Lógica Modal

Extensão da lógica proposicional, incluindo MODALIDADES, ou seja, um operador que qualifica uma afirmação.
A versão mais tradicional é a lógica modal alética onde os operadores modais são unários e tradicionalmente são lidos

$\Box \varphi \equiv$ necessariamente φ

$\Diamond \varphi \equiv$ possivelmente φ

Outras versões comuns de lógicas modais

* Temporais (pode ter acontecido, sempre aconteceu, pode ocorrer, sempre ocorrerá)
* Deônticas (é obrigatório, é permitido)
* Epistêmicas (sabe-se que)
* Crença (acredita-se que)

Nas lógicas modais clássicas (incluindo lógicas modais normais e não normais), tem-se que

$$\Box \varphi \equiv \neg \Diamond \neg \varphi$$

$$\Diamond \varphi \equiv \neg \Box \neg \varphi$$

LINGUAGEM

A linguagem da lógica modal é composta pela linguagem da lógica proposicional clássica adicionados os operadores unários $\Box$ e $\Diamond$. A linguagem da lógica modal é $\mathcal{L}_{LM}$, o conjunto de fórmulas da lógica modal é tal que

- $\mathcal{L}_{LP} \subseteq \mathcal{L}_{LM}$
- se $\varphi \in \mathcal{L}_{LM}$ então $\Box \varphi \in \mathcal{L}_{LM}$ e $\Diamond \varphi \in \mathcal{L}_{LM}$
- se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{LM}$ então $\neg \varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{L}_{LM}$
- nada mais pertence a $\mathcal{L}_{LM}$

SEMÂNTICA

Semântica de Kripke
ou Semântica de Mundos Possíveis

* Semântica para Lógicas Modais Normais
* Desenvolvida por Saul Kripke, aos 19 anos durante seu curso de graduação em Harvard (1959)

Frame: $\langle W, R \rangle$

W: conjunto NÃO VAZIO de mundos possíveis

$R \subseteq W \times W$ relação de acessibilidade entre mundos

wRu: o mundo u é acessível a partir do mundo w

Modelo ou interpretação: $\langle W, R, v \rangle$

$v: W \times P \to \{0,1\}$ valoração: indica o valor-verdade de cada átomo proposicional em cada mundo

Extensão para fórmulas

$v_w(\neg\varphi) = 1$ se $v_w(\varphi) = 0$; e é igual a 0 caso contrário

$v_w(\varphi \wedge \psi) = 1$ se $v_w(\varphi) = 1$ e $v_w(\psi) = 1$; e é igual a 0 caso contrário

$v_w(\varphi \vee \psi) = 1$ se $v_w(\varphi) = 1$ ou $v_w(\psi) = 1$; e é igual a 0 caso contrário

$v_w(\varphi \to \psi) = 1$ se $v_w(\varphi) = 0$ ou $v_w(\psi) = 1$; e é igual a 0 caso contrário

$v_w(\Box\varphi) = 1$ se para todo $w' \in W$ em que wRw' tem-se $v_{w'}(\varphi) = 1$; e é 0 caso contrário

$v_w(\Diamond\varphi) = 1$ se existe um $w' \in W$ tal que wRw' e $v_{w'}(\varphi) = 1$; e é 0 caso contrário.

$\Sigma \models \varphi$ sse para todos modelos $\langle W, R, v \rangle$ e todos $w \in W$, se $v_w(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Sigma$ então $v_w(\varphi) = 1$

$\models \varphi$ sse para todos modelos $\langle W, R, v \rangle$ e todo $w \in W$, tem-se $v_w(\varphi) = 1$

* Observação: validade de $\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi$ em um mundo que não acessa nenhum mundo.

Sistemas Modais: restrições no tipo da relação R

K: sem restrições em R

D: relação serial $\forall w \in W \; \exists u \in W \; wRu$

T: relação reflexiva

B: relação reflexiva e simétrica

S4: relação reflexiva e transitiva

S5: relação reflexiva e euclidiana

SISTEMA AXIOMÁTICO

Regras e axiomas da Lógica Proposicional Clássica

\+ axioma K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

regra da necessitação: $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

Outros axiomas, utilizados para sistemas mais restritos

T: $\Box\varphi \to \varphi$ D: $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ B: $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ 5: $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Sistemas:

T = K+T D = K+D

S4 = T+4

S5 = S4+5

TABLÔS ANALÍTICOS

Nodos: fórmulas etiquetadas + índice

Cada índice indica um mundo possível

$\Gamma \vdash \varphi$: cada $\gamma \in \Gamma$ será $T\gamma, 0$ e acrescenta-se $F\varphi, 0$

- Regras dos tablôs para LPC, mantendo-se sempre o mesmo índice
- Acréscimo das regras

$$\begin{array}{c} T\Box\varphi, i \\ iRj \\ \downarrow \\ \varphi, j \end{array} \qquad \begin{array}{c} F\Box\varphi, i \\ \downarrow \\ T\Diamond\neg\varphi, i \end{array} \qquad \begin{array}{c} T\Diamond\varphi, i \\ \downarrow \\ iRj \\ \varphi, j \end{array} \qquad \begin{array}{c} F\Diamond\varphi, i \\ \downarrow \\ T\Box\neg\varphi, i \end{array}$$

(sendo j Novo!!)