Capítulo 1

Lógica Modal

1.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a lógica modal, mais precisamente, a lógica modal de base proposicional.

Em primeiro lugar apresentam-se os aspectos sintácticos e semânticos da lógica. Seguidamente apresentam-se diferentes sistemas de lógica modal e finalmente apresentam-se sistemas de dedução natural para vários sistemas de lógica modal. Faz-se ainda referência à utilização do ambiente *Isabelle* para desenvolvimento de derivações nesses sistemas de dedução natural. São por último apresentados resultados de correcção e completude para os sistemas de dedução natural descritos.

A lógica modal permite exprimir de um modo explícito as noções de *necessidade* e *possibilidade*: permite exprimir que uma dada asserção é *necessariamente* verdadeira (i.e., não se concebe nenhuma situação em que possa ser falsa) e que uma dada asserção é *possivelmente* verdadeira (i.e., concebe-se que possam existir situações em que é verdadeira podendo, no entanto, existirem também situações em que é falsa). Para tal é introduzido o operador modal $\Box$, designado operador necessidade, o qual vai ser aplicado a fórmulas: sendo φ uma fórmula, $\Box\varphi$ é uma nova fórmula que permite exprimir a noção de que é necessariamente verdadeira a asserção representada por φ. É ainda considerado (eventualmente por abreviatura) o operador modal $\Diamond$, designado operador possibilidade, que permite construir fórmulas do tipo $\Diamond\varphi$ relativas a asserções possivelmente verdadeiras.

Introdução

A lógica modal serve de base a muitas outras lógicas as quais têm aplicações muito diversas. Nessas lógicas, os operadores modais têm por vezes interpretações distintas das originais. Algumas dessas lógicas são extensões da lógica modal tal como é apresentada neste capítulo, ou seja, são introduzidos mais operadores modais. Outras representam aplicações específicas da lógica modal tal como é aqui apresentada mas que, pela sua importância, deram origem a novas designações. Seguem-se alguns exemplos dessas lógicas. Exemplos de textos relevantes sobre lógica modal são [5], [12] e [2].

A lógica temporal é uma lógica que tem por objectivo permitir a representação da variação da veracidade das asserções ao longo do tempo. Uma asserção pode, por exemplo, ser verdadeira num certo dia mas já o não ser no dia seguinte. Neste caso o operador $\Box$ permite representar a noção de *sempre no futuro* e o operador $\Diamond$ a noção de *alguma vez no futuro*. Neste contexto é usual introduzir mais operadores. Em particular, é usual considerar o operador $\bigcirc$, que representa a noção de *no próximo instante*. Esta lógica tem, entre outras, aplicações no campo da especificação e verificação de sistemas reactivos (sistemas concorrentes, sistemas distribuídos, protocolos de comunicação, etc.). Exemplos de textos sobre lógica temporal são [10] e [9].

A lógica deôntica é a chamada lógica das obrigações e permissões. Neste caso o operador $\Box$ permite representar a noção de *obrigatoriedade*, i.e., $\Box\varphi$ exprime a noção de que é obrigatória a asserção representada por φ. O operador $\Diamond$ representa a noção de *permissão*, i.e., $\Diamond\varphi$ exprime a noção de que é permitida a asserção representada por φ. Esta lógica tem aplicações em, por exemplo, representação do conhecimento na área do Direito e na especificação de organizações. Exemplos de textos sobre lógica deôntica são [5], ...

No contexto da lógica epistémica, $\Box_{Ag}\varphi$ pode exprimir a noção de que um agente Ag *sabe* a asserção representada por φ (e muitas vezes o operador $\Box$ é substituído por K - *knowledge*). Um outro caso é aquele em que $\Box_{Ag}\varphi$ exprime a noção de que um agente Ag *acredita* na asserção representada por φ (e muitas vezes o operador $\Box$ é substituído por B - *belief*). Estas lógicas têm aplicações no campo da representação do conhecimento e, por exemplo, mais recentemente, na verificação de protocolos de autenticação. Exemplos de textos sobre lógica epistémica [3] e [8].

Um último exemplo é o caso da lógica dinâmica, em que $\Box_P\varphi$ representa que após qualquer execução do programa P a asserção φ é verdadeira. Neste contexto $\Diamond_P\varphi$ representa que existem execuções do programa P após as quais a asserção φ é verdadeira. A lógica dinâmica tem aplicações na área da verificação de programas.

Exemplos de textos sobre lógica dinâmica são [10] e [11].

Este capítulo está organizado como se segue. Na secção **??** introduzem-se os aspectos sintácticos e na secção 1.3 os aspectos semânticos. Na secção 1.4 apresenta-se o conceito de sistema de lógica modal (ou sistema modal) e várias outras noções relevantes a ele associadas. Na secção 1.5 e seguintes apresentam-se sistemas de dedução natural para vários sistemas de lógica modal. São ainda apresentados resultados de correcção e completude para estes sistemas dedutivos. Por último, na secção 1.10, faz-se uma brevíssima referência à questão da normalização de deduções no âmbito dos sistemas dedutivos aqui apresentados.

No final de algumas secções são propostos alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

1.2 Sintaxe

Nesta secção apresentam-se os aspectos sintácticos da lógica modal proposicional (ou de base proposicional). Introduz-se em primeiro lugar o alfabeto e depois a linguagem das fórmulas modais proposicionais (ou seja, a linguagem da lógica modal proposicional) sobre o alfabeto.

Definição 1.2.1 Alfabeto modal sobre P
Dado um conjunto P, o *alfabeto modal sobre* P é constituído por

- cada um dos elementos de P
- o símbolo $\perp$ (absurdo, contradição, falso ou falsidade);
- os conectivos lógicos $\rightarrow$ (implicação), $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção)
- os operadores modais $\Box$ (necessidade) e $\Diamond$ (possibilidade)
- os símbolos auxiliares (e). ■

Observação 1.2.2 No que se segue assume-se fixado o conjunto não vazio P.

Definição 1.2.3 Linguagem modal induzida pelo alf. modal sobre P
A *linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre* P designa-se por FM_P e é o conjunto definido indutivamente da seguinte forma:

- $p \in FM_P$ qualquer que seja $p \in P$
- $\perp \in FM_P$
- $(\varphi \to \varphi') \in FM_P$, $(\varphi \wedge \varphi') \in FM_P$, $(\varphi \vee \varphi') \in FM_P$, $(\Box\varphi) \in FM_P$, $(\Diamond\varphi) \in FM_P$ quaisquer que sejam $\varphi, \varphi' \in FM_P$.

Os elementos de FM_P são as *fórmulas* da linguagem modal ou *fórmulas modais* induzidas pelo alfabeto. ∎

Como anteriormente, omitem-se parênteses mais exteriores das fórmulas. Consideram-se as abreviaturas usuais relativas a $\neg$, $\Leftrightarrow$ e $\top$.

Exemplo 1.2.4 Considere-se $P = \{ET, L\}$ e suponha-se que ET representa a asserção "Existem seres extra terrestres inteligentes"e L representa a asserção "A Lua é habitada por seres inteligentes".

- $\Diamond ET \in FM_P$
  esta fórmula exprime a ideia de que é possível que existam seres extra terrestres inteligentes[1].
- $\Diamond(\neg ET) \in FM_P$
  esta fórmula exprime a ideia de que é possível que não existam seres extra terrestres inteligentes[2].
- $\Diamond L \in FM_P$
  esta fórmula exprime a ideia de que é possível que a Lua seja habitada por seres inteligentes[2].
- $\Box(\neg L) \in FM_P$
  esta fórmula exprime a ideia de que necessariamente a Lua não é habitada por seres inteligentes[2]. ∎

Definição 1.2.5 COMPLEXIDADE DE FÓRMULAS
A função *complexidade* $c : FM_P \to \mathbb{N}_0$ define-se indutivamente do seguinte modo:

- $c(\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in P \cup \{\perp\}$;

[1] Asserção que é verdadeira à luz dos actuais conhecimentos científicos
[2] Asserção que é falsa à luz dos actuais conhecimentos científicos

- $c(\Box\varphi) = c(\Diamond\varphi) = c(\varphi) + 1$ para cada $\varphi \in FM_P$.
- $c(\varphi' \rightarrow \varphi'') = c(\varphi' \wedge \varphi'') = c(\varphi' \vee \varphi'') = c(\varphi') + c(\varphi'') + 1$ para $\varphi, \varphi', \varphi'' \in FM_P$.

Sendo $\varphi \in FM_P$, a *complexidade de* φ representa-se por $c(\varphi)$. ∎

Definição 1.2.6 Subfórmulas
Sendo $\varphi \in FM_P$, as noções de subfórmula e subfórmula estrita são idênticas às apresentadas nos capítulos anteriores. ∎

1.3 Semântica

Nesta secção apresentam-se os aspectos semânticos da lógica modal. Em primeiro lugar introduz-se a noção de enquadramento[3] (relevante para o conceito de validade) e seguidamente apresenta-se a noção de estrutura de interpretação (relevante para o conceito de satisfação).

Definição 1.3.1 Enquadramento modal
Um *enquadramento modal* ou *enquadramento* é um par

$$\mathbb{E} = (W, R)$$

onde

- W é um conjunto não vazio
- R é uma relação binária em W dita *relação de acessibilidade* (ou *relação de visibilidade*).

Sendo $w_1, w_2 \in W$, diz-se que w_2 é *acessível* a partir de w_1 se $(w_1, w_2) \in R$. ∎

Observação 1.3.2 Seja $\mathbb{E} = (W, R)$ um enquadramento. Aos elementos de W são por vezes atribuídas certas designações, dependendo do contexto em que apresenta ou utiliza a lógica modal. Exemplos dessas designações são: *mundos*, *pontos*, *estados*, *nós*, *instantes* e *situações*. ∎

[3]Na literatura anglo-saxónica utiliza-se a designação *frame*.

No que se segue é útil o leitor ter presente a definição de certas propriedades das relações binárias, como, por exemplo, reflexividade, simetria, transitividade, serialidade, convergência e densidade. Estas noções encontram-se reunidas no capítulo **??**.

Definição 1.3.3 Classificação de enquadramentos modais
Seja Π uma propriedade de relações binárias. Diz-se que um enquadramento $\mathbb{E} = (W, R)$ *tem a propriedade* Π se R é uma relação binária que verifica a propriedade Π. ∎

Observação 1.3.4 Seja $\mathbb{E} = (W, R)$ um enquadramento. Se $\mathbb{E}$ tem, por exemplo, a propriedade da transitividade diz-se também que $\mathbb{E}$ é um *enquadramento transitivo*. Designações semelhantes são também utilizadas no caso das outras propriedades. ∎

Segue-se a definição da noção de estrutura de interpretação modal.

Definição 1.3.5 Estrutura de interpretação modal sobre P
Um *estrutura de interpretação modal sobre* P é um par

$$\mathbb{M} = (\mathbb{E}, V)$$

onde

- $\mathbb{E} = (W, R)$ é um enquadramento modal
- $V : P \to \mathcal{P}(W)$ é uma função.

Uma estrutura de interpretação modal sobre P cujo enquadramento subjacente seja $\mathbb{E}$ diz-se *estrutura de interpretação modal baseada em* $\mathbb{E}$ ou *estrutura de interpretação modal com base em* $\mathbb{E}$.

Se não há ambiguidade sobre qual o conjunto P em causa pode usar-se apenas a designação *estrutura de interpretação modal*. É também usual representar uma estrutura de interpretação como um triplo

$$(W, R, V)$$

onde as duas primeiras componentes constituem o enquadramento modal subjacente à estrutura de interpretação. ∎

Um enquadramento modal é constituído por um conjunto (não vazio) cujos elementos representam possíveis mundos (instantes ou situações) nos quais se irão avaliar as fórmulas. Pode acontecer que uma fórmula venha a ser satisfeita num certo mundo (instante ou situação) mas não o seja nalgum outro. A noção de satisfação de uma dada fórmula num mundo vai depender, em particular, da satisfação ou não dos símbolos proposicionais nesse e/ou noutros mundos. Para isso é necessário a noção de estrutura de interpretação. Uma estrutura de interpretação é constituída por um enquadramento e por uma função V que a cada símbolo proposicional faz corresponder um conjunto de mundos. Cada um desses mundos corresponde, intuitivamente, a um mundo no qual é verdadeira a asserção denotada por esse símbolo.

No que se segue assume-se fixado um conjunto de símbolos proposicionais P. Segue-se agora a definição da noção de satisfação de uma fórmula num certo mundo.

Definição 1.3.6 SATISFAÇÃO NUM MUNDO DE UMA ESTR. DE INTERPRETAÇÃO
Sejam $I\!M = (I\!E, V)$ uma estrutura de interpretação modal e $w \in W$. A noção de *satisfação de* $\varphi \in FM_P$ por $I\!M$ no mundo w denota-se por

$$I\!M, w \models \varphi$$

e define-se indutivamente como se segue:

- para cada $p \in P$, $I\!M, w \models p$ se $w \in V(p)$;
- não $I\!M, w \models \perp$;
- $I\!M, w \models \varphi \rightarrow \varphi'$ se[4] $I\!M, w \not\models \varphi$ ou $I\!M, w \models \varphi'$;
- $I\!M, w \models \varphi \wedge \varphi'$ se $I\!M, w \models \varphi$ e $I\!M, w \models \varphi'$;
- $I\!M, w \models \varphi \vee \varphi'$ se $I\!M, w \models \varphi$ ou $I\!M, w \models \varphi'$;
- $I\!M, w \models \Box\varphi$ se $I\!M, w' \models \varphi$ para cada $w' \in W$ tal que wRw';
- $I\!M, w \models \Diamond\varphi$ se existe $w' \in W$ tal que wRw' e $I\!M, w' \models \varphi$;

[4]Definição alternativa: se $I\!M, w \models \varphi$ então $I\!M, w \models \varphi'$

sendo $\mathbb{M}, w \not\models \varphi$ uma abreviatura de " não $\mathbb{M}, w \models \varphi$". Dado $\Phi \subseteq FM_P$, $\mathbb{M}$ *satisfaz* Φ *em* w, o que se representa por

$$\mathbb{M}, w \models \Phi$$

se $\mathbb{M}, w \models \varphi$ para toda a fórmula $\varphi \in \Phi$. Sempre que $\mathbb{M}, w \models \varphi$ ($\mathbb{M}, w \models \Phi$) diz-se que $\mathbb{M}$ é *modelo de* φ *(*Φ*) em* w. ■

A noção de satisfação de uma fórmula num mundo de uma estrutura de interpretação é uma noção local. Pode também definir-se, como se segue, a noção de satisfação de fórmula numa estrutura de interpretação a qual será uma noção global.

Definição 1.3.7 SATISFAÇÃO NUMA ESTRUTURA DE INTERPRETAÇÃO
Sejam $\mathbb{M} = (\mathbb{E}, V)$ uma estrutura de interpretação modal e $\varphi \in FM_P$. A noção de *satisfação de* φ por $\mathbb{M}$ denota-se por

$$\mathbb{M} \models \varphi$$

e define-se como se segue: $\mathbb{M} \models \varphi$ se $\mathbb{M}, w \models \varphi$ para cada $w \in W$. Sempre que $\mathbb{M} \models \varphi$ diz-se que $\mathbb{M}$ é *modelo de* φ. ■

Exemplo 1.3.8 Seja $\{p, q, r\} \subseteq P$. Considere-se o enquadramento $\mathbb{E} = (W, R)$ onde $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ e R é tal que, para cada $1 \leq i, j \leq 5$, $w_i R w_j$ se $j = i + 1$, isto é,

$$w_1 \longrightarrow w_2 \longrightarrow w_3 \longrightarrow w_4 \longrightarrow w_5$$

e seja $V : P \to \mathcal{P}(W)$ tal que $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = W$ e $V(r) = \emptyset$. Considerando a estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (\mathbb{E}, V)$ tem-se que

- $\mathbb{M}, w_2 \models p \wedge (\neg r)$, pois $\mathbb{M}, w_2 \models p$ dado que $w_2 \in V(p)$ e $\mathbb{M}, w_2 \models \neg r$ dado que $w_2 \notin V(r)$;
- $\mathbb{M}, w_1 \models \Box p$, pois $\mathbb{M}, w_2 \models p$ e $w_1 R w_2$ e w_2 é o único mundo que está na relação R com w_1;
- $\mathbb{M}, w_2 \models \Box p$ por um raciocínio semelhante ao anterior;
- $\mathbb{M}, w_3 \not\models \Box p$, pois $w_3 R w_4$ e $\mathbb{M}, w_4 \not\models p$;

- $\mathbb{M}, w_1 \not\models (\Box p) \to p$, pois $\mathbb{M}, w_1 \models \Box p$ mas $\mathbb{M}, w_1 \not\models p$;
- $\mathbb{M}, w_1 \models \Diamond(\Box p)$, pois $w_1 R w_2$ e $\mathbb{M}, w_2 \models \Box p$;
- $\mathbb{M}, w_1 \models \Diamond(p \wedge (\neg r))$, pois $w_1 R w_2$ e $\mathbb{M}, w_2 \models p \wedge (\neg r)$;
- $\mathbb{M}, w_5 \not\models \Diamond(\neg r)$, pois, se $\mathbb{M}, w_5 \models \Diamond(\neg r)$, teria de existir um mundo w tal que $w_5 R w$ e $\mathbb{M}, w \models \neg r$ o que não acontece neste caso pois, em particular, não existe $w \in W$ tal que $w_5 R w$.
- $\mathbb{M}, w_5 \models \Box p$, pois é necessário garantir para todos os mundos w tal que $w_5 R w$ se tem $\mathbb{M}, w \models p$ o que é, de facto, (vacuosamente) verdadeiro neste exemplo.

Tem-se ainda que:

- $\mathbb{M} \models \Box q$, pois $\mathbb{M}, w_i \models \Box q$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\mathbb{M} \models (\Box p) \vee (\Diamond(\neg r))$, pois $\mathbb{M}, w_i \models \Box p$ para cada $i \in \{1, 2, 5\}$ e $\mathbb{M}, w_i \models \Diamond(\neg r)$ para cada $i \in \{3, 4\}$. ∎

Exemplo 1.3.9 Seja $P = \{ET, L\}$ como no Exemplo 1.2.4. Considere-se o enquadramento $\mathbb{E} = (W, R)$ onde $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ e $R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$, isto é,

$$w_2 \longleftarrow w_1 \longrightarrow w_3 \qquad w_4$$

e seja $V : P \to \mathcal{P}(W)$ tal que $V(ET) = \{w_2\}$, e $V(L) = \{w_4\}$. Considerando a estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (\mathbb{E}, V)$ tem-se que

- $\mathbb{M}, w_1 \models \Diamond ET$ pois $w_1 R w_2$ e $\mathbb{M}, w_2 \models ET$;
- $\mathbb{M}, w_1 \models \Diamond(\neg ET)$ pois $w_1 R w_3$ e $\mathbb{M}, w_3 \models \neg ET$;
- $\mathbb{M}, w_1 \not\models \Diamond L$ pois não existe $w' \in W$ tal que $w_1 R w'$ e $\mathbb{M}, w' \models L$;
- $\mathbb{M}, w_1 \models \Box(\neg L)$ pois para cada $w' \in W$ tal que $w_1 R w'$ se tem que $\mathbb{M}, w' \models \neg L$. ∎

Seguem-se agora as noções de fórmula válida num mundo de um enquadramento, num enquadramento e numa classe de enquadramentos. Finalmente apresenta-se a noção de fórmula válida.

Definição 1.3.10 VALIDADE NUM ENQUADRAMENTO, VALIDADE NUMA CLASSE DE ENQUADRAMENTOS E VALIDADE DE FÓRMULA

Sejam $\varphi \in FM_P$, $\mathbb{E} = (W, R)$ um enquadramento modal e $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos:

- φ é *válida no estado $w \in W$ de $\mathbb{E}$*, o que representa por

$$\mathbb{E}, w \models \varphi$$

  se $\mathbb{M}, w \models \varphi$ qualquer que seja a estrutura de interpretação modal $\mathbb{M}$ baseada[5] em $\mathbb{E}$;

- φ é *válida no enquadramento $\mathbb{E}$*, o que representa por

$$\mathbb{E} \models \varphi$$

  se $\mathbb{E}, w \models \varphi$ para cada $w \in W$;

- φ é *válida na classe $\mathcal{E}$ de enquadramentos*, o que representa por

$$\models_{\mathcal{E}} \varphi$$

  se $\mathbb{E} \models \varphi$ para cada $\mathbb{E} \in \mathcal{E}$;

- φ é *válida* , o que representa por

$$\models \varphi$$

  se $\mathbb{E} \models \varphi$ para cada $\mathbb{E}$ na classe de todos os enquadramentos. ∎

Notação 1.3.11 Sendo $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos, $\Lambda_{\mathcal{E}}$ designa o conjunto das fórmulas que são válidas na classe $\mathcal{E}$ ∎

Exemplo 1.3.12 Considere-se o enquadramento $\mathbb{E} = (W, R)$ do Exemplo 1.3.8 onde $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ e R é tal que, para cada $1 \leq i, j \leq 5$, $w_i R w_j$ se $j = i + 1$. Seja também $P = \{p, q, r\}$. Tem-se que:

- $\mathbb{E}, w_5 \models \Box\varphi$ qualquer que seja $\varphi \in FM_P$

[5] Ou seja, $\mathbb{M} = (\mathbb{E}, V)$ com $V : P \to \mathcal{P}(W)$

note-se que, dada uma qualquer estrutura de interpretação modal $I\!M$ baseada em $I\!E$, se tem que $I\!M, w_5 \models \Box\varphi$ pois verifica-se (vacuosamente) que qualquer mundo $w \in W$ tal que $w_5 R w$ é tal que $I\!M, w \models \varphi$;

- $I\!E \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$ qualquer que seja $\varphi \in FM_P$

  note-se que para cada $w \in W$ se tem que $I\!E, w \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$, (i.e., $I\!M, w \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$ para cada estrutura de interpretação modal $I\!M$ baseada em $I\!E$) pois: (i) $I\!M, w_1 \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$ porque como w_2 é o único mundo de W tal que $w_1 R w_2$, se $I\!M, w_1 \models \Diamond\varphi$ então $I\!M, w_2 \models \varphi$ e $I\!M, w_1 \models \Box\varphi$, (ii) $I\!M, w_i \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$ para cada $i \in \{2,3,4\}$ raciocinando como em (i), (iii) $I\!M, w_5 \models (\Diamond\varphi) \to (\Box\varphi)$ porque $I\!M, w_5 \not\models \Diamond\varphi$ pois não existe $w \in W$ tal que $w_5 R w$. ■

Exemplo 1.3.13 Sejam $\{p, q, r\} \subseteq P$ e $\varphi, \varphi' \in FM_P$. Tem-se que:

- $\models_{\mathcal{E}} (\Box\varphi) \to \varphi$ sendo $\mathcal{E}$ a classe dos enquadramentos reflexivos (ou que verificam a propriedade da reflexividade)

  note-se que, sendo $I\!E = (W, R)$ um enquadramento em $\mathcal{E}$, $I\!M$ uma estrutura de interpretação modal baseada em $I\!E$ e $w \in W$, se tem que wRw e portanto se $I\!M, w \models \Box\varphi$ então, em particular, $I\!M, w \models \varphi$ concluindo-se assim $I\!M, w \models (\Box\varphi) \to \varphi$;

- $\models (\Diamond(\varphi \vee \varphi')) \to ((\Diamond\varphi) \vee (\Diamond\varphi'))$

  note-se que, sendo $I\!E = (W, R)$ um enquadramento, $I\!M$ uma estrutura de interpretação modal baseada em $I\!E$ e $w \in W$, se tem que: (i) se $I\!M, w \models (\Diamond(\varphi \vee \varphi'))$ então existe $v \in W$ tal que wRv e $I\!M, v \models \varphi \vee \varphi'$, (ii) se, nas condições de (i), $I\!M, v \models \varphi$ (o outro caso é idêntico) tem-se que $I\!M, w \models \Diamond\varphi$ e consequentemente $I\!M, w \models (\Diamond\varphi) \vee (\Diamond\varphi')$ (iii) de (i) e (ii) conclui-se $I\!M, w \models (\Diamond(\varphi \vee \varphi')) \to ((\Diamond\varphi) \vee (\Diamond\varphi'))$;

- $\models (\Box(\varphi \to \varphi')) \to ((\Box\varphi) \to (\Box\varphi'))$

  supondo, por absurdo, que existia um enquadramento $I\!E = (W, R)$ tal que $\not\models (\Box(\varphi \to \varphi')) \to ((\Box\varphi) \to (\Box\varphi'))$ então: (i) existe uma estrutura de interpretação modal $I\!M$ baseada em $I\!E$ e $w \in W$ tal que $I\!M, w \not\models (\Box(\varphi \to \varphi')) \to ((\Box\varphi) \to (\Box\varphi'))$; (ii) de (i), $I\!M, w \models \Box(\varphi \to \varphi')$ e

$\mathbb{M}, w \not\models (\Box\varphi) \to (\Box\varphi')$; (iii) de (ii), $\mathbb{M}, w \models (\Box\varphi)$ e $\mathbb{M}, w \not\models \Box\varphi'$; (iv) de (iii) existe $v \in W$ tal que wRv e $\mathbb{M}, v \models \neg\varphi'$; (v) de (iii), $\mathbb{M}, v \models \varphi$ e, consequentemente, $\mathbb{M}, v \not\models \varphi \to \varphi'$; (vi) de (ii), $\mathbb{M}, v \models \varphi \to \varphi'$; (vii) de (v) e (vi) resulta uma situação absurda que permite concluir que não pode existir o enquadramento referido no início e portanto a fórmula é válida.

- $\not\models (\Box p) \to p$

  recorde-se o Exemplo 1.3.8 e note-se $\mathbb{M}, w_1 \not\models (\Box p) \to p$ onde $\mathbb{M}$ é a estrutura de interpretação modal baseada em $\mathbb{E}$ apresentada nesse Exemplo e w_1 é um dos mundos do enquadramento. ■

Notação 1.3.14 No que se segue usar-se-ão as seguintes notações para designar algumas classes importantes de enquadramentos:

- $\mathcal{E}_{ref}$ é a classe dos enquadramentos reflexivos;
- $\mathcal{E}_{sim}$ é a classe dos enquadramentos simétricos;
- $\mathcal{E}_{trn}$ é a classe dos enquadramentos transitivos;
- $\mathcal{E}_{euc}$ é a classe dos enquadramentos euclideanos;
- $\mathcal{E}_{ser}$ é a classe dos enquadramentos seriais;
- $\mathcal{E}_{cnv}$ é a classe dos enquadramentos convergentes;
- $\mathcal{E}_{dns}$ é a classe dos enquadramentos densos. ■

Exemplo 1.3.15 Sendo $\varphi \in FM_P$ tem-se que:

- $\models_{\mathcal{E}_{ref}} (\Box\varphi) \to \varphi$;
- $\models_{\mathcal{E}_{sim}} \varphi \to (\Box(\Diamond\varphi))$;
- $\models_{\mathcal{E}_{trn}} (\Box\varphi) \to (\Box(\Box\varphi))$;
- $\models_{\mathcal{E}_{euc}} (\Diamond\varphi \to (\Box(\Diamond\varphi))$;
- $\models_{\mathcal{E}_{ser}} (\Box\varphi) \to (\Diamond\varphi)$;

- $\models_{\mathcal{E}_{cnv}} (\Diamond(\Box\varphi)) \to (\Box(\Diamond\varphi))$;
- $\models_{\mathcal{E}_{dns}} (\Box(\Box\varphi)) \to (\Box\varphi)$;
- $\models_{\mathcal{E}} (\Box((\Box\varphi) \to \varphi)) \to (\Box\varphi)$
  onde $\mathcal{E}$ é a classe dos enquadramentos cuja relação subjacente constitui uma árvore finita transitiva. ■

Apresentam-se seguidamente várias noções relacionadas com consequência semântica. Com efeito, no contexto da lógica modal existem várias noções de consequência semântica, nomedamente, pode falar-se de consequência local, consequência global, consequência face a uma classe de enquadramentos e consequência face a uma classe de modelos.

Definição 1.3.16 CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA LOCAL

Sejam $\Phi \subseteq FM_P$, $\varphi \in FM_P$, $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos e $\mathcal{M}$ uma classe de estruturas de interpretação modais:

- φ é *consequência semântica local de* Φ o que se representa por
  $$\Phi \models \varphi$$
  se qualquer que seja a estrutura de interpretação modal $I\!M = (I\!E, V)$, com $I\!E = (W, R)$, e qualquer que seja $w \in W$ se tem que se $I\!M, w \models \Phi$ então $I\!M, w \models \varphi$.
- φ é *consequência semântica local de* Φ *em* $\mathcal{E}$ o que se representa por
  $$\Phi \models_{\mathcal{E}} \varphi$$
  se qualquer que seja a estrutura de interpretação modal $I\!M = (I\!E, V)$ com $I\!E = (W, R) \in \mathcal{E}$ e qualquer que seja $w \in W$ se tem que se $I\!M, w \models \Phi$ então $I\!M, w \models \varphi$.
- φ é *consequência semântica local de* Φ *em* $\mathcal{M}$ o que se representa por
  $$\Phi \models_{\mathcal{M}} \varphi$$
  se qualquer que seja a estrutura de interpretação modal $I\!M = (W, R, V)$ em $\mathcal{M}$ e qualquer que seja $w \in W$ se tem que se $I\!M, w \models \Phi$ então $I\!M, w \models \varphi$. ■

Definição 1.3.17 CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA GLOBAL

Sendo $\Phi \subseteq FM_P$ e $\varphi \in FM_P$ diz-se que φ é *consequência semântica global de* Φ o que se representa por

$$\Phi \models_G \varphi$$

se qualquer que seja o enquadramento $I\!\!E$ se tem que se $I\!\!E \models \Phi$ então $I\!\!E \models \varphi$.

Sendo $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos e $\mathcal{M}$ uma classe de estruturas de interpretação modais, definem-se de modo análogo as noções de *consequência semântica global de em* $\mathcal{E}$ $(\Phi \models_{G\mathcal{E}} \varphi)$ e de *consequência semântica global em* $\mathcal{M}$ $(\Phi \models_{G\mathcal{E}} \varphi)$. ∎

Exemplo 1.3.18 Sejam $\varphi, \varphi' \subseteq FM_P$. Tem-se que:

- $\{\Box(\varphi \to \varphi'), \Diamond\varphi\} \models \Diamond\varphi'$

  se $I\!\!E = (W, R)$ é um enquadramento, $I\!\!M\!\!I$ uma estrutura de interpretação modal baseada em $I\!\!E$ e $w \in W$, tem-se que (i) se $I\!\!M\!\!I, w \models \Diamond\varphi$ então existe $w' \in W$ tal que wRw' e $I\!\!M\!\!I, w' \models \varphi$, (ii) se $I\!\!M\!\!I, w \models \Box(p \to \varphi')$ e wRw' então $I\!\!M\!\!I, w' \models \varphi \to \varphi'$ e, como $I\!\!M\!\!I, w' \models \varphi$, tem-se que $I\!\!M\!\!I, w' \models \varphi'$, (iii) como wRw', tem-se que $I\!\!M\!\!I, w \models \Diamond\varphi'$;

- $\{\varphi\} \models_{\mathcal{E}_{ref}} \Diamond\varphi$

  sendo $I\!\!E = (W, R)$ um enquadramento reflexivo, $I\!\!M\!\!I$ uma estrutura de interpretação modal baseada em $I\!\!E$ e $w \in W$, se tem que wRw e portanto se $I\!\!M\!\!I, w \models \varphi$ então $I\!\!M\!\!I, w \models \Diamond\varphi$;

- $\{\varphi\} \models_G \Box\varphi$

  sendo $I\!\!E = (W, R)$ um enquadramento, se $I\!\!E \models \varphi$ então $I\!\!M\!\!I, w \models \varphi$ quaisquer que sejam a estrutura de interpretação $I\!\!M\!\!I$ baseada em $I\!\!E$ e $w \in W$ e, consequentemente, $I\!\!E \models \Box\varphi$. ∎

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.3.19 Na sequência p e q designam símbolos proposicionais. Verifique que as seguintes fórmulas não são válidas.

1. $(\Diamond p) \to (\Box p)$
2. $p \to (\Box(\Diamond p))$

3. $(\Diamond(\Box p)) \rightarrow (\Box(\Diamond p))$

4. $(\Box p) \rightarrow (\Box(\Box p))$

5. $(\Diamond(\Diamond p)) \rightarrow (\Diamond p)$

6. $(\Box p) \rightarrow (\Diamond p)$

7. $((\Diamond p) \wedge (\Diamond q)) \rightarrow ((\Diamond(p \wedge q)) \vee (\Diamond(p \wedge \Diamond q)) \vee (\Diamond(q \wedge \Diamond p)))$

8. $(\Box p) \vee (\Box(\neg p))$

9. $\Box\bot$ ■

Exercício 1.3.20 Para cada uma das fórmulas das alíneas 1, 5, 7, 8 e 9 do exercício anterior caracterize uma classe não vazia de enquadramentos na qual essa fórmula seja válida. ■

Exercício 1.3.21 Na sequência ψ, ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas em FM_P. Verifique se as seguintes asserções são verdadeiras.

1. $\models \Box(\psi \rightarrow \psi)$

2. $\{\Box\psi_1 \vee \Box\psi_2\} \models \Box(\psi_1 \vee \psi_2)$

3. $\{\Diamond\psi_1, \Diamond\psi_2\} \models \Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2)$

4. $\{\Diamond\psi_1\} \models (\Box\psi_2) \rightarrow (\Diamond\psi_2)$

5. $\models_{\mathcal{E}_{ser}} (\Box\psi) \rightarrow (\Diamond\psi)$

6. $\models_{\mathcal{E}_{sim}} \psi \rightarrow (\Box(\Diamond\psi))$

7. $\models_{\mathcal{E}_{trn}} (\Box\psi) \rightarrow (\Box(\Box\psi))$

8. $\models_{\mathcal{E}_{euc}} (\Diamond\psi \rightarrow (\Box(\Diamond\psi))$

9. $\models_{\mathcal{E}_{cnv}} (\Diamond(\Box\psi)) \rightarrow (\Box(\Diamond\psi))$

10. $\models_{\mathcal{E}_{dns}} (\Box(\Box\psi)) \rightarrow (\Box\psi)$

11. $\{\Diamond\psi\} \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trans}} \Diamond(\Diamond\psi)$ (e vice-versa) ■

1.4 Sistemas de lógica modal

Nesta secção apresenta-se o conceito de sistema de lógica modal (também designado sistema modal ou, por vezes, mais simplesmente, lógica modal). Um sistema de lógica modal é um conjunto de fórmulas modais verificando certas propriedades. São também apresentadas várias outras noções relevantes associadas ao conceito de sistema modal, nomeadamente a noção de sistema normal, sistema K (e suas extensões) e relações entre estes sistemas modais e certas classes de enquadramentos.

Na sequência assume-se fixado um conjunto de símbolos proposicionais P.

Antes de apresentar a noção de sistema de lógica modal é necessário introduzir alguns conceitos preliminares.

Definição 1.4.1 FÓRMULAS PROPOSICIONALMENTE ATÓMICAS

O *conjunto das fórmulas proposicionalmente atómicas em* FM_P é o conjunto

$$P \cup \{\Box\psi : \psi \in FM_P\} \cup \{\Diamond\psi : \psi \in FM_P\}$$

o qual se designa por PA. ■

Fórmulas proposicionalmente atómicas em FM_P são os símbolos proposicionais em P e as fórmulas do tipo $\Box\psi$ ou $\Diamond\psi$ com $\psi \in FM_P$.

O conjunto PA pode ser visto como um conjunto de símbolos proposicionais, (cada elemento de PA é visto como um símbolo proposicional) e pode assim considerar-se uma linguagem proposicional cujo conjunto das fórmulas é, usando a notação do capítulo sobre lógica proposicional, F_{PA}. Nesta linguagem, fórmulas do tipo $\Box\psi$ ou $\Diamond\psi$ são vistas como símbolos proposicionais.

Definição 1.4.2 Consequência tautológica
Sejam $\Phi \subseteq FM_P$ e $\varphi \in FM_P$. A fórmula φ é *consequência tautológica de* Φ, o que se representa por

$$\Phi \models_{taut} \varphi$$

se no contexto da lógica proposicional cuja linguagem é F_{PA} se tem que φ é consequência semântica de Φ.

Uma fórmula modal φ é consequência tautológica de um conjunto de fórmulas modais Φ se, olhando para as fórmulas modais envolvidas como fórmulas proposicionais da linguagem proposicional F_{PA}, se tem que φ é consequência semântica (no sentido proposicional) de Φ.

