal, chamada configuração, é composta por dois conjuntos de informações:

(i) um conjunto de *R*-literais; e

(ii) um conjunto de unidades declarativas.

Conjuntos de unidades declarativas tendo os mesmos rótulos denotam teorias modais locais associadas àquele rótulo, enquanto unidades declarativas com rótulos diferentes expressam fórmulas modais que pertencem a mundos atuais locais (possivelmente) diferentes. O primeiro conjunto (i), consistindo de *R*-literais, é chamado de diagrama e oferece as informações "estruturais" sobre uma teoria dedutiva rotulada modal.

Definição 63 {*Diagrama*} Dada a linguagem $\langle L_L, L_M \rangle$, um diagrama *D* é um conjunto de *R*-literais, cujos argumentos são termos rasos de $Func(L_L, L_M)$.

Por exemplo, o conjunto $\{R(\omega_0, \omega_1), R(\omega_0, \omega_2), \neg R(\omega_1, \omega_2)\}$ é um diagrama que pode ser representado graficamente parcialmente como aqueles que foram apresentados no capítulo 2. Devemos notar que esse tipo de diagrama (conjunto) não nos diz, por exemplo, se ω_0 é acessível a partir de ω_1 ou não. Esse tipo de ilustração também não inclui representações de *R*-literais da forma $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$.

Em geral, as informações completas ou incompletas sobre qualquer grafo direcionado arbitrário podem ser formalizadas como um diagrama. Uma teoria modal local pode ser atribuída a cada nó do diagrama, adicionando-se unidades declarativas apropriadas. Por exemplo, considere o conjunto $\{\Box(p \to q) : \omega_0,\ \Box r : \omega_0,\ \Diamond p : \omega_1,\ r \to s : \omega_1,\ q : \omega_2,\ \Diamond p : \omega_2\}$. A teoria resultante (configuração) também pode ser representada graficamente. Uma definição formal de uma configuração é dada abaixo.

Definição 64 {*Configuração*} Dada uma *MLDL*, uma configuração é uma tupla $\langle D, F \rangle$ onde: *D* é um diagrama

F é uma função do conjunto de termos rasos de $\text{Func}(L_L, L_M)$ para o conjunto $P(wff(L_M))$ de conjuntos de *wffs* de L_M

A função *F* é uma função total que atribui um conjunto vazio aos rótulos para os quais não há informação e uma teoria modal local não-vazia ao restante. A descrição formal da configuração em questão é dada na Tabela 3. Configurações podem ser teorias infinitas. **Tabela 3** Definição formal da configuração

$D = \{R(\omega_0,\omega_1), R(\omega_0,\omega_2), \neg R(\omega_1,\omega_2)\}$	
$F(\lambda) = \{\Box(p \to q),\ \Box r\}$	se $\lambda = \omega_0$
$\{\Diamond p,\ r \to s\}$	se $\lambda = \omega_1$
$\{q,\ \Diamond p\}$	se $\lambda = \omega_2$
$\{\}$	caso contrário

Isso ocorre ou quando o diagrama *D* é infinito (isto é, a configuração contém um número infinito de *R*-literais) ou quando, para algum rótulo λ da linguagem $Func(L_L, L_M)$, o valor de $F(\lambda)$ é um conjunto infinito de fórmulas de L_M (isto é, a configuração contém um número infinito de unidades declarativas referentes a λ), ou quando $F(\lambda) \neq \emptyset$ para um número infinito de termos de $Func(L_L, L_M)$. Para expressar qual informação uma configuração contém, a seguinte notação será útil.

Notação 30 Dada uma configuração $C = \langle D, F \rangle$, o *R*-literal *p* é dito ser membro de *C*, escrito $p \in C$, se $p \in D$, enquanto uma unidade declarativa $\lambda{:}\alpha$ é dita ser membro de *C*, escrito $\lambda{:}\alpha \in C$, se $\alpha \in F(\lambda)$.

