Algoritmos
Estructuras de Datos I

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
2024

Técnicas algorítmicas(2)

Recursión-Ejemplo f1

```
FUNCION f1 (n) : entero → entero
    SI (n = 0) ENTONCES
        retorna (0)
    SINO
        retorna ( f1(n-1) + f1(n-1) + n * (n+1) )
FIN
```

Relación de recurrencia:

$T(n) = d$ si $n = 0$

$T(n) = c + 2 * T(n-1)$ si $n > 0$ c,d son constantes

Recursión-Ejemplo f1

Sea

si $n = 0$	$T(n) = d$	
si $n > 0$	$T(n) = c + 2 * T(n-1)$	c,d son constantes

Si $n>0$	$T(n) = c + 2 * T(n-1)$
Si $n-1>0$, $n>1$	$T(n) = c + 2 * (c + 2 * T(n-2)) = 3 * c + 4 * T(n-2)$
Si $n-2>0$, $n>2$	$T(n) = 7 * c + 8 * T(n-3)$
Si $n-3>0$, $n>3$	$T(n) = 15 * c + 16 * T(n-4)$
$\forall$ $n>k$	$T(n) = (2^{k+1} - 1) * c + 2^{k+1} * T(n-(k+1))$
Si $n=k+1$	$T(n) = (2^{n} - 1) * c + 2^{n} * T(0) = 2^{n} * (c + d) - c$

Entonces $T(n) \in O(2^{n})$ para la función f1

Recursión-Ejemplo f2

```
FUNCION f2 (n) : entero → entero
    SI (n = 0) ENTONCES
        retorna (0)
    SINO
        retorna ( 2 * f2(n-1) + n * (n+1) )
FIN
```

Relación de recurrencia:

$T(n) = d$ si $n = 0$

$T(n) = c + T(n-1)$ si $n > 0$ c,d son constantes

Recursión-Ejemplo f2

Sea

si $n = 0$	$T(n) = d$	
si $n > 0$	$T(n) = c + T(n-1)$	c,d son constantes

Si $n>0$	$T(n) = c + T(n-1)$
Si $n>1$	$T(n) = c + (c + T(n-2)) = 2 * c + T(n-2)$
Si $n>2$	$T(n) = 3 * c + T(n-3)$
Si $n>3$	$T(n) = 4 * c + T(n-4)$
$\forall$ $n>k$	$T(n) = (k+1) * c + T(n-(k+1))$
Para $n=k+1$	$T(n) = n * c + T(0) = n * c + d$

Entonces $T(n) \in O(n)$ para la función f2

Recursión-Ejemplo Multiplicar

Algoritmo de multiplicación por sumas sucesivas:

```
FUNCION M(A,B) :entero≥0 x entero>0 → entero≥0
  si B=1 entonces
          retorna ( A )
  sino
          retorna ( A + M(A,B-1) )
 FIN
```

Relación de recurrencia:

$T(A,B) = d$ si $B = 1$

$T(A,B) = c + T(A,B-1)$ si $B > 1$, c,d son constantes

Recursión-Ejemplo Multiplicar

Sea

si $B = 1$ $\quad T(A,B) = d$

si $B > 1$ $\quad T(A,B) = c + T(A,B-1)$, $\quad$ c,d son constantes

Si $B>1$ $\quad T(A,B) = c + T(A,B-1)$

Si $B-1>1$, $B>2$ $\quad T(A,B-1) = c + T(A,B-2)$, $\quad T(A,B) = 2*c + T(A,B-2)$

Si $B-2>1$, $B>3$ $\quad T(A,B-2) = c + T(A,B-3)$, $\quad T(A,B) = 3*c + T(A,B-3)$

$\forall$ $B>k$ $\quad T(A,B) = k*c + T(A,B-k)$

Para $B=k+1$ $\quad T(A,B) = (B-1)*c + T(A,1) = B*c-c+d$

Entonces $T(A,B) \in O(B)$ para la función M

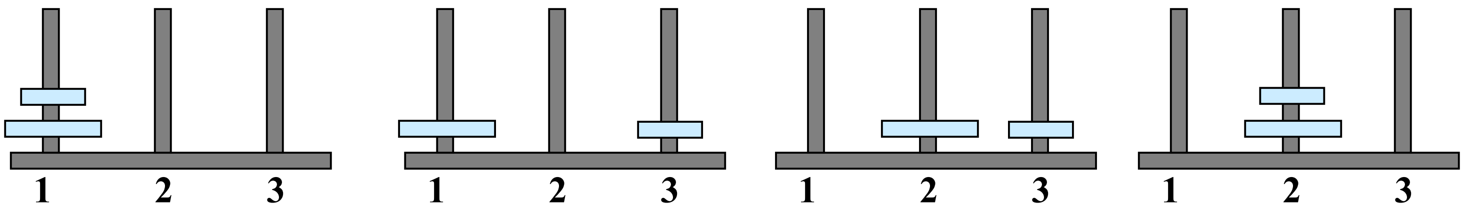
Recursión-Ejemplo Torres Hanoi

Torres de Hanoi (Édouard Lucas-1883)