Exemplo 1.4.3 Sendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in FM_P$ tem-se que

$$\{(\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_2), (\Box\varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_3)\} \models_{taut} (\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_3)$$

pois facilmente se prova que $(\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_3)$ é consequência semântica (no sentido proposicional) de $\{(\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_2), (\Box\varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_3)\}$: sendo V valoração (proposicional) V sobre PA tal que $V \models \{(\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_2), (\Box\varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_3)\}$ facilmente se conclui que $V \models (\Box\varphi_1) \rightarrow (\Box\varphi_3)$. ■

Definição 1.4.4 Conjunto fechado para a consequência tautológica
O conjunto $\Phi \subseteq FM_P$ diz-se *fechado para a consequência tautológica*, se quaisquer que sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}_0$, e $\varphi \in FM_P$

$$\text{se } \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models_{taut} \varphi \text{ então } \varphi \in \Phi.$$ ■

Definição 1.4.5 Conjunto fechado para o *Modus Ponens*
O conjunto $\Phi \subseteq FM_P$ diz-se *fechado para o Modus Ponens* se

$$\text{se } \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Phi \text{ e } \varphi_1 \in \Phi \text{ então } \varphi_2 \in \Phi.$$ ■

Definição 1.4.6 Conjunto fechado para a necessitação
O conjunto $\Phi \subseteq FM_P$ diz-se *fechado para a necessitação* se

$$\text{se } \varphi \in \Phi \text{ então } \Box\varphi \in \Phi.$$ ■

Pode agora apresentar-se a noção de sistema de lógica modal. Um sistema de lógica modal é um conjunto de fórmulas modais verificando certas propriedades. Neste texto segue-se a definição apresentada em [5].

Definição 1.4.7 SISTEMA DE LÓGICA MODAL
O conjunto $\Lambda \subseteq FM_P$ é um *sistema de lógica modal* se é fechado para a consequência tautológica. ■

Outras designações comuns para o conceito de sistema de lógica modal são *sistema modal* e *lógica modal*.

Podem encontrar-se definições algo diferentes para

Observação 1.4.8 Note-se que qualquer sistema de lógica modal contém todas as tautologias proposicionais isto é, todas as fórmulas que são tautologias no contexto da lógica proposicional subjacente a F_{PA}.

Um definição alternativa para o conceito de sistema de lógica modal é, aliás, a seguinte: $\Lambda \subseteq FM_P$ é um sistema de lógica modal se contém o conjunto $\{\varphi \in FM_P : \models_{taut} \varphi\}$ (isto é, contém todas as tautologias proposicionais) e é fechado para o *Modus Ponens*. ■

No que se segue são relevantes certas fórmulas, mais precisamente, *fórmulas esquema*. As fórmulas esquema são construídas à custa dos conectivos e operadores modais seguindo a sintaxe das fórmulas modais mas, em vez dos símbolos proposicionais, são utilizadas metavariáveis $A, B, C \ldots$. Estas metavariáveis representam fórmulas modais. Assim, por exemplo, $(\Box A) \rightarrow (\Diamond A)$ é uma fórmula esquema. A metavariável A pode ser instanciada com uma dada fórmula modal $\psi \in FM_P$ obtendo-se a fórmula $(\Box\psi) \rightarrow (\Diamond\psi) \in FM_P$. Esta fórmula modal é uma *instância* da fórmula esquema referida.

Na literatura existem algumas fórmulas esquema às quais são atribuídos determinados nomes especiais como, por exemplo, K, T, etc. (ver Definição 1.4.9). Em certas situações (ver secção **??**), estas fórmulas são designadas *axiomas esquema* ou, simplesmente, *axiomas* e, por isso, faz-se muitas vezs referência ao axioma K, axioma T, etc., para designar a fórmula esquema à qual é atribuído o nome K, a fórmula esquema à qual é atribuído o nome T, etc.

No que se segue é também relevante definir em que condições se pode dizer que uma axioma está contido num conjunto de fórmulas.

Definição 1.4.9 Alguns axiomas relevantes

- Axiomas e respectivas designações[6]

  - $(\Box(A \to B)) \to ((\Box A) \to (\Box B))$ — K
  - $(\Diamond A) \Leftrightarrow (\neg(\Box A))$ — Df$\Diamond$
  - $(\Box A) \to (\Diamond A)$ — D
  - $(\Box A) \to A$ — T
  - $A \to (\Box(\Diamond A))$ — B
  - $(\Box A) \to (\Box(\Box A))$ — 4
  - $(\Diamond A) \to (\Box(\Diamond A))$ — 5
  - $(\Diamond(\Box A)) \to (\Box(\Diamond A))$ — 2
  - $(\Box(\Box A)) \to (\Box A)$ — X
  - $(\Box((\Box A) \to A)) \to (\Box A)$ — L
  - $(\Box((\Box A) \Leftrightarrow A)) \to (\Box A)$ — H

  onde A e B representam fórmulas de FM_P.

- Sendo $\Phi \subseteq FM_P$, diz-se que Φ *contém* K se

  $$(\Box(\varphi \to \psi)) \to ((\Box\varphi) \to (\Box\psi)) \in \Phi$$

  quaisquer que sejam $\varphi, \psi \in FM_P$. Esta noção pode ser estendida de modo óbvio a qualquer um dos outros axiomas.

- Diz-se que K *é válido numa classe de enquadramentos* $\mathcal{E}$ se

  $$\models_{\mathcal{E}} (\Box(\varphi \to \psi)) \to ((\Box\varphi) \to (\Box\psi))$$

  quaisquer que sejam $\varphi, \psi \in FM_P$. Esta noção pode ser estendida de modo óbvio a qualquer um dos outros axiomas. ■

[6] Na literatura sobre lógica modal estas designações não são atribuídas de modo uniforme. Embora haja algum consenso relativamente a alguns dos axiomas, outros existem que aparecem sob diferentes designações. Neste texto seguem-se as designações utilizadas em [2], [14] e, no caso de Df$\Diamond$, [5].

Dizer que o axioma K está contido num conjunto de fórmulas Φ significa que todas as instâncias de K (ou seja, todas as fórmulas que se obtêm substituindo os símbolos A e B de K por fórmulas modais) pertencem a Φ.

A lista de fórmulas apresentada não esgota as fórmulas que, na literatura, recebem usualmente designações especiais. Em [5] e [14], por exemplo, pode encontrar-se uma lista mais extensa.

Uma noção relevante neste contexto é a noção de sistema normal.

Definição 1.4.10 SISTEMA NORMAL DE LÓGICA MODAL

O conjunto $\Lambda \subseteq FM_P$ é um *sistema normal de lógica modal*, ou um *sistema normal*, se verifica as seguintes condições:

- é um sistema de lógica modal
- contém o axioma K e o axioma Df$\Diamond$
- é fechado para a necessitação. ∎

Definição 1.4.11 SISTEMA K

O *sistema modal* K, ou *sistema* K, é o menor dos sistemas modais normais, isto é, é a intersecção de todos os sistemas modais normais.

Todos os sistemas normais são fechados para a consequência tautológica e para a necessitação e contêm o axioma K. O menor destes conjuntos (no sentido da inclusão de conjuntos) designa-se[7] sistema K. Este sistema contém apenas as tautologias proposicionais e as fórmulas que resultam da instanciação dos axiomas K e Df$\Diamond$ e do facto de ser fechado para a necessitação e *Modus Ponens*. Se se considerarem sistemas normais que também contenham outro(s) axioma(s) obtêm-se novos sistemas normais (que irão conter[8] o sistema K). Considerando, por exemplo, o axioma T, obtêm-se sistemas modais que são sistemas normais (e por isso contêm o sistema K e são fechados para a consequência semântica e para a necessitação), mas também contêm o axioma (esquema) T. Sistemas modais com estas características designam-se *sistemas-KT* e o menor destes sistemas (no sentido da inclusão de conjuntos) é *o* sistema KT.

[7] A designação K foi atribuída a este sistema nos anos 70 em honra de S. Kripke pelas suas contribuições na área da semântica da lógica modal [12].

[8] Não necessariamente de forma estrita

Definição 1.4.12 EXTENSÕES DO SISTEMA K

Sejam $E_1,\ldots,E_n$ designações de axiomas (esquema). Um conjunto $\Lambda \subseteq FM_P$ é um *sistema-*$KE_1 \ldots E_n$ se verifica as seguintes condições:

- é um sistema normal
- contém o axioma E_i para cada $1 \leq i \leq n$.

O menor (no sentido da inclusão de conjuntos) dos sistemas-$KE_1 \ldots E_n$ é *o sistema* $KE_1 \ldots E_n$. ∎

Refira-se que certos autores, como por exemplo [12] e [2], consideram uma definição para a noção de sistema de lógica modal distinta da apresentada na Definição 1.4.7. Nestes casos, um sistema de lógica modal é um conjunto de fórmulas que contém todas as tautologias e é fechado para o *Modus Ponens* e para a substituição uniforme. Note-se porém, que o sistema $KE_1 \ldots E_n$ corresponde exactamente ao mesmo conjunto de fórmulas quer se use uma definição, quer outra.

Como facilmente se conclui, da combinação dos vários axiomas resultam variadíssimos sistemas modais sendo que alguns deles são idênticos. Por exemplo, os sistemas KDT e KT são iguais. São também iguais os sistemas $KTB4$, $KT5$ e $KT45$. Obviamente, são também iguais os sistemas $KT5$ e $K5T$, por exemplo.

Listam-se seguidamente alguns dos sistemas usualmente mais estudados na literatura. Para alguns destes sistemas são usadas também designações distintas da que resulta da Definição 1.4.12. Essas outras designações aparecem entre parênteses.

- $KD\,(D)$
- $KT\,(T)$
- $KB\,(B)$
- $KT4\ \ (S4)$
- $KTB4\ \ (S5)$

Em [5], por exemplo, são descritas diversas propriedades destes sistemas.

Apresentam-se seguidamente alguns resultados que relacionam estes sistemas modais com certas classes de enquadramentos (ver também secção **??**). O objectivo é apenas fazer referência a alguns dos resultados mais relevantes sobre este assunto e não apresentar uma exposição detalhada. Não serão apresentadas provas das proposições enunciadas. Estes resultados são na sua generalidade resultados típicos que se podem encontrar na maior parte da literatura sobre lógica modal. O leitor interessado poderá consultar, por exemplo, [5, 12, 2].

Proposição 1.4.13
Sejam E_1,...,E_n designações de axiomas e $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ classes de enquadramentos tais que o axioma E_i é válido na classe $\mathcal{E}_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Tem-se que

$$\text{se } \varphi \text{ é uma fórmula do sistema } KE_1 \ldots E_n \text{ então } \models_{\mathcal{E}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_n} \varphi$$

ou seja, se φ é uma fórmula do sistema $KE_1 \ldots E_n$ então φ pertence a $\Lambda_{\mathcal{E}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_n}$ (i.e., é válida na classe de enquadramentos $\mathcal{E}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_n$). ∎

Esta propriedade é por vezes designada *correcção do sistema* $KE_1 \ldots E_n$ relativamente à classe de enquadramentos $\mathcal{E}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_n$. Pode ser generalizada a qualquer sistema normal como se segue.

Definição 1.4.14 CORRECÇÃO DE UM SISTEMA MODAL NORMAL FACE A UMA CLASSE DE ENQUADRAMENTOS
Seja $\Lambda \subseteq FM_P$ um sistema normal. O sistema Λ é *correcto face à classe de enquadramentos* $\mathcal{E}$ sempre que $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}}$. ∎

Da Proposição 1.4.13, do Exemplo 1.3.13 e do Exemplo 1.3.15 resulta que as fórmulas dos vários sistemas que foram mencionados anteriormente são válidas em classes de enquadramentos verificando certas propriedades bem conhecidas, isto é, essas fórmulas pertencem a $\Lambda_{\mathcal{E}}$ para tais classes de enquadramentos $\mathcal{E}$. Na Proposição 1.4.15 listam-se alguns desses casos.

Proposição 1.4.15
Os sistemas listados na tabela da Figura 1.1 são correctos face às classes de enquadramentos correspondentes, ou seja, cada um dos sistemas está contido na lógica da classe de enquadramentos correspondente. ∎

Tem-se assim que, por exemplo, as fórmulas do sistema K são válidas na classe de todos os enquadramentos, as fórmulas do sistema KD são válidas na classe dos

SISTEMA (Λ)	CLASSE $\mathcal{E}$ DE ENQUADRAMENTOS PARA A QUAL $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}}$
K	classe $\mathcal{E}$ de todos os enquadramentos ($K \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}}$)
KD	classe dos enquadramentos seriais ($KD \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ser}}$)
KT	classe dos enquadramentos reflexivos ($KT \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ref}}$)
KB	classe dos enquadramentos simétricos ($KB \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{sim}}$)
$K4$	classe dos enquadramentos transitivos ($K4 \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{trn}}$)
$K5$	classe dos enquadramentos euclideanos ($K5 \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{euc}}$)
$S4$	classe dos enquadramentos reflexivos e transitivos ($S4 \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}}$)
$S5$	classe dos enq. reflexivos, simétricos e transitivos ($S5 \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}}$)
KL	classe $\mathcal{E}'$ dos enq. cuja relação subjacente constitui uma árvore finita transitiva ($KL \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}'}$)

Figura 1.1: Relações entre sistemas modais e classes de enquadramentos

enquadramentos seriais, ou seja, $KD \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ser}}$ e as fórmulas do sistema KT são válidas na classe dos enquadramentos reflexivos , ou seja, $KT \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}_{ref}}$.

Naturalmente, sempre que se tem $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathcal{E}}$ para uma dado sistema normal e uma classe de enquadramentos, uma questão que se coloca é a de saber se $\Lambda_{\mathcal{E}} \subseteq \Lambda$ (o que permitiria concluir que $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{E}}$). Tal acontecerá sempre que toda a fórmula válida em $\mathcal{E}$ seja um elemento de Λ (esta propriedade é designada por *completude do sistema* Λ relativamente à classe de enquadramentos $\mathcal{E}$).

Definição 1.4.16 COMPLETUDE DE UM SISTEMA MODAL NORMAL FACE A UMA CLASSE DE ENQUADRAMENTOS

Seja $\Lambda \subseteq FM_P$ um sistema normal. O sistema Λ é *completo face à classe de enquadramentos* $\mathcal{E}$ sempre que $\Lambda_{\mathcal{E}} \subseteq \Lambda$. ■

Na Proposição 1.4.17 apresentam-se resultados de completude para os sistemas anteriormente referidos.

Proposição 1.4.17

Os sistemas listados na tabela da Figura 1.1 são também completos face às classes de enquadramentos relativamente às quais são correctos. ■

Tem-se assim que, por exemplo, as fórmulas válidas na classe $\mathcal{E}$ de todos os enquadramentos são fórmulas do sistema K (ou seja, $\Lambda_{\mathcal{E}} \subseteq K$), as fórmulas válidas na classe de todos os enquadramentos seriais são fórmulas do sistema KD (ou seja, $\Lambda_{\mathcal{E}_{ser}} \subseteq KD$) e as fórmulas válidas na classe de todos os enquadramentos reflexivos são fórmulas do sistema KT (ou seja, $\Lambda_{\mathcal{E}_{ref}} \subseteq KT$).

Sempre que um sistema é correcto e completo relativamente a uma certa classe de enquadramentos, essa classe de enquadramentos constitui uma importante caracterização semântica desse sistema que permite dizer que esse sistema é precisamente o conjunto de fórmulas válidas em todos os enquadramentos da classe. Das proposições 1.4.15 e 1.4.17 resultam as seguintes caracterizações semânticas para os sistemas que têm vindo a ser referidos.

Proposição 1.4.18

Os sistemas listados na tabela da Figura 1.2 são constituídos precisamente pelas fórmulas válidas nas classes de enquadramentos correspondentes, ou seja, cada um dos sistemas é igual à lógica da classe de enquadramentos correspondente. ■

Tem-se assim que, por exemplo, o sistema K é constituído pelas fórmulas válidas na classe de todos os enquadramentos, o sistema KD é constituído pelas fórmulas válidas na classe de todos os enquadramentos seriais e o sistema KT é constituído pelas fórmulas válidas na classe de todos os enquadramentos reflexivos, ou seja, $\Lambda_{\mathcal{E}_{ref}} = KT$.

Existe uma outra noção mais geral de completude que está relacionada com a noção de consequência semântica (ver, por exemplo, [2])

Sistema (Λ)	Classe $\mathcal{E}$ de enquadramentos para a qual $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{E}}$
K	classe $\mathcal{E}$ de todos os enquadramentos ($K = \Lambda_{\mathcal{E}}$)
KD	classe dos enquadramentos seriais ($KD = \Lambda_{\mathcal{E}_{ser}}$)
KT	classe dos enquadramentos reflexivos ($KT = \Lambda_{\mathcal{E}_{ref}}$)
KB	classe dos enquadramentos simétricos ($KB = \Lambda_{\mathcal{E}_{sim}}$)
$K4$	classe dos enquadramentos transitivos ($K4 = \Lambda_{\mathcal{E}_{trn}}$)
$K5$	classe dos enquadramentos euclideanos ($K5 = \Lambda_{\mathcal{E}_{euc}}$)
$S4$	classe dos enquadramentos reflexivos e transitivos ($S4 = \Lambda_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}}$)
$S5$	classe dos enq. reflexivos, simétricos e transitivos ($S5 = \Lambda_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}}$)
KL	classe $\mathcal{E}'$ dos enq. cuja relação subjacente constitui uma árvore finita transitiva ($KL = \Lambda_{\mathcal{E}'}$)

Figura 1.2: Relações entre sistemas modais e classes de enquadramentos

Definição 1.4.19 Completude forte de um sistema modal normal face a uma classe de enquadramentos

Seja $\Lambda \subseteq FM_P$ um sistema normal. O sistema Λ é *fortemente completo face à classe de enquadramentos* $\mathcal{E}$ sempre que dados $\Phi \subseteq FM_P$ e $\varphi \in FM_P$ se tem se $\Phi \models_{\mathcal{E}} \varphi$ então $\varphi \in \Phi$ ou existe um conjunto finito de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ tal que $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi \in \Lambda$. ∎

Na Proposição 1.4.20 apresentam-se resultados de completude forte para todos os sistemas referidos anteriormente com excepção de KL

Proposição 1.4.20

Os sistemas K, KD, KT, KB, $K4$, $K5$, $S4$ e $S5$ são fortemente completos face, respectivamente, à classe de todos enquadramentos, à classe $\mathcal{E}_{ser}$, à classe $\mathcal{E}_{sim}$, à classe $\mathcal{E}_{trn}$, à classe $\mathcal{E}_{euc}$, à classe $\mathcal{E}_{ref}$, à classe $\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}$ e à classe $\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}$.
∎

Não foi enunciado nenhum resultado sobre completude forte relativamente ao sistema KL. De facto, prova-se mesmo que não existe nenhuma classe $\mathcal{E}$ de enquadramentos tal que KL seja correcto e fortemente completo relativamente a essa classe. O leitor interessado poderá consultar a prova deste resultado em [2].

Do que atrás foi exposto resulta que existe um grande número de sistemas normais de lógica modal. Para uns haverá resultados semelhantes de correcção e completude e para outros não. O problema tem geralmente a ver com a não existência de resultados de completude e, na verdade, a não existência de resultados de completude será substancialmente mais frequente do que a sua existência. O sistema KH é um exemplo de um sistema para o qual se prova que não existe nenhuma classe de enquadramentos relativamente à qual o sistema seja correcto e completo [12].

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.4.21 Na sequência ψ, ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas em FM_P.

1. Mostre que as fórmulas

   (a) $\Box(\psi \to \psi)$

   (b) $(\Box(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\Box\psi_1) \wedge (\Box\psi_2))$

   (c) $(\Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\Diamond\psi_1) \wedge (\Diamond\psi_2))$

   pertencem ao sistema modal K.

2. Mostre que a fórmula $(\Diamond(\Box\psi)) \to (\Diamond(\Box\psi))$ pertence ao sistema modal KB.

3. Mostre que a fórmula $(\Box(\psi_1 \to \psi_2)) \to (\Box((\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2)))$ pertence ao sistema modal $K4$.

4. Mostre que as fórmulas

   (a) $(\Diamond(\Box\psi)) \to (\Diamond\psi)$

   (b) $(\Box\psi) \to (\Box(\Diamond\psi))$

   pertencem ao sistema modal $K5$. ∎

1.5 Sistema de dedução natural para o sistema K

Nesta secção e nas seguintes são apresentados sistemas de dedução natural para vários sistemas normais de lógica modal, isto é, sistemas de dedução natural cujos teoremas estão estreitamente relacionados com as fórmulas desses sistemas modais. Nesta secção é apresentado um sistema de dedução natural para o sistema modal K. Este sistema de dedução natural é designado $\mathcal{N}_m$. Nas secções seguintes estende-se este sistema de dedução natural para o caso de vários outros sistemas modais.

Existem na literatura diferentes propostas de sistemas de dedução natural para vários sistemas de lógica modal. Podem citar-se como exemplo os seguintes: em [13] são apresentados sistemas para $S4$ e para $S5$, em [4] é apresentado um sistema para K e em [7] são apresentados sistemas para várias lógicas modais (normais e não normais).

Neste texto optou-se por seguir a abordagem apresentada em [14]. Os sistemas de dedução natural aí apresentados (para um considerável número de sistemas modais normais) são construídos de uma forma modular e incremental de um modo relativamente simples. Com efeito, a partir de um sistema de dedução para K obtém-se um sistema de dedução natural para, por exemplo, $K4$, juntando mais uma regra de inferência (relacionada com a transitividade da relação de acessibilidade das estruturas semânticas) e obtém-se um sistema de dedução natural para $KT4$, juntando ao sistema para $K4$ mais uma outra regra de inferência (esta relacionada com a reflexividade). Os outros sistemas são construídos de modo semelhante.

À semelhança dos capítulos anteriores faz-se em primeiro lugar, na subsecção 1.5.1, uma exposição mais informal do sistema $\mathcal{N}_m$, sendo uma breve descrição mais rigorosa apresentada na subsecção 1.5.2. As provas de correcção e completude do sistema encontram-se na subsecções 1.9.1 e 1.9.4.

Tal como anteriormente, a construção de derivações em $\mathcal{N}_m$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este assunto é abordado na subsecção 1.6.

1.5.1 O sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$

Tal como nos casos anteriores, faz-se nesta subsecção uma exposição mais informal do sistema dedutivo começando por apresentar vários exemplos que visam ilustrar os seus aspectos fundamentais.

Sistema de dedução natural para o sistema K

O sistema $\mathcal{N}_m$ é um sistema dedutivo para o sistema modal K, isto é, como se verá, as fórmulas do sistema K estão estreitamente relacionadas com (certos) teoremas de $\mathcal{N}_m$. Sistemas de dedução natural para outros sistemas modais serão apresentados em secções ulteriores. O sistema $\mathcal{N}_m$ inclui regras semelhantes às do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$ apresentado para o caso da lógica proposicional mas tem, como é natural, regras específicas relacionadas com os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$.

Tal como anteriormente, são construídas árvores de dedução (ou derivação), isto é, árvores etiquetadas construídas a partir de árvores singulares e utilizando certas regras de inferência, nas quais a cada nó está associada uma fórmula e um conjunto de marcas. No entanto, as fórmulas que se vão considerar no caso do sistema $\mathcal{N}_m$ (e no caso de todos os outros sistemas de dedução natural que se irão apresentar) não são, como se poderia esperar à partida, fórmulas modais, isto é, fórmulas em FM_P. As fórmulas que aqui se manipulam são de dois tipos: fórmulas modais *etiquetadas* (ou *prefixadas*) e fórmulas *relacionais*. Fórmulas modais etiquetadas são fórmulas do tipo $t : \varphi$ onde t é um termo[9] e $\varphi \in FM_P$. Fórmulas relacionais são fórmulas do tipo $t_1\mathbf{R}t_2$ onde t_1 e t_2 são termos. Neste contexto, estes termos dizem-se etiquetas e representam mundos.

Informalmente, uma fórmula $t : \varphi$ exprime a ideia de que φ é satisfeita no mundo representado pelo termo t. Uma fórmula $t_1\mathbf{R}t_2$ exprime a ideia de que o mundo representado pelo termo t_2 é acessível (ou visível) a partir do mundo representado por t_1. Com estes novos tipos de fórmulas as noções semânticas de mundo e de acessibilidade entre mundos são, de certa forma, introduzidas na sintaxe das fórmulas.

Especificamente no caso do sistema $\mathcal{N}_m$ (e alguns outros), os termos que vão ser utilizados nas fórmulas são apenas variáveis. No entanto, como se verá, existem determinados sistemas modais para os quais são também necessários termos que incluem certos símbolos de função (funções de Skolem).

Dos parágrafos anteriores resulta que as derivações construídas no âmbito destes sistemas de dedução natural têm como hipóteses fórmulas prefixadas e/ou fórmulas relacionais e a conclusão destas derivações pode ser também de um destes dois tipos. Assim, nestes sistemas não se constroem derivações de fórmulas *modais* a partir de conjuntos de fórmulas *modais*, mas sim derivações de fórmulas prefixadas (ou relacionais) a partir de conjuntos de fórmulas prefixadas e/ou relacionais. Em particular, os teoremas destes sistemas não são simplesmente fórmulas modais mas sim fórmulas

[9]Termo de uma certa linguagem de primeira ordem

prefixadas ou fórmulas relacionais. Como adiante se verá, as fórmulas etiquetadas que são teoremas destes sistemas dedutivos estão estreitamente relacionadas com as fórmulas de certos sistemas modais. No caso do sistema $\mathcal{N}_m$, por exemplo, tem-se que se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m$ então φ é uma fórmula do sistema modal K (e vice-versa). Mostra-se-á ainda que se existe uma derivação em $\mathcal{N}_m$ de $x : \varphi$ a partir de $\{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\}$ então φ é consequência semântica de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos ilustrativos, começando por apresentar um caso simples no qual só vão ser utilizadas regras associadas aos conectivos.

Exemplo 1.5.1 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \Box\psi_1^{\;1} \qquad x : (\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2)^{\;2}}{x : \Box\psi_2} \to E \qquad x : (\Box\psi_2) \to (\Box\psi_3)^{\;3}}{x : \Box\psi_3} \to E}{x : (\Box\psi_1) \to (\Box\psi_3)} \to I, 1$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_m$ sendo, em particular, uma derivação da fórmula etiquetada $x : (\Box\psi_1) \to (\Box\psi_3)$ a partir do conjunto de fórmulas etiquetadas $\{x : (\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2), x : (\Box\psi_2) \to (\Box\psi_3)\}$ (o conjunto das hipóteses abertas). Como se verá adiante, o facto de se poder derivar a fórmula etiquetada $x : (\Box\psi_1) \to (\Box\psi_3)$ a partir do conjunto indicado, permite concluir que a fórmula modal $(\Box\psi_1) \to (\Box\psi_3)$ é consequência semântica de $\{(\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2), (\Box\psi_2) \to (\Box\psi_3)\}$.

Foram utilizadas as regras $\to E$ e $\to I$, as quais, como facilmente se percebe, são semelhantes às apresentadas nos casos da lógica proposicional e de primeira ordem. Note-se, no entanto, que estas regras envolvem apenas fórmulas etiquetadas e, em particular, fórmulas que tenham a mesma etiqueta. ∎

As regras $\to E$ e $\to I$ são neste sistema as seguintes.

<u>Regra $\to E$</u> (eliminação da implicação)

A regra $\to E$ permite obter uma derivação de $x : \varphi_2$ a partir de derivações de $x : \varphi_1$ e de $x : \varphi_1 \to \varphi_2$, onde x é uma variável e φ_1, φ_2 e φ_3 são fórmulas modais. Como é habitual a regra é representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ x : \varphi_1 & x : \varphi_1 \to \varphi_2 \end{array}}{x : \varphi_2} \to E$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. ∇

<u>Regra $\to I$</u> (introdução da implicação)

A regra $\to I$ permite obter uma derivação para $x : \varphi_1 \to \varphi_2$ dada uma derivação de $x : \varphi_2$ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x : \varphi_1$ onde x é uma variável e φ_1 e φ_2 são fórmulas modais. A representação usual é

$$\dfrac{\begin{array}{c} [x : \varphi_1]^{\,m} \\ \mathcal{D} \\ x : \varphi_2 \end{array}}{x : \varphi_1 \to \varphi_2} \to I, m$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem todas os requisitos relativos a marcas e hipóteses eliminadas descritos anteriormente. ∇

Todas as regras relativas aos conectivos, com excepção da regra $\perp$ e da regra $\vee E$, são idênticas às apresentadas nos capítulos anteriores, tendo apenas em conta que, à semelhança das regras $\to E$ e $\to I$ acima apresentadas, estão sempre envolvidas fórmulas etiquetadas com as mesmas etiquetas. As regras $\perp$ e $\vee E$ serão referidas mais adiante. No Exemplo 1.5.2 ilustram-se as regras $\Box E$ e $\Box I$.

Exemplo 1.5.2 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)^{\,1} \qquad x\mathbf{R}y^{\,2}}{y : \psi_1 \to \psi_2} \Box E \qquad \dfrac{x : \Box\psi_1^{\,3} \qquad x\mathbf{R}y^{\,2}}{y : \psi_1} \Box E}{y : \psi_2} \to E}{x : \Box\psi_2} \Box I, 2$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_m$. É uma derivação de $x : \Box\psi_2$ a partir do conjunto $\{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2), x : \Box\psi_1\}$ (o conjunto das hipóteses abertas).

Nesta derivação foram utilizadas as regras $\Box E$ (eliminação do operador $\Box$) e $\Box I$ (introdução do operador $\Box$). Como facilmente se percebe pela presença de marcas, a regra $\Box I$ permite eliminar hipóteses.

Tendo em conta a descrição informal acima apresentada sobre o significado das fórmulas etiquetadas e relacionais, é fácil compreender a regra $\Box E$: se $\Box\varphi$ é verificada num certo mundo (asserção representada neste contexto por $x : \Box\varphi$) e um outro mundo é visível a partir deste (asserção representada por $x\mathbf{R}y$) então φ verifica-se nesse outro mundo (asserção representada por $x\mathbf{R}y$).

O caso da regra $\Box I$ é um pouco mais complicado. Esta regra tem algumas afinidades com a regra $\forall I$. Com efeito, esta regra corresponde à introdução do operador necessidade e a questão que se coloca é a de saber em que condições faz sentido introduzir este operador. Para se poder estabelecer $\Box\varphi$ num certo mundo w há que garantir que todos os mundos que são visíveis a partir deste verificam φ. Para tal, bastará considerar um mundo arbitrário *de entre os que são visíveis a partir de* w e conseguir concluir que nele se verifica φ. Dado que o mundo considerado é um mundo arbitrário visível a partir de w, pode assegurar-se então que *todos* os mundos que são visíveis a partir de w verificam φ.

Voltando ao exemplo inicial, tem-se que a árvore d_2

$$\dfrac{\dfrac{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)^{\,1} \qquad x\mathbf{R}y^{\,2}}{y : \psi_1 \to \psi_2}\,\Box E \qquad \dfrac{x : \Box\psi_1^{\,3} \qquad x\mathbf{R}y^{\,2}}{y : \psi_1}\,\Box E}{y : \psi_2}\,{\to}E$$

constitui uma derivação de $y : \psi_2$ a partir de $x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)$, $x : \Box\psi_1$ e $x\mathbf{R}y$. Informalmente, $y : \psi_2$ significa que ψ_2 se verifica no mundo representado por y e $x\mathbf{R}y$ significa que o mundo representado por y é visível a partir do mundo[10] x. Para se poder introduzir o operador $\Box$ para obter $x : \Box\psi_2$ (isto é, para se poder concluir que todos os mundos visíveis a partir do mundo x verificam ψ_2) há que garantir que y representa um mundo arbitrário (de entre os que são visíveis a partir de x). À semelhança do que acontecia no caso da regra $\forall I$, o modo como se garante essa

[10]Mais correctamente, dever-se-ia dizer "mundo representado por x", mas, para não sobrecarregar a exposição, na sequência usa-se a expressão mais simples "mundo x".

arbitrariedade está relacionado com o modo como y ocorre nas hipóteses *abertas* da dedução. Note-se que no caso desta derivação, pelo facto de y não ocorrer nas hipóteses abertas distintas de $x\mathbf{R}y$, nada se assume àcerca do mundo representado por y, à excepção do facto de ser visível a partir do mundo x. A satisfação destes requisitos sobre y fazem com que possa considerar que y é arbitrário. Pode então concluir-se $x : \Box\psi_2$ construindo a árvore d_1 por aplicação da regra $\Box I$.

A aplicação da regra $\Box I$ deve conduzir ainda à eliminação da hipótese $x\mathbf{R}y$. Esta hipótese é a hipótese auxiliar que se utiliza para indicar que y não representa um mundo arbitrário *qualquer* mas sim um mundo arbitrário *de entre os que são visíveis a partir do mundo* x. Após se concluir que se tem, de facto, $y : \psi_2$, esta hipótese auxiliar pode ser eliminada. A eliminação é conseguida do modo usual utilizando marcas.

Existem ainda mais alguns detalhes sobre a aplicação da regra $\Box I$ que devem ser referidos antes de apresentar a regra na sua generalidade. Estes detalhes são abordados no exemplo seguinte.

Para terminar, note-se que na derivação d_1, ao contrário do que acontecia na derivação apresentada no Exemplo 1.5.1, já estão presentes fórmulas relacionais. Em particular, utilizou-se (duas vezes) a fórmula relacional $x\mathbf{R}y$ como hipótese (auxiliar). Esta hipótese foi eliminada por aplicação da regra $\Box I$ e não está presente nem na conclusão nem nas hipóteses abertas. Como é evidente, podem fazer-se derivações nas quais este tipo de hipóteses não cheguem a ser eliminadas. A árvore d_2 é precisamente um desses exemplos e, como referido, constitui uma derivação de $y : \psi_2$ a partir de $x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)$, $x : \Box\psi_1$ e $x\mathbf{R}y$. Como se sabe, as fórmulas relacionais não estão presentes na linguagem modal usual (apresentada nas secções iniciais deste capítulo). Como se verá adiante, este tipo de fórmulas não estará presente nem na conclusão nem nas hipóteses abertas de derivações que permitirão concluir que, por exemplo, certas fórmulas modais pertencem ao sistema modal K. Nessas derivações as fórmulas relacionais são apenas utilizadas como hipóteses auxiliares, ou seja, são utilizadas como hipóteses em determinado ponto e depois, mais tarde, eliminadas. ■

Apresenta-se seguidamente a regra $\Box E$. A regra $\Box I$ será apresentada após o próximo exemplo.

<u>Regra $\Box E$</u> (eliminação do operador necessidade)

A regra $\Box E$ permite obter uma derivação de $y : \varphi$ a partir de derivações de $x : \Box\varphi$

e de $x\mathbf{R}y$, onde x, y são variáveis e φ é uma fórmula modal. A regra é representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ x : \Box\varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ x\mathbf{R}y\end{matrix}}{y : \varphi}\ \Box E$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. ∇

Exemplo 1.5.3 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)^{\,1} \qquad x\mathbf{R}y^2}{y : \psi_1 \to \psi_2}\ \Box E \qquad y : \psi_1{}^{3}}{y : \psi_2}\ \to E}{x : \Box\psi_2}\ \Box I, 2$$

não é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_m$. A regra $\Box I$ foi incorrectamente aplicada pois na árvore d_2

$$\dfrac{\dfrac{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)^{\,1} \qquad x\mathbf{R}y^2}{y : \psi_1 \to \psi_2}\ \Box E \qquad y : \psi_1{}^{3}}{y : \psi_2}\ \to E$$

$y : \psi_1$ é uma hipótese aberta e é distinta de $x\mathbf{R}y$. Isto significa que y representa um mundo que, para além ser visível a partir do mundo x, também verifica ψ_1 (o que permite que a regra $\to E$ seja aplicada para obter $y : \psi_2$). Assim y não representa, como devia, um mundo *arbitrário* de entre os que são visíveis a partir de x.

Note-se que não faz sentido poder concluir $x : \Box\psi_2$ a partir de $y : \psi_1$ e $x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)$. Com efeito, pode existir um outro mundo distinto daquele que y representa que seja visível a partir do mundo x e que verifique $\neg\psi_1$ e $\neg\psi_2$ (nenhuma destas assumpções é incompatível com as hipóteses $\Box(\psi_1 \to \psi_2)$, $x\mathbf{R}y$ e $y : \psi_1$) e portanto não se pode concluir $\Box\psi_2$.

