

1ª Lista de Exercícios de Lógica Matemática - LMA

**Gabarito**

Professores: Jeferson L. r. s. e Kariston p.

Monitor: Miguel A. Nunes

Joinville, 27 de maio de 2019

1. A maioria das provas será feita da esquerda para a direita, ou seja, à partir da proposição da esquerda, chegar na proposição da direita. Caso não seja, estará anotado na questão.

- (a)
1.  $(\sim p \wedge \sim q)$  Equivalência do Conectivo de Scheffer
  2.  $(\sim q \wedge \sim p)$  Comutatividade do  $\wedge$
  3.  $(q \downarrow p)$  Equivalência do Conectivo de Scheffer
- (b)
1.  $(\sim p \vee \sim q)$  Equivalência do Conectivo de Scheffer
  2.  $(\sim q \vee \sim p)$  Comutatividade do  $\vee$
  3.  $(q \uparrow p)$  Equivalência do Conectivo de Scheffer
- (c)
1.  $(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$  Equivalência da Condicional x2
  2.  $((\sim p \vee r) \wedge r) \vee ((\sim p \vee r) \wedge \sim q)$  Distributiva
  3.  $r \vee ((\sim p \vee r) \wedge \sim q)$  Absorção
  4.  $r \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim q)$  Distributiva
  5.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge r) \vee r$  Associatividade
  6.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee r$  Absorção
  7.  $(\sim (\sim p \wedge \sim q)) \rightarrow r$  Equivalência da Condicional
  8.  $(p \vee q) \rightarrow r$  De Morgan
- (d)
1.  $(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r)$  Equivalência da Condicional x2
  2.  $(\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s)$  Associatividade
  3.  $(\sim (\sim p \vee \sim q)) \rightarrow (r \vee s)$  Equivalência da Condicional
  4.  $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$  De Morgan
- (e)
1.  $\sim (p \wedge q) \vee r$  Equivalência da Condicional
  2.  $(\sim p \vee \sim q) \vee r$  De Morgan
  3.  $\sim p \vee (\sim q \vee r)$  Comutativa
  4.  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  Equivalência da Condicional

(f) Tentando provar esta equivalência pela esquerda temos:

1.  $\sim (\sim p \vee q) \vee r$  Equivalência da Condicional x2
2.  $(p \wedge \sim q) \vee r$  De Morgan
3.  $(p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$  Distributiva

Como podemos ver, é impossível chegar na direita a partir da esquerda, qualquer operação que fizesse retornaria a esta forma, ou uma equivalente à ela.

Tentando fazer o lado oposto da equivalência temos:

1.  $\sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q$  Equivalência da Condicional
2.  $(\sim p \vee r) \vee \sim q$  De Morgan
3.  $(\sim p \vee \sim q) \vee r$  Associatividade
4.  $\sim (\sim p \vee \sim q) \rightarrow r$  Equivalência da Condicional
5.  $(p \wedge q) \rightarrow r$  De Morgan

Tentando provar a equivalência a partir da definição da equivalência lógica (a bicondicional de ambos os lados da proposição)

1.  $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q) \wedge (((p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r))$
2.  $((\sim (\sim p \vee q) \vee r) \rightarrow (\sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q) \wedge ((\sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q) \rightarrow ((\sim (\sim p \vee q) \vee r))))$
3.  $(\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee r) \vee (\sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q)) \wedge (\sim (\sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q) \vee ((\sim (\sim p \vee q) \vee r)))$
4.  $(\sim ((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee r) \vee ((\sim p \vee \sim \sim r) \vee \sim q)) \wedge (\sim ((\sim p \vee \sim \sim r) \vee \sim q) \vee (((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee r)))$
5.  $(\sim ((p \wedge \sim q) \vee r) \vee ((\sim p \vee r) \vee \sim q)) \wedge (\sim ((\sim p \vee r) \vee \sim q) \vee (((p \wedge \sim q) \vee r)))$
6.  $((\sim (\sim p \vee \sim \sim q) \wedge \sim r) \vee ((\sim p \vee r) \vee \sim q)) \wedge (((\sim \sim p \wedge \sim r) \wedge \sim \sim q) \vee (((p \wedge \sim q) \vee r)))$
7.  $((\sim (\sim p \vee q) \wedge \sim r) \vee ((\sim p \vee r) \vee \sim q)) \wedge (((p \wedge \sim r) \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee r)$

Novamente, é impossível chegar em um lado a partir do outro, vamos ver a tabela verdade dessa formula para verificar se de fato existe equivalência.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$p \wedge \sim r$	$(p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V

Fazendo a tabela verdade da bicondicional das duas últimas proposições de cada formula:

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \leftrightarrow ((p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q)$
V
V
V
V
V
F
V
F

Como podemos ver, essa bi-implicação não é tautológica, portanto não há equivalência entre as formulas.