Como mencionado anteriormente, os símbolos de função da linguagem $Func(L_L, L_M)$ foram apresentados por razões prova-teoréticas. Portanto, qualquer teoria dedutiva rotulada modal especificada pelo usuário (configuração inicial) conterá usualmente (inicialmente) símbolos constantes de $Func(L_L, L_M)$ como rótulos, enquanto configurações contendo termos rasos gerais de $Func(L_L, L_M)$ aparecerão principalmente em derivações de provas como configurações inferidas. Esclarecimentos mais detalhados podem ser encontrados em [BRO2002].

Os conceitos "básicos" de um MLDS, como noções de uma linguagem dedutiva rotulada modal, sua sintaxe e teoria, comuns a todos os MLDSs proposicionais descritos nesta parte do trabalho, já foram definidos. Mas falta um componente essencial que precisa ser definido. A noção de uma classe de estruturas de Kripke é capturada por uma axiomatização de primeira ordem, chamada álgebra de rotulação, escrita na linguagem $Func(L_L,L_M)$.

Definição 65 {*Álgebra de rotulação A*} Uma álgebra de rotulação A é uma teoria de primeira ordem (possivelmente vazia), escrita na linguagem rotulada semi-estendida $Func(L_L,L_M)$, dada por algum subconjunto consistente do seguinte conjunto de axiomas (consistente no sentido padrão da lógica clássica – que portanto não pode incluir nem (**T**), nem (**Irr**)):

$$\forall\omega(R(\omega,\omega)) \qquad (\mathbf{T})$$

$$\forall\omega,\omega_2,\omega_3((R(\omega,\omega_2) \wedge R(\omega_2,\omega_3)) \rightarrow R(\omega,\omega_3)) \qquad (\mathbf{4})$$

$$\forall\omega,\omega_2(R(\omega,\omega_2) \rightarrow R(\omega_2,\omega)) \qquad (\mathbf{B})$$

$$\forall\omega(R(\omega,succ(\omega))) \qquad (\mathbf{D})$$

$$\forall\omega,\omega_2,\omega_3((R(\omega,\omega_2) \wedge R(\omega,\omega_3)) \rightarrow \mathrm{R}(\omega_2,\omega_3)) \qquad (\mathbf{5})$$

$$\forall\omega\neg R(\omega,\omega) \qquad (\mathbf{Irr})$$

Álgebras de rotulação envolvendo apenas os cinco primeiros axiomas definem classes de estruturas que são definíveis modalmente, isto é, para as quais há um esquema de axiomas característico. Cada um desses identifica um MLDS proposicional particular correspondente à lógica modal padrão relacionada. Uma noção particular de "correspondência" é definida formalmente e tem sua validade provada por [BRO2002]. Em contraste, álgebras de rotulação que incluem o axioma (**Irr**) identificam a classe de estruturas cuja relação de acessibilidade satisfaz a propriedade de irreflexibilidade.

Como destacado anteriormente, essa propriedade não é definível modalmente. Não há um esquema de axiomas modais que possa caracterizar essa classe de estruturas, mas introduzindo-se o axioma (**Irr**) em uma álgebra de rotulação, é possível definir MLDSs proposicionais que facilitam o raciocínio modal sobre classes de estruturas irreflexivas. Esses sistemas geram, portanto, um conjunto novo de lógicas modais.

A notação seguinte será adotada para distinguir entre álgebras de rotulação diferentes. Note que, na Definição 65 (*álgebra de rotulação*), os axiomas que são definíveis modalmente são denotados com os mesmos nomes que seus esquemas de axiomas modais correspondentes, mas são escritos dentro de parênteses ( ).

Notação 31 Seja {(**T**),(**4**),(**D**),(**B**),(**5**),(**Irr**)} o conjunto de axiomas dados na Definição 65 e seja $\delta \subseteq \{(\mathbf{T}),(\mathbf{4}),(\mathbf{D}),(\mathbf{B}),(\mathbf{5}),(\mathbf{Irr})\}$. δ será escrito algumas vezes como $A_{\mathbf{K}\delta}$, com chaves e parênteses omitidos do subscrito δ.

