Programador Universitario
Licenciatura en Informática
Ingenieria en Informática

METODOS NUMERICOS I
(P10)

Unidad II - SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Las ecuaciones no lineales son de gran aplicación tanto en temas científicos como en tecnológicos ya que en general los problemas físicos son de naturaleza no lineal
Una ecuación no lineal es de la forma ***f(x) = 0*** ,para un valor desconocido de ***x*** , y no se puede representar con una recta.

Algunos problemas de aplicación de ecuaciones no lineales son:

- La óptica no lineal
- El sistema del clima terrestre
- La relatividad general
- Movimiento de un robot tipo uniciclo
- Gestión de las organizaciones
- Teoría del Caos
- Ecuaciones de Navier Stokes (dinámica de los fluidos)
- Etc..

Unidad II - ***SOLUCIÓN DE* ECUACIONES *NO LINEALES***

Contenido

- Solución de ecuaciones no lineales
- Métodos de intervalo: Bisección, Régula Falsi
- Métodos abiertos: Secante, Newton. Iteración de Punto Fijo. Análisis de convergencia
- Método de Aitken. Método de Steffensen
- Cálculo de ceros de polinomios: método de Newton, método de Müller. Análisis de la convergencia

SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

Dada una función continua $\boldsymbol{f(x)}$, se quiere encontrar el valor x_0 de x, para el cual $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$; los x_0 para los que se cumple $f(x_0) = 0$ se denominan raíces o solución de la ecuación o ceros .

Problema a resolver: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Por ejemplo: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$3x^{10} - 9x^8 - 15x^5 + 4x^3 - x^2 = 0$$

$$\cos(x) - x = 0$$

$$x(x - 43)^{1/2} = \ln(x)$$

$$16x^2 - k = e^x$$

Clasificación de Métodos

$\boxed{\Re}$

De intervalo	Abiertos	Gráfico
M. Bisección	M. Secante	
M. Regula Falsi	M. Newton Raphson	
	M. Iteración de Punto Fijo	
	M. Müller	

Método Gráfico

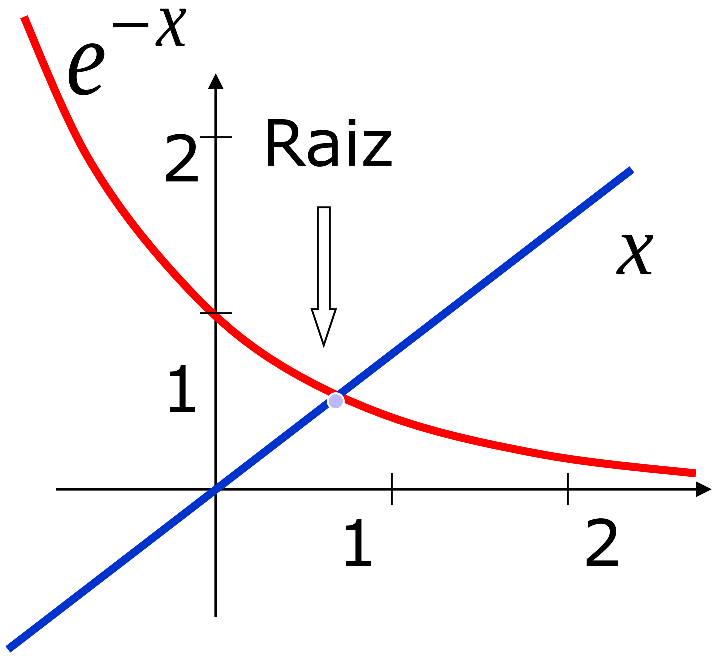
Es útil para estimar un valor inicial que sirve de "arranque " a otros métodos.

Ej: Dada la ecuación:

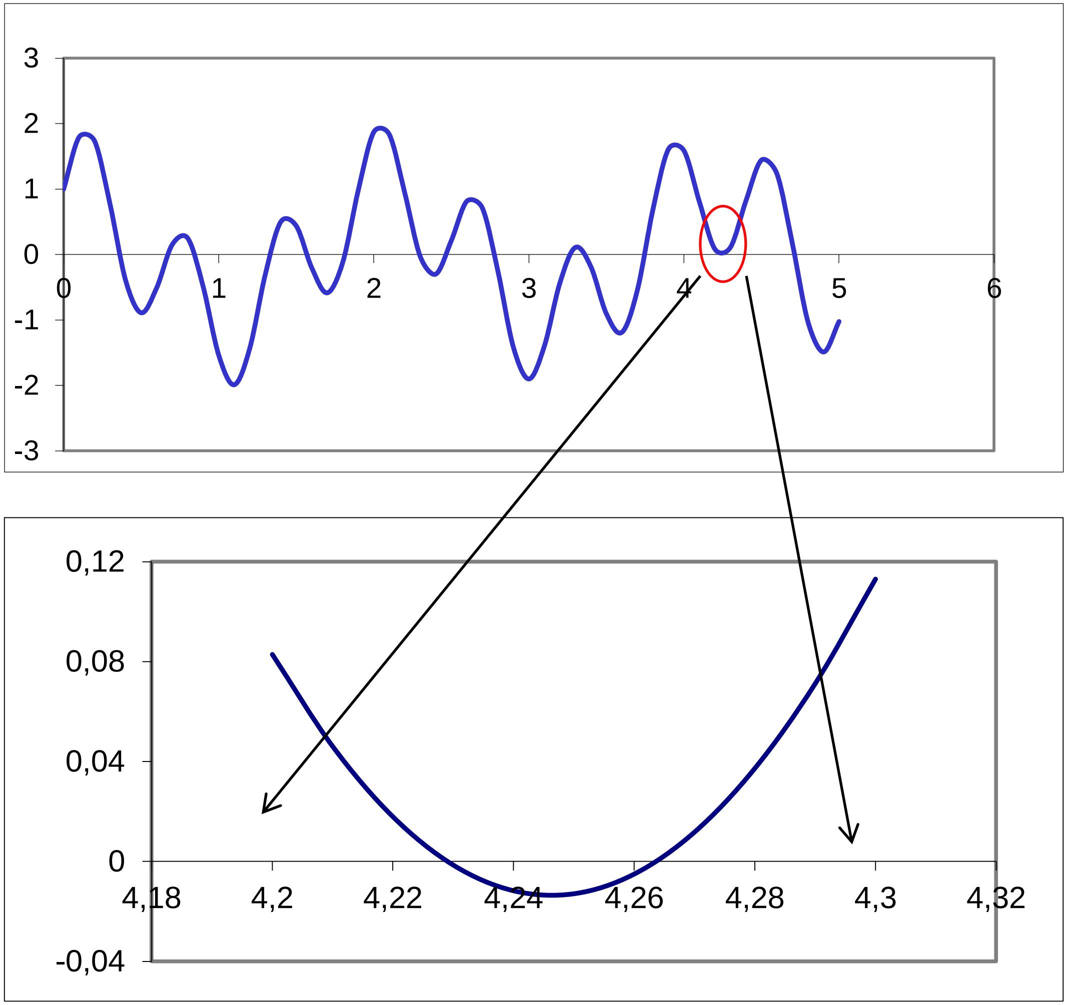
$$x = e^{-x}$$

Tiene una raiz en $[0,1]$

$$x \approx 0.6$$



Ej: $f(x) = \text{sen } 10x + \cos 3x$



Teorema del Valor Intermedio

Sea f : [a, b] → R una función continua, y si K es un numero entre f(a) y f(b) entonces ∃ un punto c ∈ (a, b) para el cual f(c) = K.