- (g)
1.  $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$  Equivalência da Condicional x2
  2.  $(\sim p \vee \sim p \vee q \vee r)$  Associatividade + Comutatividade
  3.  $(\sim p \vee q \vee r)$  Idempotência
  4.  $\sim p \vee (q \vee r)$  Comutatividade
  5.  $(\sim \sim p \rightarrow (q \vee r))$  Equivalência da Condicional
  6.  $p \rightarrow (q \vee r)$  Dupla Negação
- (h)
1.  $\sim (\sim p \vee q) \vee q$  Equivalência da Condicional x2
  2.  $(p \wedge \sim q) \vee q$  De Morgan
  3.  $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$  Distributiva
  4.  $(p \vee q) \wedge \blacksquare$  Tautologia
  5.  $(p \vee q)$  Identidade
- (i)
1.  $(\sim p \wedge \sim q) \downarrow (\sim p \wedge \sim q)$  Equivalência de Scheffer x2
  2.  $\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)$  Equivalência de Schffer
  3.  $(\sim \sim p \vee \sim \sim q) \wedge (\sim \sim p \wedge \sim \sim q)$  De Morgan x2
  4.  $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$  Dupla Negação x4
  5.  $p \vee q$  Idempotência
- (j)
1.  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  Equivalência da Bicondicional
  2.  $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$  Equivalência da Condicional x2
  3.  $((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p)$  Distributiva
  4.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (p \wedge q)$  Distributiva
  5.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee \square \vee \square \vee (p \wedge q)$  Contradição x2
  6.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$  Identidade x2
- (k)
1.  $(\sim p \vee (p \rightarrow (p \rightarrow q)))$  Equivalência da Condicional
  2.  $(\sim p \vee (\sim p \vee (p \rightarrow q)))$  Equivalência da Condicional
  3.  $(\sim p \vee (\sim p \vee (\sim p \vee q)))$  Equivalência da Condicional
  4.  $\sim p \vee \sim p \vee \sim p \vee q$  Associatividade
  5.  $\sim p \vee q$  Idempotência
  6.  $p \rightarrow q$  Equivalência da Condicional
- (l)
1.  $\sim p \vee \sim q \vee \sim r$  De Morgan
- (m)
1.  $\sim p \vee \sim q \vee \sim r$  De Morgan
  2.  $\sim p \vee (\sim q \vee \sim r)$  Associatividade
  3.  $(\sim p \vee (q \rightarrow \sim r))$  Equivalência da Condicional
  4.  $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$  Equivalência da Condicional
- (n)
1.  $(\sim p \vee \sim q) \downarrow (\sim q \vee \sim p)$  Equivalência de Scheffer
  2.  $\sim (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim (\sim q \vee \sim p)$  Equivalência de Scheffer
  3.  $(\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \wedge (\sim \sim q \wedge \sim \sim p)$  De Morgan
  4.  $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$  Dupla Negação
  5.  $(p \wedge q) \wedge (p \wedge q)$  Comutatividade
  6.  $(p \wedge q)$  Idempotência

2. Como no exercício anterior, as provas serão feitas da esquerda para a direita. Para as provas desta questão será utilizada a definição da implicação lógica (a condicional das proposições deve ser tautológica):

	1. $q \rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow q)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $q \rightarrow (((p \wedge q) \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow (p \wedge q)))$	Equivalência da Bicondicional
	3. $q \rightarrow ((\sim(p \wedge q) \vee q) \wedge (\sim q \vee (p \wedge q)))$	Equivalência da Condicional x2
	4. $q \rightarrow ((\sim p \vee \sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee (p \wedge q)))$	De Morgan
	5. $q \rightarrow ((\sim p \vee \sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q))$	Distributividade
(a)	6. $q \rightarrow ((\sim p \vee \blacksquare) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \blacksquare)$	Tautologia x2
	7. $q \rightarrow (\blacksquare \wedge (\sim q \vee p))$	Identidade x2
	8. $q \rightarrow (\sim q \vee p)$	Identidade
	9. $\sim q \vee (\sim q \vee p)$	Equivalência da Condicional
	10. $(\sim q \vee \sim q \vee p)$	Associatividade
	11. $(\sim q \vee p)$	Idempotência

Deste ponto em diante não há mais operações não redundantes que possam ser feitas, portanto não há implicação.

Exercício Bônus: Prove por tabela verdade que, de fato, não há implicação.