A árvore d_3

Sistema de dedução natural para o sistema K

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \Box\psi^{\,1} \qquad\qquad x\mathbf{R}x^{\,2}}{x : \psi}\,\Box E}{x : (\Box\psi) \to \psi}\to\! I, 1}{x : \Box((\Box\psi) \to \psi)}\,\Box I, 2$$

também *não é uma árvore de dedução em* $\mathcal{N}_m$. Quando se chega a $x : (\Box\psi) \to \psi$, x não ocorre, de facto, nas hipóteses abertas distintas $x\mathbf{R}x$ (note-se que $x : \Box\psi$ é hipótese fechada) mas x não pode ser considerado como representando um mundo arbitrário visível a partir do mundo x. Com efeito, como é natural, um determinado mundo não pode ser considerado como um mundo *arbitrário* visível a partir dele próprio. Note-se que a fórmula $\Box((\Box\psi) \to \psi)$ não é, de facto, uma fórmula do sistema K, ou seja, uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos.

Do parágrafo anterior decorre que, para se poder usar a regra $\Box I$ para obter uma derivação de $x : \Box\varphi$ a partir de uma derivação de $y : \varphi$, é necessária não só a condição sobre y já referida no exemplo anterior, mas é também necessária a condição $y \neq x$.
■

Regra $\Box I$ (introdução do operador necessidade)

A regra $\Box I$ permite obter uma derivação para $x : \Box\varphi$ dada uma derivação de $y : \varphi$ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x\mathbf{R}y$, desde que (i) $y \neq x$ e (ii) y não ocorra nas hipóteses abertas da derivação de $y : \varphi$ distintas de $x\mathbf{R}y$. Tal como nos casos anteriores, x e y são variáveis e φ é uma fórmula modal. A representação usual é

$$\dfrac{\begin{array}{c}[x\mathbf{R}y]^{\,m}\\ \mathcal{D}\\ y : \varphi\end{array}}{x : \Box\varphi}\,\Box I, m$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem todos os requisitos referidos relativos à variável y, bem assim como os requisitos relativos a marcas e hipóteses eliminadas já descritos em casos semelhantes. ∇

No próximo exemplo ilustra-se a regra $\bot$. Como já foi referido, esta regra é semelhante à apresentada nos sistemas anteriores mas há um pequeno detalhe relativamente às etiquetas que é conveniente ilustrar. A terminar, faz-se também referência à regra $\vee E$ pois esta regra apresenta também a mesma particularidade que está presente na regra $\bot$.

Exemplo 1.5.4 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{y:\neg\psi_2\,^{4} \qquad \dfrac{x\mathbf{R}y\,^{3} \qquad \dfrac{x:(\neg\psi_1)\to(\Box\psi_2)\,^{1} \qquad x:\neg\psi_1\,^{2}}{x:\Box\psi_2}\,{\scriptstyle \to E}}{y:\psi_2}\,{\scriptstyle \Box E}}{y:\bot}\,{\scriptstyle \to E}}{x:\psi_1}\,{\scriptstyle \bot,2}$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_m$. É, em particular, uma derivação de $x:\psi_1$ a partir de $x:(\neg\psi_1)\to(\Box\psi_2)$, $x\mathbf{R}y$ e $y:\neg\psi_2$.

Esta derivação tem aqui o propósito de ilustrar a regra $\bot$, a regra do absurdo. Com efeito, para obter uma derivação de $x:\psi_1$ a partir das hipóteses indicadas desenvolve-se nesta derivação um "raciocínio por absurdo", isto é, considera-se a hipótese (auxiliar) adicional $x:\neg\psi_1$ e deriva-se $y:\bot$. A fórmula $y:\bot$ representa uma contradição, uma situação absurda, associada ao *mundo representado por* y. É precisamente este detalhe que merece atenção: ao derivar uma situação absurda a partir de um conjunto de hipóteses contendo $x:\neg\psi_2$, a regra $\bot$ pode ser utilizada para concluir $x:\psi_2$ *independentemente de quem é o mundo a que está associada a situação absurda.* ∎

Regra $\bot$ (absurdo)

A regra $\bot$ permite obter uma derivação para $x:\varphi$ dada uma derivação de $y:\bot$ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x:\neg\varphi$ (ou $\varphi\to\bot$, se não se usar a abreviatura), sendo x e y variáveis e φ uma fórmula modal. A representação usual é

$$\frac{\begin{array}{c}[x:\neg\varphi]^{\,m}\\ \mathcal{D}\\ y:\bot\end{array}}{x:\varphi}\ \bot, m$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem todos os requisitos relativos a marcas e hipóteses eliminadas já descritos em casos semelhantes. Note-se que, como é natural, pode ter-se, em particular, $x = y$. ∇

Apresenta-se agora a regra $\vee E$. Algumas das particularidades referidas relativas regra $\bot$ estão também presentes na regra $\vee E$.

Regra $\vee E$ (eliminação da disjunção)

A regra $\vee E$ permite obter uma derivação para $y : \psi$ a partir de (a) uma derivação de $x : \varphi_1 \vee \varphi_2$, (b) uma derivação para $y : \psi$ a partir a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x : \varphi_1$ e (c) uma derivação para $y : \psi$ a partir a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x : \varphi_2$, sendo x e y variáveis e φ_1, φ_2 e ψ fórmulas modais. A representação é a usual

$$\frac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}_1\\ x:\varphi_1\vee\varphi_2\end{array}\qquad\begin{array}{c}[x:\varphi_1]^{m'}\\ \mathcal{D}_2\\ y:\psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}[x:\varphi_2]^{m''}\\ \mathcal{D}_3\\ y:\psi\end{array}}{y:\psi}\ \vee E, m', m''$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem todos os requisitos relativos a marcas e hipóteses eliminadas já descritos em casos semelhantes. ∇

No próximo exemplo ilustram-se as regras relativas ao operador $\Diamond$.

Exemplo 1.5.5 A árvore d_1

$$\dfrac{x:\Diamond\psi_1{}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{y:\psi_1{}^{2} \qquad \dfrac{x:\Box(\psi_1\rightarrow\psi_2)^{3} \qquad x\mathbf{R}y^{4}}{y:\psi_1\rightarrow\psi_2}\,\Box E}{y:\psi_2}\,\rightarrow E \qquad x\mathbf{R}y^{4}}{x:\Diamond\psi_2}\,\Diamond I}{x:\Diamond\psi_2}\,\Diamond E, 2, 4$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}_m$. É, em particular, uma derivação de $x:\Diamond\psi_2$ a partir de $x:\Box(\psi_1\rightarrow\psi_2)$ e $x:\Diamond\psi_1$.

Nesta derivação foram utilizadas as regras $\Diamond I$ (introdução do operador $\Diamond$) e $\Diamond E$ (eliminação do operador $\Diamond$). Como facilmente se percebe pela presença de marcas, a regra $\Diamond E$ permite eliminar hipóteses.

Facilmente se compreende a ideia subjacente à regra $\Diamond I$: se φ se verifica num certo mundo (asserção representada por $y:\varphi$) e este mundo é visível a partir de um outro mundo (asserção representada por $x\mathbf{R}y$) então $\Diamond\varphi$ verifica-se nesse outro mundo (asserção representada por $x:\Diamond\varphi$).

O caso da regra $\Diamond E$ é um pouco mais complexo. Esta regra tem algumas afinidades com a regra $\exists E$. Assuma-se que num certo mundo w se verifica $\Diamond\varphi$ (o que significa que existe um mundo visível a partir deste que verifica φ). Suponha-se que usando esta informação (e, eventualmente, informações adicionais), se pretende estabelecer que uma dada fórmula modal se verifica num determinado mundo w' (que pode ser, em particular, o próprio w). Nesta situação, ter-se-á de representar temporariamente de algum modo o mundo que verifica φ e é visível a partir de w para ser possível utilizar esta informação na prova do resultado pretendido. Como é natural, há que ter algum cuidado na representação que se escolhe pois nada se pode assumir sobre esse mundo, para além de ser visível a partir de w e de verificar φ. Tem de se garantir, portanto, que a representação escolhida assegura que se trata de um mundo arbitrário (de entre os que são visíveis a partir de w e verificam φ). Tem-se ainda que w' também não pode, obviamente, depender da particular representação escolhida para o tal mundo que se sabe verificar φ .

Voltando ao exemplo inicial, tem-se que, por um lado, $x:\Diamond\psi_1$ representa o facto de existir um mundo visível a partir do mundo x que verifica ψ_1. Por outro lado, a árvore d_2

$$\cfrac{\cfrac{y:\psi_1{}^{2} \qquad \cfrac{x:\Box(\psi_1 \to \psi_2)^{\,3} \qquad x\mathbf{R}y^{\,4}}{y:\psi_1 \to \psi_2}\,\Box E}{y:\psi_2}\to E \qquad x\mathbf{R}y^{\,4}}{x:\Diamond\psi_2}\,\Diamond I$$

é precisamente uma derivação de $x : \Diamond\psi_2$ a partir de $y : \psi_1$ e de $x\mathbf{R}y$ (e da hipótese adicional $x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)$), ou seja, uma derivação na qual com as fórmulas $y : \psi_1$ e $x\mathbf{R}y$ se representa o facto de existir um mundo visível a partir de x que verifica ψ_1 e de se representar esse mundo através da variável y.

Para se concluir $x : \Diamond\psi_2$ a partir da derivação d_2 e de $x : \Diamond\psi_1$ (e portanto aplicar a regra $\Diamond E$ para obter a árvore inicial d_1), há que garantir que a representação escolhida para o tal mundo visível a partir de x assegura a arbitrariedade desse mundo (de entre os que são visíveis a partir de x e verificam ψ_1). Esta situação é semelhante à que ocorre no contexto da regra $\Box I$. Tal como nessa situação, para que a arbitrariedade seja garantida é necessário que $y \neq x$ e y não ocorra nas hipóteses abertas de d_2 distintas de $x\mathbf{R}y$ mas, no presente caso, deve também acrescentar-se que y poderá eventualmente ocorrer numa hipótese aberta que corresponda à fórmula $y : \psi_1$. Consequentemente, os requisitos que devem ser exigidos sobre y são, até ao momento: (i) $y \neq x$ e (ii) y não ocorre nas hipóteses abertas de d_2 distintas de $x\mathbf{R}y$ e de $y : \psi_1$.

No exemplo apresentado, mais nenhum outro requisito sobre y é necessário, mas poderia acontecer que a etiqueta da conclusão de d_2 não fosse x, mas, por exemplo, uma outra etiqueta z (como foi acima referido, o objectivo poderia ser estabelecer uma dada fórmula modal num determinado mundo que não necessariamente o que verifica $\Diamond\psi_1$). Nesta situação, existe um último requisito que deve ser observado para garantir a arbitariedade de y: y teria de ser distinto de z.

A aplicação da regra $\Diamond E$ conduz naturalmente à eliminação das hipóteses $x\mathbf{R}y$ e $y : \psi_1$, isto é, das fórmulas que, temporariamente, representam por y o mundo que verifica ψ_1 e é visível a partir do mundo x. A eliminação processa-se da forma habitual, através das marcas. À semelhança do que acontecia na regra $\vee E$, as marcas envolvidas na aplicação desta regra têm de ser marcas de hipóteses associadas às fórmulas $x\mathbf{R}y$ ou $y : \psi_1$, ou então marcas novas e, ao aplicar a regra, apenas poderão ser eliminadas hipóteses $x\mathbf{R}y$ e $y : \psi_1$ na árvore d_2. ■

Regra $\Diamond I$ (introdução do operador possibilidade)

A regra $\Diamond I$ permite obter uma derivação de $x : \Diamond\varphi$ a partir de derivações de $y : \varphi$ e de $x\mathbf{R}y$, onde x, y são variáveis e φ é uma fórmula modal. A regra é representada, como usualmente, do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_1 \\ y : \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathcal{D}_2 \\ x\mathbf{R}y \end{matrix}}{x : \Diamond\varphi}\ \Diamond I$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. ∇

Regra $\Diamond E$ (eliminação do operador possibilidade)

A regra $\Diamond E$ permite obter uma derivação para $z : \psi$ a partir de (a) uma derivação de $x : \Diamond\varphi$ e (b) uma derivação de $z : \psi$ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $x\mathbf{R}y$ e $y : \varphi$, desde que (i) $y \neq x$ e $y \neq z$ e (ii) y não ocorra nas hipóteses abertas da derivação de $z : \psi$ distintas de $x\mathbf{R}y$ e de $y : \varphi$. A representação usual é

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \mathcal{D}_1 \\ x : \Diamond\varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [y : \varphi]^{m'}\ [x\mathbf{R}y]^{m''} \\ \mathcal{D}_2 \\ z : \psi \end{matrix}}{z : \psi}\ \Diamond E, m', m''$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado e se assumem todos os requisitos referidos relativos à variável y, bem assim como os requisitos relativos a marcas e hipóteses eliminadas já descritos em casos semelhantes. ∇

Para terminar esta subsecção apresentam-se agora conjuntamente todas as regras de inferência do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_m$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ x:\varphi_1 & x:\varphi_2\end{matrix}}{x:\varphi_1\wedge\varphi_2}\wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ x:\varphi_1\wedge\varphi_2\end{matrix}}{x:\varphi_1}\wedge E_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ x:\varphi_1\wedge\varphi_2\end{matrix}}{x:\varphi_2}\wedge E_e$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[x:\psi]^m\\ \mathcal{D}\\ x:\varphi\end{matrix}}{x:\psi\to\varphi}\to I, m \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ x:\varphi_1\to\varphi_2 & x:\varphi_1\end{matrix}}{x:\varphi_2}\to E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[x:\neg\varphi]^m\\ \mathcal{D}\\ y:\bot\end{matrix}}{x:\varphi}\bot, m \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ x:\varphi_1\end{matrix}}{x:\varphi_1\vee\varphi_2}\vee I_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ x:\varphi_2\end{matrix}}{x:\varphi_1\vee\varphi_2}\vee I_e$$

$$\dfrac{\begin{matrix} & [x:\varphi_1]^{m'} & [x:\varphi_2]^{m''}\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ x:\varphi_1\vee\varphi_2 & y:\psi & y:\psi\end{matrix}}{y:\psi}\vee E, m', m''$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[x\mathbf{R}y]^m\\ \mathcal{D}\\ y:\varphi\end{matrix}}{x:\Box\varphi}\Box I, m \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ x:\Box\varphi & x\mathbf{R}y\end{matrix}}{y:\varphi}\Box E$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ y : \varphi & x\mathbf{R}y \end{array}}{x : \Diamond\varphi} \; \Diamond I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc} & [y : \varphi]^{m'} \;\; [x\mathbf{R}y]^{m''} \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ x : \Diamond\varphi & z : \psi \end{array}}{z : \psi} \; \Diamond E, m', m''$$

Regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_m$

onde se assumem os requisitos já mencionados em sistemas anteriores relativos a marcas e eliminação de hipóteses e se assume ainda que nas regras $\Box I$ e $\Diamond E$ são verificados os seguintes requisitos:

– Regra $\Box I$
  - (i) $y \neq x$
  - (ii) y não ocorre nas hipóteses abertas da derivação de $y : \varphi$ distintas de $x\mathbf{R}y$;

– Regra $\Diamond E$
  - (i) $y \neq x$ e $y \neq z$
  - (ii) y não ocorre nas hipóteses abertas da derivação de $z : \psi$ distintas de $y : \varphi$ e de $x\mathbf{R}y$
  - (iii) as marcas m' e m'' são tais que apenas hipóteses $y : \varphi$ e/ou $x\mathbf{R}y$ na árvore $\mathcal{D}_2$ são (eventualmente) fechadas.

Pode agora estabelecer-se a seguinte definição, na qual

$$FG = \{x : \varphi \; : x \in Et, \; \varphi \in FM_P\} \cup \{x\mathbf{R}y : x, y \in Et\}$$

é o conjunto das fórmulas modais generalizadas sendo Et um conjunto de etiquetas (ou prefixos).

Definição 1.5.6 SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{N}_m$

O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_m$ é constituído pelas regras de inferência $\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\vee E$, $\rightarrow E$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\perp$, $\Box E$, $\Box I$, $\Diamond E$ e $\Diamond I$.

Todas as noções definidas no âmbito do sistema de $\mathcal{N}_p$ são definidas de modo análogo para o sistema $\mathcal{N}_m$. Sendo $\Xi \subseteq FG$ e $\xi \in FG$ a notação

$$\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$$

usa-se agora para afirmar que existe uma dedução de ξ a partir de Ξ em $\mathcal{N}_m$ e a notação

$$\vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$$

para afirmar que existe prova de ξ em $\mathcal{N}_m$. ■

Existe um aspecto interessante relativo à derivação de fórmulas relacionais no sistema $\mathcal{N}_m$. Note-se que nenhuma das regras de inferência tem como conclusão uma fórmula relacional. Assim, uma fórmula relacional é consequência em $\mathcal{N}_m$ de um conjunto de fórmulas Ξ se e só se a fórmula é um elemento de Ξ.

Aborda-se agora a questão da relação[11] entre o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e as noções de consequência semântica (local) e de validade em FM_P e, consequentemente, a relação entre o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e o sistema modal K.

O sistema $\mathcal{N}_m$ permite determinar se uma dada fórmula modal é consequência semântica (local) de um conjunto de fórmulas modais e, como caso particular, se uma fórmula modal é válida (e portanto se uma fórmula modal pertence ao sistema modal K). É por este motivo que se diz que o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ é um sistema dedutivo para o sistema modal K ou, mais precisamente, que o sistema $\mathcal{N}_m$ *é correcto face ao sistema modal* K. Com efeito, dados $\Phi \subseteq FM_P$ e $\varphi \in FM_P$ tem-se que

$$\text{se } \{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi \text{ então } \{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\} \models x : \varphi$$

e portanto para determinar se φ é consequência semântica local de Φ, basta encontrar uma derivação no sistema $\mathcal{N}_m$ de $x : \varphi$ a partir do conjunto formado por fórmulas modais generalizadas $x : \varphi'$ para cada $\varphi' \in \Phi$. Para determinar a validade de uma fórmula modal $\varphi \in FM_P$ procede-se do mesmo modo, tentando agora encontar uma prova de $x : \varphi$ no sistema $\mathcal{N}_m$. Como seria de esperar estes resultados estão relacionados com a propriedade de correcção do sistema $\mathcal{N}_m$.

A relação em sentido inverso também se verifica (embora adiante apenas seja provada para o caso em que as fórmulas só envolvem $\perp$, $\rightarrow$ e $\Box$) e está naturalmente associada à propriedade de completude do sistema $\mathcal{N}_m$.

[11] Estas questões são tratadas com detalhe nas secções 1.9.1 e 1.9.4

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos. Propõe-se também ao leitor que, após a resolução destes exercícios com lápis e papel e a leitura da secção 1.6, resolva estes mesmos exercícios usando a ferramenta *Isabelle*.

Exercício 1.5.7 Na sequência ψ, ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas em FM_P. Mostre que:

1. $\{x : \Box\psi, xRx\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \psi$
2. $\{x : (\neg\psi_1) \to (\Box\psi_2), xRy, y : \neg\psi_2\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \psi$
3. $\{y : \psi_1, xRy\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Diamond(\psi_2 \to \psi_1)$
4. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Box(\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2))$
5. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Box(\psi_1 \to \psi_1)$
6. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : ((\Box\psi_1) \vee (\Box\psi_2)) \to (\Box(\psi_1 \vee \psi_2))$
7. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (((\Box\psi_1) \wedge (\Box\psi_2))) \to (\Box(\psi_1 \wedge \psi_2))$ (e vice-versa)
8. $\{x : \Diamond\psi_1\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Box\psi_2) \to (\Diamond\psi_2)$
9. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond(\psi_1 \vee \psi_2)) \to ((\Diamond\psi_1) \vee (\Diamond\psi_2))$
10. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\Diamond\psi_1) \wedge (\Diamond\psi_2))$
11. $\{x : (\Box\psi_1) \wedge (\Diamond\psi_2)\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2)$
12. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond(\psi_1 \to \psi_2)) \vee (\Box(\psi_2 \to \psi_1))$
13. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond(\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\Box\psi_1) \to (\Diamond\psi_2))$ (e vice-versa)
14. $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond\top) \to ((\Box\psi) \to (\Diamond\psi))$ (e vice-versa)
15. $\{x : ((\Diamond\psi_1) \to (\Box\psi_2))\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Box(\psi_1 \to \psi_2)$ ∎

1.5.2 O sistema $\mathcal{N}_m$ revisitado

Tal como anteriormente, apresenta-se nesta secção uma definição mais rigorosa do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$. Em particular, há que começar por definir mais rigorosamente as noções de fórmula etiquetada (ou prefixada) e de fórmula relacional. Assim, na subsecção 1.5.2.1 introduzem-se os vários conceitos sintácticos e semânticos relativos à noção de fórmula modal etiquetada e à noção de fórmula relacional. Na subsecção 1.5.2.2 apresenta-se então o sistema dedutivo.

1.5.2.1 Fórmulas etiquetadas e fórmulas relacionais: sintaxe e semântica

Nesta subsecção introduzem-se vários conceitos sintácticos e semânticos relativos a fórmulas etiquetadas e fórmulas relacionais.

As definições que aqui se apresentam são as adequadas não só para apresentar o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e provar a sua correcção e completude, mas também, como adiante se verá, para apresentar várias outras extensões deste sistema e provar os respectivos resultados de correcção e completude (secções 1.9.1 e 1.9.4). No entanto, existem outras extensões, que também serão apresentadas adiante, para as quais são necessárias definições um pouco mais elaboradas. Tal deve-se ao facto de, nesses casos, as etiquetas das fórmulas não poderem ser apenas variáveis mas serem também necessários termos que envolvam certos símbolos de função (funções de Skolem). Para tratar esses sistemas, há que generalizar as definições que nesta subsecção se apresentam. Claro que se poderia apresentar desde já a versão mais geral e prosseguir a apresentação com base nessa versão. No entanto, para não sobrecarregar desnecessariamente a exposição, optou-se por tratar o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$, e todos os outros para os quais tal seja possível, deste modo mais simples.

Definição 1.5.8 FÓRMULAS MODAIS GENERALIZADAS SOBRE P E Et
Seja P um conjunto de símbolos proposicionais e Et um conjunto numerável de etiquetas (ou prefixos).

- $FE_P^{Et} = \{x:\varphi : x \in Et \text{ e } \varphi \in FM_P\}$ é o *conjunto das fórmulas modais sobre P etiquetadas em Et*
- $FR^{Et} = \{x\mathbf{R}y : x, y \in Et\}$ é o *conjunto das fórmulas relacionais sobre Et*
- $FG_P^{Et} = FE_P^{Et} \cup FR^{Et}$ é o *conjunto das fórmulas modais generalizadas sobre P e Et.*

Cada elemento de FE_P^{Et} é uma *fórmula etiquetada* (ou *prefixada*). Sempre que não haja ambiguidade àcerca dos conjuntos P e Et usam-se as notações FE, FR, FG para representar FE_P^{Et}, FR^{Et} e FG_P^{Et}, respectivamente.

Para cada $\Xi \subseteq FG$, definem-se os conjuntos Ξ_M, Ξ_{et}, Ξ_E e Ξ_R como se segue

- $\Xi_M = \{\varphi \in FM_P : x:\varphi \in \Xi\}$
- $\Xi_{et} = \{x \in Et : x:\varphi \in \Xi \text{ ou } x\mathbf{R}y \in \Xi \text{ ou } y\mathbf{R}x \in \Xi\}$

- $\Xi_E = FE \cap \Xi$ e $\Xi_R = FR \cap \Xi$. ■

Observação 1.5.9 Para simplificar a exposição, na sequência, sempre que seja feita referência a *fórmulas* tal deve ser entendido como dizendo respeito a fórmulas modais generalizadas. ■

No que se segue assumem-se fixados um conjunto de símbolos proposicionais P e um conjunto de etiquetas Et. Seguem-se agora as noções semânticas relativas às novas fórmulas aqui consideradas.

Definição 1.5.10 Atribuição em estrutura de interpretação modal

Seja $I\!M\!I = (W, R, V)$ uma estrutura de interpretação modal. Uma atribuição de Et em $I\!M\!I$ é uma aplicação $\rho : Et \to W$. O conjunto de todas as atribuições de Et em $I\!M\!I$ representa-se por $ATR^{Et}_{I\!M\!I}$. Se não há ambiguidade sobre qual o conjunto de etiquetas em causa utiliza-se simplesmente a notação $ATR_{I\!M\!I}$.

Se $x \in Et$ e $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$, $\rho[x := w]$ é a atribuição ρ' em $ATR_{I\!M\!I}$ tal que $\rho'(x') = \rho(x')$ para cada $x' \in Et\backslash\{x\}$ e $\rho'(x) = w$. ■

Definição 1.5.11 Satisfação de fórmula modal generalizada por estrutura de interpretação modal com atribuição

Sejam $I\!M\!I$ uma estrutura de interpretação modal, $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$ e $\xi \in FG$. A noção de *satisfação de ξ por $I\!M\!I$ com ρ* define-se como se segue:

- se $\xi = x : \varphi$ então $I\!M\!I, \rho \models \xi$ se $I\!M\!I, \rho(x) \models \varphi$
- se $\xi = x\mathbf{R}y$ então $I\!M\!I, \rho \models x\mathbf{R}y$ se $\rho(x)R\rho(y)$

Dado $\Xi \subseteq FG$, $I\!M\!I, \rho \models \Xi$ se $I\!M\!I, \rho \models \xi$ para cada $\xi \in \Xi$. ■

Fórmulas do tipo $x : \varphi$ são satisfeitas em $I\!M\!I$ com uma dada atribuição quando o mundo representado por x (ou seja, $\rho(x)$) é um mundo de $I\!M\!I$ no qual a fórmula φ é satisfeita. Fórmulas do tipo $x\mathbf{R}y$ são satisfeitas se o mundo que y representa (ou seja, $\rho(y)$) é acessível a partir do mundo representado por x.

Exemplo 1.5.12 Sejam $P = \{p, q, r\}$ e $Et = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ e seja a estrutura de interpretação modal $I\!M\!I = (W, R, V)$ onde

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

- R é tal que, para cada $1 \leq i, j \leq 5$, $w_i R w_j$ se $j = i + 1$
- $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = W$ e $V(r) = \emptyset$.

Seja $\rho : Et \rightarrow W$ tal que $\rho(x_i) = w_i$ para cada $1 \leq i \leq 5$. Tem-se que

- $I\!M, \rho \models x_2 : p \wedge (\neg r)$;
- $I\!M, \rho \models x_1 : \Box p$;
- $I\!M, \rho \not\models x_3 : \Box p$;
- $I\!M, \rho \models x_1 \mathbf{R} x_2$;
- $I\!M, \rho \not\models x_1 \mathbf{R} x_3$. ∎

Definição 1.5.13 Consequência semântica
Sejam $\Xi \subseteq FG$ e $\xi \in FG$.

- Diz-se que ξ é *consequência semântica de* Ξ, o que se representa por $\Xi \models \xi$ se, para cada estrutura de interpretação modal $I\!M$ e cada $\rho \in ATR_{I\!M}$ se tem que se $I\!M, \rho \models \Xi$ então $I\!M, \rho \models \xi$.
- Sendo $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos modais, diz-se que ξ é *consequência semântica de* Ξ *na classe* $\mathcal{E}$, o que se representa por $\Xi \models_{\mathcal{E}} \xi$ se, para cada estrutura de interpretação modal $I\!M$ baseada num enquadramento em $\mathcal{E}$ e cada $\rho \in ATR_{I\!M}$, se tem que se $I\!M, \rho \models \Xi$ então $I\!M, \rho \models \xi$. ∎

A Proposição 1.5.14 relaciona a noção de consequência semântica entre fórmulas modais generalizadas e a noção de consequência semântica entre fórmulas modais. Este resultado é relevante para descrever a relação entre o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ (e os outros sistemas dedutivos que adiante que se apresentarão) e a consequência semântica entre fórmulas modais e a validade de fórmulas modais.

Proposição 1.5.14
Sejam $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \in FM$, $\varphi \in FM$ e $x \in Et$ e seja $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos modais.

1. Se $\{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\} \models x : \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

2. Se $\{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\} \models_{\mathcal{E}} x : \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models_{\mathcal{E}} \varphi$.

Prova: 1. Seja $\mathbb{M} = (W, R, V)$ uma estrutura de interpretação modal e $w \in W$ tal que $\mathbb{M}, w \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Há que provar que $\mathbb{M}, w \models \varphi$.

Seja $\Xi = \{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\}$ e seja $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\rho(x) = w$. Como $\mathbb{M}, w \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ então, pela Definição 1.5.11, tem-se que $\mathbb{M}, \rho \models \Xi$. Dado que $\Xi \models x : \varphi$, pela Definição 1.5.13, $\mathbb{M}, \rho \models x : \varphi$. Novamente pela Definição 1.5.11, $\mathbb{M}, w \models \varphi$ como se pretendia.

2. A prova é idêntica tendo agora em atenção que as estruturas de interpretação modais são baseadas em enquadramentos pertencentes à classe de enquadramentos em causa. ■

1.5.2.2 Sistema dedutivo

O sistema $\mathcal{N}_m$ pode ser visto como uma extensão do sistema $\mathcal{N}_p$, tendo em conta que são aqui manipuladas fórmulas modais generalizadas e existem regras de inferência relativas ao operador modal $\Box$. Note-se que neste sistema não existem regras directamente relacionadas com as fórmulas relacionais.

Assumem-se na sequência todas as definições e notações relativas a árvores apresentadas no capítulo sobre lógica proposicional. Assume-se ainda fixado um conjunto M de marcas.

Definição 1.5.15 Sistema $\mathcal{N}_m$

O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_m$ é constituído pelas regras de inferência seguintes. Na sequência, a_1, a_2 e a_3 são E_{FG}^M-árvores sem conflito de marcas entre si.

- Regra $\Box E$: se $frm(\nu_{a_1}) = x : \Box\varphi$ e $frm(\nu_{a_2}) = x\mathbf{R}y$ então, *por aplicação da regra* $\Box E$, obtém-se a E_{FG}^M-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (y : \varphi, \emptyset)$
- Regra $\Box I$: se $frm(\nu_{a_1}) = y : \varphi$, e sendo $x \in Et$ e $m \in M$ tais que
  - $x \neq y$ e $y \notin \Xi_{et}$ onde $\Xi = Frm(Abt_{a_1} \backslash Abt_{a_1}^{x\mathrm{R}y})$
  - se $m \in Mrc_{a_1}$ então $Abt_{a_1}^{x\mathrm{R}y,m} \neq \emptyset$

  então, *por aplicação da regra* $\Box I$ *com etiqueta* x *e marca* m, obtém-se a E_{FG}^M-árvore $a = a_1{}^\frown (x : \Box\varphi, \{m\})$

- <u>Regra $\Diamond I$</u>: se $frm(\nu_{a_1}) = y : \varphi$ e $frm(\nu_{a_2}) = x\mathbf{R}y$ então, *por aplicação da regra* $\Diamond I$, obtém-se a $E_{FG}^{R_m,M}$-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (x : \Diamond\varphi, \emptyset)$

- <u>Regra $\Diamond E$</u>: se $frm(\nu_{a_1}) = x : \Diamond$, $frm(\nu_{a_2}) = z : \psi$, e sendo $y \in Et$, $m', m'' \in M$ tais que

  - $y \neq x$, $y \neq z$ e $y \notin \Xi_{et}$ onde $\Xi = Frm(Abt_{a_1} \backslash (Abt_{a_1}^{x\mathrm{R}y} \cup Abt_{a_1}^{y:\varphi}))$
  - se $m' \in Mrc_{a_1} \cup Mrc_{a_2}$ então $Abt_{a_2}^{y:\varphi,m'} \neq \emptyset$.
    se $m'' \in Mrc_{a_1} \cup Mrc_{a_2}$ então $Abt_{a_2}^{x\mathrm{R}y,m''} \neq \emptyset$.
  - $Mrc(Abt_{a_1}^{y:\varphi}) \cap Mrc(Abt_{a_2}^{y:\varphi}) = \emptyset$
    $Mrc(Abt_{a_1}^{x\mathrm{R}y}) \cap Mrc(Abt_{a_2}^{x\mathrm{R}y}) = \emptyset$

  então *por aplicação da regra* $\Diamond E$ *com fórmula* $z : \psi$ *e marcas* m' *e* m'', obtém-se a E_{FG}^{M}-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (z : \psi, \{m', m''\})$.

- <u>Regra $\perp$</u>: se $frm(\nu_{a_1}) = y : \perp$, e sendo $x : \psi \in FG$ e $m \in M$ tais que se $m \in Mrc_{a_1}$ então $Abt_{a_1}^{x:\neg\varphi,m} \neq \emptyset$, então*por aplicação da regra* $\perp$ *com fórmula* $x : \varphi$ *e marca* m, obtém-se a E_{FG}^{M}-árvore $a = a_1{}^\frown (x : \varphi, \{m\})$

- <u>Regra $\vee E$</u>: se $frm(\nu_{a_1}) = x : \varphi_1 \vee \varphi_2$, $frm(\nu_{a_2}) = frm(\nu_{a_3}) = y : \psi$ e são verificadas condições semelhantes à apresentadas no caso do sistema $\mathcal{N}_p$, então *por aplicação da regra* $\vee E$ *com fórmula* $y : \psi$ *e marcas* m' *e* m'' obtém-se a E_{FG}^{M}-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (y : \psi, \{m', m''\})$

- as regras $\wedge I$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow I$, $\rightarrow E$, $\vee I_d$ e $\vee I_e$ são definidas à semelhança das apresentadas no caso do sistema $\mathcal{N}_p$.

As regras $\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\Box I$ e $\Diamond I$ dizem-se *regras de introdução* ou *I-regras* e as regras $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E_d$ e $\Box E$ e $\Diamond E$ dizem-se *regras de eliminação* ou *E-regras*. A noção de aridade de uma regra é idêntica à apresentada anteriormente pelo que a regra $\Box I$ é unária e a regra $\Box E$ é binária. ∎

Tal como anteriormente, as condições sobre etiquetas das fórmulas e sobre marcas que são impostas na definição das regras de inferência anteriores visam assegurar que são de facto verificadas em cada árvore de dedução as condições que foram descritas na secção 1.5.1 relativas às etiquetas e às hipóteses que são ou não fechadas/eliminadas por aplicação das regras.

Definição 1.5.16 Árvores de dedução de $\mathcal{N}_m$, conclusão e hipóteses de árvore de dedução

O conjunto das *árvores de dedução*[12] *do sistema dedutivo* $\mathcal{N}_m$ representa-se por $D_{\mathcal{N}_m}$ e tem definição indutiva semelhante à apresentada para $D_{\mathcal{N}_p}$ usando agora as regras de inferência de $\mathcal{N}_m$. Sendo $d \in D_{\mathcal{N}_m}$, as noções de dedução de conclusão de d, hipótese de d e conjunto das hipóteses abertas de d são análogas às apresentadas para o sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

Seguem-se as habituais noções de consequência no sistema dedutivo e de teorema do sistema dedutivo.

Definição 1.5.17 Consequência em $\mathcal{N}_m$ e Teorema de $\mathcal{N}_m$

Sejam $\Xi \subseteq FG$ e $\xi \in FG$. As noções de dedução de ξ a partir Ξ em $\mathcal{N}_m$ e prova de ξ em $\mathcal{N}_m$ são análogas às apresentadas para o sistema $\mathcal{N}_p$. Também é a análoga a definição de ξ *ser consequência de* Ξ *no sistema* $\mathcal{N}_m$, o que se representa agora por

$$\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$$

e o mesmo acontece com a noção de *teorema de* $\mathcal{N}_m$ sendo agora a notação

$$\vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$$

∎

Tem-se de novo o resultado relativo ao facto de as árvores de dedução em $\mathcal{N}_m$ serem árvores sem conflitos de marcas.

Lema 1.5.18
Se $d \in D_{\mathcal{N}_m}$ então d é uma árvore sem conflito de marcas. ∎

Segue-se um resultado semelhante ao metateorema da dedução apresentado nos casos dos sistemas $\mathcal{N}_p$ e $\mathcal{N}_c$.

Proposição 1.5.19
Sejam $x : \varphi, x : \psi \in FE$ e $\Xi \subseteq FG$. Tem-se que

$$\text{se } \Xi \cup \{x : \psi\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi \text{ então } \Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \psi \to \varphi.$$

Prova: Semelhante à apresentada para o caso do sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

[12] *Árvores de derivação, deduções ou derivações*

Termina-se esta secção com um resultado interessante relativo à derivação de fórmulas relacionais no sistema $\mathcal{N}_m$. Note-se que nenhuma das regras de inferência tem como conclusão uma fórmula relacional. Assim, uma fórmula relacional é consequência em $\mathcal{N}_m$ de um conjunto de fórmulas Ξ se e só se a fórmula é um elemento de Ξ.

