Función de Transferencia en Lazo Abierto (Sistema Masa-Resorte-Amortiguador)

Para un sistema masa-resorte-amortiguador, la ecuación de movimiento que describe el comportamiento dinámico de la masa bajo la acción de fuerzas es:

$$F(t) - F_{\text{resorte}} - F_{\text{amortiguador}} = m \cdot \ddot{y}(t)$$

Donde:

- $F(t)$ es la fuerza aplicada al sistema (esto es la entrada del sistema).
- $F_{\text{resorte}} = k \cdot y(t)$ es la fuerza elástica generada por el resorte, donde k es la constante del resorte y $y(t)$ es el desplazamiento de la masa (que es la salida del sistema).
- $F_{\text{amortiguador}} = c \cdot \dot{y}(t)$ es la fuerza de amortiguamiento generada por el amortiguador, donde c es el coeficiente de amortiguamiento y $\dot{y}(t)$ es la velocidad de la masa.
- m es la masa del sistema.
- $\ddot{y}(t)$ es la aceleración de la masa (la derivada segunda del desplazamiento con respecto al tiempo).

Entonces, la ecuación de movimiento es:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F(t)$$

Para convertir esta ecuación a su forma en el dominio de Laplace, aplicamos la transformada de Laplace a cada término, asumiendo condiciones iniciales nulas (lo cual significa que $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$). Las transformadas de Laplace correspondientes son:

- La transformada de Laplace de la aceleración $\ddot{y}(t)$ es $s^2 \cdot Y(s)$,
- La transformada de Laplace de la velocidad $\dot{y}(t)$ es $s \cdot Y(s)$,
- La transformada de Laplace del desplazamiento $y(t)$ es $Y(s)$,
- La transformada de Laplace de $F(t)$ es $F(s)$.

La ecuación transformada en Laplace se convierte en:

$$m \cdot s^2 \cdot Y(s) + c \cdot s \cdot Y(s) + k \cdot Y(s) = F(s)$$

Despejando $Y(s)$ de esta ecuación, obtenemos:

$$Y(s) \cdot (m \cdot s^2 + c \cdot s + k) = F(s)$$

Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$$

La función de transferencia en lazo abierto, $G(s)$, es simplemente la relación entre la salida $Y(s)$ y la entrada $F(s)$, que es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$$

Este resultado describe cómo el desplazamiento $y(t)$ responde a la fuerza aplicada $F(t)$ en el dominio de Laplace. El término $m \cdot s^2$ representa la inercia de la masa, que está relacionada con la aceleración; el término $c \cdot s$ está relacionado con el amortiguamiento de la masa; y el término k está relacionado con la elasticidad del resorte.

La función de transferencia describe cómo las diferentes propiedades del sistema (masa, amortiguador, resorte) influyen en la salida, dada una entrada. Este modelo es útil para analizar la respuesta del sistema a diferentes entradas, como una fuerza impulsiva o una entrada escalón.

Sistema Equivalente del Modelo Masa, Resorte, Amortiguador

El circuito eléctrico está formado por tres componentes básicos: un inductor (L), un resistor (R), y un condensador (C). Estos tres elementos se encuentran conectados en serie, y el voltaje aplicado a los terminales del circuito es la entrada al sistema, mientras que el voltaje en el condensador es la salida.

La ecuación diferencial básica que describe el comportamiento de un circuito RLC en serie es la siguiente:

$$L \cdot i''(t) + R \cdot i'(t) + \frac{1}{C} \cdot i(t) = V_i(t)$$

Donde:

- $i(t)$ es la corriente en el circuito,
- $V_i(t)$ es la entrada al sistema (el voltaje aplicado),
- L es la inductancia (equivalente a la masa m),
- R es la resistencia (equivalente al amortiguador c),
- C es la capacitancia (equivalente al resorte k).

La transformada de Laplace de esta ecuación nos da:

$$L \cdot s^2 \cdot I(s) + R \cdot s \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot I(s) = V_i(s)$$

Despejando $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{L \cdot s^2 + R \cdot s + \frac{1}{C}}$$

La función de transferencia del circuito eléctrico es la relación entre la salida $V_o(s)$ y la entrada $V_i(s)$. En este caso, si tomamos $V_o(s)$ como el voltaje en el condensador, la función de transferencia del sistema eléctrico es:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

Si comparamos esta función de transferencia con la que obtuvimos para el sistema masa-resorte-amortiguador:

$$G(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$$

Observamos que los términos en la función de transferencia del sistema eléctrico tienen una correspondencia directa con los términos de la función de transferencia del sistema masa-resorte-amortiguador:

- El inductor L se corresponde con la masa m,
- El resistor R se corresponde con el coeficiente de amortiguamiento c,
- El condensador C se corresponde con el resorte k.

De esta comparación, obtenemos la siguiente relación entre los parámetros del sistema eléctrico y el sistema mecánico:

- $L = m$,
- $R = c$,
- $C = \frac{1}{k}$.

Por lo tanto, podemos concluir que el sistema equivalente del modelo masa-resorte-amortiguador es un circuito eléctrico RLC, con los siguientes parámetros equivalentes:

- $L = m$,
- $R = c$,
- $C = \frac{1}{k}$.

Este análisis es útil, ya que permite resolver problemas mecánicos utilizando técnicas de análisis de circuitos eléctricos.