Notação 32 Por simplicidade, o subscrito $\mathbf{K}\delta$ será substituído pelo nome tradicional da lógica modal associada sempre que possível. Por exemplo, $A_{\mathbf{K}\{\mathbf{T,4}\}}$ será escrito algumas vezes como $A_{\mathbf{S4}}$. A Tabela 4 mostra alguns exemplos das álgebras de rotulação consideradas.

Tabela 4 Exemplos de álgebras de rotulação

Nomes	Álgebras de Rotulação
$A_{\mathbf{T}}$	$\{\forall\omega(R(\omega,\omega))\}$
$A_{\mathbf{Irr}}$	$\{\forall\omega\neg R(\omega,\omega)\}$
A_{S4}	$\{\forall\omega(R(\omega,\omega)),$ $\forall\omega,\omega_2,\omega_3((R(\omega,\omega_2) \wedge R(\omega_2,\omega_3)) \rightarrow R(\omega,\omega_3))\}$
$A_{K\mathbf{4,Irr}}$	$\{\forall\omega\neg R(\omega,\omega),$ $\forall\omega,\omega_2,\omega_3((R(\omega,\omega_2) \wedge R(\omega_2,\omega_3)) \rightarrow R(\omega,\omega_3))\}$
A_{K4}	$\{\forall\omega,\omega_2,\omega_3((R(\omega,\omega_2) \wedge R(\omega_2,\omega_3)) \rightarrow R(\omega,\omega_3))\}$
$A_{K\mathbf{D}}$	$\{\forall\omega(R(\omega,succ(\omega)))\}$
$A_{K\mathbf{D,Irr}}$	$\{\forall\omega\neg R(\omega,\omega),$ $\forall\omega(R(\omega,succ(\omega)))\}$

Para dar uma definição completa de um MLDS proposicional, é necessário especificar um conjunto de regras de inferência junto com a linguagem e a álgebra de rotulação particular. Isso é declarado formalmente como segue.

Definição 66 {*Sistema dedutivo rotulado modal*} Dada uma MLDL=$\langle \mathrm{L_L},\mathrm{L_M}\rangle$ proposicional, um sistema dedutivo rotulado modal proposicional (MLDS proposicional) é uma tupla da forma $\langle\langle L_{\mathrm{L}},L_{\mathrm{M}}\rangle,A,R\rangle$ onde:

- ⇨ A é uma álgebra de rotulação escrita em $Func(\mathrm{L_L},\mathrm{L_M})$
- ⇨ R é um conjunto de regras de inferência que “geram” uma configuração a partir de outra

A partir da definição acima, percebemos que, dado um conjunto de regras, MLDSs proposicionais diferentes podem ser obtidos, considerando-se álgebras de rotulação diferentes. Explicações mais detalhadas, assim como aplicações e exemplos de provas que utilizam sistemas dedutivos rotulados modais podem ser encontrados em [BRO2002]. Tais assuntos serão temas de nossos trabalhos futuros.

8 Comparação entre os Sistemas Dedutivos

Neste trabalho, uma breve introdução e uma discussão dos formalismos existentes para lógicas modais foi dada, destacando-se algumas de suas respectivas vantagens e limitações. Em resumo, e focando a atenção na expressividade sintática, as seguintes conclusões podem ser esboçadas. As abordagens implícitas, embora ofereçam uma linguagem concisa, não podem sempre capturar dentro de sua sintaxe a estrutura semântica de mundos possíveis subjacente desejada (por exemplo, uma estrutura irreflexiva). Essa limitação é superada pela abordagem explícita, mas com técnicas que são ou caras e opacas sintaticamente, ou que não são aplicáveis a todas as lógicas (de estruturas) modais.