Proposição 1.5.20
Sendo $\xi \in FR$ e $\Xi \subseteq FG$, $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$ se e só se $\xi \in \Xi$. ∎

1.6 Representação e utilização do sistema $\mathcal{N}_m$ em *Isabelle*

A representação da lógica modal (proposicional) em *Isabelle* não oferece dificuldades de maior. A representação da sintaxe passa por definir os tipos dos objectos sintáticos relevantes. As regras de dedução natural de $\mathcal{N}_m$ são definidas da forma esperada. O ficheiro contendo o sistema $\mathcal{N}_m$ tem por nome `K.thy`.

1.6.1 Tipos

As fórmulas generalizadas são de uma das duas formas seguinte: ou[13] `t1 Rel t2` ou `t1:A`, onde `A` é uma subfórmula modal (proposicional).

Desta forma existem três tipos de objectos sintáticos: os termos (que designam mundos, como por exemplo `x` e `y`), as subfórmulas modais e as fórmulas (generalizadas) propriamente ditas. O tipo destas fórmulas generalizadas é, como habitualmente, designado por `o`. As subfórmulas modais (sem etiquetas) têm tipo `sbf`. Quanto aos termos são tratados de forma semelhante aos termos da lógica de primeira ordem. Assim, é definida uma subclasse `term` de `logic`. Considera-se ainda o tipo `tm` dos termos modais (que é um tipo da classe `term`).

```
classes
     term < logic

types
     tm
```

[13]Modifica-se um pouco a sintaxe introduzida anteriormente.

```
    sbf
    o

arities
    tm :: term
    sbf :: logic
    o :: logic
```

1.6.2 Construtores de fórmulas

As fórmulas generalizadas são obtidas a partir dos termos e das fórmulas modais por uma de duas formas: ou `t1:A` ou `t1 Rel t2`.

Estes dois casos são representados pelos construtores **etf** (de fórmulas etiquetadas) e **relf** e (de fórmulas relacionais). O primeiro, dado um termo e uma subfórmula, devolve uma fórmula (generalizada). O segundo, dados dois termos, devolve uma fórmula. A representação destes é apresentada de seguida.

```
    (* construtores de fórmulas *)

    etf      :: [tm,sbf] => o          ("_:_"[0,0] 10)
    relf      ::  [tm,tm] => o          ("_ Rel _"[0,0] 10)

    Trueprop ::  o => prop          ("(_)"5)
```

1.6.3 Subfórmulas modais

As subfórmulas modais são definidas de forma semelhante à da definição das fórmulas proposicionais, acrescentando-se os operadores modais $\Box$ (`[]`) e $\Diamond$ (`<>`).

```
(* Subformulas modais *)

verum, falsum :: sbf

not      :: sbf => sbf          ("~ _"[40] 40)
```

```
and      ::  [sbf, sbf] => sbf          ("_&_"[36,35] 35)
or      ::  [sbf, sbf] => sbf          ("_|_"[31,30] 30)
imp      ::  [sbf, sbf] => sbf          ("_-->_"[26,25] 25)
iff      ::  [sbf, sbf] => sbf          ("_<->_"[26,25] 25)
box      ::  sbf => sbf          ("[]_"[40] 40)
dia      ::  sbf => sbf          ("<>_"[40] 40)
```

1.6.4 Abreviaturas

As abreviaturas consideradas são as seguintes.

```
(* Abreviaturas *)

verum_def      "verum == falsum-->falsum"
neg_def      "~P == P-->falsum"
eq_def      "P<->Q == (P-->Q) & (Q-->P)"
```

1.6.5 Regras de dedução natural

As regras que dizem respeito aos conectivos proposicionais são apresentadas de seguida, sem mais comentários.

```
(*Conectivos Proposicionais*)

conjI      "[| x:P; x:Q |] ==> x:P&Q"
conjEd      "x:P&Q ==> x:P"
conjEe      "x:P&Q ==> x:Q"

disjId      "x:P ==> x:P|Q"
disjIe      "x:Q ==> x:P|Q"
disjE      "[| x:P|Q; x:P ==> y:R; x:Q ==> y:R |] ==> y:R"

impI      "(x:P ==> x:Q) ==> x:P-->Q"
impE      "[| x:P-->Q; x:P |] ==> x:Q"
```

```
absurdo      "((x:P --> falsum) ==> y:falsum) ==> x:P"
```

As regras referentes aos operadores modais são as seguintes.

```
(* Operadores Modais *)

boxI      "(!!y.  (x Rel y ==> y:P)) ==> x:[]P"
boxE      "[| x:[]P; x Rel y|] ==> y:P"
diaI      "[| x Rel y; y:P|] ==> x:<>P"
diaE      "[| x:<>P; (!!y.  [|x Rel y; y:P|]==> z:P)|]==> z:P"
```

As regras da eliminação do operador $\Box$ e de introdução do operador $\Diamond$ não oferecem dificuldade de maior. Quanto a `boxI` significa que, se, para `y` arbitrário, a partir da hipótese `x Rel y` se consegue estabelecer `y:P`, então estabeleceu-se `x:[]P`. Omite-se a explicação da regra `diaE` que fica ao cuidado do leitor.

Refira-se que, em apêndice (na secção **??**), se referem em mais detalhe alguns aspectos da definição de teorias.

Na derivação seguinte ilustram-se as regras associadas ao operador possibilidade e estabelece-se que `x:(<>(A&B)-->(<>A&<>B))`. Os dois primeiros passos consistem na aplicação das regras de introdução da implicação e da conjunção.

```
> Goal "x:(<>(A&B)-->(<>A&<>B))";
Level 0 (1 subgoal)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  x:<>(A&B)--><>A&<>B

> br impI 1;
Level 1 (1 subgoal)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  x:<>(A&B) ==> x:<>A&<>B

> br conjI 1;
Level 2 (2 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
```

```
1.  x:<>(A&B) ==> x:<>A
2.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

Para estabelecer o primeiro subobjectivo (`x:<>(A&B) ==> x:<>B`) usa-se a regra `[| ?x:<>?P; !!y.  [| ?x Rel y; y:?P |] ==> ?z:?Q |] ==> ?z:?Q` de eliminação do operador possibilidade, que introduz dois subojectivos.

```
> br diaE 1;
Level 3 (3 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  x:<>(A&B) ==> ?x2:<>?P2
2.  !!y.  [| x:<>(A&B); ?x2 Rel y; y:?P2 |] ==> x:<>A
3.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

O primeiro subobjectivo é facilmente estabelecido por hipótese (e corresponde a indicar que a fórmula objecto de eliminação do operador possibilidade é a fórmula `x:<>(A&B)`.

```
> ba 1;
Level 4 (2 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  !!y.  [| x:<>(A&B); x Rel y; y:A&B |] ==> x:<>A
2.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

O primeiro subobjectivo é estabelecido por aplicação da regra `[|?x Rel ?y; ?y:?P |] ==> ?x:<>?P` de introdução do operador possibilidade. A aplicação desta regra introduz dois subobjectivos. O primeiro destes é estabelecido por prova por hipótese.

```
> br diaI 1;
Level 5 (3 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  !!y.  [| x:<>(A&B); x Rel y; y:A&B |] ==> x Rel ?y3(y)
2.  !!y.  [| x:<>(A&B); x Rel y; y:A&B |] ==> ?y3(y):A
3.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

```
> ba 1;
Level 6 (2 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  !!y.  [| x:<>(A&B); x Rel y; y:A&B |] ==> y:A
2.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

Falta agora estabelecer `y:A`. Para tal usa-se eliminação da conjunção e a hipótese `y:A&B`.

```
> br conjEd 1;
Level 7 (2 subgoals)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  !!y.  [| x:<>(A&B); x Rel y; y:A&B |] ==> y:A&?Q4(y)
2.  x:<>(A&B) ==> x:<>B

> ba 1;
Level 8 (1 subgoal)
x:<>(A&B)--><>A&<>B
1.  x:<>(A&B) ==> x:<>B
```

O subobjectivo `x:<>(A&B) ==> x:<>B` estabelece-se de forma semelhante pelo que se omite o resto da derivação.

Exercícios

Os seguintes exercícios são úteis para melhor entendimento das derivações em *Isabelle* usando operadores modais. Sugere-se também a resolução em *Isabelle* das alíneas do Exercício 1.5.7.

1. Usando a teoria `K`, mostre que:

   (a) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$

   (b) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$

   (c) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$

(d) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \vee B)$

(e) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : (\Box\Diamond A) \rightarrow (\neg\Diamond\Box\neg A)$

(f) $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Diamond(A \rightarrow B) \vee \Box(B \rightarrow A)$

1.7 Sistemas de dedução natural para os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$

Nesta secção apresentam-se várias extensões do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$, as quais correspondem a sistemas de dedução natural para outros sistemas modais, ou seja, sistemas dedutivos cujos teoremas estão estreitamente ligados com as fórmulas desses sistemas modais. Tais sistemas modais são, nomeadamente, os sistemas KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ ($S4$) e $KTB4$ ($S5$).

Estas extensões são obtidas adicionando simplesmente às regras de inferência de $\mathcal{N}_m$ uma ou mais regras de inferência. Em todos os casos estas novas regras de inferência são regras relativas a fórmulas relacionais e correspondem às propriedades das relações de acessibilidade subjacentes às caracterizações semânticas dos diferentes sistemas modais. Uma destas regras de inferência é, mais rigorosamente, um *axioma* mas, como os axiomas podem também ser vistos como regras de inferência[14], em muitas situações ao longo das próximas secções far-se-á genericamente referência a regras de inferência.

Tal como acontecia no sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$, nas extensões consideradas nesta secção continua a só ser necessário manipular fórmulas generalizadas do tipo $x : \varphi$ ou $x\mathbf{R}y$, onde x e y são variáveis em Et.

Esta secção está organizada como se segue. Na subsecção 1.7.1 são descritas as regras de inferência relativas a fórmulas relacionais que são necessárias para construir os novos sistemas dedutivos, os quais são depois descritos como nos casos anteriores. Na subsecção 1.7.2 os leitores mais interessados podem encontrar uma definição mais rigorosa destes sistemas. Na subsecção 1.7.3 faz-se representação destes sistemas dedutivos em *Isabelle*.

[14]Uma forma de ver um axioma é considerá-lo como uma regra de inferência de aridade 0, isto é, uma regra de inferência cuja conclusão é o axioma em causa mas que *não tem premissas*. Esta regra de inferência pode ser utilizada em qualquer situação (pois não há premissas a respeitar) e assim pode obter-se a respectiva conclusão (o axioma em causa) sempre que necessário.

As questões relacionadas com correcção e completude destes sistemas dedutivos só serão abordadas nas subsecções 1.9.2 e 1.9.5.

1.7.1 Os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$

Começa-se por apresentar as regras de inferência que são necessárias para construir as extensões ao sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ pretendidas. Estas regras serão designadas regras relacionais. Elas correspondem a propriedades das relações de acessibilidade subjacentes a certas classes de enquadramentos. Sempre que seja necessário distinguir, as regras de inferência anteriormente descritas designam-se regras modais.

Uma das regras de inferência é, mais rigorosamente, um axioma e é definida à parte como tal. Como já havia sido referido, dado que um axioma pode ser visto como uma regra de inferência sem premissas, em muitas situações ao longo do texto falar-se-á apenas de regras de inferência.

As regras relacionais necessárias para construir as extensões ao sistema $\mathcal{N}_m$ pretendidas nesta secção são as que se apresentam na sequência, assumindo que os diferentes elementos têm o significado esperado.

Regra *sim*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ x\mathbf{R}y\end{array}}{y\mathbf{R}x}\ sim$$

∇

Regra *trn*

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ x\mathbf{R}y & y\mathbf{R}z\end{array}}{x\mathbf{R}z}\ trn$$

∇

Regra *euc*

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ x\mathbf{R}y & x\mathbf{R}z\end{array}}{z\mathbf{R}y}\ euc$$

∇

Como os próprios nomes sugerem, as três regras correspondem a certas propriedades das relações de acessibilidade: relações transitivas, relações simétricas e relações euclideanas.

A regra *trn*, por exemplo, exprime a transitividade da relação de acessibilidade. Estender o sistema $\mathcal{N}_m$ com a regra *trn* corresponde a considerar que a relação de acessibilidade subjacente é transitiva. Deste modo facilmente se compreende o facto de o sistema dedutivo que resulta da extensão referida verificar a seguinte propriedade: $x : \varphi$ é teorema do sistema se e só se φ é uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos transitivos (isto é, φ pertence à lógica da classe dos enquadramentos transitivos).

Recorde-se ainda que a classe de enquadramentos transitivos caracteriza semanticamente o sistema modal $K4$ (ou seja, φ é uma fórmula de $K4$ se e só se é válida na classe dos enquadramentos transitivos). Assim, tem-se que $x : \varphi$ é teorema do sistema dedutivo referido se e só se φ é uma fórmula do sistema $K4$. Diz-se então que este sistema dedutivo é correcto e completo para o sistema modal $K4$ e, por esta razão, tal sistema é designado $\mathcal{N}_m^4$. No exemplo seguinte apresenta-se uma derivação em $\mathcal{N}_m^4$.

Exemplo 1.7.1 A árvore seguinte é uma derivação em $\mathcal{N}_m^4$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_1 : \Box\varphi^{\,1} \qquad \dfrac{x_1\mathbf{R}\ x_2^{\,2} \qquad x_2\mathbf{R}\ x_3^{\,3}}{x_1\mathbf{R}\ x_3}\ trn}{x_3 : \varphi}\ \Box E}{x_2 : \Box\varphi}\ \Box I, 3}{x_1 : \Box(\Box\varphi)}\ \Box I, 2}{}\ \to I, 1$$

$$x_1 : (\Box\varphi) \to (\Box(\Box\varphi))$$

Como se verá, esta árvore permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_m^4} x_1 : (\Box\varphi) \to (\Box(\Box\varphi))$. ■

Procedendo de igual forma com as outras regras obtêm-se sistemas dedutivos para outros sistemas modais. Se se estender $\mathcal{N}_m$ com a regra *sim* obtém-se um sistema dedutivo tal que $x : \varphi$ é teorema do sistema se e só se φ é uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos simétricos o que, raciocinando como acima, significa que é um sistema dedutivo para o sistema modal KB. Este sistema é designado $\mathcal{N}_m^B$. Se se estender $\mathcal{N}_m$ com a regra *euc* obtém-se um sistema dedutivo tal que $x : \varphi$ é teorema do sistema se e só se φ é uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos euclideanos, ou seja, obtém-se um sistema dedutivo para o sistema modal $K5$. Este sistema é designado $\mathcal{N}_m^5$.

Note-se que nada impede que se adicione mais do que uma regra de inferência.

Finalmente, discute-se agora o axioma *ref.* Este axioma está relacionado com a propriedade reflexiva das relações de acessibilidade. Assim, à semelhança dos casos acima descritos, no novo sistema que se obtém tem-se que $x : \varphi$ é teorema desse sistema se e só se φ é uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos reflexivos. Tem-se ainda que $x : \varphi$ é teorema do sistema se e só se φ pertence ao sistema modal KT. A designação do novo sistema dedutivo é $\mathcal{N}_m^T$.

Recorde-se que se a relação é reflexiva então cada mundo está em relação consigo próprio - wRw. Note-se que quando se formula, por exemplo, a propriedade transitiva - "se wRw' e $w'Rw''$ então wRw''- estão presentes duas premissas, wRw' e $w'Rw''$, que, naturalmente, têm de ser verificadas para se poder concluir wRw''. Consequentemente, regra de inferência *trn* é, como se viu, uma regra de aridade 2 que permite obter uma derivação de $x\mathbf{R}z$ a partir de derivações de $x\mathbf{R}y$ e $y\mathbf{R}z$. Estas derivações de $x\mathbf{R}y$ e $y\mathbf{R}z$ podem ser vistas como *premissas* da regra *trn.* Voltando à propriedade reflexiva, o que se afirma é que cada mundo está sempre em relação consigo próprio e portanto, contrariamente ao que acontece no caso da propriedade transitiva, a formulação não é do tipo "se ... então ...", ou seja, não existem premissas. Este facto reflecte-se, como é de esperar, na definição da regra *ref.* A regra *ref* não é uma regra de aridade 1, 2 ou 3 como as que foram sendo apresentadas até aqui, é uma regra de aridade 0 porque não tem premissas. Como foi já referido atrás, isto significa que esta regra é, mais precisamente, um *axioma.* O axioma *ref* é usualmente representado da seguinte forma

Axioma *ref*:

$$\frac{}{x\mathbf{R}x}\ ref$$

onde o facto de nada ser representado acima da linha horizontal, exprime precisamente que não existem premissas. Deste modo, em princípio, seria sempre possível em qualquer situação, e para cada $x \in Et$, obter uma derivação de $x\mathbf{R}x$, ou seja, dada uma derivação qualquer d, poder-se-ia sempre prolongar esta derivação utilizando o axioma *ref* e obter uma derivação d' com conclusão $x\mathbf{R}x$. No entanto, esta situação não é de grande utilidade porque se perde a informação representada na conclusão de d e, se se pretende usar o facto de se considerar reflexiva a relação de acessibilidade, pode-se sempre usar a derivação correspondente a uma árvore de derivação singular a cujo nó está associada a fórmula $x\mathbf{R}x$. Por este motivo, na sequência, a utilização do axioma *ref* será apenas permitida na construção de árvores de derivação singulares. Consequentemente, nas derivações do sistema $\mathcal{N}_m^T$ (e de todos os sistemas dedutivos que incluirem *ref*), fórmulas do tipo $x\mathbf{R}x$ que resultem do axioma *ref* apenas ocorrerão nas folhas. Estas derivações têm no entanto uma característica particular que merece alguma atenção. No Exemplo 1.7.2 ilustra-se esta questão.

Exemplo 1.7.2 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{x:\varphi^{1} \qquad\qquad xRx}{x:\Diamond\varphi}\,\Diamond I}{x:\varphi\rightarrow(\Diamond\varphi)}\,\rightarrow I,1$$

é uma árvore de derivação do sistema $\mathcal{N}_m^T$. Como se verá, esta derivação permite dizer que $x:\varphi\rightarrow(\Diamond\varphi)$ é teorema de $\mathcal{N}_m^T$.

Nesta derivação a fórmula $x\mathbf{R}x$ corresponde a uma folha da árvore de derivação e portanto a uma hipótese da derivação. De acordo com o que se tem vindo a fazer até aqui, a esta hipótese deveria corresponder uma marca. No entanto, na árvore apresentada esta hipótese não tem marca. Explica-se na sequência o porquê desta situação, a qual está naturalmente relacionada com a presença do axioma *ref*.

Suponha-se que na árvore anterior à hipótese $x\mathbf{R}x$ estava associada uma marca (a marca 2, por exemplo). Essa árvore constituiria uma derivação em $\mathcal{N}_m$ de x :

$\varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ a partir de $x\mathbf{R}x$ (note-se que, neste caso, $x\mathbf{R}x$ seria hipótese aberta). Informalmente, esta derivação corresponderia a estabelecer que se um mundo se vê a si próprio então $\varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ verifica-se nesse mundo. Como é habitual, a hipótese aberta $x\mathbf{R}x$ corresponde à assumpção de que o mundo se vê a si próprio.

Note-se que não é possível derivar $x : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ em $\mathcal{N}_m$ a partir de um conjunto vazio de hipóteses abertas (i.e., não se tem $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$) pois, pela Proposição 1.9.3, tal significaria que $\varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ seria uma fórmula válida o que não é o caso, como facilmente se prova. No entanto, faz sentido exigir que no contexto do sistema $\mathcal{N}_m^T$ (que, como foi atrás referido, se pretende que seja um sistema dedutivo para o sistema modal KT) tenha de existir uma derivação de $x : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ a partir de um conjunto vazio de hipóteses abertas, (i.e., ter-se-á de ter $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$) pois $\varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ pertence ao sistema modal KT. De um modo mais informal, tal derivação corresponde a estabelecer que $\varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$ se verifica em qualquer mundo (o que faz o sentido pois, no âmbito dos enquadramentos reflexivos, todos os mundos se veêm a si próprios).

Isto significa que, no contexto do sistema $\mathcal{N}_m^T$, a "hipótese"$x\mathbf{R}x$ é vista de um modo especial.

O facto de *ref* ser um axioma do sistema corresponde precisamente ao facto de considerar, *à partida*, que todos os mundos se vêem a si próprios. Assim, na derivação apresentada acima, $x\mathbf{R}x$ não é uma simples hipótese aberta representando o facto de se assumir que, em particular, o mundo representado por x se vê a si próprio. A fórmula $x\mathbf{R}x$ corresponde aqui ao axioma *ref* que representa que se considera *à partida* que *todos* os mundos se vêem a si próprios. O modo como se distinguem os dois casos tem precisamente a ver com a existência ou não de marcas associadas a $x\mathbf{R}x$. No âmbito do sistema $\mathcal{N}_m^T$, $x\mathbf{R}x$ não é uma hipótese, é um axioma e portanto, *não lhe é associada nenhuma marca*[15]. Assim sendo, na derivação acima todas as hipóteses são fechadas e portanto, como se verá, esta derivação permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \varphi \rightarrow (\Diamond\varphi)$.

No caso geral, o modo como se utiliza o axioma *ref* nas árvores de derivação do sistema $\mathcal{N}_m^T$ é sempre semelhante ao que se descreveu ao longo deste exemplo: a fórmula $x\mathbf{R}x$ corresponde a uma folha da árvore e *não tem associada qualquer marca* (e é, portanto, uma folha fechada).

Na representação de uma derivação na qual se tenha utilizado o axioma *ref*, e para tornar mais claro o facto deste axioma ter sido utilizado, pode também optar-se

[15] Ou, mais rigorosamente, é-lhe associado um conjunto vazio de marcas

por incluir a referência explícita ao axioma como se exemplifica seguidamente:

$$\cfrac{\cfrac{x:\varphi^{1} \qquad \cfrac{}{xRx}\,ref}{x:\Diamond\varphi}\,\Diamond I}{x:\varphi\to(\Diamond\varphi)}\,\to I,1$$

■

Na Figura 1.3 apresenta-se uma tabela que apresenta várias extensões do sistema $\mathcal{N}_m$ com uma ou mais das regras relacionais referidas nesta secção. No Exemplo 1.7.3 apresenta-se um exemplo de derivação no sistema $\mathcal{N}_m^{TB4}$ ($S5$).

Exemplo 1.7.3 A árvore

$$\cfrac{\cfrac{x:\Diamond\varphi^{1} \qquad \cfrac{\cfrac{y:\varphi^{2} \qquad \cfrac{\cfrac{xRz^{4}}{zRx}\,sim \qquad xRy^{3}}{zRy}\,trn}{z:\Diamond\varphi}\,\Diamond I}{x:\Box\Diamond\varphi}\,\Box I,4}{x:\Box\Diamond\varphi}\,\Diamond E,2,3}{x:(\Diamond\varphi)\to(\Box\Diamond\varphi)}\,\to I,1$$

é uma derivação no sistema $\mathcal{N}_m^{TB4}$ que, como se verá, permite concluir que $x:(\Diamond\varphi)\to(\Box\Diamond\varphi)$ é teorema do sistema.

Pode agora estabelecer-se a seguinte definição.

Sistema dedutivo	Regras de inferência modais	Regras de inf./axiomas relacionais
$\mathcal{N}_m^T$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*ref*
$\mathcal{N}_m^B$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*sim*
$\mathcal{N}_m^4$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*trn*
$\mathcal{N}_m^5$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*euc*
$\mathcal{N}_m^{T4}$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*trn,ref*
$\mathcal{N}_m^{TB4}$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$, $\Diamond I$, $\Diamond E$	*sim,trn,ref*

Figura 1.3: Algumas extensões do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$

Definição 1.7.4 Sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$

Os *sistemas dedutivos* $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ *e* $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são constituídos como indicado na tabela da Figura 1.3. Todas as noções e notações definidas no âmbito do sistema de $\mathcal{N}_m$ são definidas de modo análogo para o sistema $\mathcal{N}_m$. ■

Existe um aspecto interessante relativo à derivação de fórmulas relacionais nos sistemas dedutivos referidos nesta secção: se existe uma derivação de uma fórmula relacional num desses sistemas então é possível construir uma derivação dessa fórmula, no sistema correspondente, na qual não são utilizadas regras de inferência modais (Proposição 1.7.9).

Sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$

Refere-se agora de novo a questão da relação[16] entre os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ e (i) as noções de consequência semântica (local) e de validade em FM_P (em certas classes de enquadramentos), (ii) os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$.

Tal como acontecia no sistema $\mathcal{N}_m$, os sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ permitem determinar se uma dada fórmula modal é consequência semântica (local) de um conjunto de fórmulas modais em certas classes de enquadramentos. Como caso particular, permitem assim determinar se uma fórmula modal é válida em certas classes de enquadramentos. Com efeito, dados $\Phi \subseteq FM_P$ e $\varphi \in FM_P$ tem-se que

- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref}} \varphi$
- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^B} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{sim}} \varphi$
- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^4} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{trn}} \varphi$
- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{euc}} \varphi$
- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} \varphi$
- se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}} \varphi$

e portanto para determinar se φ é consequência semântica local de Φ nas classes de enquadramentos indicadas, basta encontrar uma derivação no sistema dedutivo correspondente de $x : \varphi$ a partir do conjunto formado por fórmulas modais generalizadas $x : \varphi'$ para cada $\varphi' \in \Phi$. Para determinar a validade de uma fórmula modal numa das classes de enquadramentos procede-se do mesmo modo. Tendo em conta que os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$ são constituído pelas fórmulas válidas na classe dos enquadramentos reflexivos, simétricos, transitivos, euclideanos, simétricos e transitivos, reflexivos, simetricos e transitivos, respectivamente, tem-se que se $x : \varphi$ é teorema do sistema dedutivo associado a cada classe de enquadramentos, então φ é uma fórmula do sistema modal correspondente. Diz-se então que cada um dos sistemas dedutivos é *correcto* face ao sistema modal correspondente.

Como seria de esperar estes resultados estão relacionados com a propriedade de correcção do sistema $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$.

[16] Estas questões são tratadas com detalhe nas secções 1.9.2 e 1.9.5

A relação em sentido inverso também se verifica (embora adiante apenas seja provada para o caso em que as fórmulas só envolvem $\perp$, $\rightarrow$ e $\Box$) e está naturalmente associada à propriedade de completude dos sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$.

Termina-se esta secção com mais algumas observações relevantes.

As regras relacionais e o axioma apresentados acima não são independentes, isto é, é possível, nos casos que seguidamente se ilustram, obter uma das regras como regra derivada a partir de outras.

- A regra *sim* pode ser obtida à custa da regra *euc* e do axioma *ref*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ x_1\mathbf{R}\ x_2\end{array} \qquad x_1\mathbf{R}\ x_1}{x_2\mathbf{R}\ x_1}\ euc$$

  Note-se que o axioma *ref* na folha da árvore não tem marca. Consequentemente, esta folha está sempre, por definição, fechada.

- A regra *trn* pode ser obtida à custa da regra *euc* e do axioma *ref*:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ x_1\mathbf{R}\ x_2\end{array} \qquad x_1\mathbf{R}\ x_1}{x_2\mathbf{R}\ x_1}\ euc \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ x_2\mathbf{R}\ x_3\end{array}}{x_1\mathbf{R}\ x_3}\ euc$$

- A regra *euc* pode ser obtida à custa das regras *sim* e *trn*:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ x_1\mathbf{R}\ x_2\end{array}}{x_2\mathbf{R}\ x_1}\,sim \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ x_1\mathbf{R}\ x_3\end{array}}{x_2\mathbf{R}\ x_3}\,trn$$

Do que ficou exposto resulta que, em certos casos, é possível considerar variantes ao modo como certos sistemas dedutivos foram definidos.

Note-se que os sistemas de dedução natural que foram referidos ao longo desta secção não são os únicos que é possível definir à custa das regras de inferência relacionais e do axioma apresentados. De facto, outras combinações destas regras/axioma com as regras do sistema $\mathcal{N}_m$ poderão dar origem a outros sistemas de dedução natural. Nesta secção foram apenas mencionados alguns dos casos mais comuns na literatura. Como exemplo de um sistema que aqui não foi mencionado pode referir-se o caso do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^{45}$ que é constituído pelas regras de inferência modais e pelas regras de inferência relacionais *trn* e *euc*. Prova-se que este sistema é correcto relativamente à classe de enquadramentos transitivos e euclideanos.

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.7.5 Na sequência ψ, ψ_1 e ψ_2 designam fórmulas em FM_P. Mostre que:

1. $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : (\Box\psi) \to \psi$
2. $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \Diamond(\psi \to (\Box\psi))$
3. $\{x : \psi\} \vdash_{\mathcal{N}_m^B} x : \Box(\Diamond\psi)$
4. $\{\Box(\psi_1 \to \psi_2)\} \vdash_{\mathcal{N}_m^4} \Box((\Box\psi_1) \to (\Box\psi_2))$
5. $\vdash_{\mathcal{N}_m^4} x : (\Box\psi) \to (\Box(\Box\psi))$

6. $\vdash_{\mathcal{N}_m^5} x(\Diamond\psi) \to (\Box(\Diamond\psi))$

7. $\vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : (\Diamond(\Box\psi)) \to (\Diamond\psi)$

8. $\vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : (\Box\psi) \to (\Box(\Diamond\psi))$

9. $\{x : \Box(\Box\psi)\} \vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \Box\psi$

10. $\{\Diamond\psi\} \vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} \Diamond(\Diamond\psi)$

11. $\vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : (\Diamond\psi) \to (\Box(\Diamond\psi))$ (e vice-versa)

12. $\vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : (\Box\psi) \to (\Diamond(\Box\psi))$ (e vice-versa) ∎

1.7.2 Os sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ revisitados

Assumem-se fixados um conjunto (numerável) de etiquetas Et, um conjunto de símbolos proposicionais P e um conjunto M de marcas.

Definição 1.7.6 Axioma ref e regras de inferência *sim*, *trn* e *euc*
Na sequência, a_1 e a_2 são E_{FG}^M-árvores sem conflito de marcas entre si.

- Axioma *ref*: toda a E_{FG}^M-árvore singular com etiqueta $(x\mathbf{R}x, \emptyset)$
- Regra *sim*: se $frm(\nu_{a_1}) = x\mathbf{R}y$ então, *por aplicação da regra sim*, obtém-se a E_{FG}^M-árvore $a = a_1{}^\frown (y\mathbf{R}x, \emptyset)$
- Regra *trn*: se $frm(\nu_{a_1}) = x\mathbf{R}y$ e $frm(\nu_{a_2}) = y\mathbf{R}z$ então, *por aplicação da regra trn*, obtém-se a E_{FG}^M-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (x\mathbf{R}z, trn, \emptyset)$
- Regra *euc*: se $frm(\nu_{a_1}) = x\mathbf{R}y$ e $frm(\nu_{a_2}) = x\mathbf{R}z$ então, *por aplicação da regra euc*, obtém-se uma E_{FG}^M-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (z\mathbf{R}y, \emptyset)$ ∎

Genericamente, as regras *sim*, *trn* e *euc* e o axioma *ref* são na sequência designadas *regras de inferência relacionais* quando for necessário distingui-las das já apresentadas anteriormente que serão designadas *regras de inferência modais.*

A utilização do axioma *ref* nas deduções dos sistemas dedutivos que o incluírem reflecte-se ao nível de quais são as E_{FG}^M-árvores singulares que se consideram como sendo árvores de dedução do sistema dedutivo em causa. O axioma *ref* é apenas utilizado para construir derivações singulares. Nas derivações dos sistemas que incluirem este axioma, fórmulas do tipo $x\mathbf{R}x$ resultantes da sua utilização apenas ocorrerão nas folhas das árvores e não existirá nenhuma marca associada a tais fórmulas pelo que essas folhas estarão sempre, por definição, fechadas.

Definição 1.7.7 Sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$
Os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são constituídos pelas regras de inferência (e axiomas) referidas na Definições 1.5.15 e 1.7.6 como se indica na tabela da Figura 1.3. ∎

A partir da definição dos sistemas anteriores, a definição de conjunto das árvores de dedução em cada um deles segue a usual definição indutiva e a notação utilizada para designar cada conjunto é a também a usual. Existe o detalhe diferente que consiste no facto de qualquer instância do axioma *ref* ser uma árvore de dedução nos sistemas que o incluem. Como exemplo, apresenta-se a definição para o caso do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^T$. Os outros casos são semelhantes.

Definição 1.7.8 Árvores de dedução do sistema $\mathcal{N}_m^T$
O conjunto das *árvores de dedução do sistema dedutivo* $\mathcal{N}_m^T$ representa-se por $D_{\mathcal{N}_m^T}$ e define-se indutivamente de modo semelhante ao apresentado para o sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ excepto que se considera também o seguinte caso: todas as instâncias do axioma *ref* pertencem a $D_{\mathcal{N}_m^T}$. ∎

No contexto dos vários sistemas dedutivos definidos nesta secção, as noções de conclusão, hipóteses abertas/fechadas são as usuais, o mesmo se podendo dizer relativamente às noções (e notações associadas) de dedução/consequência de $\xi \in FG$ a partir $\Xi \subseteq FG$ e de teorema.

Termina-se esta secção com um resultado que, à semelhança da Proposição 1.5.20, está relacionado com as fórmulas relacionais que se podem derivar no âmbito dos sistemas dedutivos aqui apresentados.

Proposição 1.7.9
Sendo $\xi \in FR$, $\Xi \subseteq FG$ e $\mathcal{N} \in \{\mathcal{N}_m^T, \mathcal{N}_m^B, \mathcal{N}_m^4, \mathcal{N}_m^5, \mathcal{N}_m^{T4}, \mathcal{N}_m^{TB4}\}$ tem-se que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}} \xi$ se e só se existe uma derivação de ξ a partir de Ξ_R em $\mathcal{N}$ na qual não são utilizadas regras de inferência modais.

Prova: Prova-se que se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}} \xi$ então existe uma derivação com as características indicadas (note-se que a prova da afirmação recíproca é trivial) . A prova faz-se provando, por indução na profundidade das árvores, que, qualquer que seja $\xi' \in FR$, se existe uma árvore de dedução d' em $\mathcal{N}$ tal que $conc(d') = \xi'$ e $H_{d'} \subseteq \Xi$ então existe uma derivação d'' em $\mathcal{N}$ tal que $conc(d'') = \xi'$, $H_{d''} \subseteq \Xi_R$ e não são utilizadas regras de inferência modais.

Base: Seja $\xi' \in FR$ e suponha-se que d' tem profundidade 1. Então d' é uma árvore de dedução singular e portanto ou $\xi' \in \Xi$ (e consequentemente $\xi' \in Xi_R$) ou $\mathcal{N}$ inclui o axioma *ref* e a derivação corresponde à utilização desse axioma. Em ambos os casos esta derivação satisfaz as características indicadas para d''.

Passo: Seja $\xi' \in FR$ e seja d' uma árvore de dedução com profundidade $n > 1$. Dado que $conc(d') \in FR$ e tendo em conta as regras de inferência dos sistemas dedutivos em causa tem-se necessariamente que $rg(\nu_{d'}) \in \{trn, sim, euc\}$. Suponha-se que $rg(\nu_{d'}) = sim$ (os outros casos são idênticos). Isto siginifica que d' é

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ y\mathbf{R}x\end{array}}{x\mathbf{R}y}\,sim$$

assumindo $\xi' = x\mathbf{R}y$. Tem-se então que a árvore d_1

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ y\mathbf{R}x\end{array}$$

é uma árvore de dedução em $\mathcal{N}$, tem profundidade menor que n, $conc(d_1) \in FR$ e $H_{d_1} \subseteq \Xi$. Por hipótese de indução existe d_2 em $\mathcal{N}$ tal que $conc(d_2) = y\mathbf{R}x$, $H_{d_2} \subseteq \Xi_R$ e não são utilizadas regras de inferência modais. Aplicando a regra *sim* a d_2 obtém-se uma árvore d'' com as características pretendidas. ∎

1.7.3 Os sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ em *Isabelle*

A representação em *Isabelle* dos novos sistemas de dedução natural é obtida a partir da teoria `K` (relativa ao sistema $\mathcal{N}_m$) adicionando as regras convenientes. Por exemplo, o ficheiro `KT.thy` que descreve o sistema $\mathcal{N}_m^T$, tem o seguinte conteúdo:

```
KT=K+
```

```
global
rules
rfl "x Rel x"
end
```

Outras teorias são definidas de forma semelhante:

- ao sistema $\mathcal{N}_m^B$ corresponde o ficheiro `KB.thy`:

  ```
  KB=K+

  global
  rules
  sim "x Rel y ==>y Rel x"
  end
  ```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^4$ corresponde o ficheiro `K4.thy`:

  ```
  K4=K+

  global
  rules
  trn "[|x Rel y; y Rel z|] ==>x Rel z"
  end
  ```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^5$ corresponde o ficheiro `K5.thy`:

  ```
  K5=K+

  global
  rules
  euc "[|x Rel y; x Rel z|] ==>y Rel z"
  end
  ```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^{T4}$ corresponde o ficheiro `S4.thy`:

```
S4=KT+K4
```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^{TB4}$ corresponde o ficheiro `S5.thy`:

```
S5=KT+KB+K4
```

Exemplos de derivações

O primeiro exemplo corresponde a estabelecer o teorema `x:(P--><>P)` do sistema $\mathcal{N}_m^{T}$. O primeiro passo da derivação é a aplicação da regra de introdução da implicação.

