

Acadêmico(a): _____

Obs.: Algumas questões desta prova vieram de www.cs.utsa.edu/~bylander/cs2233/index.html

1. Construa as duas fórmulas abaixo em suas respectivas FNC e FND:

- (a) $\sim (p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$
 (b) $p \leftrightarrow q$

2. Verificar a validade dos teoremas abaixo, usando um dos seguintes métodos de prova: *dedução natural* (regras de inferência diretas e propriedades lógicas), ou pela *contradição*, ou método da demonstração *condicional* (escolha duas das três abaixo):

- (a) $\{p \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow (r \rightarrow \sim q), (\sim s \vee \sim r) \rightarrow \sim \sim q, \sim s\} \vdash \sim r$
 (b) $\{(\sim p \vee q) \rightarrow r, (r \vee s) \rightarrow \sim t, t\} \vdash \sim q$
 (c) $\{p \rightarrow q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s)\} \vdash p \rightarrow t$

3. Considere cada uma das proposições atômicas abaixo:

- (a) $y < 0$
 (b) $y = 0$
 (c) $y > 0$
 (d) $x < y$
 (e) $x > y$
 (f) $x = y$

Quais destas proposições deveriam ser escolhidas e combinadas, para demonstrar ou concluir a proposição $x < 0$? Faça suas escolhas e exiba esta demonstração.

4. Considere o jogo “Pedra (r), Papel (p), Tesoura (s)”. Com dois jogadores usaremos as seis proposições seguintes:

Jogador	Literais	Significado
Jogador 1	r_1	Escolhe Pedra.
	p_1	Escolhe Papel.
	s_1	Escolhe Tesoura.
Jogador 2	r_2	Escolhe Pedra.
	p_2	Escolhe Papel.
	s_2	Escolhe Tesoura.

- (a) **Expresse como uma proposição:** “Cada jogador deve escolher ao menos uma opção de pedra, papel ou tesoura”.

Resposta: O jogador deve escolher pelo menos um, dois ou três literais e não pode escolher nenhum, portanto a primeira linha da T.V. (em que os literais são falso) será Falso e as demais será Verdadeiro.

- No conceito de construir uma expressão através de uma TV, deve-se preferencialmente escolher trabalhar com a resposta da expressão que aparece o menor número de vezes.
- Ao escolhermos a linha em que a expressão é falsa, *e.g.*, em **vermelho**, faremos uma relação de disjunção (\vee) forçando com que a resposta da Expressão seja Falso.
- Na tabela 1 estamos considerando as opções do jogador 1, portanto a resposta será: $(p_1 \vee r_1 \vee s_1)$.
- Ao considerarmos a tabela 2 do jogador 2, chegaremos à expressão $(p_2 \vee r_2 \vee s_2)$.
- A resposta final consiste na relação de conjunção entre as expressões dos dois jogadores, chegando à resposta final:

p_1	r_1	s_1	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	V
V	F	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

Tabela 1: Jogador 1

p_2	r_2	s_2	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	V
V	F	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

Tabela 2: Jogador 2

\wedge

$$(r_1 \vee p_1 \vee s_1) \wedge (r_2 \vee p_2 \vee s_2)$$

- Este método de encontrar uma expressão através da manipulação da TV será utilizado para as demais questões.
- (b) **Expresse como uma proposição:** “Cada jogador não pode escolher mais de uma opção de pedra, papel ou tesoura”.

Resposta: Cada jogador deve escolher no máximo um literal ou nenhum. Vejamos as tabelas 3 e 4:

p_1	r_1	s_1	Expressão
F	F	F	V
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 3: Jogador 1

p_2	r_2	s_2	Expressão
F	F	F	V
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 4: Jogador 2

\wedge

- Para estas tabelas, encontra-se uma quantidade igual de linhas Verdadeiras e Falsas.
- Ao trabalhar com as linhas verdadeiras, deve-se fazer uma conjunção entre cada literal e uma disjunção entre cada linha da tabela.
- Para finalizar deve-se considerar a expressão do jogador 2, fazendo uma conjunção entre os dois jogadores.

Jogador 1:

$((\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1) \vee$ Referente à 1a. linha da tabela.

$(\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1) \vee$ Referente à 2a. linha da tabela.

$(\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1) \vee$ Referente à 3a. linha da tabela.

$(p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1))$ Referente à 5a. linha da tabela.

Jogador 2:

$((\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2) \vee$ Referente à 1a. linha da tabela.