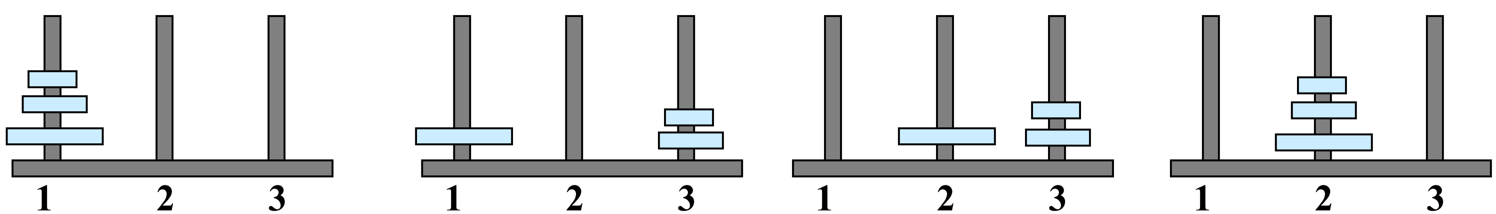
Recursión-Ejemplo Torres Hanoi

Problema de las Torres de Hanoi.

2 anillos: 3 movimientos



3 anillos: 7 movimientos



Recursión-Ejemplo Torres Hanoi

FUNCION **Hanoi** (*n* , *i* , *j*)

Entrada:

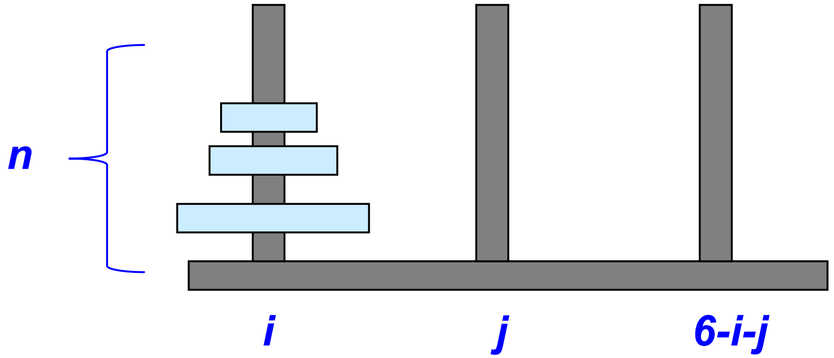
n : cantidad de anillos a mover

i : torre origen con valores : 1,2,3

j : torre destino con valores : 1,2,3

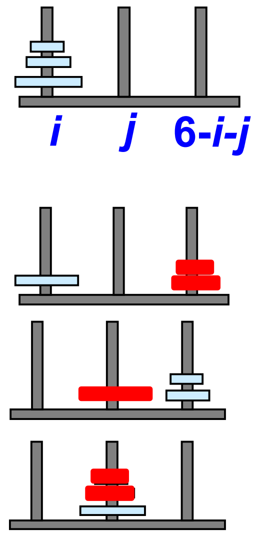
Auxiliar:

6-i-j : torre auxiliar con valores : 1,2,3



Recursión-Ejemplo Torres Hanoi

```
FUNCION Hanoi ( n , i , j )
// mueve n anillos de la torre origen i  al destino j
   SI  n > 0 ENTONCES
       Hanoi ( n-1 , i , 6-i-j )
       Escribir ( se mueve un disco de i → j )
       Hanoi ( n-1 , 6-i-j , j )
   FIN
```



Cuántos movimientos hace este algoritmo para ***n*** discos?