```
use_thy "KT";
> Goal "x:(P--><>P)";
Level 0 (1 subgoal)
x:P--><>P
1.  x:P--><>P

> br impI 1;
Level 1 (1 subgoal)
x:P--><>P
1.  x:P ==> x:<>P
```

Segue-se a aplicação da regra de introdução do operador possibilidade.

```
> br diaI 1;
Level 2 (2 subgoals)
x:P--><>P
1.  x:P ==> x Rel ?y1
2.  x:P ==> ?y1:P
```

O primeiro subobjectivo corresponde a encontrar `?y1` relacionado com `x`. O `?y1` conveniente é o próprio `x`. Para tal usa-se resolução com a regra `rfl` (`?x Rel ?x`). Como a regra não tem premissas não introduz nenhum subobjectivo.

```
> br rfl 1;
Level 3 (1 subgoal)
x:P--><>P
1.  x:P ==> x:P
```

A derivação termina usando prova por hipótese.

```
> ba 1;
Level 4
x:P--><>P
No subgoals!
```

A derivação seguinte é semelhante mas usa tacticais. Pretende-se estabelecer `x:(P--><><><>P)`. É interessante notar que os mesmos comandos permitem estabelecer teoremas da forma `x:(P--><>...<>P)`, para qualquer número de ocorrências do operador possibilidade.

```
> Goal "x:(P--><><><>P)";
Level 0 (1 subgoal)
x:P--><><><>P
1.  x:P--><><><>P

> br impI 1;
Level 1 (1 subgoal)
x:P--><><><>P
1.  x:P ==> x:<><><>P

> by (REPEAT (resolve_tac[diaI] 1 THEN resolve_tac[rfl] 1));
Level 2 (1 subgoal)
x:P--><><><>P
1.  x:P ==> x:P

> ba 1;
Level 3
```

```
x:P--><><><>P
No subgoals!
```

Exercícios

Seguem-se alguns exercícios sobre estes novos sistemas modais. Sugere-se também a resolução em *Isabelle* das alínes do Exercício 1.7.5.

1. Usando as teorias `KT`, `KB`, `K4`, `K5`, `S4` e `S5` mostre que:

   (a) $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \Box A \to A$

   (b) $\vdash_{\mathcal{N}_m^B} x : A \to \Box\Diamond A$

   (c) $\vdash_{N_m^B} x : \Box(\Diamond A \to B) \to (A \to \Box B)$

   (d) $\vdash_{\mathcal{N}_m^4} x : \Box A \to \Box\Box A$

   (e) $\vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : \Diamond A \to \Box\Diamond A$

   (f) $\vdash_{N_m^5} x : \Box\Box A \Leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$

   (g) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \Diamond A \Leftrightarrow \Diamond\Diamond A$

   (h) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \Diamond\Box\Diamond\Box A \Leftrightarrow \Diamond\Box A$

   (i) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \Box\Diamond\Box\Diamond A \Leftrightarrow \Box\Diamond A$

   (j) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \Diamond\Box P \Leftrightarrow \Box P$

   (k) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \Box\Diamond P \Leftrightarrow \Diamond P$

1.8 Sistemas de dedução natural para os sistemas modais D, 2, X, $D45$ e $T42$

Nesta secção apresentam-se mais algumas extensões do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$: os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$.

Tal como as extensões de $\mathcal{N}_m$ apresentadas anteriormente, estas novas extensões obtêm-se considerando novas regras de inferência que envolvem apenas fórmulas relacionais. No entanto, estas novas extensões têm a particularidade de se revelar necessário manipular fórmulas $t : \varphi$ ou $s\mathbf{R}t$, onde as etiquetas t e s podem não ser variáveis. Com efeito, em certas situações, torna-se necessário que estas etiquetas incluam determinados símbolos de função não sendo assim suficiente ter apenas um conjunto de etiquetas Et. Estas etiquetas são, com efeito, *termos* sobre uma certa assinatura de primeira ordem. Consequentemente, também ao nível das estruturas semânticas terão de ser incluídas algumas alterações. Como se verá, o modo como vão ser apresentados os sistemas dedutivos que se consideram nesta secção corresponde a uma generalização do modo como foram apresentados os sistemas dedutivos considerados até aqui.

À semelhança das anteriores, esta secção está organizada como se segue. Na subsecção 1.8.1 são descritas as novas regras de inferência relativas a fórmulas relacionais que são necessárias para construir estes novos sistemas dedutivos, que são depois apresentados do modo informal usual. Na subsecção 1.8.2 apresenta-se uma definição mais rigorosa. Na subsecção 1.8.3 faz-se representação destes sistemas dedutivos em *Isabelle*.

As questões relacionadas com correcção e completude destes sistemas dedutivos só serão abordadas nas subsecções 1.9.3 e 1.9.6.

1.8.1 Os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$

Nesta secção apresentam-se as regras de inferência que é necessário considerar para construir as novas extensões ao sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$. Tal como nas extensões anteriores, as novas regras correspondem a propriedades das relações de acessibilidade subjacentes a certas classes de enquadramentos. As propriedades que aqui são mais relevantes são a serialidade, a densidade e a convergência. Uma das novas regras de inferência é, mais rigorosamente, um axioma.

Como foi referido, são agora relevantes as propriedades de serialidade, de densidade e de convergência das relações binárias. Estas propriedades podem exprimir-se através de fórmulas de primeira ordem como se segue.

- Serialidade: $\forall x \exists y \, \mathbf{R}(x, y)$
- Densidade: $\forall x \forall y((\mathbf{R}(x, y) \to \exists z(\mathbf{R}(x, z) \land \mathbf{R}(z, y)))$ ou, de modo equivalente, $\forall x \forall y \exists z(\mathbf{R}(x, y) \to (\mathbf{R}(x, z) \land \mathbf{R}(z, y)))$
- Convergência: $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(x, z)) \to \exists u(R(y, u) \land R(z, u)))$ ou, de modo equivalente, $\forall x \forall y \forall z \exists u((R(x, y) \land R(x, z)) \to (R(y, u) \land R(z, u)))$.

São estas fórmulas que vão sugerir as novas regras de inferência. Seguindo a técnica designada *skolemização* é possível "simplificar" de algum modo estas fórmulas e é a partir dessas fórmulas simplificadas que vão surgir as referidas regras de inferência.

A técnica designada *skolemização*[17], permite "eliminar" o quantificador existencial em fórmulas do tipo

$$\forall x_1(\ldots(\forall x_n(\exists y\,\varphi))\ldots)$$

onde φ tem como variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$ e y, considerando fórmulas do tipo

$$\forall x_1(\ldots(\forall x_n\,\varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)})\ldots)$$

onde

$$\varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)}$$

representa a fórmula que se obtém quando em φ se substitui y pelo termo $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e f_φ é o símbolo de função de Skolem[18] associado a φ.

Informalmente, $\forall x_1(\ldots(\forall x_n(\exists y\,\varphi))\ldots)$, exprime a ideia de que para cada tuplo de n elementos (representados por $x_1, \ldots, x_n$) existirá um elemento (representado por y) tal que φ se verifica. Assim, de um modo implícito, está aqui presente uma *função* que a cada tuplo de n elementos faz corresponder um certo elemento que satisfaz uma derterminada condição (a asserção que φ representa). Para cada tuplo $(x_1, \ldots, x_n)$, o y procurado pode ser visto como o resultado de aplicar a referida função a $(x_1, \ldots, x_n)$. É esta a razão pela qual se considera, para cada fórmula do tipo indicado, o símbolo de função f_φ e a fórmula $\forall x_1(\ldots(\forall x_n\,\varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)})\ldots)$ (na qual o quantificador existencial "desapareceu" e o y é substituído por $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$).

Prova-se[19] que, sendo Γ um conjunto de fórmulas fechadas, então

$$(\forall x_1(\ldots(\forall x_n(\exists y\,\varphi))\ldots)) \Leftrightarrow (\forall x_1(\ldots(\forall x_n\,\varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)})\ldots))$$

é consequência[20] de $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\forall x_1(\ldots(\forall x_n((\exists y\,\varphi) \to \varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)}))\ldots)\}$. Informalmente, tal significa que, sob as hipóteses em Γ^*, a fórmula com o quantificador existencial é equivalente à fórmula em que tal quantificador "desapareceu". Prova-se que

[17] Para uma abordagem mais detalhada sobre este assunto consultar, por exemplo, [1, 6].

[18] Ou mais simplesmente, função de Skolem

[19] Ver [6], por exemplo.

[20] Pode aqui considerar-se quer consequência em $\mathcal{N}_c$, quer consequência semântica.

não existem diferenças essenciais entre Γ e Γ^*, ou seja, prova-se que as consequências de Γ e as consequências de Γ^* (que não envolvam o símbolo f_φ) são as mesmas. Isto significa que se se pretende encontrar consequências de Γ que necessitem da informação representada pela fórmula $\forall x_1(\ldots(\forall x_n(\exists y\, \varphi))\ldots)$ pode trabalhar-se com Γ^* e com a fórmula $\forall x_1(\ldots(\forall x_n\, \varphi^y_{f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)})\ldots)$. Esta última fórmula é mais "simples"que a primeira uma vez que nela apenas ocorrem quantificadores universais.

Considerando, por exemplo, o caso da fórmula

$$\forall x \exists y\, \mathbf{R}(x,y)$$

que exprime a propriedade de serialidade da relação R, tem-se que

$$(\forall x \exists y\, \mathbf{R}(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x\, \mathbf{R}(x, f(x)))$$

é consequência de $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\forall x(\exists y\, \mathbf{R}(x,y) \to \mathbf{R}(x, f(x)))\}$. Tendo em conta os parágrafos anteriores pode trabalhar-se com a fórmula

$$\forall x \mathbf{R}(x, f(x))$$

onde, recorde-se, f é um símbolo de função (de Skolem). O termo $f(x)$ representa um dos mundos que se sabe ser visível a partir do mundo representado por x. A existência de pelo menos um destes mundos, para cada x, decorre da serialidade da relação.

No caso da propriedade de densidade, da fórmula

$$\forall x \forall y \exists z (\mathbf{R}(x,y) \to (\mathbf{R}(x,z) \wedge \mathbf{R}(z,y)))$$

resultará a fórmula

$$\forall x \forall y (\mathbf{R}(x,y) \to (\mathbf{R}(x, g(x,y)) \wedge \mathbf{R}(g(x,y), y)))$$

onde agora é g a função (de Skolem) correspondente. O termo $g(x,y)$ representa um dos mundos que (i) é visível a partir do mundo representado por x e (ii) vê o mundo representado por y. A existência de pelo menos um mundo nestas condições, para cada x e y, decorre do facto da relação ser densa.

Finalmente, no caso da convergência, da fórmula

$$\forall x \forall y \forall z \exists u ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(x,z)) \to (\mathbf{R}(y,u) \wedge \mathbf{R}(z,u)))$$

obter-se-á

$$\forall x \forall y \forall z((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(x,z)) \rightarrow (\mathbf{R}(y,h(x,y,z)) \wedge \mathbf{R}(z,h(x,y,z))))$$

onde agora é h a função (de Skolem) correspondente. O termo $h(x,y,z)$ representa um dos mundos que (i) é visível a partir do mundo representado por y e (ii) é visível a partir do mundo representado por z. A existência de pelo meno um mundo nestas condições, para cada x e y e z, decorre do facto da relação ser convergente.

Apresentam-se seguidamente as regras relacionais necessárias para construir as extensões ao sistema $\mathcal{N}_m$ pretendidas nesta secção. A regra *ser* é, mais precisamente, um axioma. Como foi atrás mencionado, estas regras decorrem das fórmulas, acima referidas, relativas às propriedades de serialidade, densidade e convergência.

Axioma *ser*

$$\frac{}{t\mathbf{R}f(t)}\ ser$$

∇

Regras dns_1 e dns_2

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ s\mathbf{R}t\end{matrix}}{s\mathbf{R}g(s,t)}\ dns_1$$

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ s\mathbf{R}t\end{matrix}}{g(s,t)\mathbf{R}t}\ dns_2$$

∇

Regras cnv_1 e cnv_2

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ s\mathbf{R}t\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ s\mathbf{R}r\end{matrix}}{t\mathbf{R}h(s,t,r)}\ cnv_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ s\mathbf{R}t & s\mathbf{R}r\end{array}}{r\mathbf{R}h(s,t,r)}\ cnv_2$$

∇

Como os nomes sugerem, o axioma *ser* está relacionado com a serialidade, as regras dns_1 e dns_2 com a densidade e as propriedades cnv_1 e cnv_2 com a convergência.

Nas regras acima t, s e r representam termos, isto é, como já se havia referido, nos sistemas dedutivos que aqui se apresentam, as etiquetas não são necessariamente apenas variáveis como nos sistemas dedutivos apresentados anteriormente. Os símbolos de função f, g e h são as funções de Skolem referidas para cada um dos casos.

Os sistemas dedutivos que se consideram nesta secção são obtidos, tal como nas extensões anteriormente apresentadas, estendendo sistema $\mathcal{N}_m$ com uma ou mais regras e/ou axiomas sendo que estas regras e/ou axiomas tanto podem ser as já apresentadas na secção 1.7 como as que se apresentaram nesta secção. Por exemplo, o sistema $\mathcal{N}_m^D$ é obtido juntando às regras de $\mathcal{N}_m$ o axioma *ser*, o sistema $\mathcal{N}_m^2$ é obtido juntando as regras cnv_1 e cnv_2 e o sistema $\mathcal{N}_m^{D45}$ é obtido juntando *ser*, *trn* e *euc*.

Existe um detalhe importante que é preciso ter em conta. Quando se diz, por exemplo, que se obtém o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^{D45}$ estendendo o sistema $\mathcal{N}_m$ com as regras *ser*, *trn* e *euc* há que ter em atenção que *não são exactamente* as regras do sistema $\mathcal{N}_m$, *trn* e *euc* tal como foram apresentadas anteriormente. Com efeito, como no âmbito deste novo sistema $\mathcal{N}_m^{D45}$ as etiquetas são termos (e não apenas variáveis), pressupõem-se aqui que sempre que se faz referência às regras de $\mathcal{N}_m$, *trn* e *euc*, o que de facto se pretende ter são regras semelhantes a estas mas em que as etiquetas são agora termos. Assim, por exemplo, a regra $\rightarrow I$ é, de facto,

$$\dfrac{\begin{array}{c}[t:\varphi_1]^m \\ \mathcal{D} \\ t:\varphi_2\end{array}}{t:\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\ \rightarrow I, m$$

onde t é um qualquer termo. O mesmo se passa relativamente às outras regras. Existem, no entanto, duas excepções: a regra $\Box I$ e a regra $\Diamond E$.

A regra $\Box I$ é

$$\dfrac{\begin{array}{c}[t\mathbf{R}y]^m\\ \mathcal{D}\\ y:\varphi\end{array}}{t:\Box\varphi}\ \Box I, m$$

onde y tem de ser obrigatoriamente uma variável (pois, como se viu na secção 1.7.1, y deve representar um mundo *arbitrário* visível a partir do mundo representado por t). Os requisitos presentes nesta regra são, naturalmente, mantidos: y não ocorre em t (note-se que neste caso não se exige apenas $y \neq t$) e y não ocorre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$ distintas de $t\mathbf{R}y$.

A regra $\Diamond E$ é

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}_1\\ t:\Diamond\varphi\end{array}\qquad \begin{array}{c}[y:\varphi]^{m'}\ [t\mathbf{R}y]^{m''}\\ \mathcal{D}_2\\ s:\psi\end{array}}{s:\psi}\ \Diamond E, m', m''$$

onde, de novo, y tem de ser obrigatoriamente uma variável e t e s são termos. Os requisitos que devem ser verificados são: y não ocorre nem em t nem em s e y também não ocorre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $t\mathbf{R}y$ e de $y:\varphi$.

Seguem-se alguns exemplos que ilustram a utilização destas regras no âmbito de alguns dos sistemas dedutivos aqui considerados.

Exemplo 1.8.1 Como foi referido, obtém-se o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^D$ estendendo o sistema $\mathcal{N}_m$ com o axioma *ser*. A árvore seguinte é uma derivação em $\mathcal{N}_m^D$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\Box\psi^{\,1} \qquad x\mathbf{R}f(x)}{f(x):\psi}\ \Box E \qquad x\mathbf{R}f(x)}{x:\Diamond\psi}\ \Diamond I}{x:(\Box\psi)\rightarrow(\Diamond\psi)}\ \rightarrow I, 1$$

Como se verá, esta árvore permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_m^D} x : (\Box\psi) \to (\Diamond\psi)$.

Exemplo 1.8.2 Como foi referido, obtém-se o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^2$ estendendo o sistema $\mathcal{N}_m$ com as regras cnv_1 e cnv_2. A árvore seguinte é uma derivação em $\mathcal{N}_m^2$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$x_1 : \Diamond(\Box\varphi)^{1}$}
\AxiomC{$x_2 : \Box\varphi^{2}$}
\AxiomC{$x_1\mathbf{R}\ x_2{}^{3}$}
\AxiomC{$x_1\mathbf{R}\ x_3{}^{4}$}
\RightLabel{cnv_1}
\BinaryInfC{$x_2\mathbf{R}\ h(x_1, x_2, x_3)$}
\RightLabel{$\Box E$}
\BinaryInfC{$h(x_1, x_2, x_3) : \varphi$}
\AxiomC{$x_1\mathbf{R}\ x_2{}^{3}$}
\AxiomC{$x_1\mathbf{R}\ x_3{}^{4}$}
\RightLabel{cnv_2}
\BinaryInfC{$x_3\mathbf{R}\ h(x_1, x_2, x_3)$}
\RightLabel{$\Diamond I$}
\BinaryInfC{$x_3 : \Diamond\varphi$}
\RightLabel{$\Diamond E, 2, 3$}
\BinaryInfC{$x_3 : \Diamond\varphi$}
\RightLabel{$\Box I, 4$}
\UnaryInfC{$x_1 : \Box(\Diamond\varphi)$}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$x_1 : (\Diamond(\Box\varphi)) \to (\Box(\Diamond\varphi))$}
\end{prooftree}
$$

Como se verá, esta dedução permite concluir que $\vdash_{\mathcal{N}_m^2} x_1 : (\Diamond(\Box\varphi)) \to (\Box(\Diamond\varphi))$. ∎

Na Figura 1.4 apresenta-se uma tabela que introduz várias extensões do sistema $\mathcal{N}_m$. Estas extensões são obtidas estendendo $\mathcal{N}_m$ com uma ou mais das regras relacionais referidas até aqui.

Pode agora estabelecer-se a seguinte definição.

Definição 1.8.3 Sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$

Os *sistemas dedutivos* $\mathcal{N}_m^D$*,* $\mathcal{N}_m^2$*,* $\mathcal{N}_m^X$*,* $\mathcal{N}_m^{D45}$ *e* $\mathcal{N}_m^{T42}$ são constituídos como indicado na tabela da Figura 1.4. Todas as noções e notações definidas no âmbito do sistema de $\mathcal{N}_m$ são definidas de modo análogo para o sistema $\mathcal{N}_m$. ∎

Tal como nas extensões ao sistema $\mathcal{N}_m$ anteriormente apresentadas, se existe uma derivação de uma fórmula relacional num destes novos sistemas dedutivos então é possível construir uma derivação dessa fórmula, no sistema correspondente, na qual não são utilizadas regras de inferência modais (Proposição 1.8.14).

Sistema dedutivo	Regras de inferência modais	Regras de inf./axiomas relacionais
$\mathcal{N}_m^D$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$	*ser*
$\mathcal{N}_m^2$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$	cnv_1, cnv_2
$\mathcal{N}_m^X$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$	dns_1, dns_2
$\mathcal{N}_m^{D45}$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$	*ser*, *trn*, *euc*
$\mathcal{N}_m^{T42}$	$\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\perp$, $\Box I$, $\Box E$	*trn*,*ref*, cnv_1, cnv_2

Figura 1.4: Mais algumas extensões do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$

Termina-se esta secção com uma breve referência à relação entre os teoremas destes sistemas e a validade de fórmulas em certas classes de enquadramentos e, consequentemente, com uma referência à noção de correcção e completude destes sistemas para certos sistemas modais.

Os resultados são semelhantes aos referidos no caso das extensões já apresentadas. Considerando o sistema $\mathcal{N}_m^D$, por exemplo, tem-se (como se verá adiante) que $x : \varphi$ é teorema do sistema $\mathcal{N}_m^D$ se e só se φ é uma fórmula válida na classe de todos os enquadramentos seriais. Dado que a classe de enquadramentos seriais caracteriza semanticamente o sistema modal KD, tem-se que $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^D$ se e só se φ é uma fórmula do sistema KD. Isto significa que $\mathcal{N}_m^D$ é correcto e completo para o sistema modal KD

Observações semelhantes podem ser feitas relativamente aos outros sistemas dedutivos.

1.8.2 Os sistemas $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ revisitados

Começa-se por definir as noções de fórmula etiquetada (ou prefixada) e de fórmula relacional que são necessárias no âmbito destes sistemas dedutivos. Como se referiu anteriormente, o facto de as etiquetas não serem necessariamente apenas variáveis leva a que, quer a nível sintáctico, quer a nível semântico algumas alterações tenham de ser introduzidas face ao que já havia sido apresentado na secção 1.5.2.1. Assim, na subsecção 1.8.2.1 introduzem-se os vários conceitos sintácticos e semânticos relativos à noção de fórmula modal etiquetada e à noção de fórmula relacional. Na subsecção 1.8.2.2 apresentam-se os sistemas dedutivos.

1.8.2.1 Fórmulas etiquetadas e fórmulas relacionais: sintaxe e semântica

Na sequência assume-se fixado um conjunto P de símbolos proposicionais.

Definição 1.8.4 Assinaturas Σ_D, Σ_X e Σ_2

Σ_D é a assinatura de primeira ordem que não inclui nenhum símbolo de predicado e inclui um único símbolo de função: o símbolo f de aridade 1; Σ_X é a assinatura de primeira ordem que não inclui nenhum símbolo de predicado e inclui um único símbolo de função: o símbolo g de aridade 2; Σ_2 é a assinatura de primeira ordem que não inclui nenhum símbolo de predicado e inclui um único símbolo de função: o símbolo h de aridade 3. No que se segue, sempre que seja feita referência a uma assinatura de primeira ordem Σ, assume-se que $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_X, \Sigma_2\}$. ∎

Definição 1.8.5 Fórmulas modais generalizadas sobre P e T_Σ^{Et}

Sejam Et um conjunto (de variáveis) e $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_X, \Sigma_2\}$.

(i) $FE_{P,\Sigma}^{Et} = \{t : \varphi \ : t \in T_\Sigma^{Et} \text{ e } \varphi \in FM_P\}$ é o *conjunto das fórmulas modais sobre P etiquetadas em*[21] T_Σ^{Et};

(ii) $FR_\Sigma^{Et} = \{t_1 \mathbf{R} t_2 : t_1, t_2 \in T_\Sigma^{Et}\}$ é o *conjunto das fórmulas relacionais sobre* T_Σ^{Et};

(iii) $FG_{P,\Sigma}^{Et} = FE_{P,\Sigma}^{Et} \cup FR_\Sigma^{Et}$ é o *conjunto das fórmulas modais generalizadas sobre P e* T_Σ^{Et}.

[21] Recorde-se que T_Σ^{Et} é o conjunto dos termos sobre Σ e Et.

Sempre que não haja ambiguidade àcerca de P e Et usam-se as notações FE_Σ, FR_Σ e FG_Σ; se também não existe ambiguidade àcerca de Σ, usa-se FE, FR e FG. Para cada $\Xi \subseteq FG$ definem-se os conjuntos Ξ_M, Ξ_{et}, Ξ_E e Ξ_R como na Definição 1.5.8. ■

As definições anteriores são semelhantes às apresentadas na Definição 1.5.8 mas as etiquetas não são necessariamente variáveis. As etiquetas podem ser termos de uma certa assinatura de primeira ordem. Seguem-se agora as noções semânticas relativas às fórmulas aqui consideradas. No que se segue assume-se fixado um conjunto Et.

Definição 1.8.6 Estrutura de int. modal generalizada sobre Σ e P

Seja $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_X, \Sigma_2\}$. Uma *estrutura de interpretação modal generalizada sobre Σ e P* é um tuplo $\mathbb{M}\mathbb{I}_g = (W, R, V, I)$ onde

- (W, R, V) é uma estrutura de interpretação modal sobre P;
- (W, I) é uma estrutura de interpretação de primeira ordem sobre Σ tal que
  - se Σ é Σ_D e R é uma relação serial então $I(f) : W \to W$ é tal que, para cada $w \in W$, wRw' onde $w' = I(f)(w)$;
  - se Σ é Σ_X e R é uma relação densa então $I(g) : W \times W \to W$ é tal que, para cada $(w_1, w_2) \in W \times W$, se w_1Rw_2 então w_1Rw e wRw_2 onde $w = I(g)(w_1, w_2)$;
  - se Σ é Σ_2 e R é uma relação convergente então $I(h) : W \times W \times W \to W$ é tal que, para cada $(w_1, w_2, w_3) \in W \times W \times W$, se w_1Rw_2 e w_1Rw_3 então w_2Rw e w_3Rw onde $w = I(h)(w_1, w_2, w_3)$.

Dada uma estrutura de interpretação modal generalizada $\mathbb{M}\mathbb{I}_g$, utiliza-se $\mathbb{M}\mathbb{I}_g^c$ para representar a estrutura de interpretação de primeira ordem subjacente e $\mathbb{M}\mathbb{I}_g^m$ para representar a estrutura de interpretação modal subjacente. ■

Numa estrutura de interpretação modal generalizada $\mathbb{M}\mathbb{I}_g = (W, R, V, I)$ sobre Σ e P, tem-se que (W, R, V) é uma estrutura de interpretação modal sobre P para interpretar as fórmulas modais e (W, I) constitui uma estrutura de interpretação de primeira ordem sobre $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_X, \Sigma_2\}$ cujo objectivo é interpretar os termos que são utilizados como etiquetas. As interpretações dos símbolos de função f, g e h verificam condições directamente relacionadas com as propriedades da relação de acessibilidade R.

Definição 1.8.7 Atribuição em estrutura de int. modal generalizada
Sendo $I\!M_g$ uma estrutura de interpretação modal generalizada, uma atribuição de Et em $I\!M_g$ é uma atribuição de Et na estrutura de interpretação modal $I\!M_g^m$ (Definição 1.5.10). O conjunto de todas as atribuições de Et em $I\!M_g$ designa-se $ATR^{Et}_{I\!M_g}$, ou, se não há ambiguidade sobre Et, simplesmente, $ATR_{I\!M_g}$. ■

Definição 1.8.8 Interpretação de termo em estrutura de int. modal generalizada
No que se segue, dados $t \in T^{Et}_{\Sigma}$, $I\!M_g = (W, R, V, I)$ e $\rho \in ATR_{I\!M_g}$, a *interpretação de t em $I\!M_g$ com ρ*, representa-se por $[\![t]\!]^{\rho}_{I\!M_g}$ e é, naturalmente, a interpretação de t na estrutura de interpretação de primeira ordem $I\!M_g^c$ com ρ, isto é, $[\![t]\!]^{\rho}_{I\!M_g^c}$. ■

Definição 1.8.9 Satisfação de fórmula modal generalizada por estrutura de interpretação modal generalizada com atribuição
Sejam $I\!M_g = (W, R, V, I)$ uma estrutura de interpretação modal generalizada sobre Σ e P, $\rho \in ATR_{I\!M_g}$ e $\xi \in FG$. A noção de *satisfação de ξ por $I\!M_g$ com ρ* define-se como se segue:

- se $\xi = t : \varphi$ então $I\!M_g, \rho \models t : \varphi$ se $I\!M_m, [\![t]\!]^{\rho}_{I\!M_g} \models \varphi$
- se $\xi = t_1 \mathbf{R} t_2$ então $I\!M_g, \rho \models t_1 \mathbf{R} t_2$ se $([\![t_1]\!]^{\rho}_{I\!M_g}, [\![t_2]\!]^{\rho}_{I\!M_g}) \in R$

Dado $\Xi \subseteq FG$, $I\!M_g, \rho \models \Xi$ se $I\!M_g, \rho \models \xi$ para cada $\xi \in \Xi$. ■

Note-se que a noção de satisfação apresentada na Definição 1.5.11 é um caso particular da noção apresentada na Definição 1.8.9. Com efeito, se uma etiqueta t for, em particular, uma variável em Et, a interpretação de t em $I\!M_c$ com ρ, $[\![t]\!]^{\rho}_{I\!M_c}$, é precisamente $\rho(t)$.

Definição 1.8.10 Consequência semântica
Sendo $\Xi \subseteq FG_{\Sigma}$ e $\xi \in FG_{\Sigma}$

- ξ é *consequência semântica de* Ξ, o que se representa por $\Xi \models \xi$, se para cada $I\!M_g$ estrutura de interpretação modal generalizada sobre Σ e P e cada $\rho \in ATR_{I\!M_g}$ se tem que se $I\!M_g, \rho \models \Xi$ então $I\!M_g, \rho \models \xi$;

- sendo $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos modais, ξ é *consequência semântica de* Ξ *na classe* $\mathcal{E}$, o que se representa por $\Xi \models_{\mathcal{E}} \xi$, se para cada $\mathbb{M}_g$ estrutura de interpretação modal generalizada sobre Σ e P tal que $\mathbb{M}_g^m$ é baseada num enquadramento em $\mathcal{E}$, e cada $\rho \in ATR_{\mathbb{M}_g}$ se tem que se $\mathbb{M}_g, \rho \models \Xi$ então $\mathbb{M}_g, \rho \models \xi$. ∎

Como seria de esperar, tem-se também aqui um resultado semelhante ao apresentado na Proposição 1.5.14.

Proposição 1.8.11
Sejam $\Xi \subseteq FE_\Sigma$, $x \in Et$, $\varphi \in FM_\Sigma$, com $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_X, \Sigma_2\}$, e $\mathcal{E}$ uma classe de enquadramentos modais.

1. Se $\Xi = \{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\}$ e $\Xi \models x : \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
2. Se $\Xi = \{x : \varphi_1, \ldots, x : \varphi_n\}$ e $\Xi \models_{\mathcal{E}} x : \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models_{\mathcal{E}} \varphi$.

Prova: Semelhante à apresentada para a Proposição 1.5.14. ∎

1.8.2.2 Sistemas dedutivos

Nesta secção, e à semelhança do que foi feito para todos os sistemas dedutivos já considerados, apresenta-se uma definição mais precisa dos sistemas $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$. No que se segue assumem-se fixados um conjunto Et um conjunto de símbolos proposicionais P e um conjunto M de marcas.

Definição 1.8.12 NOVAS REGRAS DE INFERÊNCIA
Na sequência, a_1 e a_2 são $E^M_{FG_\Sigma}$-árvores sem conflito de marcas entre si.

- <u>*Axioma ser*</u>: toda a $E^M_{FG_{\Sigma_D}}$-árvore singular com etiqueta $(t\mathbf{R}f(t), \emptyset)$ onde $t \in T^{Et}_{\Sigma_D}$
- <u>REGRA *dns*$_1$</u>: sendo a_1 uma $E^M_{FG_{\Sigma_X}}$-árvore tal que $frm(\nu_{a_1}) = s\mathbf{R}t$ então, *por aplicação da regra dns*$_1$, obtém-se a $E^M_{FG_{\Sigma_X}}$-árvore $a = a_1\widehat{\ }\,(s\mathbf{R}g(s,t), \emptyset)$
- <u>REGRA *dns*$_2$</u>: semelhante à regra dns_1 mas a etiqueta da raiz de a é $(g(s,t)\mathbf{R}t, \emptyset)$

- <u>REGRA cnv_1</u>: sendo a_1 e a_2 duas $E^M_{FG_{\Sigma_2}}$-árvores tais que $frm(\nu_{a_1}) = s\mathbf{R}t$ e $frm(\nu_{a_2}) = s\mathbf{R}r$ então, *por aplicação da regra* cnv_1 obtém-se uma $E^M_{FG_{\Sigma_2}}$-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (t\mathbf{R}h(s,t,r), \emptyset)$
- <u>REGRA cnv_2</u>: semelhante à regra cnv_1 mas a etiqueta da raiz de a é $(r\mathbf{R}h(s,t,r), \emptyset)$
- <u>REGRA $\Box I$</u>: sendo a_1 uma $E^M_{FG_\Sigma}$-árvore tal que $frm(\nu_{a_1}) = y : \varphi$ e sendo $t \in T^{Et}_\Sigma$ e $m \in M$ tais que[22]
  - $y \notin V(t)$ e $y \notin V(\Xi_{et})$, sendo $\Xi = Frm(Abt_{a_1} \backslash Abt^{t\mathrm{R}y}_{a_1})$
  - se $m \in Mrc_{a_1}$ então $Abt^{t\mathrm{R}y,m}_{a_1} \neq \emptyset$.

  então, *por aplicação da regra* $\Box I$ *com etiqueta* t *e marca* m, obtém-se a $E^M_{FG_\Sigma}$-árvore $a = a_1{}^\frown (t : \Box\varphi, \{m\})$
- <u>REGRA $\Diamond E$</u>: sendo a_1, a_2 duas $E^M_{FG_\Sigma}$-árvores tais que $frm(\nu_{a_1}) = t : \Diamond\varphi$ e $frm(\nu_{a_2}) = s : \psi$ e sendo e $y \in Et$, $m', m'' \in M$ tais que
  - $y \notin V(t)$ e $y \notin V(s)$
  - $y \notin V(\Xi_{et})$, onde $\Xi = Frm(Abt_{a_1} \backslash (Abt^{t\mathrm{R}y}_{a_1} \cup Abt^{y:\varphi}_{a_1}))$
  - restantes condições semelhantes às anteriores

  então, *por aplicação da regra* $\Diamond E$ *com fórmula* $s : \psi$ *e marcas* m' *e* m'', obtém-se a $E^M_{FG_\Sigma}$-árvore $a = \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown (s : \psi, \{m', m''\})$ ■

Seguem-se agora as definições dos sistemas dedutivos nas quais se usam as notações habituais.

Definição 1.8.13 SISTEMAS DEDUTIVOS $\mathcal{N}^D_m$, $\mathcal{N}^2_m$, $\mathcal{N}^X_m$, $\mathcal{N}^{D45}_m$ E $\mathcal{N}^{T42}_m$

- Os sistemas dedutivos $\mathcal{N}^D_m$ e $\mathcal{N}^{D45}_m$ são constituídos pelas regras de inferência (axioma) como indicado na tabela da Figura 1.4 sendo as regras não referidas na Definição 1.8.12 análogas às apresentadas anteriormente tendo em conta as etiquetas são agora termos em $T^{Et}_{\Sigma_D}$.

[22]Recorde-se que, dado um termo t, $V(t)$ é o conjunto das variáveis que ocorrem t e que esta noção se estende a conjuntos de termos

- Os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^2$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ são constituídos pelas regras de inferência (axioma) como indicado na tabela da Figura 1.4 sendo as regras não referidas na Definição 1.8.12 análogas às apresentadas anteriormente tendo em conta as etiquetas são agora termos em $T_{\Sigma_2}^{Et}$.

- O sistema dedutivo $\mathcal{N}_m^X$ é constituído pelas regras de inferência como indicado na tabela da Figura 1.4 sendo as regras não referidas na Definição 1.8.12 análogas às apresentadas anteriormente tendo em conta as etiquetas são agora termos em $T_{\Sigma_X}^{Et}$. ■

A partir da definição dos sistemas anteriores, a definição de árvore de dedução em cada um deles segue a usual definição indutiva tendo em conta que, por exemplo, em $\mathcal{N}_m^D$ e $\mathcal{N}_m^{D45}$ as fórmulas das árvores singulares (e consequentemente de todas as outras) são fórmulas em FG_{Σ_D}. Observações semelhantes se podem fazer sobre em $\mathcal{N}_m^2$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ (relativamente a fórmulas em FG_{Σ_2}) e sobre $\mathcal{N}_m^X$ (relativamente a fórmulas em FG_{Σ_X}). Todas as outras noções e notações relativas a deduções introduzidas para outros sistemas se mantêm para estes sistemas.

Termina-se esta secção com um resultado que, à semelhança das Proposições 1.5.20 e 1.7.9, está relacionado com as fórmulas relacionais que se podem derivar no âmbito dos sistemas dedutivos aqui apresentados.

Proposição 1.8.14

- Sendo $\xi \in FR_{\Sigma_D}$, $\Xi \subseteq FG_{\Sigma_D}$ e $\mathcal{N} \in \{\mathcal{N}_m^D, \mathcal{N}_m^{D45}\}$ tem-se que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}} \xi$ se e só se existe uma derivação de ξ a partir de Ξ_R em $\mathcal{N}$ na qual não são utilizadas regras de inferência modais.

- Sendo $\xi \in FR_{\Sigma_2}$, $\Xi \subseteq FG_{\Sigma_2}$ e $\mathcal{N} \in \{\mathcal{N}_m^2, \mathcal{N}_m^{T42}\}$ tem-se que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}} \xi$ se e só se existe uma derivação de ξ a partir de Ξ_R em $\mathcal{N}$ na qual não são utilizadas regras de inferência modais.

- Sendo $\xi \in FR_{\Sigma_X}$, $\Xi \subseteq FG_{\Sigma_X}$ tem-se que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^X} \xi$ se e só se existe uma derivação de ξ a partir de Ξ_R em $\mathcal{N}_m^X$ na qual não são utilizadas regras de inferência modais.

Prova: Semelhante à prova apresentada para a Proposição 1.7.9. ■

1.8.3 Os sistemas $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ em *Isabelle*

A representação em *Isabelle* destas novas extensões é semelhante à representação das anteriores com um cuidado adicional relacionado com as funções de Skolem. De facto, há que declará-las como "constantes" significando isto que os símbolos de função correspondentes são fixos e não variáveis esquema.

Por exemplo, o ficheiro `KD.thy` que descreve o sistema $\mathcal{N}_m^D$, tem o seguinte conteúdo:

```
KD=K+

global

(* A função de Skolem *) consts
f::  tm => tm

rules
ser "t Rel f(t)"
end
```

Outras teorias são definidas de forma semelhante:

- ao sistema $\mathcal{N}_m^X$ corresponde o ficheiro `KX.thy`:

```
KX=K+

global

(* A função de Skolem *) consts
g::  [tm,tm] => tm

rules
dns1 "s Rel t==> s Rel g(s,t)"
dns2 "s Rel t==> g(s,t) Rel t"
end
```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^2$ corresponde o ficheiro `K2.thy`:

```
K2=K+

global

(* A função de Skolem *) consts
h::  [tm,tm,tm] => tm

rules
cnv1 "[|s Rel t; s Rel r|]==> t Rel h(s,t,r)"
cnv2 "[|s Rel t; s Rel r|]==> r Rel h(s,t,r)"
end
```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^{D45}$ corresponde o ficheiro `KD45.thy`:

```
KD45=KD+K4+K5
```

- ao sistema $\mathcal{N}_m^{T42}$ corresponde o ficheiro `KT42.thy`:

```
KT42=KT+K4+K2
```

Exemplos de derivações

O primeiro exemplo corresponde a estabelecer o teorema `x:([]P--><>P)` do sistema $\mathcal{N}_m^D$. O primeiro passo da derivação é a aplicação da regra de introdução da implicação.