Teorema de Bolzano

Sea f : [a, b] → R una función continua, y si f(a) f(b) < 0,entonces ∃ un punto c ∈ (a, b) para el cual f(c) = 0.

Teorema de Weierstrass

Sea f : [a,b] → R una función continua, con a < b , entonces, el intervalo f ([a,b]) es cerrado y acotado.

Esto equivale a: toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo

Convergencia

Definición: $\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = x$

Dada una secuencia $x_1, x_2, \ldots x_n$, se dice que converge a x si para $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n > N$

Los métodos que veremos son en general procesos iterativos que esperamos den valores convergentes al valor buscado

Criterios de Convergencia

$$\left.\begin{array}{l} |\, f(x_n) \,| < \varepsilon \\ \\ |\, x_n - x_{n-1} \,| < \varepsilon \\ \\ \dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|\, x_n \,|} < \varepsilon \end{array}\right\} + \text{iter} < \text{max}$$

si no converge

METODO DE BISECCION

Este es uno de los métodos mas simples para calcular el cero de una función, se llama también de búsqueda binaria

Sea $f(x):[a,b] \longrightarrow R$, continua y suponiendo $f(a)*f(b) <0$, entonces por T.V.I. $\exists$ al menos un p en [a,b] / $f(p) = 0$.

El método consiste en dividir a la mitad el intervalo y localizar la mitad que contiene a p.