Recursión-Ejemplo Torres Hanoi

Sea M(n) el numero de movimiento que se realizan en el algoritmo:

$M(n) = 0$ si $n=0$

$M(n) = 2\ M(n-1) + 1$ si $n>0$

Desarrollando se puede obtener que: **$M(n) = 2^n - 1$**

Entonces el algoritmo HANOI tiene un tiempo ϵ **$O(2^n)$.**

Si n=64 discos:

numero de movimientos = $2^{64}-1$= 18.446.744.073.709.551.615≈1.84×10^{19}

si se hace 1 movimiento / segundo durante las 24 hs del día,

1 año = 31536000 segundos

Tiempo Total = 585.000.000.000 = **$5.8\ 10^{11}$ años**

Recursión

Planteos:

- Se puede remover la recursión de un algoritmo y transformarlo en iterativo?
- Es una técnica eficiente la recursión ?
- Cuando conviene usarla ?
- Cuando no se debe usar ?

Divide & Conquer

Es una metodología ***top-down*** ya que resuelve los problemas de una manera *descendente* en 2 etapas:

1. ***Divide:*** división en problemas mas chicos que se resuelven en forma independiente

2. ***Conquer:*** la solución del problema original se forma combinando la solución de los problemas más chicos.

- Generalmente se usa la ***recursión*** en las implementaciones de estos algoritmos, aunque puede aplicarse también de manera ***iterativa***.

Divide & Conquer

```
ALGORITMO : D&C

ENTRADA:      x (problema)
SALIDA:       y (solución)

P1.     SI  x es "suficientemente chico" ENTONCES
                aplicar un algoritmo básico para x
        SINO
                Descomponer x en instancias mas chicas (x1, x2, …, xk)
                PARA    i=1,k     HACER
                        yi ← D&C(xi)
                Combinar los  (y1, y2, …, yk) para obtener la solucion y.
P2.     FIN
```

Divide & Conquer-Ejemplo x^n

Ejemplo: calcular x^n, cuando n es un entero positivo o nulo y x es un numero real.

1) pot1 : algoritmo usando iteración: x*x*x….x (n veces)
2) Pot2 : Algoritmo usando recursión: $x^0=1$, $x^n=x*x^{n-1}$,$n\geq1$

3) Algoritmo usando: *divide & conquer + recursión + balance*

Se define x^n en función de $x^{n/2}$

$$x^0 = 1$$

$$x^n = x^{n/2} * x^{n/2} \qquad \text{si } n \geq 2 \text{ es par}$$

$$x^n = x * x^{(n-1)/2} * x^{(n-1)/2} \qquad \text{si } n \geq 1 \text{ es impar}$$

Divide & Conquer-Ejemplo x^n

Algoritmo usando: recursion + divide & conquer + balance.

```
FUNCION pot3(x,n) : real x entero ≥0 → real
        SI n=0 ENTONCES
                RETORNA (1)
        SINO
                SI n es par ENTONCES
                        RETORNA ( pot3(x*x, n/2))
                SINO
                        RETORNA ( x * pot3(x*x, (n-1)/2))
 FIN
```

- La complejidad de pot3 ϵ **$O(\log_2 n)$**

Divide & Conquer-Ejemplo **BB**

Dado un arreglo ordenado A[1..n] buscar un dado x por el método de Búsqueda Binaria.

La **búsqueda binaria**, también conocida como **búsqueda dicotómica**, o **búsqueda logarítmica**, determina la pertenencia y/o encuentra la posición de un dado valor en un arreglo ordenado.

Durante este proceso va comparando el valor dado con el elemento x en la posición del medio del arreglo,

- Si *x coincide con el elemento del medio*: listo, lo encontró.
- Si *x es menor* que el del medio: continua con la parte izquierda del arreglo.
- Si *x es mayor* que el del medio: continua con la mitad derecha.
- Así sigue hasta que lo encuentre o se crucen los índices.

Ejemplo de D&C: **búsqueda binaria iterativa en A ordenado**

```
FUNCION BBinariaITER(buscado,A,n) : entero x arreglo x entero → bool

P1.     inferior ← 1

P2.     superior ← n

P3.     MIENTRAS (inferior ≤ superior) HACER

                medio ← ( inferior + superior ) / 2

                SI buscado = A[medio] ENTONCES

                        Retorna Verdadero

                SINO SI  buscado < A[medio] ENTONCES

                        superior ← medio – 1

                SINO    // buscado > A[medio]

                        inferior ← medio + 1

P4.     Retorna Falso

P5.     FIN
```

Divide & Conquer-Ejemplo **BB**

Dado un arreglo ordenado A[1..n] buscar un dato buscado por el método de Búsqueda Binaria.

