

Lista de Exercícios de Lógica de Primeira Ordem
 Professores: Karina G. R. e Kariston P.
 Monitor: Miguel A. Nunes
 Joinville, 30 de outubro de 2019

1. Determine o valor verdade ($\{V, F\}, \{1, 0\}$) (ou seja, a interpretação ou valoração) de cada uma das fórmulas abaixo em seu respectivo domínio.

Obs.: Para questões que tem ambos x e y , assuma que ambos fazem parte do mesmo domínio.

	Domínios						
Fórmulas	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \geq 0$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \geq 0$	$\{-4, -3\}$	$\{3, 4\}$	$\{-10, 0, 10\}$
$\exists x(x = -x^2)$							
$\forall x(3x \leq 3x)$							
$\exists x(x^2 = 16)$							
$\forall x(x^4 \geq x^2)$							
$\forall x \exists y(xy = 2)$							
$\forall x(2x \leq x^2)$							
$\exists x((2x)^2 > 16)$							
$\forall x(x^3 < 1)$							
$\forall x \exists y(y = x^3)$							
$\forall x \exists y(xy = 12)$							

2. Seja o conjunto \mathbb{N}^* dos números naturais. Determine o conjunto-verdade ou domínio para o qual a fórmula é **verdadeira**, para cada uma das fórmulas abaixo:

- (a) $\forall x.((2x = 6) \vee (2x = 8))$
- (b) $\forall x.(x^2 - 5x + 6 = 0)$
- (c) $\exists x.(x^2 - 5x + 6 = 0)$
- (d) $\exists x.(x^2 - 3x = 0)$
- (e) $\forall x.(x - 1 < 4)$
- (f) $\exists x. \sim (x \text{ é ímpar})$
- (g) $\exists x : (x \text{ é primo}) \quad (1 \text{ não é primo})$
- (h) $\exists y \forall x : (x \geq y + 10)$

3. Em contação de estória infantis, os tipos clássicos de personagens são chamados *arquétipos* e cada um apresenta sempre um comportamento padrão específico. Seja o conjunto das seguintes fórmulas em lógica de primeira-ordem (LPO), prove que o dragão irá atacar o cavaleiro:

-
-
1. $personagem(dragao, mau)$
 2. $personagem(cavaleiro, bom)$
 3. $personagem(princesa, bom)$
 4. $captura(dragao, princesa)$
 5. $armado(cavaleiro)$
 6. $\forall x \exists y : personagem(x, bom) \wedge personagem(y, mau) \wedge ameacado(y) \rightarrow ataca(y, x)$
 7. $\forall x \exists y \exists z : (personagem(x, bom) \wedge personagem(z, bom) \wedge armado(x) \wedge captura(y, z) \rightarrow ameacado(y))$
-
-

4. Em uma universidade fictícia chamada “Ude-SC” há um sistema de pré-requisitos de matérias. Ou seja, para um acadêmico desta universidade cursar uma matéria é necessário que ele tenha completado seus pré-requisitos.

Logo, se uma disciplina x é um pré-requisito de alguma disciplina y , então x deve preceder y . Esta sequência de pré-requisitos eventualmente atrasa a graduação de alguns estudantes por lá...

Assim, a situação desta grade-curricular é dada pelo conjunto das seguintes fórmulas em lógica de primeira-ordem (LPO):

-
-
- (1) $requisito(agt, lpg)$
 - (2) $requisito(agt, poo)$
 - (3) $requisito(lpg, eda)$
 - (4) $requisito(lpg, ppr)$
 - (5) $requisito(eda, teg)$
 - (6) $requisito(eda, pra)$
 - (7) $requisito(teg, cal)$
 - (8) $requisito(cal, tcc1)$
 - (9) $requisito(tcc1, tcc2)$
 - (10) $\forall x \exists y : requisito(x, y) \rightarrow precede(x, y)$
 - (11) $\forall x \exists z \exists y : (requisito(x, z) \wedge precede(z, y)) \rightarrow precede(x, y)$
-
-

Demonstre que a matéria “agt” precede a matéria “tcc2”.

5. [Adams, 1995] afirma que o peixe-babel é pequeno, amarelo e semelhante a uma sanguessuga, e é a mais estranha criatura de todo o universo. Esta criatura peculiar se alimenta da energia mental das criaturas ao redor dele, não da qual ele se hospeda, e expõe na mente de seu hospedeiro algo que é interpretado pelo cérebro deste como a fala dos seres ao seu redor.

Na prática, quando um peixe-babel é inserido no ouvido de algum ser ele imediatamente compreende tudo que lhe for dito, em qualquer idioma jamais inventado por qualquer criatura do universo. Alguns pensadores dizem que a existência do peixe-babel é uma coincidência tão absurdamente improvável que um ser como ele não pudesse surgir por meio da evolução das espécies, portanto é uma prova concreta da inexistência de alguma entidade divina.

A prova fornecida é a seguinte:

- (a) Deus existe enquanto houver fé
- (b) A prova nega a fé
- (c) É impossível que o peixe-babel tenha evoluído, portanto foi criado por Deus
- (d) Como ele foi criado por Deus, ele prova que existe Deus
- (e) Como há uma prova que existe Deus, então não há fé em Deus
- (f) Portanto não Deus não existe

Transcreva esta prova para a Lógica de Primeira Ordem.

Referências

[Adams, 1995] Adams, D. (1995). *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. San Val.

Equivalências Notáveis:

Identidade (IDENT):	$P \vee \blacksquare \Leftrightarrow \blacksquare$
	$P \vee \square \Leftrightarrow P$
	$P \wedge \blacksquare \Leftrightarrow P$
	$P \wedge \square \Leftrightarrow \square$
Idempotência (ID):	$P \Leftrightarrow P \wedge P$
	$P \Leftrightarrow P \vee P$
Comutação (COM):	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
Associação (ASSOC):	$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
Distribuição (DIST):	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
De Morgan (DM):	$\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
	$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$
Contradição:	$P \wedge \sim P \Leftrightarrow \square$
	$P \leftrightarrow \sim P \Leftrightarrow \square$
Tautologia:	$P \vee \sim P \Leftrightarrow \blacksquare$
	$P \rightarrow P \Leftrightarrow \blacksquare$
	$P \leftrightarrow P \Leftrightarrow \blacksquare$
Absorção:	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
Conectivos de Scheffer	$P \uparrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
	$P \downarrow Q \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$
Dupla Negação (DN):	$P \Leftrightarrow \sim \sim P$
Condicional (COND):	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$
Bicondicional (BICOND):	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
Contraposição (CP):	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$
Exportação-Importação (EI):	$P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
Ou-Exclusivo (X-or)	$P \veebar Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$

Regras de Inferência Válidas:

Adição (AD): $\frac{P \vdash P \vee Q}{P \vdash Q \vee P}$

Simplificação (SIMP): $\frac{P \wedge Q \vdash P}{P \wedge Q \vdash Q}$

Conjunção (CONJ) $\frac{P, Q \vdash P \wedge Q}{P, Q \vdash Q \wedge P}$

Absorção (ABS): $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \wedge Q)$

Modus Ponens (MP): $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

Modus Tollens (MT): $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

Silogismo Disjuntivo (SD): $\frac{P \vee Q, \sim P \vdash Q}{P \vee Q, \sim Q \vdash P}$

Silogismo Hipotético (SH): $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

Dilema Construtivo (DC): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S$

Dilema Destrutivo (DD): $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim Q \vee \sim S \vdash \sim P \vee \sim R$