Sistema axiomático: O sistema axiomático, pelo fato de embutir a estrutura semântica dentro de sua própria sintaxe, é considerado simples leitura, pois as noções semânticas, como os conetivos e principalmente a relação de acessibilidade, essenciais ao entendimento das provas desenvolvidas, têm seu significado explícito no desenvolvimento das mesmas. Entretanto, além de exigir um tratamento diferenciado para cada lógica considerada, conforme sua relação de acessibilidade, exige um conhecimento por vezes aprofundado de matemática, dificultando a obtenção de certas provas.

Dedução natural: O sistema de Dedução Natural é considerado um dos preferidos por diversos pesquisadores do mundo [COS92] para se apresentar uma lógica, visto que o entendimento de suas regras para os sistemas da lógica modal depende fortemente do conceito de relação de acessibilidade, que é uma noção semântica. Para justificar essa preferência, basta notar que o desenvolvimento de uma prova utilizando-se esse sistema não requer muita vivência anterior com a matemática e oferece o entendimento dos conetivos lógicos constantes da derivação. Porém, como a relação de acessibilidade varia de acordo com o sistema que estamos utilizando, deveremos ter uma forma de aplicar essa regra para cada sistema da lógica modal, para capturar propriedades específicas (como reflexividade, transitividade, ou outras) de cada relação de acessibilidade sendo considerada. Além disso, para algumas lógicas modais, regras *especiais* adicionais precisam ser dadas. Podemos perceber que o sistema de dedução natural *I-estilo* tem a mesma desvantagem do sistema *A-estilo* – ambos não são uniformes. Portanto, é fácil ver que esse tipo de sistema de prova, embora razoavelmente intuitivo, não oferece uma abordagem uniforme para toda a família de lógicas estruturadas.

Tableaux: O poder de expressão deste sistema permite que se indique, na própria linguagem de prova, ou seja, de maneira uniforme, a noção semântica de acessibilidade (quais mundos têm acesso a quais outros – por exemplo, $0r1$). Entretanto, condições particulares são introduzidas para identificar quais mundos são "acessíveis a partir de" quais outros. Essas condições são puramente sintáticas e dependem do tipo particular de lógicas modais que estão sendo representadas, ou seja, a teoria de prova definida para esse modo "semi-implícito" de representação de estruturas de Kripke não é uniforme.

Resolução: Essa abordagem tem a vantagem de ser um sistema de prova uniforme no sentido de que suas regras de inferência são aplicáveis igualmente a qualquer das lógicas modais levadas em consideração. Entretanto, a crítica que se faz a ele é que, da maneira como está apresentado aqui, não é efetivo por não apresentar uma forma para verificarmos as condições de insatisfatibilidade. Um tratamento adequado para esse procedimento é considerado da seguinte forma, resumidamente [KON86]: Se cada vez que quisermos fazer uma resolução, iniciarmos outro procedimento de refutação usando os conjuntos indicados de sentenças, então entrelaçaremos a execução das "sub-refutações" que estão sendo usadas para verificar a insatisfatibilidade. Se, em algum ponto, uma refutação tem sucesso, podemos construir um resolvente na refutação principal.

Sistemas rotulados: MLDSs proposicionais são claramente sistemas híbridos de lógica modal, combinando teorias relacionais de primeira ordem (álgebras rotuladas) com uma linguagem modal padrão. Nessa abordagem, tanto os mundos possíveis como a relação de acessibilidade são representados declarativamente como parte da lógica. A partir de um ponto de vista puramente sintático, esta abordagem pode ser vista como um compromisso entre as abordagens implícita e explícita descritas anteriormente. Representações sintáticas de mundos possíveis e de relações de acessibilidade são incorporadas, permitindo que informações lógicas sejam expressas com uma sintaxe modal concisa. Como resultado, a expressividade declarativa dos MLDSs é comparável à expressividade oferecida pela técnica de tradução relacional, com a vantagem adicional de não resultar em sentenças que são exponencialmente longas comparadas a suas coorespondentes modais implícitas.

