2ª Lista de Exercícios de Lógica Matemática - LMA
Professores: Jeferson L. R. S. e Kariston P.
Monitor: Miguel A. Nunes
Joinville, 8 de maio de 2019

1. Prove por Demonstração Direta os seguintes argumentos.
   (a) $\{r \to t, t \to \sim s, (r \to \sim s) \to q, p\} \vdash p \wedge q$
   (b) $\{\sim p \vee \sim s, q \to \sim r, t \to (r \wedge s), t\} \vdash \sim (p \vee q)$
   (c) $\{q \to p, t \vee s, q \vee \sim s, \sim (p \vee r)\} \vdash t$
   (d) $\{p \vee q \to r, s \to \sim r \wedge \sim t, s \vee u\} \vdash p \to u$
   (e) $\{p \to q, r \to t, s \to r, p \vee s\} \vdash \sim q \to t$
   (f) $\{p \vee \sim q, \sim p, \sim (p \wedge r) \to q\} \vdash r$
   (g) $\{\sim (p \vee q), \sim p \wedge \sim q \to r \wedge s, s \to r\} \vdash r$
   (h) $\{p \vee q, q \to r, \sim r \vee s, \sim p\} \vdash s$
   (i) $\{p \to q, p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q), s \to \sim r, \sim (p \wedge q)\} \vdash \sim (s \wedge q)$
   (j) $\{p \to q, \sim r \to (s \to t), r \vee (p \vee s), \sim r\} \vdash q \vee t$
   (k) $\{p \to q, q \to r, r \to s, \sim s, p \vee t\} \vdash t$
   (l) $\{p \to q, q \to r, p \vee s, s \to t, \sim t\} \vdash r$
   (m) $\{p \vee q, q \to r, p \to s, \sim s\} \vdash r \wedge (p \vee q)$
   (n) $\{p \wedge q, p \to r, r \wedge s \to \sim t, q \to s\} \vdash \sim t$
   (o) $\{p \wedge \sim q, r \to q, r \vee s, p \vee s \to t\} \vdash t$

2. Prove por Demonstração Condicional os seguintes argumentos.
   (a) $\{(p \vee \sim q), q, r \to \sim s, p \to (\sim s \to t)\} \vdash \sim t \to \sim r$
   (b) $\{r \vee s, \sim t \to \sim p, r \to \sim q\} \vdash p \wedge q \to (s \wedge t)$
   (c) $\{q \to p, t \vee s, q \vee \sim s\} \vdash \sim (p \vee r) \to t$
   (d) $\{(p \to q) \vee r, (s \vee t) \to \sim r, s \vee (t \wedge u)\} \vdash p \to q$
   (e) $\{(p \to q) \wedge \sim (r \wedge \sim s), s \to (t \vee u), \sim u\} \vdash r \to t$
   (f) $\{(p \vee \sim q), q, r \to \sim s, p \to (\sim s \to t)\} \vdash \sim t \to \sim r$
   (g) $\{p \wedge q \to \sim r, r \vee (s \wedge t), p \leftrightarrow q\} \vdash p \to s$
   (h) $\{r \to t, t \to \sim s, (r \to \sim s) \to q\} \vdash p \to (p \wedge q)$
   (i) $\{p \to q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s)\} \vdash p \to t$
   (j) $\{r \vee s, \sim t \to \sim p, r \to \sim q\} \vdash \sim (p \wedge q) \to (s \wedge t)$
   (k) $\{q \to p, t \vee s, q \vee \sim s\} \vdash \sim (p \vee r) \to t$

(l) $\{p \vee q \to r, s \to \sim r \wedge \sim t, s \vee u\} \vdash p \to u$

(m) $\{p \to q, r \to t, s \to r, p \vee s\} \vdash \sim q \to t$

(n) $\{r \to s, s \to q, r \vee (s \wedge p)\} \vdash \sim q \to p \wedge s$

(o) $\{\sim p, \sim r \to q, \sim s \to p\} \vdash \sim (r \wedge s) \to q$

3. Prove por Demonstração Indireta os seguintes argumentos.

(a) $\{\sim (p \to q) \vee (s \to \sim r), q \vee s, p \to \sim s\} \vdash \sim r \vee \sim s$

(b) $\{\sim (p \to \sim q) \to ((r \leftrightarrow s) \vee t), p, q, \sim t, r\} \vdash s$

(c) $\{(p \wedge q) \leftrightarrow \sim r, \sim r \to \sim p, \sim q \to \sim r\} \vdash q$

(d) $\{(p \to q) \wedge r, q \vee s \to t \wedge u, v \to s, v \vee p\} \vdash t \vee x$