	1. $((p \vee q) \wedge \sim q) \rightarrow p$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge q)) \rightarrow p$	Distributividade
	3. $((p \wedge \sim q) \vee \square) \rightarrow p$	Identidade
	4. $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$	Identidade
(b)	5. $\sim(p \wedge \sim q) \vee p$	Equivalência Condicional
	6. $\sim p \vee \sim \sim q \vee p$	De Morgan
	7. $\sim p \vee p \vee q$	Associatividade
	8. $\blacksquare \vee q$	Tautologia
	9. $\blacksquare$	Identidade

	1. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$	Equivalência da Condicional
	3. $\sim p \vee \sim q \vee p \vee q$	De Morgan + Associatividade
(c)	4. $\sim p \vee p \vee \sim q \vee q$	Comutatividade x2
	5. $\blacksquare \vee \blacksquare$	Tautologia x2
	6. $\blacksquare$	Identidade

	1. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $\sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$	Equivalência da Condicional
	3. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$	De Morgan
	4. $((\sim p \wedge \sim q) \vee p) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee q)$	Distributividade
	5. $(\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$	Distributividade
(d)	6. $\blacksquare \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \blacksquare$	Tautologia x2
	7. $(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	Identidade
	8. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	Comutatividade x3
	9. $(p \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)$	Distributividade
	10. $\square \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee \square$	Identidade
	11. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$	Identidade

Deste ponto em diante, todas as operações que fizermos resultarão em proposições equivalentes a proposição 11, portanto não há implicação.

Perceba que a proposição 11 é a FND de  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$  e que a proposição 7 é sua FNC.

Exercício Bônus: Prove por tabela verdade que não há implicação.

	1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow q)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $(\sim p \vee q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow q)$	Perceba os parênteses do lado direito
	3. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim (p \wedge r) \vee q)$	Equivalência da Condicional
	4. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee \sim r \vee q)$	Equivalência da Condicional
	5. $\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim r \vee q)$	De Morgan + Associatividade
	6. $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee \sim r \vee q$	Equivalência da Condicional
	7. $(p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee \sim r \vee q$	De Morgan + Associatividade
(e)	8. $((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee (\sim r \vee q)$	Dupla Negação
	9. $((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)) \vee (\sim r \vee q)$	Associatividade
	10. $(\blacksquare \wedge (\sim q \vee \sim p)) \vee (\sim r \vee q)$	Distributividade
	11. $(\sim q \vee \sim p) \vee (\sim r \vee q)$	Tautologia
	12. $\sim q \vee q \vee \sim p \vee \sim r$	Identidade
	13. $\blacksquare \vee \sim p \vee \sim r$	Comutatividade
	14. $\blacksquare$	Identidade

	1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	Definição da Implicação Lógica
	2. $(\sim p \vee q) \rightarrow ((\sim q \vee r) \rightarrow (\sim p \vee r))$	Equivalência da Condicional x3
	3. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim (\sim q \vee r) \vee (\sim p \vee r))$	Equivalência da Condicional
	4. $(\sim p \vee q) \rightarrow ((\sim \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee r))$	De Morgan
	5. $(\sim p \vee q) \rightarrow ((q \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee r))$	Dupla Negação
	6. $\sim (\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee r)$	Equivalência da Condicional
	7. $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee r)$	De Morgan
(f)	8. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee r)$	Dupla Negação
	9. $(p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee (q \wedge \sim r) \vee r$	Associatividade x2
	10. $((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)) \vee ((q \vee r) \wedge (\sim r \vee r))$	Distributividade
	11. $(\blacksquare \wedge (\sim q \vee \sim p)) \vee ((q \vee r) \wedge \blacksquare)$	Tautologia x2
	12. $(\sim q \vee \sim p) \vee (q \vee r)$	Identidade X2
	13. $\sim q \vee q \vee \sim p \vee r$	Associatividade
	14. $\blacksquare \vee \sim p \vee r$	Tautologia
	15. $\blacksquare$	Identidade

	1. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)) \rightarrow \sim p \rightarrow \blacksquare$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \rightarrow \sim p \rightarrow \blacksquare$	Equivalência da Condicional x2
	3. $\sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee \sim p \rightarrow \blacksquare$	Equivalência da Condicional
	4. $(\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee \sim q)) \vee \sim p \rightarrow \blacksquare$	De Morgan
	5. $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \vee \sim p \rightarrow \blacksquare$	De Morgan
(g)	6. $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee \sim p \rightarrow \blacksquare$	Dupla Negação x3
	7. $\sim ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee \sim p) \vee \blacksquare$	Equivalência da Condicional
	8. $(\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (p \wedge q) \wedge \sim \sim p) \vee \blacksquare$	De Morgan
	9. $((\sim p \vee \sim \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \wedge p) \vee \blacksquare$	De Morgan + Dupla Negação
	10. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \wedge p) \vee \blacksquare$	Dupla Negação
	11. $\blacksquare$	Identidade