Ejemplo: n=8 buscado=46

A=	**[5**	**11**	**23**	**35**	**46**	**62**	**79**	**94]**
inferior=1		superior=8		medio=4		A[4]=35**<buscado**		
A=	[5	11	23	35	**46**	**62**	**79**	**94]**
inferior=5		superior=8		medio=6		A[6]=62**>buscado**		
A=	[5	11	23	35	**46**	62	79	94]
inferior=5		superior=5		medio=5		A[5]=**46=buscado**		

→ encontrado, índice=5

Divide & Conquer-Ejemplo **BB**

Dado un arreglo ordenado A[1..n] buscar un dato buscado por el método de Búsqueda Binaria.

Ejemplo: n=8 buscado=13

A=	**[5**	**11**	**23**	**35**	**46**	**62**	**79**	**94]**

inferior=1 superior=8 medio=4 A[4]=35**>buscado**

A=	**[5**	**11**	**23**	35	46	62	79	94**]**

inferior=1 superior=3 medio=2 A[2]=11**<buscado**

A=	**[**5	11	**23**	35	46	62	79	94**]**

inferior=3 superior=3 medio=3 A[3]=23**>buscado**

inferior=3 superior=2 → se cruzan los índices

→ NOT encontrado, índice= -1

Ejemplo de D&C: **búsqueda binaria recursiva en A ordenado**

```
FUNCION BBinariaR(buscado,A,inferior,superior)
                      : entero x arreglo x entero x entero → bool
P1.    medio ← (inferior + superior) / 2
P2.    SI inferior > superior ENTONCES
              Retorna Falso
       SINO SI buscado = A[medio] ENTONCES
              Retorna Verdadero
       SINO SI buscado < A[medio] ENTONCES
              Retorna BBinariaR(buscado,A,inferior,medio-1)
       SINO   // buscado > A[medio]
              Retorna BBinariaR(buscado,A,medio+1,superior)
P3.    FIN
```

Divide & Conquer

Tiempo de ejecución:

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

Teorema: la solución de la ecuación:

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

donde $c \geq 0$ real, $a \geq 1$ real, $b \geq 2$ entero y $k \geq 0$ entero, es:

- $T(n) = O(n^{\log_b a})$ si $a > b^k$
- $T(n) = O(n^k \log_b n)$ si $a = b^k$
- $T(n) = O(n^k)$ si $a < b^k$

Divide & Conquer

Se aplica el Teorema: $T(n)= a\ T(n/b) + c\ n^k$

- $T(n) = O\ (n^{logba})$ si $a > b^k$
- $T(n) = O\ (n^k \log_b n)$ si $a = b^k$
- $T(n) = O\ (n^k)$ si $a < b^k$

Para estimar el **tiempo de ejecución de Búsqueda binaria**:

$a=1$, $b=2$, $k=0$ entonces: $a = b^k$

la solución de la ecuación según el teorema es entonces:

$T(n) = O\ (n^k \log_b n)$

→ $\boldsymbol{T(n) \in O\ (\log_2 n)}$ para la búsqueda binaria

Programación Dinámica

- Es una ***técnica ascendente*** ***(bottom up)***

- Comienza con los casos más pequeños.

- Combinando soluciones, va obteniendo soluciones para los casos cada vez mayores, hasta que finalmente llega a la solución del problema original.

- Forma una tabla de resultados de subproblemas para alcanzar la solución del problema.

- No recalcula.

Programación Dinámica

- La mayor aplicación de la Programación Dinámica es en la resolución de ***problemas de optimización***.
- En este tipo de problemas se pueden presentar distintas soluciones, cada una con un valor, y lo que se busca es encontrar la solución de valor óptimo (máximo o mínimo).
- La solución de problemas mediante esta técnica se basa en el llamado principio de optimalidad enunciado por *Bellman en 1957* que dice:

“***En una secuencia de decisiones óptima toda subsecuencia ha de ser también óptima***”.

Programación Dinámica - Ejemplo

Leonardo Fibonacci (1170-1240), llamado Leonardo Pisano, matemático italiano que realizó importantes aportes en los campos matemáticos del álgebra y la teoría de números.

Descubrió la sucesión llamada de Fibonacci **:** 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

Los términos se pueden definir por la siguiente recurrencia:

$$f_0 = 0 \quad , \quad f_1 = 1 \quad ,$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2$$

A cada término de esta sucesión se le denomina número de Fibonacci.