```
use_thy "KD";
> Goal "x:([]P--><>P)";
Level 0 (1 subgoal)
x:[]P--><>P
1.  x:[]P--><>P
```

```
> br impI 1;
Level 1 (1 subgoal)
x:[]P--><>P
1.  x:[]P ==> x:<>P
```

O próximo passo consiste na aplicação da regra de introdução do operador possibilidade.

```
> br diaI 1;
Level 2 (2 subgoals)
x:[]P--><>P
1.  x:[]P ==> x Rel ?y1
2.  x:[]P ==> ?y1:P
```

O `?y1` desconhecido é `f(x)` pelo que se estabelece o primeiro subobjectivo usando resolução com o axioma da serialidade:

```
> br ser 1;
Level 3 (1 subgoal)
x:[]P--><>P
1.  x:[]P ==> f(x):P
```

A derivação prossegue usando a regra da eliminação do operador necessidade:

```
> br boxE 1;
Level 4 (2 subgoals)
x:[]P--><>P
1.  x:[]P ==> ?x3:[]P
2.  x:[]P ==> ?x3 Rel f(x)
```

O primeiro subobjectivo estabelece-se usando a prova por hipótese. O subobjectivo restante estabelece-se usando resolução com o axioma da serialidade.

```
> ba 1;
Level 5 (1 subgoal)
```

```
x:[]P--><>P
1.  x:[]P ==> x Rel f(x)

> br ser 1;
Level 6
x:[]P--><>P
No subgoals!
```

É fácil generalizar o exemplo anterior de forma a estabelecer `x:[]`^{n} `P--><>`^{n} `P`, para qualquer n. A derivação correspondente é construída usando tacticais. Ilustra-se para $n = 3$:

```
> Goal "x:([][][]P--><><><>P)";
Level 0 (1 subgoal)
x:[][][]P--><><><>P
1.  x:[][][]P--><><><>P

> br impI 1;
Level 1 (1 subgoal)
x:[][][]P--><><><>P
1.  x:[][][]P ==> x:<><><>P

> by (REPEAT ((resolve_tac[diaI] 1) THEN (resolve_tac[ser] 1)) );
Level 2 (1 subgoal)
x:[][][]P--><><><>P
1.  x:[][][]P ==> f(f(f(x))):P

> by (REPEAT ((resolve_tac[boxE] 1) THEN (resolve_tac[ser] 2)));
Level 3 (1 subgoal)
x:[][][]P--><><><>P
1.  x:[][][]P ==> x:[][][]P