	1. $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$	Equivalência da Condicional
	3. $((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)) \rightarrow \sim p$	Distributividade
	4. $((\sim p \wedge \sim q) \vee \square) \rightarrow \sim p$	Contradição
	5. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$	Identidade
(h)	6. $\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$	Equivalência da Condicional
	7. $(\sim \sim p \vee \sim q) \vee \sim p$	Equivalência da Condicional
	8. $p \vee \sim q \vee \sim p$	Dupla Negação
	9. $p \vee \sim p \vee \sim q$	Associatividade
	10. $\blacksquare \vee \sim q$	Tautologia
	11. $\blacksquare$	Identidade

	1. $((p \vee q) \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((p \vee q) \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Equivalência da Bicondicional
	3. $((\sim(p \vee q) \vee q) \wedge (\sim q \vee (p \vee q))) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Equivalência da Condicional x2
	4. $((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee q \vee p) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	De Morgan + Associatividade
	5. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \wedge (\blacksquare \vee p) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Distributividade + Tautologia
(i)	6. $((\sim p \vee q) \wedge \blacksquare) \wedge \blacksquare \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Tautologia x2
	7. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	Identidade x2
	8. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim \sim q \vee \sim p)$	Equivalência da Condicional
	9. $(\sim p \vee q) \rightarrow (q \vee \sim p)$	Dupla Negação
	10. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee q)$	Comutatividade
	11. $\blacksquare$	Tautologia

	1. $((p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow \sim p$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \rightarrow \sim p$	Equivalência da Condicional x2
	3. $\sim((\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \vee \sim p$	Equivalência da Condicional
	4. $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim r \vee q) \vee \sim r \vee \sim p$	De Morgan
	5. $(\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \vee (\sim \sim r \wedge \sim q) \vee \sim r \vee \sim p$	De Morgan
	6. $(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q) \vee \sim r \vee \sim p$	Dupla Negação
(j)	7. $(p \wedge q) \vee \sim p \vee (r \wedge \sim q) \vee \sim r$	Associatividade
	8. $((p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)) \vee ((r \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r))$	Distributividade x2
	9. $(\blacksquare \wedge (q \vee \sim p)) \vee (\blacksquare \wedge (\sim q \vee \sim r))$	Tautologia x2
	10. $(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim r)$	Identidade
	11. $q \vee \sim q \vee p \vee \sim r$	Associatividade
	12. $\blacksquare \vee \sim p \vee \sim r$	Tautologia
	13. $\blacksquare$	Identidade

	1. $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Equivalência da Bicondicional
	3. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim \sim q \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Equivalência da Condicional x2
	4. $((\sim p \vee q) \wedge (q \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Dupla Negação
	5. $\sim((\sim p \vee q) \wedge (q \vee p)) \vee (p \rightarrow q)$	Equivalência da Condicional
	6. $(\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(q \vee p)) \vee (p \rightarrow q)$	De Morgan
	7. $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \rightarrow q)$	De Morgan
	8. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \rightarrow q)$	Dupla Negação
(k)	9. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee q)$	Equivalência da Condicional
	10. $(p \wedge \sim q) \vee q \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$	Associatividade e Comutatividade
	11. $(p \wedge \sim q) \vee q \vee \sim p$	Absorção
	12. $((p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \vee \sim p$	Distributividade
	13. $((p \vee q) \wedge \blacksquare) \vee \sim p$	Tautologia
	14. $(p \vee q) \vee \sim p$	Identidade
	15. $p \vee \sim p \vee q$	Associatividade
	16. $\blacksquare \vee q$	Tautologia
	17. $\blacksquare$	Identidade

(l)	1. $q \rightarrow p \vee q \leftrightarrow p$	Definição da Implicação Lógica
	2. $q \rightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow p)$	Ordenando Parênteses
	3. $\sim q \vee ((p \vee q) \leftrightarrow p)$	Equivalência da Condicional
	4. $\sim q \vee (((p \vee q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (p \vee q)))$	Equivalência da Bicondicional
	5. $\sim q \vee (((\sim (p \vee q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \vee q)))$	Equivalência da Condicional x2
	6. $\sim q \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee p) \wedge (\blacksquare \vee q))$	De Morgan + Tautologia
	7. $\sim q \vee (((\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p)) \wedge \blacksquare)$	Distributividade + Identidade
	8. $\sim q \vee (\blacksquare \wedge (\sim q \vee p))$	Tautologia + Identidade
	9. $\sim q \vee (\sim q \vee p)$	Identidade
	10. $\sim q \vee p$	Idempotência

Deste ponto em diante não há mais operações não redundantes que possam ser feitas, portanto não há implicação.

Exercício Bônus: Prove por tabela verdade que, de fato, não há implicação.