Programación Dinámica – Ej. Fib1

El algoritmo obtenido directamente de la definición es ***recursivo:***

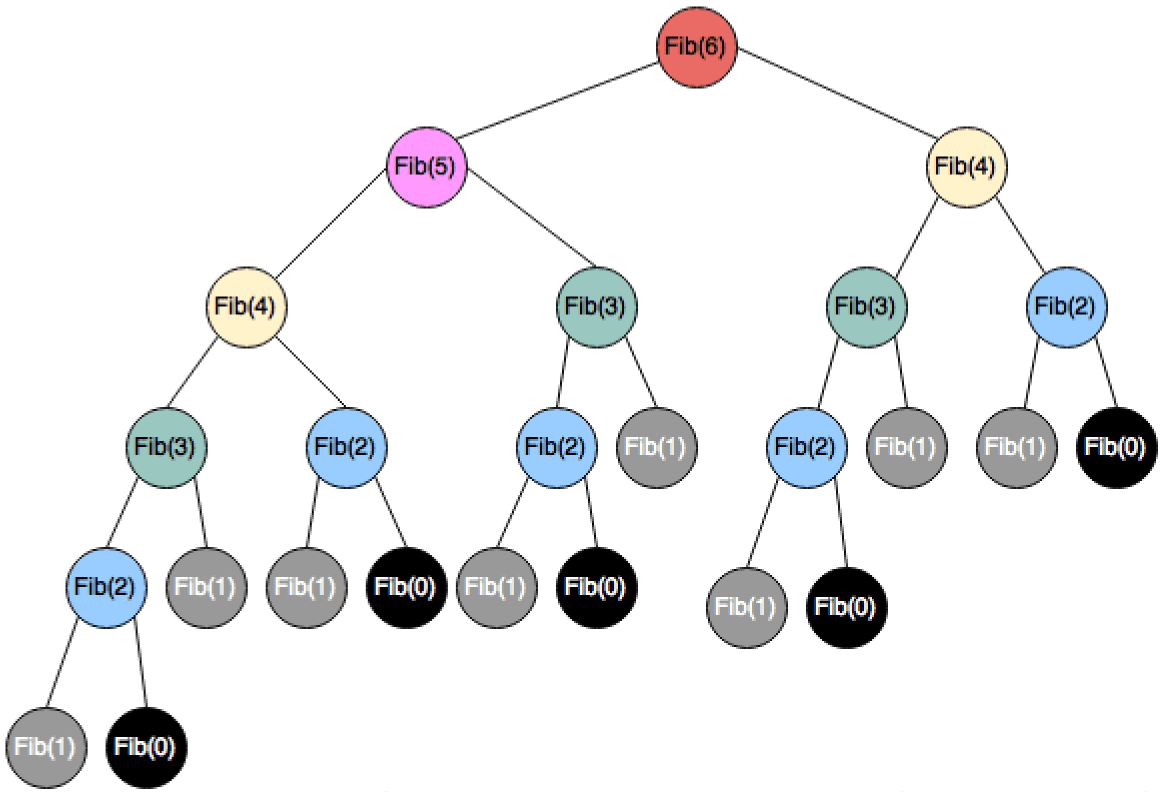
```
FUNCION Fib1 (n) :entero≥0 → entero≥0
    SI  n < 2  ENTONCES
        retorna(n)
    SINO
        retorna Fib1(n-1) + Fib1(n-2)
FIN
```

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad T(n) \in O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = O(1.618^n)$$

- Fib1 es un algoritmo exponencial en tiempo de ejecución.

Programación Dinámica – Ej. Fib1

Por ejemplo para Fib1(6)=8 se genera el siguiente árbol de llamadas:



Cabe destacar que se puede plantear otros algoritmos mucho mas eficientes que Fib1.

Programación Dinámica – Ej. Fib2

El planteo de ***programación dinámica*** para el calculo directo de la secuencia de Fibonacci hace el almacenamiento en solo 2 variables (i,j).

```
FUNCION Fib2 (n) : entero≥0 → entero≥0
    i ← 1
    j ← 0
    PARA k = 1,n HACER
                j ← i + j;
                i← j - i;
    retorna(j)
FIN
```

- El algoritmo Fib2 tiene tiempo de orden lineal: **O(n).**

Programación Dinámica – Ej. Fib3

El tercer algoritmo un poco más sofisticado, usa unas cuantas variables auxiliares

```
FUNCION Fib3(n) : entero≥0 → entero≥0
    i ← 1; j ← 0; k ← 0; h ← 1;
    MIENTRAS n>0 HACER
        SI n es impar ENTONCES
            t ← j*h;
            j ←i*h+j*k+t;
            i ←i*k+t;
        t ← h*h;
        h ←2*k*h+t;
        k ←k*k+t;
        n  ← n / 2;
    Retorna(j)
FIN
```

- El algoritmo Fib3 tiene tiempo de orden **O(log $_2$ n)**