El proceso se repite hasta lograr la precisión deseada

METODO DE BISECCION

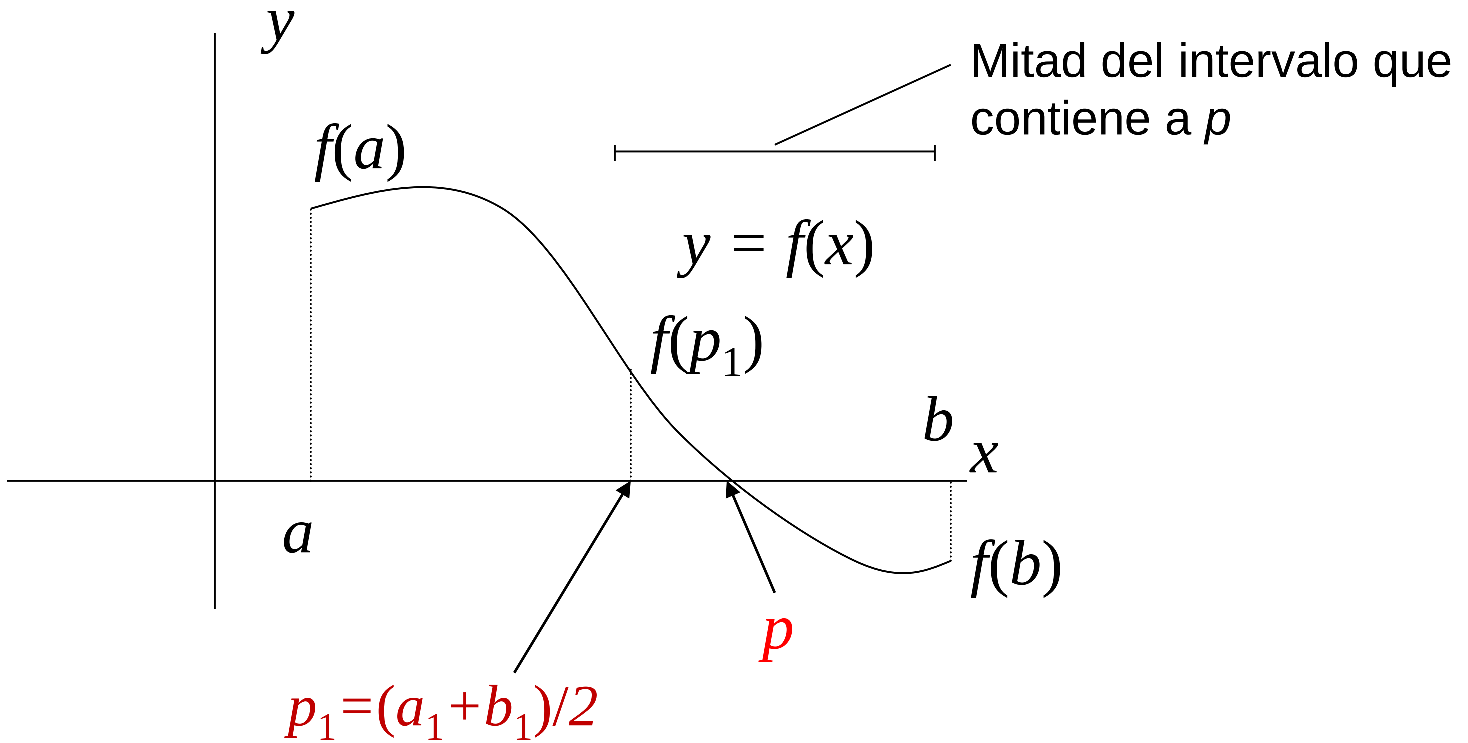
1era iteración

Sea a1 = a , b1 = b p1 = (a1+b1) /2

si f(p1) = 0 entonces p = p1

si f(p1)*f(a1) < 0 entonces a2 = a1 y b2 = p1

si f(p1)*f(b1) < 0 entonces a2 = p1 y b2 = b1



METODO DE BISECCION

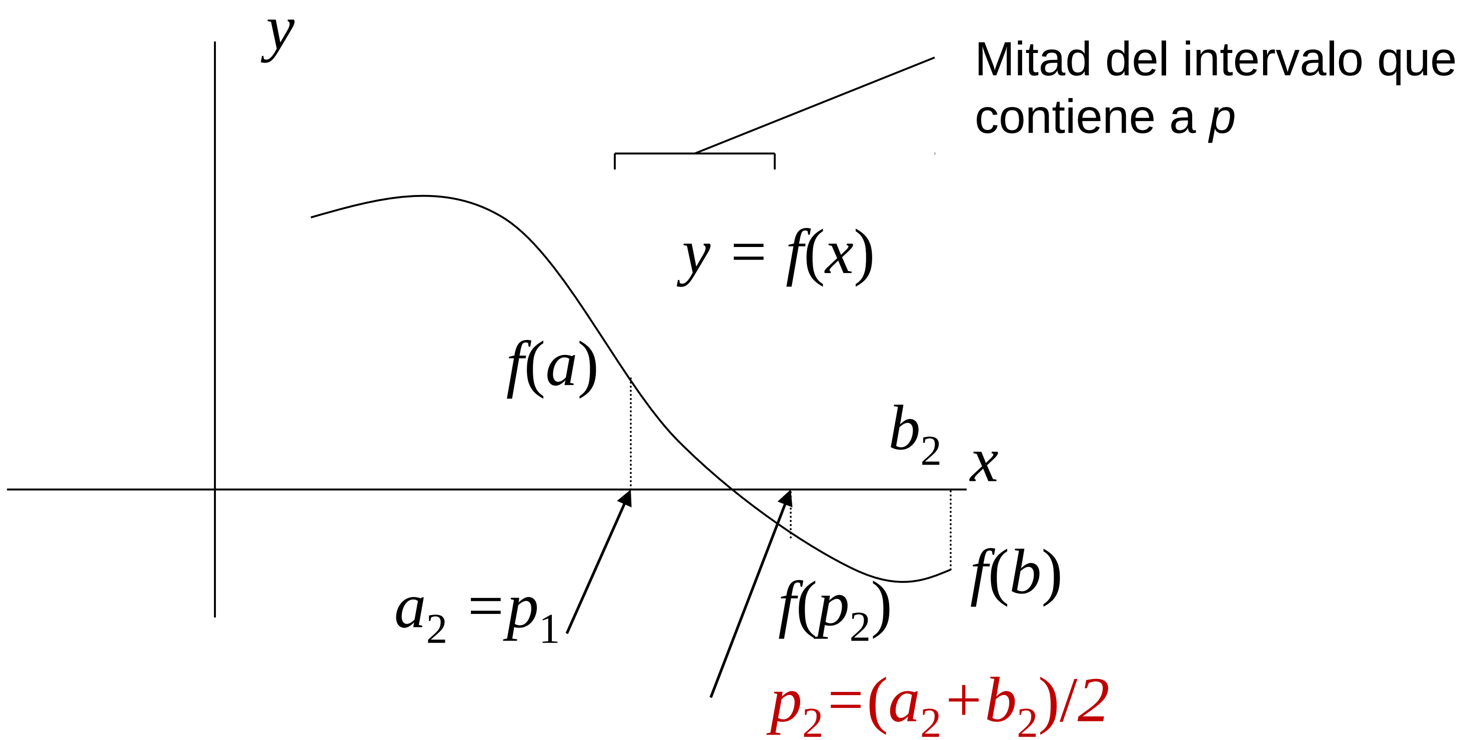
2da iteración

calculamos $p2 = (a2+b2)/2$

si $f(p2) = 0$ entonces $p = p2$

si $f(p2)*f(a2) < 0$ entonces $a3 = a2$ y $b3 = p2$

si $f(p2)*f(b2) < 0$ entonces $a3 = p2$ y $b3 = b2$



ALGORITMO DE BISECCION

ENTRADA: a, b , Eps: real; max: entero
SALIDA : p : real o mensaje
VARIABLES: iter: entero

PASO1 : iter = 1; p $\leftarrow$ (a + b) / 2
PASO2 : MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|f(p)| >$ Eps)
iter $\leftarrow$ iter +1
SI f(a)*f(p) > 0 entonces
a $\leftarrow$ p
SINO
b $\leftarrow$ p
p $\leftarrow$ (a + b) / 2
PASO3 : SI (iter > max) ENTONCES
ESCRIBIR (´No converge en, max, iter.’)
SINO
ESCRIBIR(´Raiz =´, p)
PASO4: PARAR

Ej. Calcular el cero de la ecuación $\cos x = x$ en [0.5, 0.9] con un error < 0.05

A fin de aplicar el método de intervalo

Reescribimos la ecuación: $x - \cos(x) = 0$

Obtenemos la función $f(x) = x - \cos(x)$, continua $\forall$ R

siendo $f(0.5) < 0$, $f(0.9) > 0$, signos opuestos

$\rightarrow \exists \ \alpha \in [0.5, 0.9]$ tal que $f(\alpha) = 0$

Teorema error absoluto máximo del Método de Bisección

Sea $f(x):[a,b] \longrightarrow R$, continua y suponiendo $f(a)*f(b) < 0$.
Entonces por T.V.I. $\exists$ al menos un p en $[a,b]$ / $f(p) = 0$.
Sea p_n, n=0,1; .. la sucesión de aproximaciones obtenidas con el Método de Bisección y sea $e_n = |p - p_n|$, para n = 0, 1,..

Entonces:

$$e_n \leq (b-a) / 2^{n+1}$$

METODO DE BISECCION

Ventajas:

- Siempre converge.
- Útil como aproximación inicial de otros métodos.

Desventajas:

- No tiene en cuenta los valores de la función en los cálculos que realiza, solo tiene en cuenta el signo de $f(x)$, por lo que si una aproximación intermedia es mejor que la respuesta final, se pierde.
- Convergencia lenta.