(m)	1. $((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$	Definição da Implicação Lógica
	2. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$	Equivalência da Bicondicional
	3. $((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \rightarrow (\sim (p \vee q) \vee r)$	Equivalência da Condicional x4
	4. $((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \rightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee r)$	De Morgan
	5. $\sim ((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)) \vee ((\sim p \wedge \sim q) \vee r)$	Equivalência da Condicional
	6. $(\sim (\sim p \vee r) \vee \sim (\sim q \vee r) \vee \sim (\sim r \vee q)) \vee ((\sim p \wedge \sim q) \vee r)$	De Morgan
	7. $(\sim \sim p \wedge \sim r) \vee (\sim \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee r$	De Morgan
	8. $(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee r$	Dupla Negação x3
	9. $(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q) \vee r \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Associatividade
	10. $(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee r \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Absorção
	11. $(p \wedge \sim r) \vee ((q \vee r) \wedge (\sim r \vee r)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Distributividade
	12. $(p \wedge \sim r) \vee ((q \vee r) \wedge \blacksquare) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Tautologia
	13. $(p \wedge \sim r) \vee q \vee r \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Identidade
	14. $(p \wedge \sim r) \vee r \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee q$	Associatividade
	15. $((p \vee r) \wedge (\sim r \vee r)) \vee ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q))$	Distributividade x2
	16. $((p \vee r) \wedge \blacksquare) \vee ((\sim p \vee q) \wedge \blacksquare)$	Tautologia x2
	17. $p \vee r \vee \sim p \vee q$	Identidade x2
	18. $p \vee \sim p \vee r \vee q$	Associatividade
	19. $\blacksquare \vee r \vee q$	Tautologia
	20. $\blacksquare$	Identidade



1.	$((p \uparrow q) \wedge (p \downarrow q)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$	Definição da Implicação Lógica
2.	$((\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$	Equivalência de Scheffer
3.	$((\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p) \wedge \sim q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$	Associatividade
4.	$(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$	Absorção
5.	$\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \leftrightarrow q)$	Equivalência da Condicional
6.	$(\sim \sim p \vee \sim \sim q) \vee (p \leftrightarrow q)$	De Morgan
7.	$(p \vee q) \vee (p \leftrightarrow q)$	Dupla Negação
8.	$(p \vee q) \vee ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	Equivalência da Bicondicional
(n) 9.	$(p \vee q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p))$	Equivalência da Condicional x2
10.	$(p \vee q) \vee (((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p))$	Distributividade
11.	$(p \vee q) \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)) \vee ((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)))$	Distributividade
12.	$(p \vee q) \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee \square) \vee (\square \vee (q \wedge p)))$	Contradição
13.	$(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$	Identidade
14.	$q \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p \vee (q \wedge p)$	Associatividade
15.	$q \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p$	Absorção
16.	$((\sim p \vee q) \wedge (q \vee \sim q)) \vee p$	Distributividade
17.	$((\sim p \vee q) \wedge \blacksquare) \vee p$	Tautologia
18.	$\sim p \vee q \vee p$	Identidade
19.	$\sim p \vee p \vee q$	Associatividade
20.	$\blacksquare \vee q$	Tautologia
21.	$\blacksquare$	Identidade

3. Para esse exercício é importante notar que Tautologias e Contradições são formas normais das proposições, assim como certas proposições só podem chegar "naturalmente" em uma das formas normais, essas proposições são chamadas de Proposições Fundamentais. Veja o exemplo abaixo.

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow$$

$$\sim p \vee q$$

Esta é uma Proposição Disjuntiva Fundamental, ou seja, não há operações não redundantes (i.e. Dupla Negação, Equivalência da Condicional, etc.) que possam transformar a disjunção em uma conjunção. Portanto essa proposição está, ao mesmo tempo, na FNC e na FND.

	1. $\sim (\sim p \vee q) \leftrightarrow p$	Equivalência da Condicional
	2. $(\sim \sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow p$	De Morgan
	3. $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow p$	Dupla Negação
	4. $((p \wedge \sim q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (p \wedge \sim q))$	Equivalência da Bicondicional
	5. $(\sim (p \wedge \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	Equivalência da Condicional x2
(a)	6. $((\sim p \vee \sim \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	De Morgan
	7. $(\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	Dupla Negação + Distributividade
	7. $(\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	<b>FNC</b>
	8. $(\blacksquare \vee q) \wedge \blacksquare \wedge (\sim p \vee \sim q)$	Tautologia x2
	9. $\blacksquare \wedge (\sim p \vee \sim q)$	Identidade x2
	10. $(\sim p \vee \sim q)$	Identidade
	10. $\sim p \vee \sim q$	<b>FND</b>