A partir dessa comparação entre os sistemas dedutivos pesquisados, foram considerados aspectos como expressividade sintática, facilidade de construção de provas, clareza da apresentação de tais provas, o que nos permitiu avaliar qual dos sistemas dedutivos poderia ser considerado o "melhor", ou seja, qual o que melhor atende a esses requisitos. Os sistemas rotulados são os de desenvolvimento mais recente, e assim constituem uma abordagem híbrida, ou "solução de compromisso", que combina as melhores características dos demais sistemas pesquisados. Assim, consideramos os sistemas rotulados como os de maior interesse para trabalhos futuros de aprofundamento, construção de provas e pesquisa e desenvolvimento de aplicações dentro da Ciência da Computação.

9 Conclusões

Este trabalho apresentou uma descrição sucinta dos fundamentos de lógicas modais, bem como de seus principais sistemas de dedução. Entre esses, estão incluídos o sistema axiomático, o sistema de dedução natural, o sistema de *tableaux*, o sistema de resolução e os sistemas rotulados. Ao final do texto, é estabelecida uma comparação entre tais maneiras diferentes de se deduzirem provas nessas lógicas.

Cada uma das lógicas aqui abordadas é apresentada através do sistema axiomático, para se manter a tradição e por ser simples referenciar uma lógica modal por seu axioma característico, embora o seu entendimento nem sempre seja tão imediato. Também são apresentadas provas de equivalência das abordagens dedutivas, semântica e de prova automática, no sentido em que elas derivam os mesmos conjuntos de fórmulas.

Além dos sistemas dedutivos, são apresentados sistemas semânticos para cada uma das lógicas consideradas. Isso se justifica pelo fato de que essa abordagem para a lógica modal - a Semântica dos Mundos Possíveis de Kripke - estabelece conceitos tão fortes (especialmente a "relação de acessibilidade") que se torna difícil explicar as noções de modalidade sem que se utilizem esses conceitos.

A comparação entre os sistemas dedutivos pesquisados suscitou reflexões a respeito de aspectos como expressividade sintática, facilidade de construção de provas, clareza da apresentação de tais provas, além da uniformidade da linguagem (sintaxe) utilizada, no sentido de avaliarmos qual dos sistemas dedutivos poderia ser considerado o “melhor”, ou seja, qual o que melhor atende a esses requisitos. Os sistemas rotulados (mais recentes) constituem uma abordagem híbrida, ou “solução de compromisso”, que combina as melhores características dos demais sistemas pesquisados nos quais a sua definição se baseia. Assim, consideramos os sistemas rotulados como os de maior interesse para trabalhos futuros de aprofundamento, construção de provas e pesquisa e desenvolvimento de aplicações dentro da Ciência da Computação.

10 Bibliografia

[BRO2002] BRODA, Krysia; GABBAY, Dov; LAMB, Luís; RUSSO, Alessandra. **Compiled labelled deductive systems: a uniform approach to logic presentation**. Londres: Imperial College, 2002. (Manuscrito)

[CHA97] CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. **Modal logic**. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[COS92] COSTA, Marcos Mota do Carmo. **Introdução à lógica modal aplicada à computação**. Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS, 1992. 210 p. p.31-85.

[CUR63] CURRY, Haskell B. **Foundations of mathematical logic**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1963.

[DG94] D'AGOSTINO, Marcelo; GABBAY, Dov M. A generalization of analytic deduction via labelled deductive systems. Part V: Basic substructural logics. **Journal of Automated Reasoning**, [s.l], n.13, p. 243-281, 1994.

[END72] ENDERTON, H. B. **A mathematical introduction to logic**. [S.l.]: Academic Press, 1972.

[FAG95] FAGIN, R. **Reasoning about knowledge**. [S.l.]: MIT Press, 1995.

[FEY65] FEYS, Robert. **Modal logics**. Paris: Nauwelaerts, Louvain, and Gauther-Villars, 1965.

[FIT52] FITCH, Frederick B. **Symbolic Logic**: an introduction. New York: Ronald Press, 1952.

