Lista de Exercícios de Equivalências Lógicas
Professores: Karina G. R. e Kariston P.
Monitor: Miguel A. Nunes
Joinville, 30 de outubro de 2019

Para demonstrar que uma fórmula A é equivalente a outra fórmula B, ou seja, demonstrar:

$$A \equiv B$$

Basta calcular a tabela verdade de A e a tabela verdade de B e verificar se a última coluna destas duas tabelas são iguais.
Porém, para uma fórmula como:

$$\neg(\neg(r \wedge \neg q) \vee \neg(t \wedge \neg r) \vee \neg(p \wedge \neg s) \vee \neg(s \wedge \neg t) \vee \neg(q \wedge \neg p)) \equiv \neg((((r \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (r \wedge \neg q)) \rightarrow (r \wedge \neg q))$$

Isso seria uma tarefa no mínimo tediosa, por isso, há outros métodos para calcular equivalências lógicas, usando as equivalência notáveis e o princípio da substituição. Com estes podemos demonstrar qualquer equivalência lógica que quisermos. O método para esta prova pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A \equiv B \Longrightarrow \begin{cases} \text{Transformar A em B, logo:} & B \equiv B \\ \text{Transformar B em A, logo} & A \equiv A \\ \text{Transformar A e B em C, logo} & C \equiv C \end{cases}$$

Fica como exercício ao leitor provar a equivalência da formula dada como exemplo acima.

1. Prove o seguinte teorema sobre a relação entre consequência lógica e equivalência lógica:

$$\text{Se } A \vDash B \text{ e } B \vDash A \text{ então } A \equiv B$$

2. Represente os conectivos:

   (a) $\wedge$ e $\rightarrow$ usando somente $\vee$ e $\neg$.

   (b) $\vee$ e $\rightarrow$ usando somente $\wedge$ e $\neg$.

   (c) Dado pela seguinte Tabela-Verdade:

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

      i. Usando somente $\wedge$ e $\neg$.

      ii. Usando somente $\vee$ e $\neg$.

   (d) Dado pela seguinte Tabela-Verdade:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

i. Usando somente $\wedge$ e $\neg$.
ii. Usando somente $\vee$ e $\neg$.
iii. Usando somente $\to$ e $\wedge$.

(e) $\wedge$ e $\neg$ usando somente o conectivo definido pela Tabela-Verdade abaixo:

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(f) **[Desafio]** O conectivo dado pela Tabela-Verdade abaixo, usando somente $\wedge$, $\vee$ e $\neg$.

A	B	C	$\heartsuit(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. Verifique se as equivalências abaixo são válidas:

(a) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
(b) $(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q) \to r \vee s$
(c) $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$
(d) $(p \to q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$
(e) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
(f) $(p \to q) \to q \equiv p \vee q$
(g) $(((p \to q) \to p) \to p) \equiv p \vee \neg p$
(h) $(p \to (p \to (p \to q))) \equiv p \to q$
(i) $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$
(j) $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv (p \to (q \to \neg r))$

4. Seja a seguinte tabela-verdade referente à fórmula $s \to \neg(p \to (q \vee \neg s))$:

p	q	s	$q \vee \neg s$	$p \to (q \vee \neg s)$	$s \to \neg(p \to (q \vee \neg s))$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Repare que as únicas linhas onde a formula é verdadeira são as linhas {1,3,5,6,7}.
Sabendo que a FND de $s \to \neg(p \to (q \vee \neg s))$ é:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg s)$$

Consegue perceber alguma relação entre a FND e a linhas da Tabela-Verdade onde a fórmula é verdadeira?

Seja a seguinte tabela verdade referente à formula $(p \vee \neg q) \rightarrow q$:

p	q	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow q$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Repare que as únicas linhas onde a formula é verdadeira são as linhas {2,4}.
Sabendo que a FND de $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ é:

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

Novamente, consegue perceber alguma relação entre a FND e a linhas da Tabela-Verdade onde a fórmula é verdadeira ?

Digamos que a seguinte tabela-verdade seja referente à uma fórmula ϕ, qualquer

p	q	s	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A partir desta é possível calcular que sua FND é:

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge s)$$

Explique este método de cálculo de FND, e indique uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva para as fórmulas:

(a) $\neg q \rightarrow (p \wedge \neg q)$
(b) $\neg(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) \vee r$ (Este é o mesmo conectivo $\leftrightarrow$ definido na questão 2, letra d)
(c) $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p)) \wedge ((r \vee p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
(d) $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$

5. Determine a FNC e FND das seguintes fórmulas, utilizando o método de sua escolha:

(a) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
(b) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge r)$
(c) $(\neg r \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$
(d) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
(e) $(\neg p \vee q) \rightarrow (q \wedge \neg r \wedge p)$
(f) $(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$
(g) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

6. **(Desafio)** Desenvolva um método análogo aquele apresentado na questão 4, porém para Formas Normais Conjuntivas.
   Dica: Talvez as regras de De Morgan seja úteis.

Equivalências Notáveis:

Idempotência (ID): $A \wedge A \equiv A$
$A \vee A \equiv A$

Comutação (COM): $A \wedge B \equiv B \wedge A$
$A \vee B \equiv B \vee A$

Associação (ASSOC): $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

Distribuição (DIST): $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

De Morgan (DM): $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Dupla Negação (DN): $\neg\neg A \equiv A$

Condicional (COND): $A \to B \equiv \neg A \vee B$

Contraposição (CP): $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

Exportação-Importação (EI): $A \wedge B \to C \equiv A \to (B \to C)$

Contradição: $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Tautologia: $A \vee \neg A \equiv \top$

Absorção: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$