(e) $\{\sim (p \to q) \vee (s \to \sim r), q \vee s, p \to \sim s\} \vdash \sim r \vee \sim s$

(f) $\{\sim p \to \sim q \vee r, s \vee (r \to t), p \to s, \sim s\} \vdash q \to t$

(g) $\{\sim p \vee \sim q, r \vee s \to p, q \vee \sim s, \sim r \vdash \sim (r \vee s)$

(h) $\{p \vee q \to r, s \to \sim r \wedge \sim t, s \vee u, p\} \vdash p \to u$

(i) $\{p \to q, r \to t, s \to r, p \vee s, \sim q\} \vdash t$

(j) $\{(p \to q), q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s)\} \vdash p \to t$

(k) $\{(p \to q) \vee r, s \vee t \to \sim r, s \vee (t \wedge u)\} \vdash p \to q$

(l) $\{\sim p \to \sim q, \sim p \vee r, r \to \sim s\} \vdash \sim q \vee \sim s$

(m) $\{p \to q \vee r, q \to \sim p, s \to \sim r\} \vdash \sim (p \wedge s)$

(n) $\{\sim (p \to \sim q) \to ((r \leftrightarrow s) \vee t), p, q, \sim t\} \vdash r \to s$

(o) $\{(\sim p \to q) \wedge (r \to s), p \leftrightarrow t \vee \sim s, r, \sim t\} \vdash q$

4. Encontre a Forma Normal Conjuntiva das seguintes proposições e então prove o argumento gerado usando o método pedido.

> Lembrando que uma formula na FNC é do tipo: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge ... \wedge P_n$, onde cada P_i é uma proposição simples ou composta.
> Logo, é possível transformá-la em um argumento do tipo $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \vdash Q$, onde Q é uma conclusão qualquer que pode ser provada a partir das premissas dadas.

(a) $(p \to q) \wedge (\sim p \wedge r)$
Prove q Usando Demonstração Direta

(b) $(\sim r \vee \sim q) \leftrightarrow p$
Prove $p \wedge r$ Usando Demonstração por Absurdo

(c) $(\sim r \vee \sim q) \leftrightarrow p$
Prove $r \to (p \vee q)$ Usando Demonstração Condicional

Equivalências Notáveis:

Identidade (IDENT):
$$\begin{gathered} P \vee \blacksquare \Leftrightarrow \blacksquare \\ P \vee \square \Leftrightarrow P \\ P \wedge \blacksquare \Leftrightarrow P \\ P \wedge \square \Leftrightarrow \square \end{gathered}$$

Idempotência (ID):
$$\begin{gathered} P \Leftrightarrow P \wedge P \\ P \Leftrightarrow P \vee P \end{gathered}$$

Comutação (COM):
$$\begin{gathered} P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \end{gathered}$$

Associação (ASSOC):
$$\begin{gathered} P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \end{gathered}$$

Distribuição (DIST):
$$\begin{gathered} P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{gathered}$$

De Morgan (DM):
$$\begin{gathered} \sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q \\ \sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q \end{gathered}$$

Contradição:
$$\begin{gathered} P \wedge \sim P \Leftrightarrow \square \\ P \leftrightarrow \sim P \Leftrightarrow \square \end{gathered}$$

Tautologia:
$$\begin{gathered} P \vee \sim P \Leftrightarrow \blacksquare \\ P \rightarrow P \Leftrightarrow \blacksquare \\ P \leftrightarrow P \Leftrightarrow \blacksquare \end{gathered}$$

Absorção:
$$\begin{gathered} P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \\ P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \end{gathered}$$

Conectivos de Scheffer
$$\begin{gathered} P \uparrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q \\ P \downarrow Q \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q \end{gathered}$$

Dupla Negação (DN): $P \Leftrightarrow P$

Condicional (COND): $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$

Bicondicional (BICOND): $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Contraposição (CP): $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$

Exportação-Importação (EI): $P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Ou-Exclusivo (X-or) $P \veebar Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$

Regras de Inferência Válidas (Teoremas):

Adição (AD): $P \vdash P \vee Q$
$P \vdash Q \vee P$

Simplificação (SIMP): $P \wedge Q \vdash P$
$P \wedge Q \vdash Q$

Conjunção (CONJ) $P, Q \vdash P \wedge Q$
$P, Q \vdash Q \wedge P$

Absorção (ABS): $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \wedge Q)$

Modus Ponens (MP): $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

Modus Tollens (MT): $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

Silogismo Disjuntivo (SD): $P \vee Q, \sim P \vdash Q$
$P \vee Q, \sim Q \vdash P$

Silogismo Hipotético (SH): $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

Dilema Construtivo (DC): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S$

Dilema Destrutivo (DD): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim Q \vee \sim S \vdash \sim P \vee \sim R$