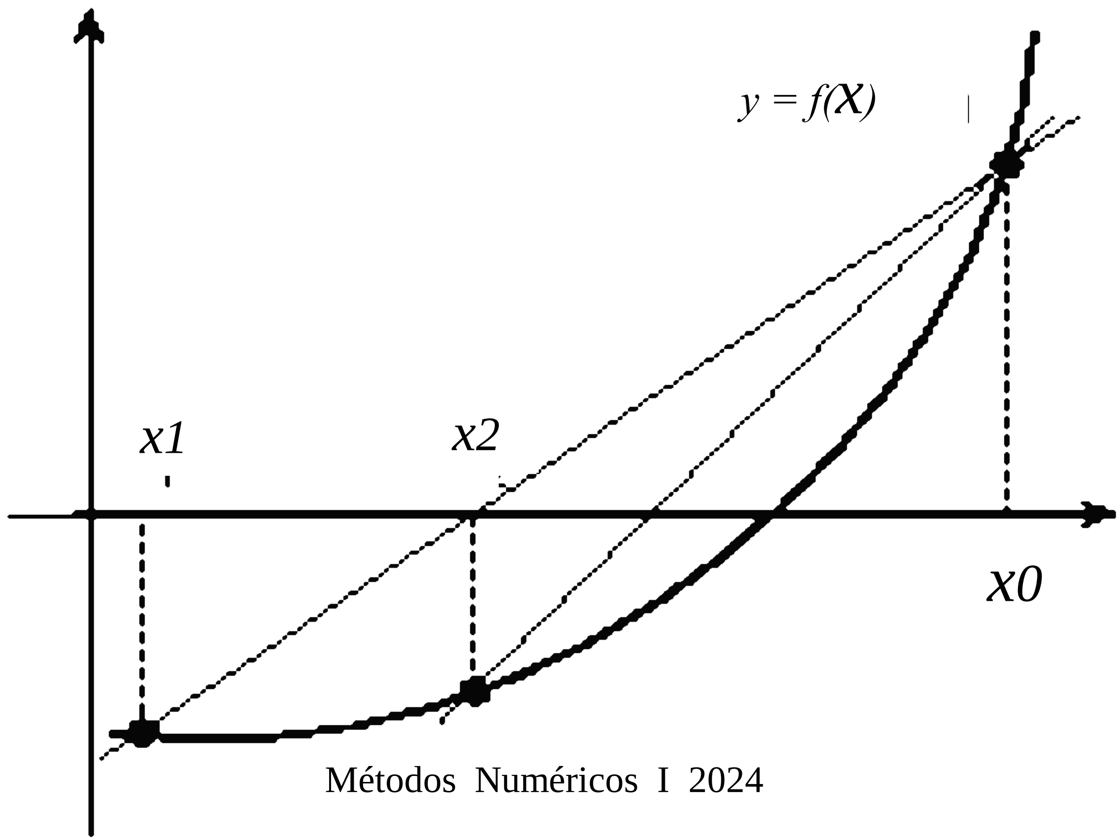
METODO REGULA FALSI

Este método trabaja en forma similar a bisección, pero calcula la aproximación a la raíz con la intersección de la recta que pasa por los extremos del intervalo con el eje.

Sea f(x): $[a,b] \longrightarrow R$, f continua y supongamos que $f(a)*f(b) < 0$.

Entonces por T.V.I $\exists$ al menos un x en [a,b], tal que $f(x) = 0$.

Considerando $x_0 = a$ y $x_1 = b$



MÉTODO REGULA FALSI

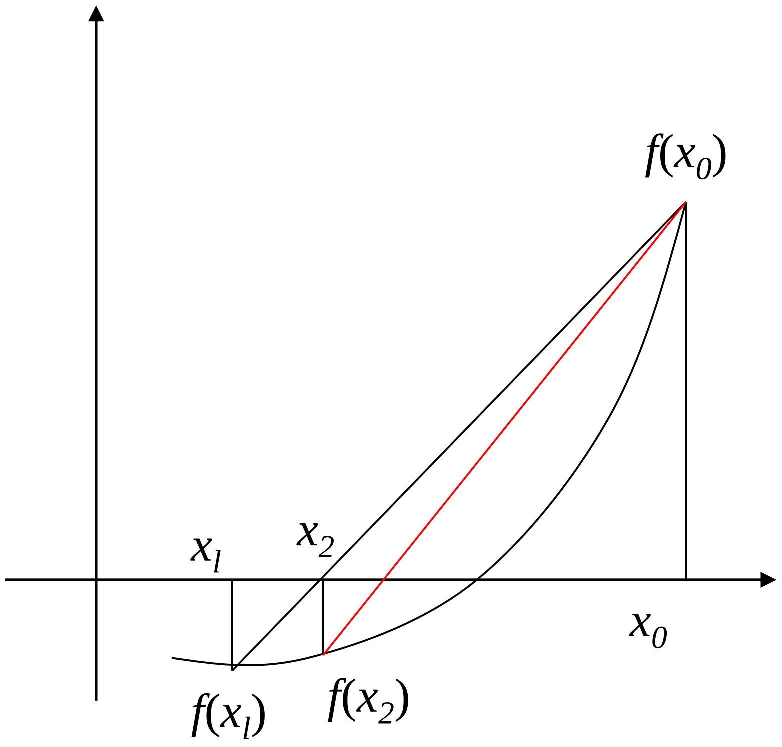
Este método considera cual límite del intervalo está más próximo a la raíz.

Si observamos la figura

$$\frac{f(x_l)}{x_2 - x_l} = \frac{f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Por lo tanto:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_l - x_0)}{f(x_l) - f(x_0)}$$

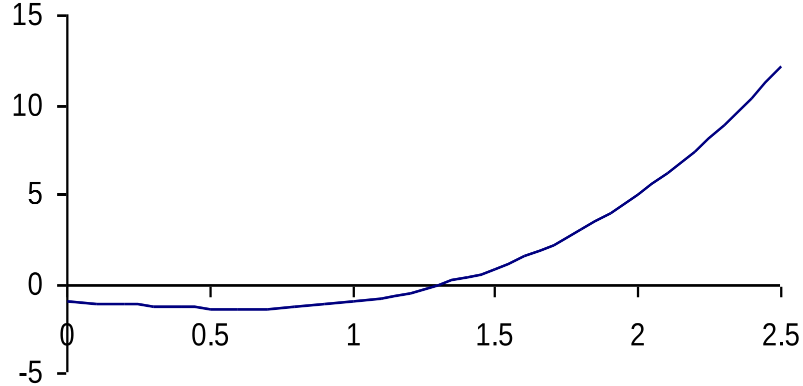


ALGORITMO REGULA FALSI

ENTRADA: a, b , Eps: real; max: entero
SALIDA : x : real o mensaje
VARIABLES: iter: entero

PASO1 : iter = 1; $x \leftarrow b - f(b)(b - a) / (f(b)-f(a))$
PASO2 : MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|f(x)|$ > Eps)
iter $\leftarrow$ iter +1
SI $f(a)*f(x)$ > 0 entonces
$a \leftarrow x$
SINO
$b \leftarrow x$
$x \leftarrow b - f(b)(b - a) / (f(b)-f(a))$
PASO3 : SI (iter > max) ENTONCES
ESCRIBIR (´No converge en, max, iter.)
SINO
ESCRIBIR(´Raiz =´, x)
PASO4: PARAR

Ejemplo: $f(x) = x^3 - x - 1$ en [1,2]



Método de Bisección:

$a_{20} = 1.3247175$ $f(a_{20}) = -1.857.\ 10^{-6}$

$b_{20} = 1.3247184$ $f(b_{20}) = 2.209.\ 10^{-6}$

Método Regula Falsi

$a_{16} = 1.3247174$ $f(a_{16}) = -1.95.\ 10^{-6}$

$b_{16} = 2$ $f(b_{16}) = 5$

METODO REGULA FALSI

Ventajas:

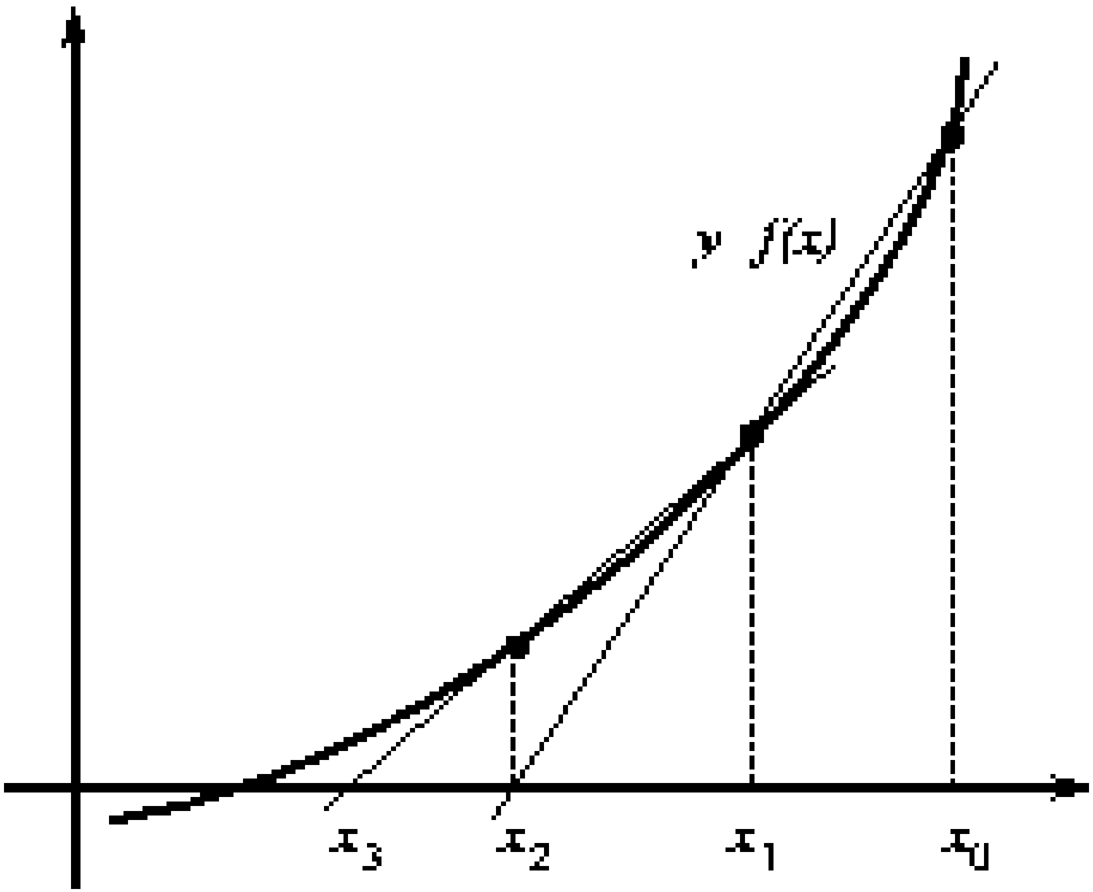
- Siempre converge.
- Útil como aproximación inicial de otros métodos
- Usa toda la información que tiene

Desventajas:

- Convergencia lenta
- Necesita un intervalo que contenga a la raíz

METODO DE LA SECANTE

Trabaja con la recta secante a la función, abandonando la acotación de la raíz.



METODO DE LA SECANTE

Dada una función $f(x)$, y dos valores iniciales x_n y x_{n-1} tal que $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ entonces el siguiente iterando se calcula:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

ALGORITMO DE LA SECANTE

ENTRADA: a, b , Eps: real; max: entero

SALIDA : x_{n+1} : real o mensaje

VARIABLES: iter: entero

PASO1 : iter $\leftarrow$ 0, $x_{n-1} \leftarrow a$, $x_n \leftarrow b$, $x_{n+1} \leftarrow 2\, x_n$

PASO2 : MIENTRAS ($|x_{n+1} - x_n|$ > Eps $\wedge$ iter $\leq$ max)

$x_{n+1} \leftarrow x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1}) / (f(x_n)-f(x_{n-1}))$

$x_{n-1} \leftarrow x_n$

$x_n \leftarrow x_{n+1}$

iter $\leftarrow$ iter +1

PASO3 : SI (iter > max) ENTONCES

ESCRIBIR (´No converge en, max, iteraciones)

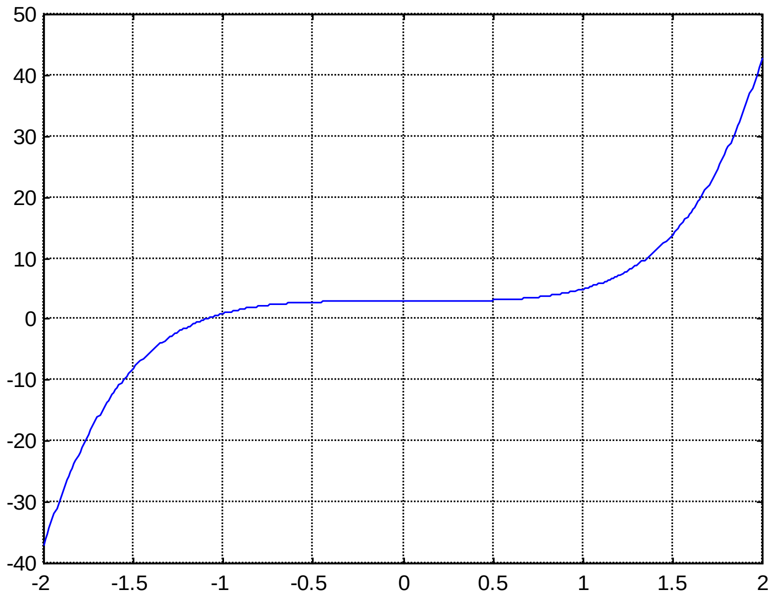
SINO

ESCRIBIR(´Raiz =´, x_{n+1})

PASO4: PARAR

Ej: Calcular la raíz de $f(x) = x^5 + x^3 + 3$ si $x_0 = -1 \quad x_1 = -1.1, \; error < 0.001$

x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062
-1.1062	0.0102	-1.1052	0.0009
-1.1052	0.0001	-1.1052	0.0000



METODO DE LA SECANTE

Ventajas:

- Es más rápido que los métodos de intervalo
- No es necesario que $f(x)$ cambie de signo en el intervalo considerado