	1. $\sim ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee p \vee q$	Equivalência da Bicondicional
	2. $\sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee p \vee q$	Equivalência da Condicional x2
	3. $(\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)) \vee p \vee q$	De Morgan
	4. $((\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (\sim \sim q \wedge \sim p)) \vee p \vee q$	De Morgan x2
(b)	5. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee p \vee q$	Dupla Negação x2
	5. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee p \vee q$	<b>FND</b>
	6. $(p \wedge \sim q) \vee p \vee (q \wedge \sim p) \vee q$	Associatividade
	7. $p \vee q$	Absorção x2
	7. $p \vee q$	<b>FNC</b>

	1. $(\sim p \vee q) \wedge \sim p \wedge r$	Equivalência da Condicional
	1. $(\sim p \vee q) \wedge \sim p \wedge r$	<b>FNC</b>
(c)	2. $((\sim p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge q)) \wedge r$	Distributividade
	3. $(\sim p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge r$	Identidade
	4. $((\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r))$	Distributividade
	4. $((\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r))$	<b>FND</b>

	1. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow ((\sim \sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q))$	Equivalência da Condicional x2
	2. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow ((p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q))$	Dupla Negação
	3. $\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q)$	Equivalência da Condicional
	4. $(\sim \sim p \vee \sim \sim q) \vee p \vee q \vee \sim p \vee \sim q$	De Morgan
(d)	5. $(p \vee q) \vee p \vee q \vee \sim p \vee \sim q$	Dupla Negação
	5. $(p \vee q) \vee p \vee q \vee \sim p \vee \sim q$	<b>FND</b>
	6. $p \vee q \vee p \vee \sim p \vee q \vee \sim q$	Associatividade
	7. $p \vee q \vee \blacksquare \vee \blacksquare$	Tautologia x2
	8. $\blacksquare$	Identidade
	8. $\blacksquare$	<b>FNC</b> (e FND novamente)

1.  $((\sim r \vee \sim q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (\sim r \vee \sim q))$
2.  $(\sim (\sim r \vee \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (\sim r \vee \sim q))$
3.  $((\sim \sim r \wedge \sim \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$
4.  $((r \wedge q) \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$
5.  $(r \vee p) \wedge (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$

Por simplicidade, tomarei  $(r \vee p)$  como sendo **T**.

5.  $\mathbf{T} \wedge (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$
6.  $\mathbf{T} \wedge ((q \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)) \vee (p \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)))$
7.  $\mathbf{T} \wedge ((q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q))$
8.  $\mathbf{T} \wedge ((q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim r) \vee \square \vee \square \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q))$
9.  $\mathbf{T} \wedge ((q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q))$
10.  $(\mathbf{T} \wedge (q \wedge \sim p)) \vee (\mathbf{T} \wedge (q \wedge \sim r)) \vee (\mathbf{T} \wedge (p \wedge \sim r)) \vee (\mathbf{T} \wedge (p \wedge \sim q))$
11.  $(q \wedge (\sim p \wedge \mathbf{T})) \vee (q \wedge (\sim r \wedge \mathbf{T})) \vee (p \wedge (\sim r \wedge \mathbf{T})) \vee (\sim q \wedge (p \wedge \mathbf{T}))$

Desfazendo a simplificação de  $(r \vee p)$  para **T**, temos

11.  $(q \wedge (\sim p \wedge (r \vee p))) \vee (q \wedge (\sim r \wedge (r \vee p))) \vee (p \wedge (\sim r \wedge (r \vee p))) \vee (\sim q \wedge (p \wedge (r \vee p)))$

Todas idempotências, contradições e tautologias já serão simplificadas.

12.  $(q \wedge ((\sim p \wedge r) \vee \square)) \vee (q \wedge (\square \vee (\sim r \wedge p))) \vee (p \wedge (\square \vee (\sim r \wedge p))) \vee (\sim q \wedge ((p \wedge r) \vee p))$
13.  $(q \wedge (\sim p \wedge r)) \vee (q \wedge (\sim r \wedge p)) \vee (p \wedge (\sim r \wedge p)) \vee (\sim q \wedge ((p \wedge r) \vee p))$
14.  $(q \wedge \sim p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r \wedge p) \vee (p \wedge \sim r \wedge p) \vee (\sim q \wedge p)$
- (e) 15.  $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q)$
15.  $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q)$

1. Equivalência da Bicondicional
2. Equivalência da Condicional x2
3. De Morgan
4. Dupla Negação
5. Distributividade
5. **FNC**
6. Distributividade
7. Distributividade
8. Contradição
9. Identidade
10. Distributividade
11. Associatividade
12. Distributividade
13. Identidade
14. Absorção + Associatividade
15. Identidade + Associatividade
15. **FND**

1.  $\sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)$  Equivalência da Condicional
2.  $(\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \vee (p \wedge q)$  De Morgan
- (f) 3.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$  Dupla Negação
3.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$  **FND**
4.  $p \wedge q$  Identidade
4.  $p \wedge q$  **FNC**