$(\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge s_2) \vee$ Referente à 2a. linha da tabela.

$(\sim p_2 \wedge r_2 \wedge \sim s_2) \vee$ Referente à 3a. linha da tabela.

$(p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2))$ Referente à 5a. linha da tabela.

Resultando na expressão:

$$(((\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1) \vee (\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1) \vee (\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1) \vee (p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1)) \wedge ((\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2) \vee (\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge s_2) \vee (\sim p_2 \wedge r_2 \wedge \sim s_2) \vee (p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2)))$$

Esta expressão pode ser melhorada utilizando a simplificação na tentativa de chegar à uma forma mais reduzida.

- (c) (100 pts., crédito extra) **Expresse da maneira mais reduzida possível: “Cada jogador deve escolher exatamente uma opção de pedra, papel ou tesoura”.**

Resposta: Esta questão refere-se à operação de OU EXCLUSIVO (XOR). Vamos às tabelas:

p_1	r_1	s_1	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 5: Jogador 1

p_2	r_2	s_2	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 6: Jogador 2

- Observe que a relação entre os objetos significa que cada jogador pode escolher uma das três opções possíveis para cada jogador:

$$((\text{Tesoura1} \underline{\vee} \text{Pedra1} \underline{\vee} \text{Papel1}) \wedge (\text{Tesoura2} \underline{\vee} \text{Pedra2} \underline{\vee} \text{Papel2}))$$

- Mas deve-se considerar que na tabela 5:
 - A Tesoura1 será Verdade se $(\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1)$;
 - A Pedra1 será Verdade se $(\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1)$;
 - O Papel1 será verdade se $(p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1)$;
- E da mesma forma para o jogador 2 na tabela 6...
- Substituindo as considerações em cada objeto, chegamos à expressão:

$$(((\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1) \underline{\vee} (\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1) \underline{\vee} (p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1)) \wedge ((\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge s_2) \underline{\vee} (\sim p_2 \wedge r_2 \wedge \sim s_2) \underline{\vee} (p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2)))$$

- (d) **Expresse como uma proposição: “Os jogadores empatam”. Assuma que você não tenha que se importar com a regra anterior.**

Resposta: Nesta questão desconsideraremos “não jogar uma opção” (linha 1). Faremos uma relação de conjunção entre os jogadores e disjunção entre as opções, *i.e.*, faremos:

“ $((\text{tesoura}_1 \text{ e } \text{tesoura}_2) \text{ ou } (\text{pedra}_1 \text{ e } \text{pedra}_2) \text{ ou } (\text{papel}_1 \text{ e } \text{papel}_2))$ ”

- Verifica-se que nas tabelas 7 e 8 temos 3 linhas cujo a expressão é verdadeira, portanto trabalharemos com elas.
- Ao chegar à expressão da opção do jogador 1, deve-se fazer a expressão da opção do jogador 2 (que tem a mesma forma).
- Una as três jogadas por uma disjunção.

$$\begin{aligned} (((\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1) \wedge (\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge s_2)) &= \text{os dois jogam tesoura;} \\ \vee &= \text{ou} \\ ((\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1) \wedge (\sim p_2 \wedge r_2 \wedge \sim s_2)) &= \text{os dois jogam pedra;} \\ \vee &= \text{ou} \\ ((p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1) \wedge (p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2)) &= \text{os dois jogam papel.} \end{aligned}$$

p_1	r_1	s_1	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 7: Jogador 1

p_2	r_2	s_2	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 8: Jogador 2

\wedge

Observe que a expressão a seguir não funciona pois há muitas verdades na tabela que não deveriam existir. $(r_1 \wedge r_2) \vee (p_1 \wedge p_2) \vee (s_1 \wedge s_2)$

- (e) **Expresse como uma proposição: “O jogador 1 ganha”.** Assuma que você não tenha que se preocupar com a regra em parte (c).