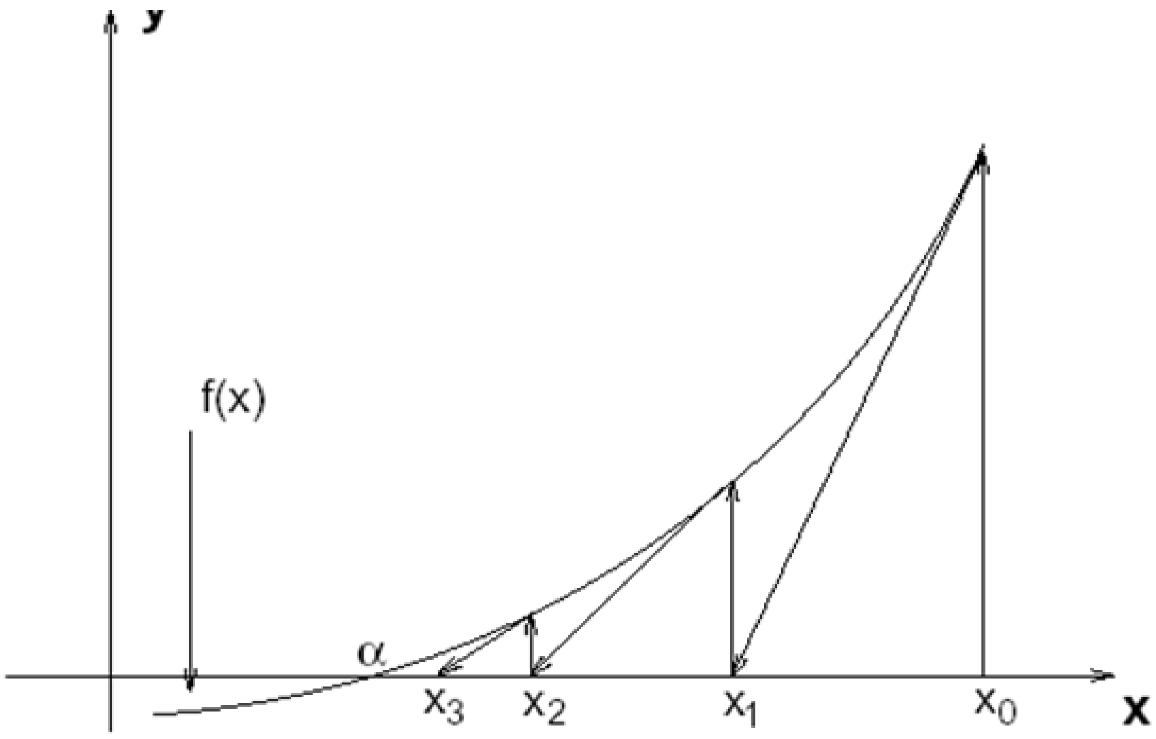
Desventajas:

- Puede diverger

METODO DE NEWTON (1642-1727) - RAPHSON

Trabaja con la pendiente de la recta tangente

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - f(x_n)\,/\,f\,'(x_n)$$



ALGORITMO DE NEWTON –RAPHSON

ENTRADA : x_0 ; Eps: real ;max: entero
SALIDA : x_1: solución o mensaje de error
VARIABLES: iter: entero

PASO 1: iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2 * \text{Eps}$
PASO2: MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $| x_1 - x_0 |$ > Eps)

$x_1 \leftarrow x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$

iter $\leftarrow$ iter+1

$x_0 \leftarrow x_1$

PASO3 : Si (iter > max) ENTONCES

ESCRIBIR ((‘No converge en, max, iteraciones’)

SINO

ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_1)

PASO4 : Parar

Ej: Calcular el cero de la fn $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ con $x_0=4$,
su derivada es: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$\textbf{Iteracion 1:} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{33}{33} = 3$$

$$\textbf{Iteracion 2:} \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \frac{9}{16} = 2.4375$$

$$\textbf{Iteracion 3:} \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.4375 - \frac{2.0369}{9.0742} = 2.2130$$

Cuál es el error cometido en cada iteración: $|x_{k+1} - x_k|$

Iteración 1 $|x_1 - x_0| = 1$

Iteración 2 $|x_2 - x_1| = 0.5625$

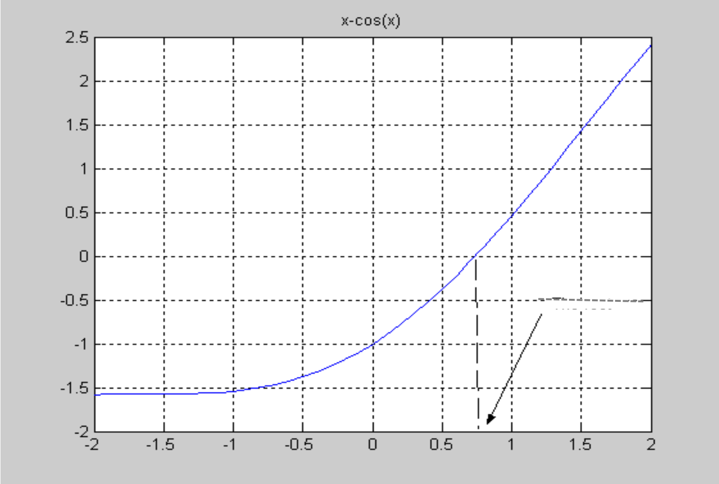
Iteración 3 $|x_3 - x_2| = 0.2245$

Cuál es el valor de x_4 y x_5 ?
y el error cometido en las iteraciónes 4 y 5?

Ej. Calcular el cero de la ecuación cos x = x con un $x_0 = 0$

$$f(x) = x - \cos(x), \quad f'(x) = 1 + sen(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - \cos(x_n))/(1 + sen(x_n))$$



Si consideramos $x_0 = 0$

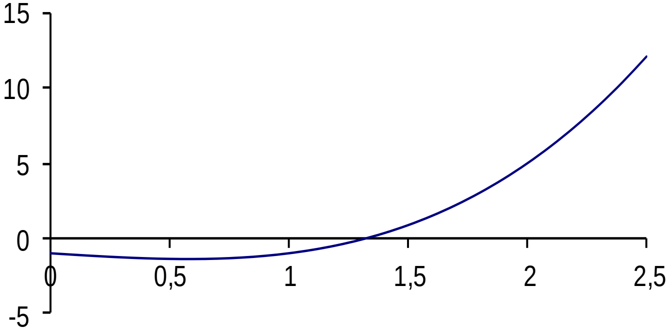
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-1	1	1
1	0.459698	1.8414	0.7503639
0.7503639	0.0189	1.6819	0.7391128
0.7391128	0.00005	1.6736	0.7390851
0.7390851	3E-10	1.6736	0.7390851

Ej: Al calcular el cero de la ecuación $\cos x = x$ trabajando con 13 dígitos de precisión, se obtiene:

- Método de Bisección ([0.6, 0.8]) 43 iteraciones
- Método de Secante ([0.6, 0.8]) 5 iteraciones
- Método de Newton (x_0=0.8) 4 iteraciones

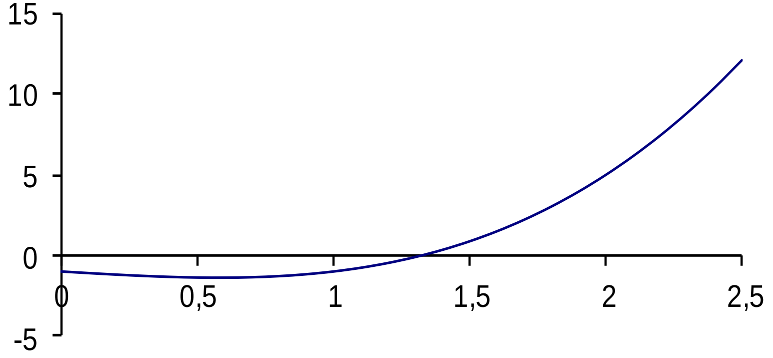
Ej: Use el método de Newton Raphson para calcular una raíz de

$$f(x) = x^3 - x - 1 \quad , x_0 = 1$$



n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Error
0	1.0000	-1.0000	2.0000	
1	1.5000	0.8750	5.7500	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	0.0005
4	1.3247	0.0000	4.2646	0.0000

Ej: $f(x) = x^3 - x - 1$ en $[1,2]$



Método de Secante

$x_0 = 1,\ x_1 = 2,$ $x_7 = 1.3247179$

$f(x_7) = 3.458.\ 10^{-8}$

Método Newton Raphson

$x_0 = 1,$ $x_4 = 1.3247181$

$f(x_4) = 9.2.\ 10^{-8}$

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Otra forma de derivar el método es a partir de serie de Taylor

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \Delta x f'(x_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_n) + \ldots$$

Si x_{n+1} es raíz entonces $f(x_{n+1}) = 0$

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$$

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Ventajas

- Velocidad de convergencia
- Permite el cálculo de raíces complejas

Desventajas

- Necesidad de conocer f ’
- Valor inicial debe ser próximo a la raíz, sino el método puede no converger

No hay un criterio general de convergencia para este método
Su convergencia depende mucho de la forma de la función.
si se puede, conviene tener una estimación gráfica de la raíz

Ej: Newton en el plano complejo

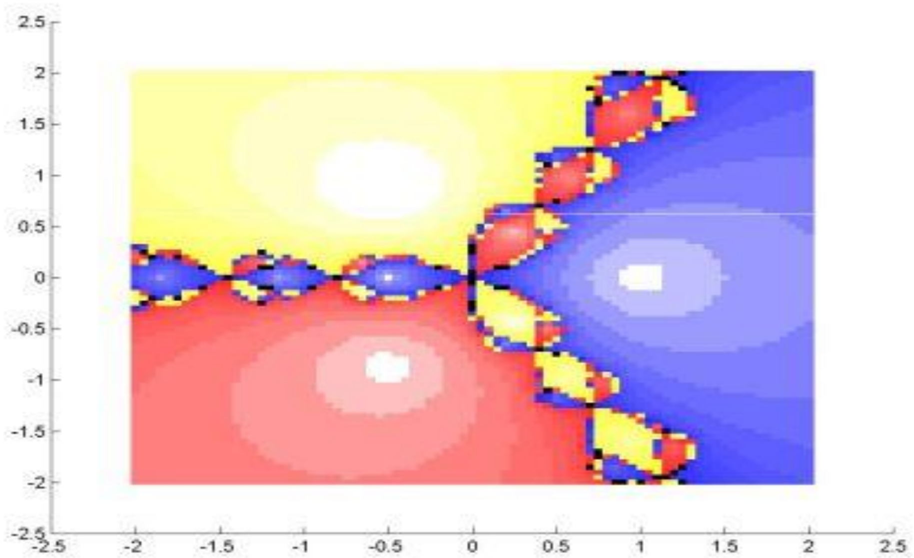
En 1879 A. Cayley enunció el sig. problema: "¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función $f(z) = z3 - 1$ convergirá el método de Newton? La propiedad básica de esta ecuación es que las soluciones de la ecuación son los puntos atrayentes (puntos fijos) de las iteraciones. Observen como las zonas de atracción de las raíces tienen una frontera común.

$$z_1 = 1$$

$$f(z) = z^3 - 1$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5000 + 0.8660i$$

$$z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5000 - 0.8660i$$

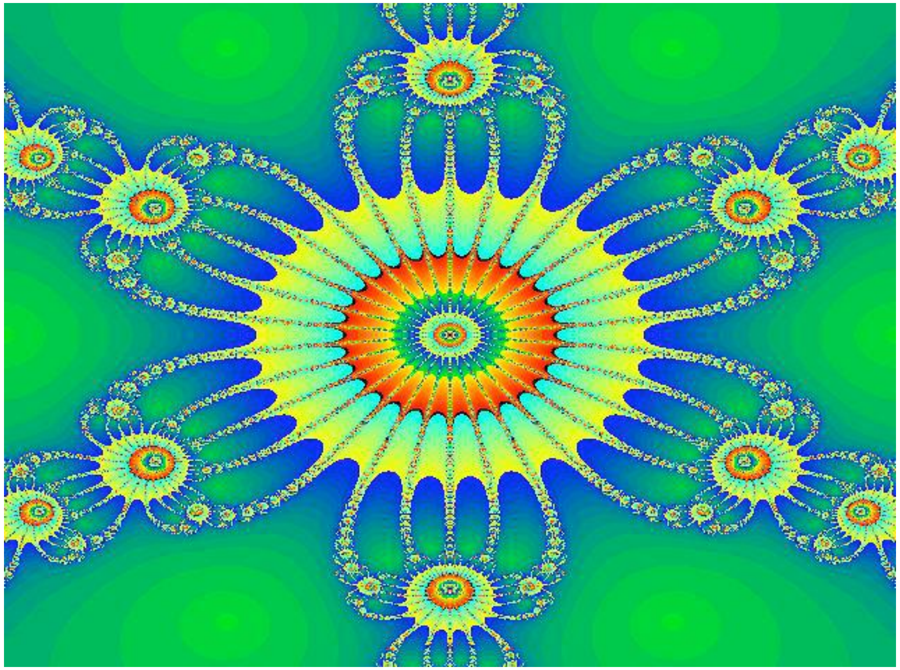


FRACTALES

Un fractal es una forma geométrica que presenta "simetría de escala". Es decir, si se aumenta cualquier zona de la misma un número cualquiera de veces seguirá pareciendo la misma figura.