- (g)
1.  $\sim (\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p)$  Equivalência da Condicional
  2.  $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p)$  De Morgan
  3.  $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p)$  Dupla Negação
  3.  $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p)$  **FND**
  4.  $((p \wedge \sim q) \vee q) \wedge ((p \wedge \sim q) \vee \sim r) \wedge ((p \wedge \sim q) \vee \sim p)$  Distributividade
  5.  $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$  Distributividade
  5.  $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$  **FNC**

1.  $((\sim p \wedge \sim q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q))$
2.  $(\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q))$
3.  $((\sim \sim p \vee \sim \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q))$
4.  $((p \vee q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q))$
5.  $(p \vee q \vee r) \wedge ((\sim r \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim q))$
5.  $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim q)$

Chamando  $\sim r \vee \sim q$  como **T**, teremos:

5.  $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim p) \wedge \mathbf{T}$
6.  $((p \wedge (\sim r \vee \sim p)) \vee (q \wedge (\sim r \vee \sim p)) \vee (r \wedge (\sim r \vee \sim p))) \wedge \mathbf{T}$

Todas idempotências, contradições e tautologias já serão simplificadas.

7.  $((p \wedge \sim r) \vee \square \vee (q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim p) \vee \square \vee (\sim r \wedge \sim p)) \wedge \mathbf{T}$
8.  $((p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge \sim p)) \wedge \mathbf{T}$
9.  $((p \wedge \sim r) \wedge \mathbf{T}) \vee ((q \wedge \sim r) \wedge \mathbf{T}) \vee ((q \wedge \sim p) \wedge \mathbf{T}) \vee ((\sim r \wedge \sim p) \wedge \mathbf{T})$
10.  $(p \wedge (\mathbf{T} \wedge \sim r)) \vee ((q \wedge \mathbf{T}) \wedge \sim r) \vee ((q \wedge \mathbf{T}) \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge (\sim r \wedge \mathbf{T}))$
11.  $(p \wedge (\mathbf{T} \wedge \sim r)) \vee ((q \wedge \mathbf{T}) \wedge \sim r) \vee ((q \wedge \mathbf{T}) \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge (\sim r \wedge \mathbf{T}))$

Desfazendo a simplificação de  $\sim r \vee \sim q$  para **T** e fazendo todas as de distributividade, contradição e tautologia possíveis, temos:

- (h)
12.  $(p \wedge \sim r) \vee (\sim r \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge \sim r) \vee (\sim r \wedge q)$

1. Equivalência da Bicondicional
2. Equivalência da Condicional
3. De Morgan
4. Dupla Negação
5. Distributividade
5. **FNC**
6. Distributividade
7. Distributividade
8. Identidade
9. Distributividade
10. Associatividade
11. Associatividade
12. Distributividade + Contradição + Tautologia
12. **FND**

- (i)
1.  $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$  Equivalência da Condicional
  2.  $(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$  De Morgan
  2.  $(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$  **FND**
  3.  $\sim p \vee (\sim q \vee (\sim p \wedge \sim q))$  Associatividade
  4.  $\sim p \vee \sim q$  Absorção
  4.  $\sim p \vee \sim q$  **FNC** (Proposição Fundamental)

- (j)
1.  $(\sim \sim p \vee q) \leftrightarrow (r \vee p)$  Equivalência da Condicional
  2.  $(p \vee q) \leftrightarrow (r \vee p)$  Dupla Negação
  3.  $((p \vee q) \rightarrow (r \vee p)) \wedge ((r \vee p) \rightarrow (p \vee q))$  Equivalência da Bicondicional
  4.  $(\sim (p \vee q) \vee (r \vee p)) \wedge (\sim (r \vee p) \vee (p \vee q))$  Equivalência da Condicional x2
  5.  $((\sim p \wedge \sim q) \vee r \vee p) \wedge ((\sim r \wedge \sim p) \vee p \vee q)$  De Morgan
  6.  $((\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p)) \vee r) \wedge (((\sim r \vee p) \wedge (\sim p \vee p)) \vee q)$  Distributividade
  7.  $((\blacksquare \wedge (\sim q \vee p)) \vee r) \wedge (((\sim r \vee p) \wedge \blacksquare)) \vee q)$  Tautologia x2
  8.  $(\sim q \vee p \vee r) \wedge (\sim r \vee p \vee q)$  Identidade x2
  8.  $(\sim q \vee p \vee r) \wedge (\sim r \vee p \vee q)$  **FNC**
  9.  $(\sim q \wedge (\sim r \vee p \vee q)) \vee (p \wedge (\sim r \vee p \vee q)) \vee (r \wedge (\sim r \vee p \vee q))$  Distributividade
  10.  $(\sim q \wedge (\sim r \vee p \vee q)) \vee (p \wedge ((\sim r \vee p) \vee q)) \vee (r \wedge (\sim r \vee p \vee q))$  Associatividade
- Simplificando todas as contradições, tautologias, idempotências e absorções:
11.  $(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge p) \vee \square \vee p \vee (p \wedge q) \vee \square \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$  Distributividade
  12.  $(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge p) \vee p \vee (p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$  Identidade
  12.  $(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge p) \vee p \vee (p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$  **FND**