[FIT83] FITTING, Melvin. **Proof methods for modal and intuitionistic logics**. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

[GAB2001] GABBAY, D.; KURUCZ, A.; WOLTER, F.; ZAKHARYASCHEV, M. **Many-dimensional modal logics**: theory and applications. 2001. (draft book)

[GAB94] GABBAY, D.; HODKINSON, V.; REYNOLDS, M. **Temporal logic**: mathematical foundations and computational aspects. Oxford: Oxford University Press, 1994. v.1.

[GOD33] GODEL, K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls, **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums**, n.4, p.39-40, 1933.

[HC96] HUGHES, G.; CRESSWELL, M. **A new introduction to modal logic**. [S.l.]: Routledge, 1996.

[KON84] KONOLIGE, K. **A deduction model of belief and its logics**. PhD thesis, Stanford University, 1984.

[KON86] KONOLIGE, K. Resolution and quantified epistemic logics. In: CADE, 8, 1986, [S.l.]. **Proceedings…** [S.l.,s.n.], 1986.

[KRI59] KRIPKE, Saul. A completeness theorem in modal logic. **Journal of Symbolic Logic**, [S.l.], v.24, n.1, Mar.1959.

[KRI63] KRIPKE, Saul. Semantic analysis of modal logics V, normal propositional calculi. **Zeitschrift für mathematische Logik und Glundlagen der Mathematik**, n.9, p.67-96, 1963.

[LEI81] LEIVANT, Daniel. On the proof theory of the modal logic for arithmetic provability, **Journal of Symbolic Logic**. n.46, p.531-538, 1981.

[LL32] LEWIS, C.I.; LANGFORD, C.H. **Symbolic Logic**.New York: Dover, 1932.

[MAK71] MAKINSON, D.C. Some embedding theorems for modal logic. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, [S.l.], n.12, p.252-254, 1971.

[MAK79] MAKSIMOVA, L. L. Interpolation theorems in modal logics and amalgamable varieties of topological Boolean algebras. **Algebra V Logika**, [S.l.], v.18, p.556-586, 1979. (English translation in **Algebra and Logic**, v.18, 1979).

[MAS94] MASSACCI, F. Strong analytic *tableaux* for normal modal logics. In: CADE, 12, 1994, [S.l.]. **Proceedings…** [Berlin]: Springer Verlag, 1994. (Lecture Notes in Artificial Intelligence. n.814).

[MIN81] MINTS, G. E. Ninth All-Union Sympos. **Cybernetics** (Sukhumi, 1981). Abstracts of Reports. v. 2. Vychisl. Tsentr Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1981, pp. 34-36.

[MIN85] MINTS, G. E. All-Union Conf. Appl. Logic, Abstracts of Reports, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk. 1985. p. 142-145.

[MIN89] MINTS, G. E. Resolution calculi for modal logics. **American Mathematical Society Translations**, New York, v.143, n.2, p.1-14, 1989.

[ORL28] ORLOV, I. E. The calculus of compatibility of propositions. **Mathematics of the USSR Sbornik**, n.35, p.263-286, 1928.

[PRA65] PRAWITZ, D. **Natural deduction**: a proof-theoretical study. Almqvist and Wiksell, 1965.

[PRI2001] PRIEST, Graham. **An introduction to non-classical logic**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. p. 24-28; 33-35.

[ROB65] ROBINSON, J. A. A machine-ordered logic based on the resolution principle, **Journal of Assoc. Comput. Mach**, [S.l.], n.12, p.23-41, 1965.

[SEG71] SEGERBERG, K. An Essay in Classical Modal Logic. **Filosofiska studier**, Uppsala, 1971

[SHO67] SHOENFIELD, J. R. **Mathematical Logic**. Londres: Addison-Wesley, 1967.

[SZA69] SZABO, M. (ed.) **The collected papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland, 1969.

[STI85] STICKEL, M. E. Automated deduction by Theory resolution. In: IJCAI, 1985, [S.l.]. **Proceedings…** [S.l.,s.n.], 1985.