Resposta: Considere as tabelas e as observações a seguir.

p_1	r_1	s_1	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 9: Jogador 1

p_2	r_2	s_2	Expressão
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	F

Tabela 10: Jogador 2

- Para o jogador 1 ganhar, deve seguir a regra do jogo, obedecendo a precedência das opções:
 - Tesoura ganha do Papel;
 - Pedra ganha da Tesoura;
 - Papel ganha da Pedra;
- Se desconsiderar a regra do item (c), não teremos que nos preocupar com o OU EXCLUSIVO (XOR).
- Com isso, chegamos à seguinte conclusão:

$$(((\sim p_1 \wedge \sim r_1 \wedge s_1) \wedge (p_2 \wedge \sim r_2 \wedge \sim s_2)) = \text{regra i;} \\ \vee \text{ ou}$$

$$((\sim p_1 \wedge r_1 \wedge \sim s_1) \wedge (\sim p_2 \wedge \sim r_2 \wedge s_2)) = \text{regra ii;} \\ \vee \text{ ou}$$

$$((p_1 \wedge \sim r_1 \wedge \sim s_1) \wedge (\sim p_2 \wedge r_2 \wedge \sim s_2))) = \text{regra iii;}$$

5. **Determine o valor verdade $\{V, F\}$ (a interpretação Φ) de cada uma das fórmulas abaixo, em seu respectivo domínio. Faça os cálculos em separado e preencha a tabela abaixo.**

	Domínios			
	Num. Reais	Reais Positivos	Inteiros	Inteiros Positivos
$\exists x(x = -x)$				
$\forall x(2x \leq 3x)$				
$\exists x(x^2 = 2)$				
$\forall x(x \leq x^2)$				
$\forall x \exists y(xy = 1)$				

6. Seja o enunciado: “...para todo caminho definido de x até z e arco entre z e y , então há um caminho entre x e y . Sabe-se que todo arco entre x e y é também um caminho entre x e y ”. Sabe-se ainda que há arcos definidos pelas fórmulas: $\text{arco}(a, b)$, $\text{arco}(a, c)$, $\text{arco}(b, d)$, e $\text{arco}(c, d)$. Prove que é possível ir de um ponto a a e definido por um $\text{caminho}(a, e)$ como verdade. Desta vez vamos fornecer a fórmulas referente ao texto acima, as quais são dadas por:

- (a) $\forall x \forall y \forall z (\text{caminho}(x, z) \wedge \text{arco}(z, y) \rightarrow \text{caminho}(x, y))$
- (b) $\forall x \forall y (\text{arco}(x, y) \rightarrow \text{caminho}(x, y))$
- (c) $\text{arco}(a, b)$
- (d) $\text{arco}(a, c)$
- (e) $\text{arco}(b, d)$
- (f) $\text{arco}(c, d)$
- (g) $\text{arco}(d, e)$

Deduz a tal caminho como verdade, indicando todas instâncias das variáveis, PU's, PE's e regras de inferências utilizadas. Faça um grafo (flechas e nós) orientado para ver o que estás calculando.

Equivalências Notáveis:

Idempotência (ID): $P \Leftrightarrow P \wedge P$ ou $P \Leftrightarrow P \vee P$

Comutação (COM): $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ ou $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

Associação (ASSOC): $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ ou $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

Distribuição (DIST): $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ou $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Dupla Negação (DN): $P \Leftrightarrow \sim \sim P$

De Morgan (DM): $\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ ou $\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$

Equivalência da Condicional (COND): $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$

Bicondicional (BICOND): $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Contraposição (CP): $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$

Exportação-Importação (EI): $P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Contradição: $P \wedge \sim P \Leftrightarrow \square$

Tautologia: $P \vee \sim P \Leftrightarrow \blacksquare$

Regras Inferencias Válidas (Teoremas):

Adição (AD): $P \vdash P \vee Q$ ou $P \vdash Q \vee P$

Simplificação (SIMP): $P \wedge Q \vdash P$ ou $P \wedge Q \vdash Q$

Conjunção (CONJ): $P, Q \vdash P \wedge Q$ ou $P, Q \vdash Q \wedge P$

Absorção (ABS): $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \wedge Q)$

Modus Ponens (MP): $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

Modus Tollens (MT): $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

Silogismo Disjuntivo (SD): $P \vee Q, \sim P \vdash Q$ ou $P \vee Q, \sim Q \vdash P$

Silogismo Hipotético (SH): $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

Dilema Construtivo (DC): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S$

Dilema Destrutivo (DD): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim Q \vee \sim S \vdash \sim P \vee \sim R$

Observações:

1. Qualquer dúvida, desenvolva a questão e deixe tudo explicado, detalhadamente, que avaliaremos o seu conhecimentos sobre o assunto;
2. Clareza e legibilidade;

In formal logic, a contradiction is the signal of defeat, but in the evolution of real knowledge it marks the first step in progress toward a victory.

Alfred North Whitehead