- (k)
1.  $\sim \sim (p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q) \vee r$  Equivalência da Condicional
  2.  $(p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q) \vee r$  Dupla Negação
  3.  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee (p \wedge q) \vee r$  Equivalência da Bicondicional
  4.  $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee (p \wedge q) \vee r$  Equivalência da Condicional x2
  5.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee r$  Distributividade
  5.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee r$  **FND**
  6.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee \square \vee \square \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee r$  Contradição x2
  7.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee r$  Identidade
  8.  $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee r$  Idempotência
  9.  $((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)) \vee r$  Distributividade
  10.  $(\blacksquare \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \blacksquare) \vee r$  Tautologia x2
  11.  $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \vee r$  Identidade x2
  12.  $((\sim p \vee q) \vee r) \wedge ((\sim q \vee p) \vee r)$  Distributividade
  13.  $(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee r)$  Associatividade
  13.  $(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee r)$  **FNC**

	1. $((\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee \sim p)) \wedge ((q \vee \sim p) \rightarrow (\sim p \wedge q))$	Equivalência da Bicondicional
	2. $(\sim (\sim p \wedge q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge (\sim (q \vee \sim p) \vee (\sim p \wedge q))$	Equivalência da Condicional x2
	3. $(\sim \sim p \vee \sim q \vee q \vee \sim p) \wedge ((\sim q \wedge \sim \sim p) \vee (\sim p \wedge q))$	De Morgan
	4. $(p \vee \sim q \vee q \vee \sim p) \wedge ((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q))$	Dupla Negação
(l)	5. $\blacksquare \wedge ((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q))$	Tautologia
	6. $(\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$	Identidade
	6. $(\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$	<b>FND</b>
	7. $(\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$	Distributividade
	7. $(\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$	<b>FNC</b>
	1. $((\sim p \vee \sim q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (\sim p \vee \sim q))$	Equivalência da Bicondicional
	2. $(\sim (\sim p \vee \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (\sim p \vee \sim q))$	Equivalência da Condicional x2
	3. $((\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (\sim p \vee \sim q))$	De Morgan
	4. $((p \wedge q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (\sim p \vee \sim q))$	Dupla Negação
(m)	5. $p \wedge (\sim p \vee (\sim p \vee \sim q))$	Absorção
	6. $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$	Idempotência
	6. $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$	<b>FNC</b>
	7. $(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$	Distributividade
	7. $(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$	<b>FND</b>
	1. $((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$	Equivalência da Bicondicional
	2. $(\sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)) \wedge (\sim (p \wedge q) \vee (p \vee q))$	Equivalência da Condicional x2
	3. $((\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)) \wedge ((\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q))$	De Morgan
(n)	4. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \wedge \blacksquare$	Tautologia
	5. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$	Identidade
	5. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$	<b>FND</b>
	6. $(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)$	Distributividade
	6. $(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)$	<b>FNC</b>

## Equivalências Notáveis:

$$\begin{aligned} & p \vee \blacksquare \Leftrightarrow \blacksquare \\ \text{Identidade (IDENT): } & p \vee \square \Leftrightarrow p \\ & p \wedge \blacksquare \Leftrightarrow p \\ & p \wedge \square \Leftrightarrow \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Idempotência (ID): } & p \Leftrightarrow p \wedge p \\ & p \Leftrightarrow p \vee p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comutação (COM): } & p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \\ & p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Associação (ASSOC): } & p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ & p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distribuição (DIST): } & p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ & p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De Morgan (DM): } & \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \\ & \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Contradição: } & p \wedge \sim p \Leftrightarrow \square \\ & p \leftrightarrow \sim p \Leftrightarrow \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \vee \sim p \Leftrightarrow \blacksquare \\ \text{Tautologia: } & p \rightarrow p \Leftrightarrow \blacksquare \\ & p \leftrightarrow p \Leftrightarrow \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Absorção: } & p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \\ & p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conectivos de Scheffer } & p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \\ & p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

$$\text{Dupla Negação (DN): } p \Leftrightarrow \sim \sim p$$

$$\text{Condicional (COND): } p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$\text{Bicondicional (BICOND): } p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\text{Contraposição (CP): } p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

$$\text{Exportação-Importação (EI): } p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\text{Ou-Exclusivo (X-or) } p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$