> ba 1;
Level 4
x:[][][]P--><><><>P
```

```
No subgoals!
```

Exercícios

Seguem-se alguns exercícios sobre estes novos sistemas modais. Sugere-se também a resolução em *Isabelle* dos exercícios da secção 1.7.5.

1. Usando as teorias `KD`, `KX`, `K2`, `KD45` e `KT42` mostre que:

   (a) $\vdash_{\mathcal{N}_m^D} x : \Diamond\top$
   (b) $\vdash_{N_m^2} x : (\Diamond\Box A) \to (\Box\Diamond A)$
   (c) $\vdash_{\mathcal{N}_m^X} x : (\Box\Box A \to \Box A)$
   (d) $\vdash_{\mathcal{N}_m^X} x : (\Box P \wedge \Diamond Q) \to \Diamond(P \wedge \Diamond Q)$
   (e) $\vdash_{\mathcal{N}_m^X} x : (\Diamond A \to \Diamond\Diamond\Diamond A)$
   (f) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T42}} x : ((\Diamond\Box A) \wedge (\Diamond\Box B) \to \Box\Diamond(A \wedge B))$
   (g) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} x : (\Diamond\Box A \wedge \Diamond\Box B) \to \Diamond\Box(A \wedge B))$
   (h) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} x : \Diamond\Box P \Leftrightarrow \Box P$
   (i) $\vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} x : \Box\Diamond P \Leftrightarrow \Diamond P$

1.9 Correcção e completude do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e suas extensões

Nesta secção apresentam-se os resultados de correcção e completude sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e das suas extensões descritas nas secções anteriores

1.9.1 Correcção do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$

Nesta secção mostra-se que o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ é correcto provando que se uma fórmula generalizada é consequência no sistema $\mathcal{N}_m$ de um conjunto de fórmulas generalizadas então a fórmula em causa é consequência semântica do conjunto de fórmulas. No que se segue é útil o leitor ter presente algumas das noções e notações apresentadas na subsecção 1.5.2.1.

Após a prova de correcção aborda-se a questão, já anteriormente referida, da relação entre o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e as noções de consequência semântica (local) e de validade em FM_P.

Para provar a correcção do sistema $\mathcal{N}_m$ e, tal como no caso dos sistemas $\mathcal{N}_p$ e $\mathcal{N}_c$, é necessário

- provar que todas as regras de inferência são correctas e
- provar que a conclusão de cada dedução d do sistema é consequência semântica do conjunto das hipóteses abertas de d.

A noção de correcção de regra de inferência é naturalmente análoga à apresentada no caso do sistema $\mathcal{N}_p$ (tendo em conta que estão envolvidas fórmulas modais generalizadas).

Proposição 1.9.1
Todas as regras do sistema $\mathcal{N}_m$ são correctas.

Prova: Há que fazer a prova para cada uma das regras. Tal como nos sistemas anteriores, deve-se (i) identificar qual a relação entre as hipóteses abertas das árvores envolvidas e (ii) provar que a conclusão da árvore obtida por aplicação da regra é consequência semântica das suas hipóteses abertas, assumindo que a mesma propriedade é verificada por cada árvore a que se aplicou da regra.

<u>Regra $\wedge E_d$</u>: Suponha-se que d foi construída por aplicação da regra $\wedge E_d$ a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = x : \varphi_1 \wedge \varphi_2$, tem-se que $conc(d) = x : \varphi_1$. Neste caso tem-se que $H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models x : \varphi_1 \wedge \varphi_2$ há que mostrar que $H_d \models x : \varphi_1$. Considere-se uma estrutura de interpretação modal $I\!M\!I = (W, R, V)$ e $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$ tal que $I\!M\!I, \rho \models H_d$. Então $I\!M\!I, \rho \models H_{d_1}$ e portanto $I\!M\!I, \rho \models x : \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Sendo $\rho(x) = w$, tem-se que $I\!M\!I, w \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ e portanto $I\!M\!I, w \models \varphi_1$. Consequentemente, $I\!M\!I, \rho \models x : \varphi_1$. Conclui-se assim que $H_d \models x : \varphi_1$.

<u>Regra $\perp$</u>: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\perp$ com fórmula $x : \varphi$ (e marca m) a partir de d_1, pelo que $conc(d_1) = y : \perp$ e $conc(d) = x : \varphi$. Neste caso tem-se que $H_{d_1} \subseteq H_d \cup \{x : \neg\varphi\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models y : \perp$ há que mostrar que $H_d \models x : \varphi$. Considere-se uma estrutura de interpretação modal $I\!M\!I$ e $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$ tal que $I\!M\!I, \rho \models H_d$. Se $I\!M\!I, \rho \not\models x : \varphi$, então $I\!M\!I, \rho(x) \not\models \varphi$, o que significa que $I\!M\!I, \rho(x) \models \neg\varphi$ e portanto $I\!M\!I, \rho \models x : \neg\varphi$. Deste modo, $I\!M\!I, \rho \models H_{d_1}$

e assim $\mathbb{M}, \rho \models y : \bot$. Chega-se asim a um absurdo e portanto, necessariamente, $\mathbb{M}, \rho \models x : \varphi$. Conclui-se assim que $H_d \models x : \varphi$.

Regras $\to I$, $\to E$, $\vee I_d$, $\vee I_e$ e $\wedge E_e$, $\wedge I$, $\vee E$: Provas semelhantes ao caso anterior e às regras proposicionais correspondentes.

Regra $\Box E$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\Box E$ a partir de d_1 e d_2, pelo que, sendo $conc(d_1) = x : \Box\varphi$ e $conc(d_2) = x\mathbf{R}y$, tem-se que $conc(d) = y : \varphi$. Neste caso $H_d = H_{d_1} \cup H_{d_2}$. Assumindo que $H_{d_1} \models x : \Box\varphi$ e $H_{d_2} \models x\mathbf{R}y$ há que mostrar que $H_d \models y : \varphi$. Considere-se uma estrutura de interpretação modal $\mathbb{M} = (W, R, V)$ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \models H_d$. Então $\mathbb{M}, \rho \models H_{d_1}$ e $\mathbb{M}, \rho \models H_{d_2}$ e portanto $\mathbb{M}, \rho \models x : \Box\varphi$ e $\mathbb{M}, \rho \models x\mathbf{R}y$. Sendo $\rho(x) = w$ e $\rho(y) = w'$ tem-se que $\mathbb{M}, w \models \Box\varphi$ e wRw', pelo que, $\mathbb{M}, w' \models \varphi$. Consequentemente, $\mathbb{M}, \rho \models y : \varphi$. Conclui-se assim que $H_d \models y : \varphi$.

Regra $\Box I$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\Box I$ com etiqueta x (e marca m) a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = y : \varphi$, tem-se que $conc(d) = x : \Box\varphi$. Neste caso $H_{d_1} \subseteq H_d \cup \{x\mathbf{R}y\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models y : \varphi$ há que mostrar que $H_d \models x : \Box\varphi$. Considere-se uma estrutura de interpretação modal $\mathbb{M} = (W, R, V)$ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \models H_d$. Seja $\rho(x) = w$.

Se não existe $w' \in W$ tal que wRw', então, trivialmente, $\mathbb{M}, w \models \Box\varphi$ e portanto $\mathbb{M}, \rho \models x : \Box\varphi$, concluindo-se, como se pretendia, que $H_d \models x : \Box\varphi$.

Caso contrário, seja $w' \in W$ arbitrário tal que wRw' e considere-se a atribuição $\rho[y := w']$. Dado que $\mathbb{M}, \rho \models H_d$, então $\mathbb{M}, \rho \models H_{d_1} \backslash \{x\mathbf{R}y\}$. Pelas condições da regra $\Box I$, $x \neq y$ e y não ocorre nas hipóteses abertas de d_1 distintas de $x\mathbf{R}y$ e portanto $\mathbb{M}, \rho[y := w'] \models x\mathbf{R}y$ e $\mathbb{M}, \rho[y := w'] \models H_{d_1} \backslash \{x\mathbf{R}y\}$. Deste modo, $\mathbb{M}, \rho[y := w'] \models H_{d_1}$ e portanto $\mathbb{M}, \rho[y := w'] \models y : \varphi$, ou seja, $\mathbb{M}, w' \models \varphi$. Provou-se assim que qualquer w' acessível a partir de w satisfaz φ o que permite concluir que $\mathbb{M}, w \models \Box\varphi$ e portanto $\mathbb{M}, \rho \models x : \Box\varphi$. Conclui-se assim que que $H_d \models x : \Box\varphi$.

Regra $\Diamond I$: Prova semelhante à apresentadada para a regra $\Box E$.

Regra $\Diamond E$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\Diamond E$ com etiqueta z e fórmula ψ a partir de d_1 e d_2, pelo que, sendo $conc(d_1) = x : \Diamond\varphi$ e $conc(d_2) = z : \psi$ tem-se que $conc(d) = z : \psi$. Neste caso tem-se que $H_{d_1} \subseteq H_d$ e algum dos seguintes casos: (i) $H_{d_2} = H_d$, (ii) $H_{d_2} \backslash \{y : \varphi\} \subseteq H_d$, (iii) $H_{d_2} \backslash \{x\mathbf{R}y\} \subseteq H_d$ ou (iv) $H_{d_2} \backslash \{y : \varphi, x\mathbf{R}y\} \subseteq H_d$. Assumindo que $H_{d_1} \models x : \Diamond\varphi$ e $H_{d_2} \models z : \psi$ há que mostrar que $H_d \models z : \psi$. Considere-se a estrutura de interpretação modal $\mathbb{M} = (W, R, V)$ e $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \models H_d$.

Tendo em conta as relações entre os conjuntos H_d e H_{d_1} tem-se que $I\!M\!I, \rho \models H_{d_1}$ e portanto $I\!M\!I, \rho \models x : \Diamond\varphi$. Sendo $\rho(x) = w$, existe $w' \in W$ tal que wRw' e $I\!M\!I, w' \models \varphi$. Considere-se a atribuição $\rho[y := w']$. Pelas condições da regra tem-se que $x \neq y$ e que y não ocorre nas hipóteses abertas de d_1 distintas de $x\mathbf{R}y$ e de $y : \varphi$, pelo que $I\!M\!I, \rho[y := w'] \models H_{d_1} \backslash \{x\mathbf{R}y, y : \varphi\}$. Tem-se ainda que $I\!M\!I, \rho[y := w'] \models x\mathbf{R}y$ e $I\!M\!I, \rho[y := w'] \models y : \varphi$. Tendo em conta as relações entre os conjuntos H_d e H_{d_2}, conclui-se que $I\!M\!I, \rho[y := w'] \models H_{d_2}$ e portanto $I\!M\!I, \rho[y := w'] \models z : \psi$. Pelas condições da regra tem-se que $z \neq y$, pelo que $I\!M\!I, \rho \models z : \psi$. Conclui-se assim que $H_d \models z : \psi$. ∎

Proposição 1.9.2
Para cada dedução $d \in D_{\mathcal{N}_m}$ tem-se que $H_d \models conc(d)$.

Prova: Semelhante à apresentada no caso do sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

Apresenta-se agora o enunciado e a prova do resultado de correcção de $\mathcal{N}_m$.

Proposição 1.9.3
O sistema $\mathcal{N}_m$ é correcto, ou seja, sendo $\Xi \subseteq FG$ e $\xi \in FG$ tem-se que

$$\text{se } \Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi \text{ então } \Xi \models \xi.$$

Prova: Pretende-se mostrar que se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$ então para qualquer estrutura de interpretação modal $I\!M\!I$ e $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$, se $I\!M\!I, \rho \models \Xi$ então $I\!M\!I, \rho \models \xi$.

Suponha-se que então que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m} \xi$ e sejam $I\!M\!I$ e $\rho \in ATR_{I\!M\!I}$ tais que $I\!M\!I, \rho \models \Xi$. Existe então $d \in D_{\mathcal{N}_m}$ tal que $conc(d) = \xi$ e $H_d \subseteq \Xi$. Pela Proposição 1.9.2, $H_d \models conc(d)$. Dado que $I\!M\!I, \rho \models \Xi$ então $I\!M\!I, \rho \models H_d$ e portanto $I\!M\!I, \rho \models \xi$. ∎

A Proposição 1.9.4, cuja prova tem por base a Proposição 1.5.14, estabelece a relação entre derivações no sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e consequência semântica (local) entre fórmulas modais (isto é, entre fórmulas de FM_P) e resultados de validade de fórmulas modais.

Proposição 1.9.4
Sejam $\Phi \subseteq FM_P$, $\varphi \in FM_P$ e $x \in Et$. Tem-se que se $\{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi$ então $\Phi \models \varphi$. Como caso particular tem-se ainda que se $\vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi$ então $\models \varphi$.

Prova: Se $\{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \varphi$ então, pela correcção do sistema $\mathcal{N}_m$, $\{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\} \models x : \varphi$. Pela Proposição 1.5.14, $\Phi \models \varphi$. O caso particular referido resulta de tomar $\Phi = \emptyset$. ∎

Exemplo 1.9.5 Tendo em conta as derivações apresentadas nos Exemplos 1.5.2 e 1.5.5 tem-se que

- $\{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2), x : \Box\psi_1\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Box\psi_2$
- $\{x : \Box(\psi_1 \to \psi_2), x : \Diamond\psi_1\} \vdash_{\mathcal{N}_m} x : \Diamond\psi_2$

e, portanto, pela Proposição 1.9.4

- $\{\Box(\psi_1 \to \psi_2), \Box\psi_1\} \models \Box\psi_2$
- $\{\Box(\psi_1 \to \psi_2), \Diamond\psi_1\} \models \Diamond\psi_2$ ■

A relação entre o sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$ e o sistema modal K é clara: se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m$ então φ é uma fórmula do sistema modal K. Diz-se então que $\mathcal{N}_m$ é *correcto face ao sistema modal* K.

Proposição 1.9.6 Correcção do sistema $\mathcal{N}_m$ face ao sist. modal K
Se $x : \varphi \in FE$ e $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m$ então φ pertence ao sistema K. ■

1.9.2 Correcção dos sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$

Nesta secção mostra-se que os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são correctos face a certas classes de enquadramentos, provando que se uma fórmula generalizada é consequência de um conjunto de fórmulas generalizadas num destes sistemas então a fórmula em causa é consequência semântica do conjunto de fórmulas numa certa classe de enquadramentos. Após a prova de correcção provam-se resultados relacionados com relação entre estes sistemas dedutivos e (i) as noções de consequência semântica (local) e de validade em FM_P (em certas classes de enquadramentos), (ii) os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$.

Como nos casos anteriores, a prova de correcção para cada um dos sistema passa por provar que cada uma das regras do sistema é correcta. No entanto, neste caso, como o objectivo é provar que cada sistema é correcto face a uma certa classe de enquadramentos, é necessário introduzir a noção de correcção de uma regra face a uma certa classe de enquadramentos.

Definição 1.9.7 CORRECÇÃO DE REGRAS DE INFERÊNCIA FACE A UMA CLASSE DE ENQUADRAMENTOS
Uma regra de inferência modal ou relacional diz-se *correcta face a uma classe $\mathcal{E}$ de enquadramentos* se, sendo n_r a aridade da regra, se tem que

$$\text{se } H_{d_i} \models_{\mathcal{E}} conc(d_i) \text{ para cada } 1 \leq i \leq n_r \text{ então } H_d \models_{\mathcal{E}} conc(d)$$

sempre que d seja uma árvore obtida por aplicação da regra às árvores $d_1, \ldots, d_{n_r}$. ■

No que se segue $\mathcal{E}_{ref}$, $\mathcal{E}_{sim}$, $\mathcal{E}_{trn}$, $\mathcal{E}_{euc}$ representam, como é usual, as classes de enquadramentos reflexivos, simétricos, transitivos e euclideanos, respectivamente.

Proposição 1.9.8

1. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^T$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ref}$.
2. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^B$ são correctas face a $\mathcal{E}_{sim}$.
3. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^4$ são correctas face a $\mathcal{E}_{trn}$.
4. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^5$ são correctas face a $\mathcal{E}_{euc}$.
5. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^{T4}$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}$.
6. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}$.

Prova: Note-se que, no contexto desta proposição, não se considera o axioma *ref* como regra de inferência.

1. As regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_m^T$ são exactamente as regras do sistema $\mathcal{N}_m$. A prova de que estas regras são correctas face à classe $\mathcal{E}_{ref}$ é idêntica à prova apresentada na Proposição 1.9.1.

2. A prova relativa às regras de inferência modais de $\mathcal{N}_m^B$ é idêntica à apresentada na Proposição 1.9.1.

Regra *sim*: Suponha-se que d foi construída por aplicação da regra *sim* a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = x\mathbf{R}y$ tem-se que $conc(d) = y\mathbf{R}x$. Neste caso $H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models_{\mathcal{E}_{sim}} x\mathbf{R}y$ há que mostrar que $H_d \models_{\mathcal{E}_{sim}} y\mathbf{R}x$. Considere-se a estrutura de interpretação modal $I\!M = (W, R, V)$, onde R é uma relação simética, e $\rho \in ATR_{I\!M}$ tal que $I\!M, \rho \models H_d$. Então $I\!M, \rho \models H_{d_1}$ e portanto

$\mathbb{M}, \rho \models x\mathbf{R}y$. Sendo $\rho(x) = w$ e $\rho(y) = w'$, tem-se que wRw' e portanto, como R é simétrica, $w'Rw$. Assim, $\mathbb{M}, \rho \models y\mathbf{R}x$. Conclui-se assim que $H_d \models_{\mathcal{E}_{sim}} y\mathbf{R}x$.

3. A única situação nova é o caso da regra *trn*. A prova é semelhante à apresentada em 2, tendo em conta que é uma regra de inferência binária e a relação de acessibilidade subjacente é transitiva.

4. A única situação nova é o caso da regra *euc*. A prova é semelhante à apresentada em 2, tendo em conta que a relação de acessibilidade subjacente é euclideana.

5. Semelhante a 3.

6. As únicas situações novas são os casos da regra *sim* e da regra *trn* que já foram referidos anteriormente. ∎

Proposição 1.9.9

1. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^T}$.
2. $H_d \models_{\mathcal{E}_{sim}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^B}$.
3. $H_d \models_{\mathcal{E}_{trn}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^4}$.
4. $H_d \models_{\mathcal{E}_{euc}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^5}$.
5. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^{T4}}$.
6. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^{TB4}}$.

Prova: Nos vários casos, a prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto das respectivas árvores de dedução. A prova da base é igual à apresentada para $\mathcal{N}_p$ no caso de todos os sistemas que não incluam o axioma *ref*. No caso dos sistemas que o incluam ter-se-á de provar que a árvore singular correspondente verifica a propriedade pretendida. A prova do passo é também idêntica à apresentada para $\mathcal{N}_p$ recorrendo aqui à Proposição 1.9.8. Segue-se a prova relativa ao axioma *ref*.

Sendo d uma árvore singular correspondente a uma instância do axioma *ref*, há que mostrar que $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref}} conc(d)$. Neste caso, $H_d = \emptyset$ e $conc(d) = x\mathbf{R}x$. Seja $\mathbb{M} = (W, R, V)$ uma estrutura de interpretação tal que R é reflexiva e seja $\rho \in ATR_{\mathbb{M}}$. Tem-se então que $\rho(x)R\rho(x)$ e portanto, $\mathbb{M}, \rho \models x\mathbf{R}x$. Consequentemente, $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref}} x\mathbf{R}x$. ∎

Segue-se agora o enunciado e prova da correcção dos sistemas $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ relativamente a certas classes de enquadramentos.

Proposição 1.9.10
Sejam $\Xi \subseteq FG$ e $\xi \in FG$.

1. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^T} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref}} \xi$.
2. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^B} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{sim}} \xi$.
3. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^4} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{trn}} \xi$.
4. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^5} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{euc}} \xi$.
5. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} \xi$.
6. Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}} \xi$.

Prova: As provas são idênticas à apresentada no caso da Proposição 1.9.3, tendo agora em conta as classes de enquadramentos correspondentes. ■

O resultado anterior mostra que os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são correctos relativamente às classes de enquadramentos reflexivos, simétricos, transitivos, euclideanos, reflexivos e transitivos e reflexivos, simétricos e transitivos, respectivamente.

Estes sistemas dedutivos podem ser utilizados para estabelecer resultados relacionados com consequência semântica local entre fórmulas modais (isto é, entre fórmulas de FM_P) nas classes de enquadramentos relativamente às quais são correctos e resultados de validade de fórmulas modais nessas classes de enquadramentos. A Proposição 1.9.11 estabelece o resultado pretendido.

Proposição 1.9.11
Sejam $\Phi \subseteq FM_P$, $\varphi \in FM_P$, $x \in Et$ e $x : \Phi = \{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\}$.

1. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref}} \varphi$.
2. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^B} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{sim}} \varphi$.
3. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^4} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{trn}} \varphi$.
4. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{euc}} \varphi$.
5. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} \varphi$.

6. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}} \varphi$.

Prova: Idêntica à da Proposição 1.9.4. ■

Corolário 1.9.12
Sejam $\varphi \in FM_P$ e $x \in Et$.

1. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^T} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ref}} \varphi$.
2. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^B} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{sim}} \varphi$.
3. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^4} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{trn}} \varphi$.
4. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^5} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{euc}} \varphi$.
5. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T4}} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} \varphi$.
6. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^{TB4}} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{sim}} \varphi$. ■

As relações, já anteriormente referida, entre os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ e os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$, respectivamente, podem agora ser estabelecidas com rigor. Tendo em conta que, pela Proposição 1.4.17, os sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$ são constituído pelas fórmulas válidas na classe dos enquadramentos reflexivos, simétricos, transitivos, euclideanos, simétricos e transitivos, reflexivos, simetricos e transitivos, respectivamente, tem-se que se $x : \varphi$ é teorema de um destes sistemas dedutivos então φ é uma fórmula do sistema modal correspondente. Da Proposição 1.4.17 e do Corolário 1.9.12, pode chegar-se aos resultados enunciados na Proposição 1.9.13. Tal como já havia sido referido, para cada sistema dedutivo, o resultado em causa designa-se correcção do sistema dedutivo face ao sistema modal indicado.

Proposição 1.9.13 Correcção dos sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ face a certos sistemas modais
Sejam $x \in Et$ e $\varphi \in FM_P$.

1. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^T$ então φ pertence ao sistema KT.
2. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^B$ então φ pertence ao sistema KB.
3. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^4$ então φ pertence ao sistema $K4$.

4. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^5$ então φ pertence ao sistema $K5$.

5. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^{T4}$ então φ pertence ao sistema $KT4$.

6. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^{TB4}$ então φ pertence ao sistema $KTB4$. ∎

Conclui-se assim que os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^T$, $\mathcal{N}_m^B$, $\mathcal{N}_m^4$, $\mathcal{N}_m^5$, $\mathcal{N}_m^{T4}$ e $\mathcal{N}_m^{TB4}$ são correctos face aos sistemas modais KT, KB, $K4$, $K5$, $KT4$ e $KTB4$, respectivamente.

1.9.3 Correcção dos sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$

Nesta secção mostra-se que os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ são correctos face a certas classes de enquadramentos.

À semelhança das extensões anteriores, após a prova de correcção provam-se resultados relacionados com relação entre estes sistemas dedutivos e (i) as noções de consequência semântica (local) e de validade em FM_P (em certas classes de enquadramentos), (ii) os sistemas modais KD, $K2$, KX, $KD45$, $KT42$.

Como nos casos anteriores, a prova de correcção para cada um dos sistema passa por provar que cada uma das regras do sistema é correcta face a uma certa classe de enquadramentos. Note-se que a noção de correcção das regras é, naturalmente, semelhante à apresentada anteriormente. No entanto há que ter em conta que existem regras que, por definição, envolvem apenas fórmulas FG_Σ para uma particular assinatura Σ. A regra cnv_1, por exemplo, apenas está definida quando se trabalha no contexto de FG_{Σ_2}. Assim, na noção de correcção de cnv_1, a consequência semântica envolve apenas, como é natural, estruturas de interpretação modal generalizadas sobre Σ_2.

No que se segue $\mathcal{E}_{ser}$, $\mathcal{E}_{dns}$, $\mathcal{E}_{cnv}$, $\mathcal{E}_{ref}$, $\mathcal{E}_{trn}$ e $\mathcal{E}_{euc}$ representam, como é usual, as classes de enquadramentos seriais, densos, convergentes, reflexivos, transitivos e euclideanos, respectivamente.

Proposição 1.9.14

1. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^D$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ser}$.

2. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^2$ são correctas face a $\mathcal{E}_{cnv}$.

3. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^X$ são correctas face a $\mathcal{E}_{dns}$.

4. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^{D45}$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}$.

5. As regras de inferência de $\mathcal{N}_m^{T42}$ são correctas face a $\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}$.

Prova: Note-se que, no contexto desta proposição, não se consideram os axiomas *ref* e *ser* como regras de inferência.

1. As regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_m^D$ são semelhantes às regras do sistema $\mathcal{N}_m$. A prova de que estas regras são correctas face à classe $\mathcal{E}_{ser}$ é idêntica à prova apresentada na Proposição 1.9.1.

2. A prova relativa às regras de inferência modais de $\mathcal{N}_m^2$ é idêntica à apresentada na Proposição 1.9.1. Note-se que neste caso as fórmulas envolvidas são sempre fórmulas em FG_{Σ_2}.

Regra cnv_1: Suponha-se que d foi construída por aplicação da regra cnv_1 a partir de d_1 e d_2, pelo que, sendo $conc(d_1) = s\mathbf{R}t$ e $conc(d_2) = s\mathbf{R}r$, tem-se que $conc(d) = t\mathbf{R}h(s,t,r)$. Neste caso $H_d = H_{d_1} \cup H_{d_2}$. Assumindo que $H_{d_1} \models_{\mathcal{E}_{cnv}} s\mathbf{R}t$ e $H_{d_2} \models_{\mathcal{E}_{cnv}} s\mathbf{R}r$ há que mostrar que $H_d \models_{\mathcal{E}_{cnv}} t\mathbf{R}h(s,t,r)$. Considere-se uma estrutura de interpretação modal generalizada $I\!M_g = (W, R, V, I)$ sobre Σ_2, onde R é uma relação convergente, e $\rho \in ATR_{I\!M_g}$ tal que $I\!M_g, \rho \models H_d$. Então $I\!M_g, \rho \models H_{d_i}$, $i \in \{1,2\}$, e portanto $I\!M_g, \rho \models s\mathbf{R}t$ e $I\!M_g, \rho \models s\mathbf{R}u$. Sendo $[\![s]\!]^\rho_{I\!M_g} = w_1$, $[\![t]\!]^\rho_{I\!M_g} = w_2$ e $[\![u]\!]^\rho_{I\!M_g} = w_3$, tem-se que $w_1 R w_2$ e $w_1 R w_3$. Pela Definição 1.8.6, $I(h)(w_1, w_2, w_3) = w$ tal que, em particular, $w_2 R w$. Assim, dado que $[\![h(s,t,r)]\!]^\rho_{I\!M_g} = I(h)([\![s]\!]^\rho_{I\!M_g}, [\![t]\!]^\rho_{I\!M_g}, [\![r]\!]^\rho_{I\!M_g}) = w$, tem-se então que $I\!M_g, \rho \models t\mathbf{R}h(s,t,r)$. Conclui-se assim que $H_d \models_{\mathcal{E}_{cnv}} t\mathbf{R}h(s,t,r)$.

Regra cnv_2: Semelhante ao caso da regra cnv_1.

3. As únicas situações novas são o caso das regras dns_1 e dns_2. As provas são semelhantes às apresentadas em 2, tendo em conta que as fórmulas envolvidas são sempre fórmulas em FG_{Σ_X} e a relação de acessibilidade subjacente é densa.

4. As provas relativas às regras *trn* e *euc* são semelhantes às referidas na Proposição 1.9.8.

5. Semelhante aos casos anteriores. ∎

Proposição 1.9.15

1. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ser}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^D}$.

2. $H_d \models_{\mathcal{E}_{cnv}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^2}$.

3. $H_d \models_{\mathcal{E}_{dns}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^X}$.

4. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^{D45}}$.

5. $H_d \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}} conc(d)$ para cada $d \in D_{\mathcal{N}_m^{T42}}$.

Prova: A prova é semelhante à apresentada para a Proposição 1.9.9. A única diferença reside no casos dos sistemas que incluam o axioma *ser* para os quais há que provar que a árvore singular correspondente verifica a propriedade pretendida. Note-se que nos casos 1 e 4 se trabalha com fórmulas em FG_{Σ_D}, nos casos 2 e 4 se trabalha com fórmulas em FG_{Σ_2} e no caso 3 se trabalha com fórmulas em FG_{Σ_X}. Consequentemente, a consequência semântica envolve, para cada caso, estruturas de interpretação apropriadas. Segue-se a prova relativa ao axioma *ser*.

Sendo d uma árvore singular correspondente a uma instância do axioma *ser*, há que mostrar que $H_d \models_{\mathcal{E}_{ser}} conc(d)$. Neste caso, $H_d = \emptyset$ e $conc(d) = t\mathbf{R}f(t)$. Seja $I\!M\!I_g = (W, R, V, I)$ uma estrutura de interpretação modal generalizada sobre Σ_D tal que R é serial e seja $\rho \in ATR_{I\!M\!I_g}$. Sendo $[\![t]\!]^{\rho}_{I\!M\!I_g} = w$, pela Definição 1.8.6, $I(f)(w) = w'$ tal que wRw'. Assim, dado que $[\![f(t)]\!]^{\rho}_{I\!M\!I_g} = I(f)([\![t]\!]^{\rho}_{I\!M\!I_g}) = w'$, tem-se então que $I\!M\!I_g, \rho \models t\mathbf{R}f(t)$. ■

Proposição 1.9.16
Sejam $\Xi \subseteq FG_\Sigma$ e $\xi \in FG_\Sigma$.

1. Se Σ é Σ_D
   - se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^D} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ser}} \xi$;
   - se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}} \xi$.
2. Se Σ é Σ_2
   - se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^2} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{cnv}} \xi$;
   - se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^{T42}} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}} \xi$.
3. Se Σ é Σ_X e $\Xi \vdash_{\mathcal{N}_m^X} \xi$ então $\Xi \models_{\mathcal{E}_{dns}} \xi$.

Prova: As provas são idênticas à apresentada no caso da Proposição 1.9.3, tendo agora em conta as classes de enquadramentos correspondentes. ■

À semelhança das extensões anteriores, estes sistemas dedutivos podem ser utilizados para estabelecer resultados relacionados com consequência semântica local entre fórmulas modais nas classes de enquadramentos relativamente às quais são correctos (e resultados de validade de fórmulas modais nessas classes de enquadramentos). A Proposição 1.9.17 estabelece o resultado pretendido.

Proposição 1.9.17
Sejam $\Phi \subseteq FM_P$, $\varphi \in FM_P$, $x \in Et$ e $x : \Phi = \{x : \varphi' : \varphi' \in \Phi\}$.

1. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^D} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ser}} \varphi$.
2. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^2} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{cnv}} \varphi$.
3. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^X} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{dns}} \varphi$.
4. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}} \varphi$.
5. Se $x : \Phi \vdash_{\mathcal{N}_m^{T42}} x : \varphi$ então $\Phi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}} \varphi$.

Prova: Idêntica à da Proposição 1.9.4. ■

Corolário 1.9.18
Sejam $\varphi \in FM_P$ e $x \in Et$.

1. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^D} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ser}} \varphi$.
2. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^2} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{cnv}} \varphi$.
3. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^X} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{dns}} \varphi$.
4. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^{D45}} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}} \varphi$.
5. Se $\vdash_{\mathcal{N}_m^{T42}} x : \varphi$ então $\models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}} \varphi$. ■

As relações, já anteriormente referidas, entre os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ e os sistemas modais KD, $K2$, KX, $KD45$ e $KT42$, respectivamente, podem agora ser estabelecidas.

Proposição 1.9.19 Correcção dos sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ face a certos sistemas modais
Sejam $x \in Et$ e $\varphi \in FM_P$.

1. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^D$ então φ pertence ao sistema KD.

2. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^2$ então φ pertence ao sistema $K2$.

3. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^X$ então φ pertence ao sistema KX.

4. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^{D45}$ então φ pertence ao sistema $KD45$.

5. Se $x : \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}_m^{T42}$ então φ pertence ao sistema $KT42$. ∎

Conclui-se assim que os sistemas dedutivos $\mathcal{N}_m^D$, $\mathcal{N}_m^2$, $\mathcal{N}_m^X$, $\mathcal{N}_m^{D45}$ e $\mathcal{N}_m^{T42}$ são correctos face aos sistemas modais KD, $K2$, KX, $KD45$ e $KT42$, respectivamente.

1.9.4 Completude do sistema dedutivo $\mathcal{N}_m$

Nesta secção provam-se resultados de completude de uma restrição do sistema $\mathcal{N}_m$ (que não afecta a expressividade da lógica).

Tal como nos casos anteriores, a prova de resultados de completude é mais trabalhosa do que a prova da correcção e também aqui, para simplificar a exposição, assume-se que apenas se manipulam fórmulas que não incluam os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o operador modal $\Diamond$ (e portanto só são relevantes as regras $\rightarrow I$, $\rightarrow E$ e $\perp$, $\Box I$ e $\Box E$). Como se sabe, isto não constitui uma restrição importante dado que os outros conectivos se podem definir como abreviatura a partir dos aqui considerados[23]. Assim sendo, os resultados de completude aqui apresentados são relativos à restrição do sistema $\mathcal{N}_m$ designada $\mathcal{N}'_m$.

Os resultados de completude que aqui se apresentam são os seguintes:

(i) se $\Delta \subseteq FR$ e $x\mathbf{R}y \in FR$ tem-se que se $\Delta \models x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'_m} x\mathbf{R}y$

(ii) se $\Xi \subseteq FG$ e $x : \varphi \in FE$ tem-se que se $\Xi \models x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'_m} x : \varphi$

assumindo, naturalmente, que as fórmulas envolvidas verificam as restrições acima referidas. Resultados semelhantes serão apresentados para as várias extensões do sistema $\mathcal{N}_m$ que se descrevem nas secções seguintes.

[23] $\Diamond\varphi_{abv}\neg(\Box(\neg\varphi))$

Notação 1.9.20 No que se segue, e à semelhança do que acontecia em situações semelhantes anteriores, FM'_P, FG' e FE', representam conjuntos definidos como FM_P, FG e FE, respectivamente, mas não envolvendo os conectivos $\wedge$, $\vee$ e o operador $\Diamond$. Assume-se fixado um certo conjunto (numerável) M de marcas. ∎

Definição 1.9.21 SISTEMA $\mathcal{N}'_m$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}'_m$ é constituído pelas regras de inferência $\rightarrow I$, $\rightarrow E$, $\Box I$, $\Box E$ e $\perp$ definidas como na Definição 1.5.15 mas considerando apenas $E^M_{FG'}$-árvores. ∎

Observação 1.9.22 Todas as definições e notações relativas ao sistema de dedução natural $\mathcal{N}_m$ apresentadas anteriormente podem como é natural ser adaptadas para o caso do sistema $\mathcal{N}'_m$. ∎

Inicia-se agora a prova dos resultados que conduzem à prova dos resultados de completude do sistema $\mathcal{N}'_m$. A prova dos resultados de completude referidos é semelhante à prova desenvolvida para o sistema $\mathcal{N}'_p$. Tem de novo por base

– as noções de conjunto (de fórmulas) coerente e de conjunto (de fórmulas) coerente maximal (Definição 1.9.23)

– o facto de qualquer conjunto coerente estar contido num conjunto coerente maximal (Proposição 1.9.25) e

– o facto de, para cada conjunto coerente maximal, existir uma modelo que satisfaz todas as fórmulas do conjunto com uma dada atribuição (Corolário 1.9.29).

Definição 1.9.23 CONJUNTO COERENTE E CONJUNTO COERENTE MAXIMAL
Sendo $\Xi \subseteq FG'$

- Ξ diz-se *coerente* se, para cada $x \in Et$, $\Xi \not\vdash_{\mathcal{N}'_m} x : \perp$; Ξ diz-se *incoerente* se não é coerente;
- Ξ diz-se *coerente maximal* se se verificam as condições seguintes
  - Ξ é coerente
  - para cada $x : \varphi \in FE'$ tem-se que $x : \varphi \in \Xi$ ou $x : \neg\varphi \in \Xi$. ∎

Proposição 1.9.24

1. Se $\Xi \subseteq FG'$ é coerente então não existe $x : \varphi \in FE'$ tal que $\{x : \varphi, x : \neg\varphi\} \subseteq \Xi$.

2. Se $\Xi \subseteq FG'$ é coerente então, para cada $x : \varphi \in FE'$, tem-se que $\Xi \cup \{x : \varphi\}$ é coerente ou $\Xi \cup \{x : \neg\varphi\}$ é coerente.

Prova: 1. Semelhante à apresentada no caso da Proposição **??**.

2. Semelhante à apresentada no caso da Proposição **??** (tendo agora em conta a Proposição 1.5.19). ■

Proposição 1.9.25
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto coerente. Seja $\overline{Et} = Et \cup Et_{aux}$ onde Et_{aux} é um conjunto numerável e disjunto de Et e sejam $\overline{FG}'$ e $\overline{FE}' \subseteq \overline{FG}'$, respectivamente, o conjunto das fórmulas modais generalizadas e o conjunto das fórmulas modais etiquetadas sobre P e $\overline{Et}$. Considere-se uma enumeração ξ_0, ξ_1, ξ_2, ... de $\overline{FE}'$ e considerem-se os conjuntos Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2, ... construídos do seguinte modo:

(i) $\Xi_0 = \Xi$

(ii) para cada $i \geq 0$

- se $\Xi_i \cup \{\xi_i\}$ é incoerente então $\Xi_{i+1} = \Xi_i$
- se $\Xi_i \cup \{\xi_i\}$ é coerente
  - se ξ_i não é da forma $x : \neg\Box\varphi$ então $\Xi_{i+1} = \Xi_i \cup \{\xi_i\}$
  - se $\xi_i = x : \neg\Box\varphi$ então $\Xi_{i+1} = \Xi_i \cup \{x : \neg\Box\varphi, u : \neg\varphi, x\mathbf{R}u\}$ para algum $u \in Et_{aux}$ tal que $u \notin (\Xi_i)_{et} \cup \{x\}$.

Tem-se que o conjunto $\Xi^\star = \bigcup_{i \geq 0} \Xi_i$ é coerente maximal.

Prova: Note-se que o conjunto $\overline{FE}'$ é numerável (a prova é semelhante à referida na Proposição **??**) e portanto é possível considerar uma sua enumeração.

Prova-se, por indução, que Ξ_i é coerente para cada $i \geq 0$.

Base: $\Xi_0 (= \Xi)$ é coerente, por hipótese.

Passo: seja $i \geq 0$ e assuma-se Ξ_i coerente. No caso em que $\Xi_i \cup \{\xi_i\}$ é incoerente ou no caso em que $\Xi_i \cup \{\xi_i\}$ é coerente e ξ_i não é do tipo $x : \neg\Box\varphi$ tem-se, por construção, que Ξ_{i+1} é coerente. Considere-se agora o caso em que $\Xi_i \cup \{\xi_i\}$ é coerente e $\xi_i = x : \neg\Box\varphi$. Suponha-se, por absurdo, que $\Xi_{i+1} = \Xi_i \cup \{x : \neg\Box\varphi, u : \neg\varphi, x\mathbf{R}u\}$ (onde u verifica as condições enunciadas) não é coerente. Existe então uma dedução

$$\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ y : \bot\end{array}$$

para algum $y \in \overline{Et}$ na qual as hipóteses abertas de $\mathcal{D}$ estão contidas em Ξ_{i+1} e, sem perda de generalidade, se pode considerar que hipóteses abertas relativas à fórmula $u : \neg\varphi$ têm todas a mesma marca, o mesmo acontecendo no caso da fórmula $x\mathbf{R}u$. Pode assim construir-se a dedução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[u : \neg\varphi]^{m'} \quad [x\mathbf{R}u]^{m''} \\ \mathcal{D} \\ y : \bot\end{array}}{u : \varphi}\ \bot, m'}{x : \Box\varphi}\ \Box I, m'' \qquad x : \neg\Box\varphi\ ^{m'''}}{x : \bot}\ \rightarrow E$$

que permite concluir que $\Xi_i \cup \{x : \neg\Box\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_m} x : \bot$ (note-se que a aplicação da regra $\Box I$ é correcta, pois u verfica as condições de aplicação da regra). Deste modo $\Xi_i \cup \{x : \neg\Box\varphi\}$ não é coerente, o que contradiz a assumpção inicial. Conclui-se assim que Ξ_{i+1} é coerente.

Finalmente, a prova de que $\Xi^\star$ é coerente maximal prossegue agora de modo semelhante ao apresentado na prova da Proposição **??**. ■

Proposição 1.9.26
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.25. Sendo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in FM'_P$ e $x \in \overline{Et}$ então

(i) $\Xi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_m} x : \varphi$ se e só se $x : \varphi \in \Xi^\star$;

(ii) $x : \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Xi^\star$ se e só se se $x : \varphi_1 \in \Xi^\star$ então $x : \varphi_2 \in \Xi^\star$;

(iii) $x : \Box\varphi \in \Xi^\star$ se e só se, para cada $u \in \overline{Et}$, se $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$ então $u : \varphi \in \Xi^\star$.

Prova: (i) e (ii) Provas semelhantes às apresentadas na prova da Proposição **??**.

(iii) Suponha-se, em primeiro lugar, que $x : \Box\varphi \in \Xi^\star$. Seja $u \in \overline{Et}$ e assuma-se que $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$. Há que mostrar que $u : \varphi \in \Xi^\star$. A dedução

$$\dfrac{x : \Box\varphi^{\ m'} \qquad\qquad x\mathbf{R}u^{\ m''}}{u : \varphi}\ \Box E$$

permite concluir que $\Xi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_m} u : \varphi$. Por (i), $u : \varphi \in \Xi^\star$.

Suponha-se agora que, para cada $u \in \overline{Et}$, se $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$ então $u : \varphi \in \Xi^\star$. Há que mostrar que $x : \Box\varphi \in \Xi^\star$. Suponha-se, por absurdo, que $x : \Box\varphi \notin \Xi^\star$. Como $\Xi^\star$ é coerente maximal, $x : \neg\Box\varphi \in \Xi^\star$. Tem-se ainda que existe $j \in I\!N_0$ tal que $x : \neg\Box\varphi = \xi_j$ onde ξ_j é um dos elementos da enumeração de $\overline{FE}'$ considerada na Proposição 1.9.25. Considerando a sucessão de conjuntos Ξ_0, Ξ_1, ... construída na referida Proposição, tem-se que $\Xi_j \cup \{\xi_j\}$ é necessariamente coerente (caso contrário, dado que $\Xi_j \cup \{\xi_j\} \subseteq \Xi^\star$, $\Xi^\star$ não seria coerente) e portanto, tendo em conta, a construção de Ξ_{j+1}, existe $y \in \overline{Et}$ tal que $x\mathbf{R}y \in \Xi_{j+1}$ e $y : \neg\varphi \in \Xi_{j+1}$. Por construção de $\Xi^\star$, $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$ e $y : \neg\varphi \in \Xi^\star$. Mas, pela hipótese acima, se $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$ então $y : \varphi \in \Xi^\star$. Tem-se então que $y : \varphi \in \Xi^\star$ e $y : \neg\varphi \in \Xi^\star$ o que, pela Proposição 1.9.24, significa que $\Xi^\star$ não é coerente. Chega-se assim a uma contradição, o que significa que $x : \Box\varphi \in \Xi^\star$ como se pretendia. ∎

Definição 1.9.27 Estrutura de interpretação modal canónica

Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.25. A *estrutura de interpretação modal canónica induzida por* $\Xi^\star$ designa-se $I\!M\!I_{\Xi^\star}$ e é definida do seguinte modo: $I\!M\!I_{\Xi^\star} = (W, R, V)$ onde

- $W = (\Xi^\star)_{et}$
- para cada $x, y \in W$, xRy se $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$;
- para cada $p \in P$, $V(p) = \{x \in W : x : p \in \Xi^\star\}$. ∎

Proposição 1.9.28

Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.25. Seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{I\!M\!I_{\Xi^\star}}$ tal que $\rho(x) = x$ para cada $x \in W$. Então, para cada $\varphi \in FM'_P$ e $x, y \in \overline{Et}$

(i) $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$ se e só se $I\!M\!I_{\Xi^\star}, \rho \models x\mathbf{R}y$;

(ii) $x : \varphi \in \Xi^\star$ se e só se $I\!M\!I_{\Xi^\star}, \rho \models x : \varphi$.

Prova: Seja $\mathbb{M}_{\Xi^\star} = (W, R, V)$

(i) Supondo $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$, por definição de $\mathbb{M}_{\Xi^\star}$, tem-se que xRy e $x, y \in W$. Tendo em conta a definição de ρ, $\rho(x)R\rho(y)$ e portanto $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x\mathbf{R}y$. Suponha-se agora que $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x\mathbf{R}y$. Isto significa que $\rho(x)R\rho(y)$, o que pela definição de ρ, permite dizer que xRy. Pela definição de $\mathbb{M}_{\Xi^\star}$ conclui-se que $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$.

(ii) A prova faz-se por indução na complexidade de φ e tendo em conta as definições de $\mathbb{M}_{\Xi^\star}$ e ρ.

Base: seja $\varphi \in P$. Se $x : \varphi \in \Xi^\star$ então $x(= \rho(x)) \in V(\varphi)$ e $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho(x) \models \varphi$, pelo que $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x : \varphi$. Reciprocamente, se $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x : \varphi$ então $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho(x) \models \varphi$. Deste modo $x(= \rho(x)) \in V(\varphi)$, o que permite concluir que $x : \varphi \in \Xi^\star$.

O caso $\varphi = x : \bot$ é trivial em ambos os sentidos porque, por um lado, $x : \bot \notin \Xi^\star$ pois este conjunto é coerente e, por outro, por definição de satisfação de fórmula, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \not\models x : \bot$.

Passo: Existem dois casos a considerar: (a) φ é $\varphi_1 \to \varphi_2$ e (b) φ é $\Box\varphi_1$.

Caso (a): prova semelhante à apresentada no caso da Proposição **??**, recorrendo aqui à Proposição 1.9.26.

Caso (b): Se $x : \Box\varphi_1 \in \Xi^\star$ então $x \in W$ e $\rho(x) = x$. Seja $y \in W$ tal que xRy. Tem-se que $\rho(y) = y$ e $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$. Pela Proposição 1.9.26, $y : \varphi_1 \in \Xi^\star$. Por hipótese de indução, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models y : \varphi_1$ e portanto $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, y \models \varphi_1$. Assim, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, x \models \Box\varphi_1$ e consequentemente $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x : \Box\varphi_1$.

Reciprocamente, suponha-se que $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models x : \Box\varphi_1$. Tem-se então que $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, x \models \Box\varphi_1$. Suponha-se, por absurdo, que $x : \Box\varphi_1 \notin \Xi^\star$. Então, pela Proposição 1.9.26, existe $u \in \overline{Et}$ tal que $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$ e $u : \varphi_1 \notin \Xi^\star$. Como $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$, $u \in W$ e xRu. Tem-se ainda que $\rho(u) = u$. Como $u : \varphi_1 \notin \Xi^\star$, por hipótese de indução, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \not\models u : \varphi_1$, isto é, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, u \not\models \varphi_1$. Consequentemente, $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, x \not\models \Box\varphi_1$. Chega-se assim a uma contradição, a qual permite concluir que $x : \Box\varphi_1 \in \Xi^\star$. ■

Corolário 1.9.29
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto coerente, seja $\Xi^\star$ um conjunto coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.25 e seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{\mathbb{M}_{\Xi^\star}}$ como na Proposição 1.9.28. Tem-se que $\mathbb{M}_{\Xi^\star}, \rho \models \Xi^\star$.

Prova: Imediato a partir da Proposição 1.9.28. ■

Apresentam-se finalmente os resultados de completude referidos no iníco da secção.

Proposição 1.9.30
Sejam $\Xi \subseteq FG'$, $\Delta \subseteq FR$, $x, y \in Et$ e $\varphi \in FM'_P$. Tem-se que

(i) se $\Delta \models x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'_m} x\mathbf{R}y$;

(ii) se $\Xi \models x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'_m} x : \varphi$.

Prova: (i) Para provar resultado prova-se o seu contra-recíproco, ou seja, mostra-se que se $\Delta \not\vdash_{\mathcal{N}'_m} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \not\models x\mathbf{R}y$. Suponha-se então que $\Delta \not\vdash_{\mathcal{N}'_m} x\mathbf{R}y$. Tem-se assim que $x\mathbf{R}y \notin \Delta$. Tendo em conta, as regras de inferência de $\mathcal{N}'_m$ e o facto de $\Delta \subseteq FR$, tem-se que Δ é necessariamente coerente e portanto pode construir-se uma sua extensão coerente maximal $\Delta^\star$ como na Proposição 1.9.25. Da construção de $\Delta^\star$, pelo facto de $x\mathbf{R}y \notin \Delta$ e dado que $x, y \in Et$ e $Et \cap Et_{aux} = \emptyset$, tem-se que $x\mathbf{R}y \notin \Delta^\star$. Pela Proposição 1.9.28, $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star}, \rho \not\models x\mathbf{R}y$ onde $\rho \in ATR^{Et}_{I\!\!M\!\!I_{\Xi^\star}}$ como na Proposição 1.9.28. Pelo Corolário 1.9.29, $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star}, \rho \models \Delta^\star$ e portanto, dado que $\Delta \subseteq \Delta^\star$, $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star}, \rho \models \Delta$. Sendo $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star} = (W, R, V)$ e considerando $\rho' \in ATR^{Et}_{I\!\!M\!\!I_{\Xi^\star}}$ tal que $\rho'(x) = \rho(x)$ para cada $x \in Et$, tem-se, trivialmente que $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star}, \rho' \models \Delta$ e $I\!\!M\!\!I_{\Delta^\star}, \rho' \not\models x\mathbf{R}y$. Conclui-se assim que $\Delta \not\models x\mathbf{R}y$.

(ii) A prova é semelhante à apresentada no caso da Proposição **??** recorrendo aqui à Proposição 1.9.25 e ao Corolário 1.9.29 e tendo em conta observações semelhantes às apresentadas em (i) associadas à atribuição ρ'. ∎

1.9.5 Completude dos sistemas $\mathcal{N}^T_m$, $\mathcal{N}^B_m$, $\mathcal{N}^4_m$, $\mathcal{N}^5_m$, $\mathcal{N}^{T4}_m$ e $\mathcal{N}^{TB4}_m$

Nesta secção provam-se resultados de completude relativos aos sistemas $\mathcal{N}^T_m$, $\mathcal{N}^B_m$, $\mathcal{N}^4_m$, $\mathcal{N}^5_m$, $\mathcal{N}^{T4}_m$ e $\mathcal{N}^{TB4}_m$. Tal como no caso de $\mathcal{N}_m$, não se trabalha directamente com estes sistemas, mas sim com restrições destes sistemas, mais precisamente, com sistemas em se manipulam apenas fórmulas que não incluam os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o operador modal $\Diamond$. À semelhança do que tem vindo a ser feito, tais restrições são designadas $\mathcal{N'}^T_m$, $\mathcal{N'}^B_m$, $\mathcal{N'}^4_m$, $\mathcal{N'}^5_m$, $\mathcal{N'}^{T4}_m$ e $\mathcal{N'}^{TB4}_m$.

Os resultados de completude que aqui se apresentam são semelhantes aos apresentados no caso de $\mathcal{N}_m$ mas, como é natural, a noção de consequência semântica ($\models$) é a agora substituída por consequência semântica em certas classes de enquadramentos ($\models_\mathcal{E}$). Os resultados de completude para os sistemas dedutivos aqui apresentados são enunciados nas Proposições 1.9.44 a 1.9.50.

Notação 1.9.31 No que se segue, e à semelhança do que acontecia nas situações anteriores, FM'_P, FG' e FE', representam conjuntos de fórmulas definidos como FM_P, FG e FE, respectivamente, mas não envolvendo os conectivos $\wedge$, $\vee$ e o operador $\diamond$. ∎

Definição 1.9.32 SISTEMAS ${\mathcal{N}'}^T_m$, ${\mathcal{N}'}^B_m$, ${\mathcal{N}'}^4_m$, ${\mathcal{N}'}^5_m$, ${\mathcal{N}'}^{T4}_m$ E ${\mathcal{N}'}^{TB4}_m$

Os *sistemas dedutivos* ${\mathcal{N}'}^T_m$, ${\mathcal{N}'}^B_m$, ${\mathcal{N}'}^4_m$, ${\mathcal{N}'}^5_m$, ${\mathcal{N}'}^{T4}_m$ *e* ${\mathcal{N}'}^{TB4}_m$ têm definição idêntica à dos sistemas $\mathcal{N}^T_m$, $\mathcal{N}^B_m$, $\mathcal{N}^4_m$, $\mathcal{N}^5_m$, $\mathcal{N}^{T4}_m$ e $\mathcal{N}^{TB4}_m$, respectivamente, mas não se incluem as regras relacionadas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e o operador $\diamond$ e são consideradas apenas $E^{R1'_m,M}_{FG'}$-árvores. ∎

Observação 1.9.33 Todas as definições e notações relativas ao sistemas de dedução natural $\mathcal{N}^T_m$, $\mathcal{N}^B_m$, $\mathcal{N}^4_m$, $\mathcal{N}^5_m$, $\mathcal{N}^{T4}_m$ e $\mathcal{N}^{TB4}_m$ são também consideradas para os novos sistemas. ∎

A prova dos resultados de completude para os sistemas aqui considerados é muito semelhante à apresentada para o caso do sistema $\mathcal{N}'_m$ mas, como seria de esperar, existem algumas diferenças em alguns detalhes. Sendo $\mathcal{N}'$ um qualquer dos sistemas aqui considerados tem-se que:

- é necessário introduzir a noção de fecho dedutivo em $\mathcal{N}'$ de conjuntos de fórmulas relacionais
- as noções de conjunto coerente e coerente maximal são agora substituídas pelas noções de conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e $\mathcal{N}'$-coerente maximal
- na construção de um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal a partir de um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente existem algumas diferenças relacionadas com as fórmulas relacionais envolvidas.

Notação 1.9.34 Para simplificar a exposição no que se segue usa-se $\mathcal{N}'$ para representar genericamente os sistemas dedutivos ${\mathcal{N}'}^T_m$, ${\mathcal{N}'}^B_m$, ${\mathcal{N}'}^4_m$, ${\mathcal{N}'}^5_m$, ${\mathcal{N}'}^{T4}_m$ e ${\mathcal{N}'}^{TB4}_m$. ∎

Definição 1.9.35 FECHO DEDUTIVO EM $\mathcal{N}'$ DE $\Delta \subseteq FR$

Seja $\Delta \subseteq FR$. O conjunto

$$\Delta_{\mathcal{N}'} = \{x\mathbf{R}y : \Delta \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y\}$$

é o *fecho dedutivo de* Δ *em* $\mathcal{N}'$. ∎

Proposição 1.9.36
Sendo $\Xi \subseteq FG'$ e $\xi \in FG'$ tem-se que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$ se e só se $\Xi_E \cup (\Xi_R)_{\mathcal{N}'} \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$.

Prova: O facto de se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$ então $\Xi_E \cup (\Xi_R)_{\mathcal{N}'} \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$ é trivial tendo em conta a Definição 1.9.35. Suponha-se agora que $\Xi_E \cup (\Xi_R)_{\mathcal{N}'} \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$. Existe então uma árvore de dedução d de $\mathcal{N}'$ tal que $conc(d) = \xi$ e $H_d \subseteq \Xi_E \cup (\Xi_R)_{\mathcal{N}'}$. Se, em particular, $H_d \subseteq \Xi_E \cup \Xi_R (= \Xi)$ então é imediato que $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$. Caso contrário, sejam $n_1, \ldots, n_k$, $k \in I\!N$, as folhas de d a que estão associadas hipóteses em $(\Xi_R)_{\mathcal{N}'} \backslash \Xi_R$ e, para cada $1 \leq i \leq k$, seja $x_i \mathbf{R} y_i$ a hipótese associada a n_i. Pela Definição 1.9.35, para cada $1 \leq i \leq k$, $\Xi_R \vdash_{\mathcal{N}'} x_i \mathbf{R} y_i$, pelo que existe uma árvore de dedução d_i em $\mathcal{N}'$ tal que $conc(d_i) = x_i \mathbf{R} y_i$ e $H_{d_i} \subseteq \Xi_R$. A partir da árvore d e substituindo as folhas $n_1, \ldots, n_k$ pelas árvores $d_1, \ldots, d_k$ assim construídas obtém-se uma dedução d' tal que $conc(d') = \xi$ e $H_{d'} \subseteq \Xi_E \cup \Xi_R (= \Xi)$ e portanto $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'} \xi$. ■

Definição 1.9.37 CONJUNTOS $\mathcal{N}'$-COERENTE E $\mathcal{N}'$-COERENTE MAXIMAL
Sendo $\Xi \subseteq FG'$

- Ξ diz-se $\mathcal{N}'$-*coerente* se, para cada $x \in Et$, $\Xi \not\vdash_{\mathcal{N}'} x : \perp$; Ξ diz-se $\mathcal{N}'$-*incoerente* se não é $\mathcal{N}'$-coerente;
- Ξ diz-se $\mathcal{N}'$-*coerente maximal* se se verificam as condições seguintes
  - Ξ é coerente
  - $\Xi_R = (\Xi_R)_{\mathcal{N}'}$
  - para cada $x : \varphi \in FE'$ tem-se que $x : \varphi \in \Xi$ ou $x : \neg\varphi \in \Xi$. ■

Proposição 1.9.38

1. Se $\Xi \subseteq FG'$ é $\mathcal{N}'$-coerente então não existe $x : \varphi \in FE'$ tal que $\{x : \varphi, x : \neg\varphi\} \subseteq \Xi$.
2. Se $\Xi \subseteq FG'$ é $\mathcal{N}'$-coerente, então, para cada $x : \varphi \in FE'$, tem-se que $\Xi \cup \{x : \varphi\}$ é coerente ou $\Xi \cup \{x : \neg\varphi\}$ é coerente.

Prova: Igual à prova da Proposição 1.9.24. ■

Proposição 1.9.39

Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e sejam $\overline{Et}$, $\overline{FG}'$ e $\overline{FE}' \subseteq \overline{FG}'$ como na Proposição 1.9.25. Considerem-se ainda os conjuntos Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2, … construídos como na referida Proposição. Tem-se que o conjunto

$$\Xi^\star_{\mathcal{N}'} = \bigcup_{i\geq 0} (\Xi_i)_E \cup ((\Xi_i)_R)_{\mathcal{N}'}$$

é $\mathcal{N}'$-coerente maximal.

Prova: Os conjuntos Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2, … são $\mathcal{N}'$-coerentes. A prova é idêntica à prova de que os referidos conjuntos são coerentes (Proposição 1.9.25).

Para provar o resultado pretendido, há que mostrar que são satisfeitas as três condições referidas na Definição 1.9.37.

Prova-se em primeiro lugar que $\Xi^\star$ é coerente. Suponha-se, por absurdo, que $\Xi^\star$ não é coerente. Então existe um subconjunto $\Xi' \subseteq \Xi^\star$ finito tal que $\Xi' \vdash_{\mathcal{N}} x : \bot$ para algum $x \in Et$. Tendo em conta a construção de $\Xi^\star$, tem-se que existirá um certo $j \geq 0$ tal que $\Xi' \subseteq (\Xi_j)_E \cup ((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'}$. Assim, $(\Xi_j)_E \cup ((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'} \vdash_{\mathcal{N}'} x : \bot$ e portanto, pela Proposição 1.9.36, $(\Xi_j)_E \cup (\Xi_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x : \bot$, ou seja, $\Xi_j \vdash_{\mathcal{N}'} x : \bot$ o que contradiz o facto de Ξ_j ser $\mathcal{N}'$-coerente. Conclui-se então que $\Xi^\star$ é coerente.

Prova-se agora que $(\Xi^\star)_R = ((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'}$. A inclusão $(\Xi^\star)_R \subseteq ((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'}$ é trivial. Considere-se então $x\mathbf{R}y \in ((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'}$. Pela Definição 1.9.35, $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$. Existe então um conjunto finito $\Delta \subseteq (\Xi^\star)_R$ tal que $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$. Por construção de $\Xi^\star$, tendo em conta que $((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'} \subseteq ((\Xi_{j+1})_R)_{\mathcal{N}'}$ para cada $j \in I\!N_0$, $\Delta \subseteq ((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'}$ para algum $j \in I\!N_0$. Consequentemente, $((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'} \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$. Pela Proposição 1.9.36, $(\Xi_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$ e portanto $x\mathbf{R}y \in ((\Xi_j)_R)_{\mathcal{N}'}$. Conclui-se então que $((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'} \subseteq (\Xi^\star)_R$.

Finalmente, a prova da última condição é idêntica à apresentada na Proposição **??**. ∎

Proposição 1.9.40
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.39. Sendo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in FM'_P$ e $x, y \in \overline{Et}$ então

(i) $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$ se e só se $x\mathbf{R}y \in (\Xi^\star)_R$;

(ii) $\Xi^\star \vdash_{\mathcal{N}'} x : \varphi$ se e só se $x : \varphi \in \Xi^\star$;

(iii) $x : \varphi_1 \to \varphi_2 \in \Xi^\star$ se e só se sempre que $x : \varphi_1 \in \Xi^\star$ então $x : \varphi_2 \in \Xi^\star$;

(iv) $x : \Box\varphi \in \Xi^\star$ se e só se, para cada $u \in \overline{Et}$, se $x\mathbf{R}u \in \Xi^\star$ então $u : \varphi \in \Xi^\star$.

Prova: (i) Se $x\mathbf{R}y \in (\Xi^\star)_R$ então, trivialmente, $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$. Reciprocamente, se $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'} x\mathbf{R}y$ então $x\mathbf{R}y \in ((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'}$. Como $((\Xi^\star)_R)_{\mathcal{N}'} = (\Xi^\star)_R$, $x\mathbf{R}y \in (\Xi^\star)_R$.

(ii), (iii) e (iv) Provas semelhantes às apresentadas na prova da Proposição 1.9.26.

■

Tal como anteriormente, constrói-se a partir do conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal $\Xi^\star$ uma estrutura de interpretação modal canónica $I\!M_{\Xi^\star} = (W, R, V)$. Esta estrutura é construída como na Definição 1.9.27. Tal como o resultado seguinte ilustra, mostra-se que para cada $\mathcal{N}'$ o enquadramento (W, R) vai pertencer a uma particular classe de enquadramentos.

No que se segue, e como é habitual, $\mathcal{E}_{ref}$, $\mathcal{E}_{sim}$, $\mathcal{E}_{trn}$, $\mathcal{E}_{euc}$ representam as classes de enquadramentos reflexivos, simétricos, transitivos e euclideanos, respectivamente.

Proposição 1.9.41
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.25. Seja $I\!M_{\Xi^\star} = (W, R, V)$ a estrutura de interpretação modal canónica construída como na Definição 1.9.27.

1. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{T}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref}$.

2. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{B}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{sim}$.

3. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{4}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{trn}$.

4. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{5}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{euc}$.

5. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{T4}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}$.

6. Se $\mathcal{N}'$ é ${\mathcal{N}'}^{TB4}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}$.

Prova: 1. Seja $x \in W$. Pela Definição de $I\!M_{\Xi^\star}$, tem-se que $x \in \overline{Et}$ e, pela definição de ${\mathcal{N}'}^{T}_{m}$, $\vdash_{{\mathcal{N}'}^{T}_{m}} x\mathbf{R}x$ (usando o axioma *ref*). Então, $(\Xi^\star)_R \vdash_{{\mathcal{N}'}^{T}_{m}} x\mathbf{R}x$. Pela Proposição 1.9.40, $x\mathbf{R}x \in (\Xi^\star)_R \subseteq \Xi^\star$. Pela Definição de $I\!M_{\Xi^\star}$, xRx. Conclui-se assim que R é reflexiva e portanto $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref}$.

2. Sejam $x, y \in W$ tal que xRy. Pela Definição de $I\!\!M_{\Xi^\star}$, tem-se que $x, y \in \overline{Et}$ e $x\mathbf{R}y \in (\Xi^\star)_R$. Pela definição de $\mathcal{N}'{}^B_m$, $\{x\mathbf{R}y\} \vdash_{\mathcal{N}''{}^B_m} y\mathbf{R}x$ (usando a regra *sim*). Então, $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'{}^B_m} y\mathbf{R}x$. Pela Proposição 1.9.40, $y\mathbf{R}x \in (\Xi^\star)_R \subseteq \Xi^\star$. Pela Definição de $I\!\!M_{\Xi^\star}$, yRx. Conclui-se assim que R é simétrica e portanto $(W, R) \in \mathcal{E}_{sim}$.

Os outros casos são semelhantes. ∎

Proposição 1.9.42
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.39. Seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{I\!\!M_{\Xi^\star}}$ tal que $\rho(x) = x$ para cada $x \in W$. Então, para cada $\varphi \in FM'_P$ e $x, y \in \overline{Et}$

(i) $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$ se e só se $I\!\!M_{\Xi^\star}, \rho \models x\mathbf{R}y$;

(ii) $x : \varphi \in \Xi^\star$ se e só se $I\!\!M_{\Xi^\star}, \rho \models x : \varphi$.

Prova: Idêntica à prova da Proposição 1.9.28. ∎

Corolário 1.9.43
Seja $\Xi \subseteq FG'$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente, seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como na Proposição 1.9.39 e seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{I\!\!M_{\Xi^\star}}$ como na Proposição 1.9.42. Tem-se que $I\!\!M_{\Xi^\star}, \rho \models \Xi^\star$.

Prova: Imediato a partir da Proposição 1.9.42. ∎

Apresentam-se finalmente os resultados de completude para os sistemas dedutivos aqui considerados.

Proposição 1.9.44
Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Tem-se que se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ref}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'{}^T_m} x\mathbf{R}y$.

Prova: Para provar o resultado prova-se o seu contrarecíproco, ou seja, mostra-se que se $\Delta \not\vdash_{\mathcal{N}'{}^T_m} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \not\models_{\mathcal{E}_{ref}} x\mathbf{R}y$. Suponha-se então que $\Delta \not\vdash_{\mathcal{N}'{}^T_m} x\mathbf{R}y$. Tendo em conta as regras de inferência de $\mathcal{N}'{}^T_m$ e o facto de $\Delta \subseteq FR$, tem-se que Δ é necessariamente coerente e portanto pode construir-se uma sua extensão coerente maximal $\Delta^\star$ a partir da sucessão de conjuntos Δ_0, Δ_1, Δ_2, ... como na Proposição 1.9.39.

Mostra-se agora, por indução, que para cada $j \in I\!\!N_0$, $(\Delta_j)_R \not\vdash_{\mathcal{N}'{}^T_m} x\mathbf{R}y$ (e portanto $x\mathbf{R}y \notin ((\Delta_j)_R)_{\mathcal{N}'{}^T_m}$).

Base: $(\Delta_0)_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^T_m} x\mathbf{R}y$ porque $(\Delta_0)_R = \Delta_R = \Delta$.

Passo: seja $j \in I\!N_0$ e suponha-se que $(\Delta_j)_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^T_m} x\mathbf{R}y$. Nos casos em que $(\Delta_j)_R = (\Delta_{j+1})_R$ tem-se naturalmente que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^T_m} x\mathbf{R}y$. Nos outros casos tem-se que $(\Delta_{j+1})_R = (\Delta_j)_R \cup \{z\mathbf{R}u\}$ onde $z \in \overline{Et}$, $u \in Et_{aux}$ e $u \notin (\Delta_j)_{et} \cup \{z\}$. Se $(\Delta_{j+1})_R \vdash_{\mathcal{N}'^T_m} x\mathbf{R}y$ então, pela Proposição 1.7.9, existe uma derivação d de $x\mathbf{R}y$ a partir de $(\Delta_{j+1})_R$ em $\mathcal{N}'^T_m$ na qual não são utilizadas regras de inferência modais. Da Definição de $\mathcal{N}'^T_m$ decorre que d é necessariamente uma árvore singular. Tendo em conta a hipótese de indução e a definição de Δ_{j+1}, tem-se que $z\mathbf{R}u \in H_d$. Mas então $H_d = \{z\mathbf{R}u\} = \{conc(d)\}$ e portanto $z\mathbf{R}u = x\mathbf{R}y$. Chega-se assim a uma contradição porque $x, y \in Et$ e $Et_{aux} \cap Et = \emptyset$. Consequentemente tem-se que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^T_m} x\mathbf{R}y$.

Uma vez que, para cada $j \in I\!N_0$, $x\mathbf{R}y \notin ((\Delta_j)_R)_{\mathcal{N}'^T_m}$, a definição de $\Delta^\star$ permite concluir que $x\mathbf{R}y \notin \Delta^\star$. Pela Proposição 1.9.42, $I\!M_{\Delta^\star}, \rho \not\models x\mathbf{R}y$ onde $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{I\!M_{\Xi^\star}}$ como na Proposição 1.9.42. Pelo Corolário 1.9.43, $I\!M_{\Delta^\star}, \rho \models \Delta^\star$ e portanto, dado que $\Delta \subseteq \Delta^\star$, $I\!M_{\Delta^\star}, \rho \models \Delta$. Sendo $I\!M_{\Delta^\star} = (W, R, V)$ e considerando $\rho' \in ATR^{Et}_{I\!M_{\Xi^\star}}$ tal que $\rho'(x) = \rho(x)$ para cada $x \in Et$, tem-se, trivialmente que $I\!M_{\Delta^\star}, \rho' \models \Delta$ e $I\!M_{\Delta^\star}, \rho' \not\models x\mathbf{R}y$. Como, pela Proposição 1.9.41, $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref}$ conclui-se assim que $\Delta \not\models_{\mathcal{E}_{ref}} x\mathbf{R}y$. ∎

Proposição 1.9.45
Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Tem-se que se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{sim}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^B_m} x\mathbf{R}y$.

Prova: A prova deste resultado é idêntica à apresentada para a Proposição 1.9.44. A única diferença reside na demonstração do passo da prova por indução no caso em que $(\Delta_{j+1})_R = (\Delta_j)_R \cup \{z\mathbf{R}u\}$. Neste caso, a derivação d garantida pela Proposição 1.7.9 é uma árvore singular ou, tendo em conta as regras inferência em $\mathcal{N}'^B_m$, só utiliza a regra *sim*. De novo se tem que $z\mathbf{R}u \in H_d$.

Prova-se, por indução na profundidade das árvores, que qualquer $d' \in D_{\mathcal{N}'^B_m}$ na qual não sejam utilizadas regras de inferência modais e com $z\mathbf{R}u \in H_{d'}$ é tal que $u \in \{conc(d')\}_{et}$.

Base: seja d' uma árvore de dedução singular verificando os requisitos enunciados. Então $H_d = \{z\mathbf{R}u\} = \{conc(d)\}$ e portanto o resultado é imediato.

Passo: seja d' uma árvore de dedução verificando os requisitos enunciados com profundidade $k > 1$ e suponha-se que todas as árvores de dedução d'' de profundidade menor que k e verificando os referidos requisitos são tais que $u \in \{conc(d'')\}_{et}$.

Tem-se que d' foi necessariamente construída a partir de uma árvore d'' (de profundidade menor que k) usando a regra *sim* e d'' verifica necessariamente os requisitos enunciados. Por hipótese de indução, $u \in \{conc(d'')\}_{et}$ e portanto, tendo em conta a definição de *sim*, $u \in \{conc(d')\}_{et}$.

Este resultado permite concluir que a derivação d garantida pela Proposição 1.7.9 verifica $u \in \{conc(d)\}_{et}$. Mas $conc(d) = x\mathbf{R}y$ e portanto, tendo em conta as restrições impostas a u na construção de Δ_{j+1}, $u \notin \{conc(d)\}_{et}$. Esta contradição permite então concluir que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^{T}_{m}} x\mathbf{R}y$. ∎

Proposição 1.9.46
Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Tem-se que se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{trn}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{4}_{m}} x\mathbf{R}y$.

Prova: A prova deste resultado é idêntica à apresentada para a Proposição 1.9.44 e novamente a única diferença reside na demonstração do passo da prova por indução no caso em que $(\Delta_{j+1})_R = (\Delta_j)_R \cup \{z\mathbf{R}u\}$. Tendo em conta as regras inferência em $\mathcal{N}'^{4}_{m}$, a derivação d garantida pela Proposição 1.7.9 é uma árvore singular ou só utiliza a regra *trn*. Tal como anteriormente, $z\mathbf{R}u \in H_d$. Se a árvore é singular então $conc(d) = x\mathbf{R}y = z\mathbf{R}u$, o que, como se viu na prova da Proposição 1.9.45, conduz a uma contradição. Então d tem pelo menos profundidade 2. Sem perda de generalidade, d pode ser representada da seguinte forma

$$\dfrac{z\mathbf{R}u^{\,m} \qquad u\mathbf{R}z'^{\,m'}}{\begin{array}{c} z\mathbf{R}z' \\ \mathcal{D} \end{array}}\, trn$$

onde apenas se apresenta explicitamente a sub-árvore que envolve a hipótese $z\mathbf{R}u$ e uma aplicação da regra *trn*. Dado que $u\mathbf{R}z' \in (\Delta_{j+1})_R$ e, em particular, $u \notin (\Delta_j)_{et} \cup \{z\}$, $u\mathbf{R}z' = z\mathbf{R}u$ e portanto $z = u$. Mas esta igualdade que contraria o facto de $z \neq u$. Conclui-se assim que não pode existir uma tal derivação d, pelo que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^{4}_{m}} x\mathbf{R}y$. ∎

Proposição 1.9.47
Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{T4}_{m}} x\mathbf{R}y$.

Prova: Tal como nas proposições anteriores, a prova é idêntica para a Proposição 1.9.44 mas difere na demonstração do passo no caso em que $(\Delta_{j+1})_R = (\Delta_j)_R \cup$

$\{z\mathbf{R}u\}$. Tal como anteriormente, $z\mathbf{R}u \in H_d$ onde d é derivação garantida pela Proposição 1.7.9 e, tendo em conta a definição de $\mathcal{N'}^{T4}_{m}$, as regras de inferência aplicadas na construção d são *ref* ou *trn*. Se d é uma árvore singular então $conc(d) = z\mathbf{R}u$, o que, como se viu na prova da Proposição 1.9.45, conduz a uma contradição. Caso contrário, foi necessariamente aplicada a regra *trn*. Raciocinando como na prova da Proposição 1.9.46 obtém-se o resultado pretendido. ■

Proposição 1.9.48
Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}} x\mathbf{R}y$.

Prova: De novo a prova é idêntica à apresentada para a Proposição 1.9.44 diferindo no mesmo ponto das proposições anteriores. Assim, $(\Delta_{j+1})_R = (\Delta_j)_R \cup \{z\mathbf{R}u\}$ e $z\mathbf{R}u \in H_d$ onde d é derivação garantida pela Proposição 1.7.9. Seja $D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}} \subseteq D_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ constituído pela árvores que não utilizam regras em R_m.

(1) Começa por provar-se, por indução na profundidade das árvores, que para cada árvore $d' \in D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ tal que $conc(d') = z'\mathbf{R}z''$ e $H_{d'} \subseteq (\Delta_{j+1})_R$ existe uma árvore $d'' \in D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ tal que (i) $conc(d'') = z'\mathbf{R}z''$ e (ii) $H_{d''} = \emptyset$ ou existe $w_1 \dots w_{n+1} \in \overline{Et}^*$, $n \in I\!N$, tal que $w_1 = z'$, $w_{n+1} = z''$, $H_{d''} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{w_i\mathbf{R}w_{i+1}\}$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, $w_i\mathbf{R}w_{i+1} \in (\Delta_{j+1})_R$ ou $w_{i+1}\mathbf{R}w_i \in (\Delta_{j+1})_R$.

Base: seja $d' \in D_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ uma árvore singular verificando os requisitos indicados. Se $z' = z''$ então uma árvore singular a cujo nó corresponda a etiqueta $(z'\mathbf{R}z', ref, \emptyset)$ é a árvore pretendida. Se $z' \neq z''$, então $H_{d'} = \{z'\mathbf{R}z''\}$ e portanto d' é a árvore pretendida.

Passo: seja $d' \in D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ uma árvore verificando os requisitos indicados com profundidade $k > 1$. Então d' foi construída a partir (a) de uma árvore $\overline{d}$ por aplicação da regra *sim* ou (b) de duas árvores $\overline{d}_1$ e $\overline{d}_2$ por aplicação da regra *trn*. No caso (a), tem-se que $conc(\overline{d}) = z''\mathbf{R}z'$, $H_{\overline{d}} = H_{d'} \subseteq (\Delta_{j+1})_R$. Como $\overline{d}$ tem profundidade menor que k e verifica os requisitos enunciados, por hipótese de indução, existe uma árvore com as características enunciadas. Obtém-se a árvore d'' pretendida aplicando a regra *sim* a essa árvore. No caso (b) pode assumir-se, sem perda de generalidade, que $conc(\overline{d}_1) = z'\mathbf{R}\overline{z}$ e $conc(\overline{d}_2) = \overline{z}\mathbf{R}z''$. Como, para cada $1 \leq i \leq 2$, $H_{\overline{d}_i} \subseteq H_{d'} \subseteq (\Delta_{j+1})_R$ e $\overline{d}_i$ tem profundidade menor que k, pela hipótese de indução existe $\overline{d}'_i \in D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ com as caracterísicas enunciadas. Aplicando a regra *trn* a $\overline{d}'_1$ e $\overline{d}'_2$ obtém-se uma árvore $d'' \in D^R_{\mathcal{N'}^{TB4}_{m}}$ tal que $conc(d'') = z'\mathbf{R}z''$ e $H_{d''} = H_{\overline{d}'_1} \cup H_{\overline{d}'_2}$. Se alguma das árvores $\overline{d}'_1$ ou $\overline{d}'_2$ (ou ambas) tem um conjunto de hipóteses vazio, o resultado é imediato. Caso contrário, para cada $1 \leq i \leq n$, seja $w_1^i \ldots, w_{n_i+1}^i \in \overline{Et}^*$ a sequência garantida pela hipótese de indução relativamente a $\overline{d}_i'$. Tendo em conta que $w_1^1 = z'$, $w_{n_1+1}^1 = \overline{z} = w_1^2$ e $w_{n_2+1}^1 = z''$, tem-se que $w_1^1 w_2^1 \ldots w_{n_1+1}^1 w_2^2 w_3^2 \ldots w_{n_2+1}^2$ é a sequência exigida para d''.

(2) Prova-se agora que, sendo $d' \in D^R_{\mathcal{N}'^{TB4}_m}$ tal que $conc(d') = z'\mathbf{R}z''$ e $z\mathbf{R}u \in H_{d'} \subseteq (\Delta_{j+1})_R$, se tem que se $u \notin \{z', z''\}$ então $(\Delta_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} z'\mathbf{R}z''$.

Suponha-se então que $u \notin \{z', z''\}$. Como $z\mathbf{R}u \in H_{d'}$, tendo em conta as regras *sim* e *trn*, tem de haver um conjunto não vazio $A \subseteq Suc(\nu_{d'})$ tal que, para cada $\alpha \in A$ se tem que (i) $u \notin \{\{frm(\alpha')\}_{et} : \alpha' \in Pred(\alpha)\}$, (ii) $rg(\alpha) = trn$ e $frm(\alpha) = z_1^\alpha \mathbf{R} z_2^\alpha$, (iii) $SucD(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $frm(\alpha_1) = z_1^\alpha \mathbf{R}u$ e $frm(\alpha_2) = u\mathbf{R}z_2^\alpha$. Seja então $\alpha \in A$ e sejam d_1 e d_2 as subárvores de d' cujas raizes são, respectivamente, α_1 e α_2. Estas árvores estão nas condições de 1. Sejam então d_1' e d_2' as derivações garantidas por 1 para d_1 e d_2, respectivamente. Sem perda de generalidade suponha-se que $conc(d_1') = z_1^\alpha \mathbf{R}u$ e $conc(d_2') = u\mathbf{R}z_2^\alpha$. Como $z_1^\alpha \neq u$ e $z_2^\alpha \neq u$, tendo em contas as regras de $\mathcal{N}'^{TB4}_m$ tem-se necessariamente que $H_{d_1'} \neq \emptyset$ e $H_{d_2'} \neq \emptyset$. Seja então, para cada $1 \leq i \leq 2$, $w_1^i \ldots, w_{n_i+1}^i \in \overline{Et}^*$ a sequência garantida para d_i'. Tem-se que $w_1^1 = z_1$, $w_{n_1+1}^1 = u = w_1^2$ e $w_{n_2+1}^2 = z_2$. Tendo em conta a definição de Δ_{j+1}, tem-se necessariamente que $w_{n_1}^1 \mathbf{R} w_{n_1+1}^1 = z\mathbf{R}u$ e $w_1^2 \mathbf{R} w_2^2 = u\mathbf{R}z$. Considerando a sequência $w_1' \ldots w_m' = w_1^1 \ldots w_{n_1}^1 w_3^2 \ldots w_{n_2+1}^2$, onde $m = n_1 + n_2 - 1$, tem-se que, para cada $1 \leq i < m$, $w_i' \mathbf{R} w_{i+1}' \in (\Delta_{j+1})_R$ ou $w_{i+1}' \mathbf{R} w_i' \in (\Delta_{j+1})_R$. Note-se ainda que nesta sequência não estão presentes as etiquetas $w_{n_1+1}^1$ e w_2^1 ambas correspondentes a u. Recordando que $w_1' = z_1^\alpha$ e $w_m' = z_2^\alpha$ tem-se que, usando primeiro a regra *sim* nos casos em que $w_{i+1}' \mathbf{R} w_i' \in (\Delta_{j+1})_R$, e depois a regra *trn*, facilmente se constrói uma derivação de $z_1^\alpha \mathbf{R} z_2^\alpha$ cujas hipóteses abertas pertencem a $(\Delta_{j+1})_R$. Se $u \neq w_i'$ para cada $1 \leq i \leq m$, então $(\Delta_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} z_1^\alpha \mathbf{R} z_2^\alpha$. Caso contrário, repetindo uma ou mais vezes o raciocínio anterior, é possível concluir que $(\Delta_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} z_1^\alpha \mathbf{R} z_2^\alpha$. Procedendo de igual modo para cada $\alpha \in A$ é possível concluir então que existe uma derivação em $D^R_{\mathcal{N}'^{TB4}_m}$ cuja conclusão é $z'\mathbf{R}z''$ e cujas hipóteses abertas pertencem a $(\Delta_j)_R$ e portanto, tal como pretendido, $(\Delta_j)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} z'\mathbf{R}z''$.

(3) Considere-se a derivação d referida no início da prova. Se $u \in \{cond(d)\}_{et}$, raciocinando como na prova da Proposição 1.9.45, tem-se, como pretendido que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} x\mathbf{R}y$. Caso contrário, por (2), $(\Delta_j)_R \models x\mathbf{R}y$ o que contraria a hipótese de indução e portanto de novo se tem que $(\Delta_{j+1})_R \not\vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_m} x\mathbf{R}y$. ■

Proposição 1.9.49

Sejam $\Delta \subseteq FR$ e $x, y \in Et$. Se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{euc}} x\mathbf{R}y$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{5}_{m}} x\mathbf{R}y$.

Prova: Deixa-se como exercício a prova deste resultado. ∎

Proposição 1.9.50
Sejam $\Xi \subseteq FG'$ e $x : \varphi \in FE'$.

1. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{T}_{m}} x : \varphi$.
2. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{sim}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{B}_{m}} x : \varphi$.
3. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{trn}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{4}_{m}} x : \varphi$.
4. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{euc}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{5}_{m}} x : \varphi$.
5. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{T4}_{m}} x : \varphi$.
6. Se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{sim} \cap \mathcal{E}_{trn}} x : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{TB4}_{m}} x : \varphi$.

Prova: As provas são semelhantes à apresentada para a Proposição 1.9.30 (ii) tendo em conta também o Corolário. 1.9.43. ∎

1.9.6 Completude dos sistemas dedutivos $\mathcal{N}^{D}_{m}$, $\mathcal{N}^{2}_{m}$, $\mathcal{N}^{X}_{m}$, $\mathcal{N}^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}^{T42}_{m}$

Nesta secção provam-se resultados de completude relativos aos sistemas $\mathcal{N}^{D}_{m}$, $\mathcal{N}^{2}_{m}$, $\mathcal{N}^{X}_{m}$, $\mathcal{N}^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}^{T42}_{m}$. Tal como nos casos anteriores não se trabalha directamente com estes sistemas, mas sim com restrições destes sistemas, mais precisamente, com sistemas em se manipulam apenas fórmulas que não incluam os conectivos $\wedge$ e $\vee$ nem o operador modal $\Diamond$. À semelhança do que tem vindo a ser feito, tais restrições são designadas $\mathcal{N}'^{D}_{m}$, $\mathcal{N}'^{2}_{m}$, $\mathcal{N}'^{X}_{m}$, $\mathcal{N}'^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}'^{T42}_{m}$.

Os resultados de completude que aqui se apresentam são semelhantes aos descritos para as extensões de $\mathcal{N}_m$ referidas anteriormente. Estes resultados são enunciados nas proposições 1.9.58 e 1.9.59.

Notação 1.9.51 No que se segue, e à semelhança do que acontecia nas situações anteriores, e sendo $\Sigma \in \{\Sigma_D, \Sigma_2, \Sigma_X\}$, FM'_P, FG'_Σ e FE'_Σ, representam conjuntos de fórmulas definidos como FM_P, FG_Σ e FE_Σ, respectivamente, mas não envolvendo os conectivos $\wedge$, $\vee$ e o operador $\Diamond$. Omite-se a referência a Σ sempre que não exista possibilidade de confusão.

Tem-se ainda que $R2'_m = R1'_m \cup \{ser, dns_1, dns_2, cnv_1, cnv_2\}$ e assume-se fixado um certo conjunto (numerável) M de marcas. ■

Definição 1.9.52 SISTEMAS $\mathcal{N}'^{D}_{m}$, $\mathcal{N}'^{2}_{m}$, $\mathcal{N}'^{X}_{m}$, $\mathcal{N}'^{D45}_{m}$ E $\mathcal{N}'^{T42}_{m}$

Os *sistemas dedutivos* $\mathcal{N}'^{D}_{m}$, $\mathcal{N}'^{2}_{m}$, $\mathcal{N}'^{X}_{m}$, $\mathcal{N}'^{D45}_{m}$ *e* $\mathcal{N}'^{T42}_{m}$ têm definição idêntica à dos sistemas $\mathcal{N}^{D}_{m}$, $\mathcal{N}^{2}_{m}$, $\mathcal{N}^{X}_{m}$, $\mathcal{N}^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}^{T42}_{m}$, respectivamente, mas não se incluem as regras relacionadas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e o operador $\Diamond$.

Todas as usuais definições e notações relativas ao sistemas de dedução natural $\mathcal{N}^{D}_{m}$, $\mathcal{N}^{2}_{m}$, $\mathcal{N}^{X}_{m}$, $\mathcal{N}^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}^{T42}_{m}$ são também consideradas para os novos sistemas. ■

Observação 1.9.53 Para simplificar a exposição no que se segue usa-se $\mathcal{N}'$ para representar genericamente os sistemas dedutivos $\mathcal{N}'^{D}_{m}$, $\mathcal{N}'^{2}_{m}$, $\mathcal{N}'^{X}_{m}$, $\mathcal{N}'^{D45}_{m}$ e $\mathcal{N}'^{T42}_{m}$. Como é natural, sempre que se trabalhe no âmbito de $\mathcal{N}'$ e existam referências a elementos de T^{Et}_{Σ} ou de FE_{Σ} (FE) pressupõem-se que, em cada caso, Σ é a assinatura associada a $\mathcal{N}'$.

Como é de esperar, muitas das noções e resultados que são aqui necessários são semelhantes aos apresentados na secção 1.9.5 no âmbito dos sistemas dedutivos aí descritos. No entanto, existem por vezes certos detalhes que são diferentes. Para não alongar a exposição, enumeram-se seguidamente as referidas noções (e resultados) mencionando, quando for caso disso, os detalhes que são aqui diferentes.

- As noções de fecho dedutivo em $\mathcal{N}'$, conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e $\mathcal{N}'$-coerente maximal são idênticas às apresentadas na secção 1.9.5 tendo em conta que as etiquetas são agora elementos de T^{Et}_{Σ}.

- São válidos também para estes novos sistemas resultados semelhantes aos apresentados nas Proposições 1.9.36 e 1.9.38.

- Dado $\Xi \subseteq FG_{\Sigma}$ coerente, a construção de $\Xi^{\star}_{\mathcal{N}'}$ é semelhante à apresentada na Proposição 1.9.25, partindo de uma enumeração de $\overline{FE}'_{\Sigma}$ e recordando que as etiquetas são os elementos de $T^{\overline{Et}}_{\Sigma}$ (onde $\overline{Et} = Et \cup Et_{aux}$ sendo Et_{aux} um conjunto numerável e, neste caso, disjunto de T^{Et}_{Σ}). Refira-se ainda que ao construir Ξ_{i+1} a partir de Ξ_i, nos casos em que se tem de considerar um *nova* etiqueta $u \in Et_{aux}$, a condição imposta neste contexto é agora $u \notin V((\Xi)_{et} \cup \{t\})$.

- São válidos também para estes novos sistemas resultados semelhantes aos apresentados nas Proposições 1.9.39 e 1.9.40 tendo em conta que as etiquetas são elementos de $T_{\Sigma}^{\overline{Et}}$. ∎

Tal como anteriormente, constrói-se a partir do conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal $\Xi^\star$ uma estrutura de interpretação canónica.

Definição 1.9.54 Estrutura de interpretação modal generalizada canónica
Seja $\Xi \subseteq FG'_{\Sigma}$ um conjunto coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto coerente maximal construído a partir de Ξ como referido na Observação 1.9.53. A *estrutura de interpretação modal generalizada canónica sobre* Σ *induzida por* $\Xi^\star$ designa-se $I\!M_g^{\Xi^\star}$ e é definida do seguinte modo: $I\!M_g^{\Xi^\star} = (W, R, V, I)$ onde

- $W = (\Xi^\star)_{et}$
- para cada $x, y \in W$, xRy se $x\mathbf{R}y \in \Xi^\star$;
- para cada $p \in P$, $V(p) = \{x \in W : x : p \in \Xi^\star\}$;
- se Σ é Σ_D então $I(f)(w) = f(w)$ para cada $w \in W$;
- se Σ é Σ_X então $I(g)(w_1, w_2) = g(w_1, w_2)$ para cada $w_1, w_2 \in W$;
- se Σ é Σ_2 então $I(h)(w_1, w_2, w_3) = h(w_1, w_2, w_3)$ para cada $w_1, w_2, w_3 \in W$. ∎

Note-se que para a Definição 1.9.54 estar correcta é necessário que garantir que a interpretação de f, g e h está bem definida, isto é, que, por exemplo no caso de Σ_D, se tem que $f(w) \in W$ para cada $w \in W$. É também necessário garantir que, novamente no caso de Σ_D, se R é reflexiva então $wRf(w)$.

Facilmente se conclui que a primeira condição é satisfeita. Basta pensar que na enumeração de $\overline{FE}'_{\Sigma_D}$ que conduz à construção de $\Xi^\star$ tem de existir $j \in I\!N_0$ tal que ξ_j tem etiqueta $f(w)$ e a fórmula modal associada é uma tautologia proposicional, $\perp \rightarrow \perp$, por exemplo, e portanto ξ_j é $f(w) : \perp \rightarrow \perp$. Como cada Ξ_j é coerente, $\Xi_j \cup \{\xi_j\}$ é também coerente e portanto $\Xi_{j+1} = \Xi_j \cup \{\xi_j\}$. Assim, $f(w) \in (\Xi^\star)_{et}(= W)$. Os outros casos são semelhantes.

O facto de a segunda condição ser também satisfeita é assegurado na prova da Proposição 1.9.55

Proposição 1.9.55
Seja $\Xi \subseteq FG'_\Sigma$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como referido na Observação 1.9.53. Seja $I\!M\!I_g^{\Xi^\star} = (W, R, V, I)$ a estrutura de interpretação modal generalizada canónica sobre Σ construída como na Definição 1.9.54.

1. Se $\mathcal{N}'$ é $\mathcal{N}'^{\,D}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ser}$.
2. Se $\mathcal{N}'$ é $\mathcal{N}'^{\,X}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{dns}$.
3. Se $\mathcal{N}'$ é $\mathcal{N}'^{\,2}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{cnv}$.
4. Se $\mathcal{N}'$ é $\mathcal{N}'^{\,D45}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ser} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{euc}$.
5. Se $\mathcal{N}'$ é $\mathcal{N}'^{\,T42}_{m}$ então $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref} \cap \mathcal{E}_{trn} \cap \mathcal{E}_{cnv}$.

Prova: 1. Seja $t \in W$. Pela definição de $\mathcal{N}'^{\,D}_{m}$, $\vdash_{\mathcal{N}'^{D}_{m}} t\mathbf{R}xf(t)$ (usando o axioma *ser*). Então, $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{D}_{m}} t\mathbf{R}f(t)$. Pela Proposição 1.9.40 (e a Observação 1.9.53), $t\mathbf{R}f(t) \in (\Xi^\star)_R \subseteq \Xi^\star$. Tem-se assim que $f(t) \in W$. Pela Definição de $I\!M\!I_g^{\Xi^\star}$, $tRf(t)$. Conclui-se assim que R é reflexiva e portanto $(W, R) \in \mathcal{E}_{ref}$. O facto de se ter $tRf(t)$ mostra ainda que $I\!M\!I_g^{\Xi^\star}$ está bem definida no que respeita à componente I.

2. Sejam $s, t \in W$ tal que sRt. Pela Definição de $I\!M\!I_{\Xi^\star}$, tem-se que $s\mathbf{R}t \in (\Xi^\star)_R$. Pela definição de $\mathcal{N}'^{\,X}_{m}$, $\{s\mathbf{R}t\} \vdash_{\mathcal{N}''^{X}_{m}} s\mathbf{R}g(s,t)$ e $\{s\mathbf{R}t\} \vdash_{\mathcal{N}''^{X}_{m}} g(s,t)\mathbf{R}t$ (usando as regras cnv_1 e cnv_2). Então, $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{X}_{m}} s\mathbf{R}g(s,t)$ e $(\Xi^\star)_R \vdash_{\mathcal{N}'^{X}_{m}} g(s,t)\mathbf{R}t$. Pela Proposição 1.9.40 (e a Observação 1.9.53), $\{s\mathbf{R}g(s,t), g(s,t)\mathbf{R}t\} \subseteq (\Xi^\star)_R \subseteq \Xi^\star$. Tem-se assim que $g(s,t) \in W$. Pela Definição de $I\!M\!I_{\Xi^\star}$, $sRg(s,t)$ e $g(s,t)Rt$. Conclui-se assim que R é densa e portanto $(W, R) \in \mathcal{E}_{dns}$. O facto de se ter $sRg(s,t)$ e $g(s,t)Rt$ mostra ainda que $I\!M\!I_g^{\Xi^\star}$ está bem definida no que respeita à componente I.

Os outros casos são semelhantes. ■

Proposição 1.9.56
Seja $\Xi \subseteq FG'_\Sigma$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente e seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como referido na Observação 1.9.53. Seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{I\!M\!I_g^{\Xi^\star}}$ tal que $\rho(x) = x$ para cada $x \in W$. Então, para cada $\varphi \in FM'_P$ e $s, t \in T^{\overline{Et}}_\Sigma$

(i) $s\mathbf{R}t \in \Xi^\star$ se e só se $I\!M\!I_g^{\Xi^\star}, \rho \models s\mathbf{R}t$;

(ii) $t : \varphi \in \Xi^\star$ se e só se $I\!M\!I_{\Xi^\star}, \rho \models t : \varphi$.

Prova: Idêntica à prova da Proposição 1.9.28. ■

Corolário 1.9.57
Seja $\Xi \subseteq FG'_\Sigma$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente, seja $\Xi^\star$ um conjunto $\mathcal{N}'$-coerente maximal construído a partir de Ξ como referido na Observação 1.9.53 e seja $\rho \in ATR^{\overline{Et}}_{\mathbb{M}_g^{\Xi^\star}}$ como na Proposição 1.9.56. Tem-se que $\mathbb{M}_g^{\Xi^\star}, \rho \models \Xi^\star$.

Prova: Imediato a partir da Proposição 1.9.56. ■

Apresentam-se finalmente os resultados de completude para os sistemas dedutivos aqui considerados.

Proposição 1.9.58
Sejam $\Delta \subseteq FR_\Sigma$ e $s, t \in T_\Sigma^{Et}$.

1. Se Σ é Σ_D
   - se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ser}} s\mathbf{R}t$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{D}_{m}} s\mathbf{R}t$;
   - se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ser}\cap\mathcal{E}_{trn}\cap\mathcal{E}_{euc}} s\mathbf{R}t$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{D45}_{m}} s\mathbf{R}t$.
2. Se Σ é Σ_2
   - se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{cnv}} s\mathbf{R}t$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{2}_{m}} s\mathbf{R}t$;
   - se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{ref}\cap\mathcal{E}_{trn}\cap\mathcal{E}_{cnv}} s\mathbf{R}t$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{T42}_{m}} s\mathbf{R}t$.
3. Se Σ é Σ_X, se $\Delta \models_{\mathcal{E}_{dns}} s\mathbf{R}t$ então $\Delta \vdash_{\mathcal{N}'^{X}_{m}} s\mathbf{R}t$.

Prova: A prova relativa a $\mathcal{N}'^{X}_{m}$ é semelhante à apresentada para a Proposição 1.9.44. As provas relativas a $\mathcal{N}'^{X}_{m}$ e $\mathcal{N}'^{X}_{m}$ são semelhantes às apresentada para a Proposição 1.9.45. As outras provas deixam-se como exercício. ■

Proposição 1.9.59
Sejam $\Xi \subseteq FG'_\Sigma$ e $t : \varphi \in FE'_\Sigma$.

1. Se Σ é Σ_D
   - se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ser}} t : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{D}_{m}} t : \varphi$;
   - se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ser}\cap\mathcal{E}_{trn}\cap\mathcal{E}_{euc}} t : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{D45}_{m}} t : \varphi$.

2. Se Σ é Σ_2

   – se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{cnv}} t:\varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{2}_{m}} t:\varphi$;
   – se $\Xi \models_{\mathcal{E}_{ref}\cap\mathcal{E}_{trn}\cap\mathcal{E}_{cnv}} t:\varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{T42}_{m}} t:\varphi$.

3. Se Σ é Σ_X e $\Xi \models_{\mathcal{E}_{dns}} t:\varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}'^{X}_{m}} t:\varphi$.

Prova: As provas são semelhantes às referidas na Proposição 1.9.50. ■

1.10 Normalização de deduções

Nesta secção faz-se referência a questões de normalização de deduções no âmbito dos sistemas de dedução natural apresentados ao longo deste capítulo. Para não alongar demasiado este texto, far-se-á apenas uma brevíssima referência a alguns aspectos de normalização de deduções. As propriedades de normalização apresentadas são semelhantes às referidas no caso da lógica proposicional e da lógica de primeira ordem. O leitor interessado poderá consultar os detalhes em [14].

Tal como nos casos da lógica proposicional e de primeira ordem, consideram-se sistemas dedutivos que não incluem as regras relativas ao conectivo $\vee$ e, neste caso, também não incluem as regras relativas ao operador modal $\Diamond$. A regra $\perp$ é substituída pela seguinte regra $\perp\!\!\perp$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[t:\neg\psi]^m\\ \mathcal{D}\\ s:\perp\end{array}}{t:\psi}\ \perp\!\!\perp, m$$

onde ψ é uma fórmula que não é do tipo $\varphi \to \perp$.

No que se segue $\mathcal{N}$ representa genericamente um qualquer dos sistemas de dedução natural apresentados ao longo deste capítulo (mas assumindo que não estão presentes nem as regras relativas ao conectivo $\vee$ nem as regras relativas ao operador $\Diamond$) e $\mathcal{N}^{\perp\!\!\perp}$ representa o sistema que se obtém quando em $\mathcal{N}$ se substitui a regra $\perp$ pela regra $\perp\!\!\perp$.

A noção de dedução normal é aqui semelhante à apresentada no caso do sistema $\mathcal{N}_p$, isto é, uma dedução d diz-se normal se não existe nenhuma fórmula maximum em d. A definição de fórmula maximum é também semelhante à apresentada anteriormente. Há apenas que ter em conta que na regra $\Box E$, a premissa que envolve uma fórmula modal (ou seja, a premissa do tipo $x : \Box\varphi$) é a premissa maior da regra e a premissa relativa á fórmula relacional (ou seja, a premissa do tipo xRy) é a premissa menor.

Verificam-se as propriedades que seguidamente se apresentam, sendo $\Xi \subseteq FG$ e $t : \varphi \in FE$ (não envolvendo o conectivo $\vee$ nem o operador $\Diamond$).

- Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}} t : \varphi$ então $\Xi \vdash_{\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}} t : \varphi$.
- Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}} t : \varphi$ então existe uma dedução de $t : \varphi$ a partir de Ξ em $\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}$ na qual as fórmulas que se obtêm por aplicação da regra $\perp\!\!\!\perp$ são do tipo $t : \psi$ onde ψ é fórmula atómica.
- Se $\Xi \vdash_{\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}} t : \varphi$ então existe uma dedução normal de $t : \varphi$ a partir de Ξ em $\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}$.
- Se d é uma dedução normal de $t : \varphi$ a partir de Ξ em $\mathcal{N}^{\perp\!\!\!\perp}$ então, sendo F o conjunto das subfórmulas dos elementos de $\{\varphi\} \cup \Xi_M$, tem-se que, para cada $t : \psi$ que ocorra em d alguma das seguintes condições é satisfeita
  - $\psi \in F$
  - ψ é $\psi' \to \perp$ com $\psi' \in F$ e $t : \psi$ corresponde a uma hipótese eliminada por uma aplicação de $\perp\!\!\!\perp$
  - ψ é $\perp$ e $t : \psi$ foi obtida por aplicação de $\to E$ a partir de uma hipótese $t : \psi' \to \perp$, com $\psi' \in F$, hipótese essa que é eliminada por por aplicação de $\perp\!\!\!\perp$
  - ψ é $\perp$ e $t : \psi$ foi obtida por uma aplicação de $\perp\!\!\!\perp$ que não elimina nenhuma hipótese.

Bibliografia

[1] J. Bell and M. Machover. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland, 1977.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke, e Y. Venema. *Modal logic.* Cambridge University Press, 2001.

[3] J.J.-Ch. Meyer, e W. van der Hoek. *Epistemic logic for AI and Computer Science.* Cambridge University Press, 1995.

[4] R. Bull e K. Segerberg. Basic modal logic. Em D. Gabbay e F. Guenthner, eds, *Handbook of Philosophicall Logic*, volume II, pages 1–88. Reidel, Dordrecht, 1986.

[5] B. Chellas. *Modal logic: an introduction.* Cambridge University Press, 1980.

[6] D. van Dalen. *Logic and structure.* Springer-Verlag, 1994.

[7] M. Fitting. *Proof methods for modal and intutionistic logics.* Reidel, 1983.

[8] D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson (eds). *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, volume 4.* Clarendon Press, 1995.

[9] D. Gabbay and M. Reynolds and M. Finger. *Temporal logic.* Oxford Science Publications, 2000.

[10] R. Goldblatt. *Logics of time and computation.* CSLI, 1992.

[11] D. Harel, e D. Kozen, e J. Tiuryn *Dynamic logic.* MIT Press, 2000.

[12] G. Hughes, e M. Cresswell *A new introduction to modal logic.* Routledge, 1996.

[13] D. Prawitz. *Natural deduction.* Almqvist & Wiksell, 1965.

[14] L. Viganò. *Labelled Non-classical logics.* Kluwer Academic Publishers, 2000.