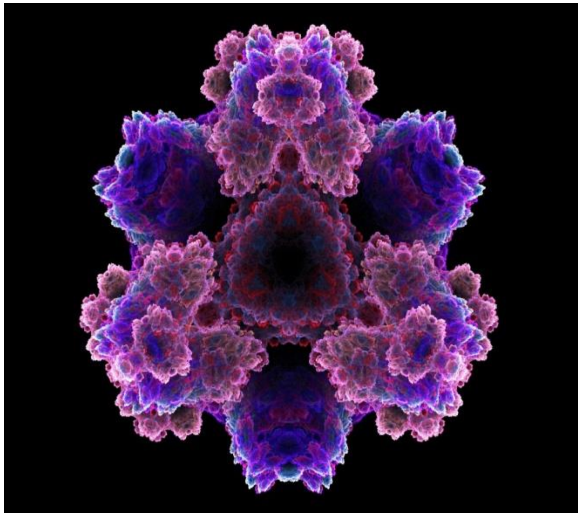
Una técnica para generar fractales se *basa en el método de NR* .
La idea es encontrar las raíces de una ecuación polinomial de la forma: $f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_m z^m=0$

Para crear una imagen mediante esta técnica se utiliza cada punto del plano como aproximación inicial, z^0, y se colorea en función de si hay o no solución



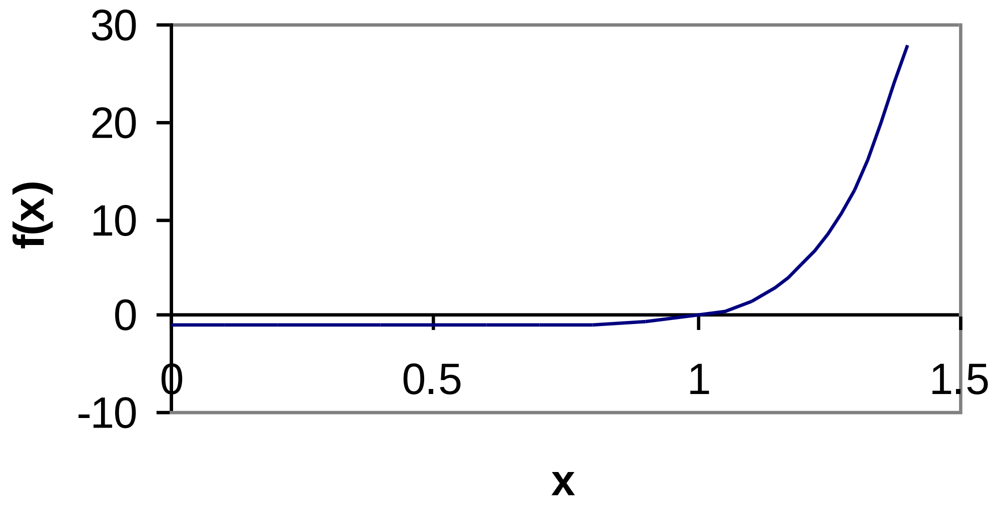
Ej. $f(z) = z^6-1 = 0$

Hay distintas formas de generar fractales matemáticamente utilizando computadoras y permiten crear imágenes de montañas, plantas, olas, etc.



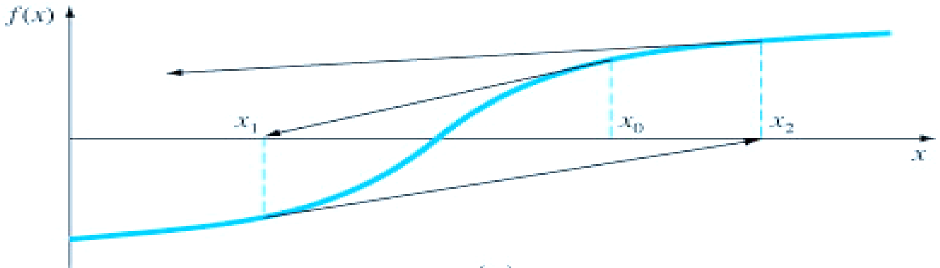
Ej.

$$f(x) = x^{10} - 1$$



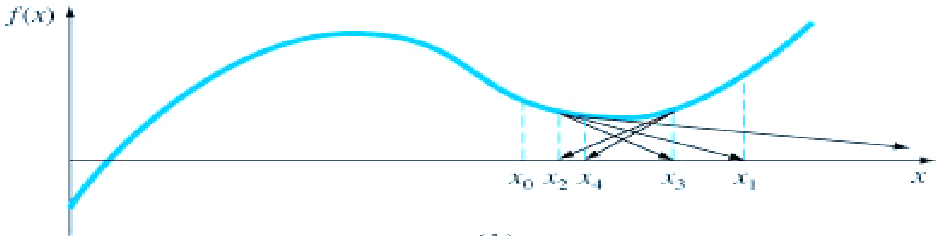
Valor inicial	Valor calculado	Iteraciones
0.5	1.0000	42
0.6	1.0000	27
0.8	1.0000	8
5	1.0000	19

Problemas al usar Newton-Raphson



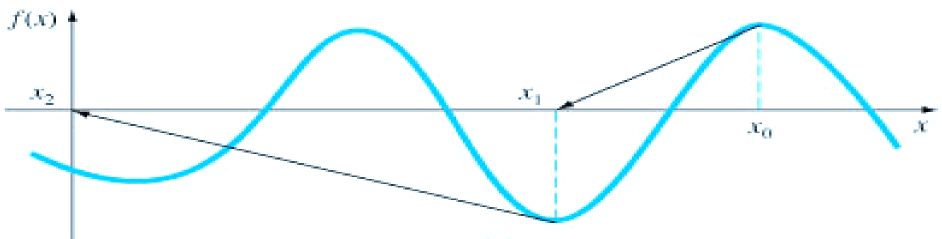
(a)

$f''(x) = 0$, divergencia



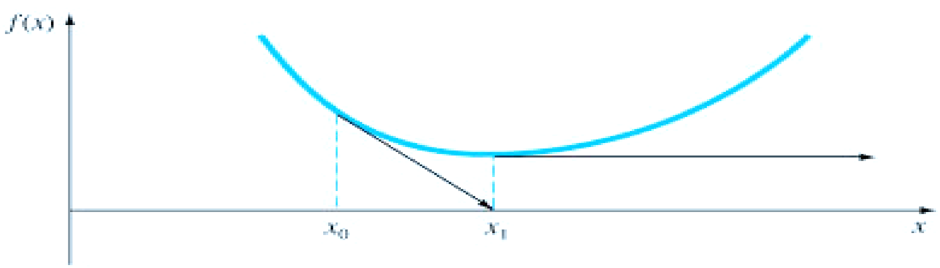
(b)

Max o min local, oscilaciones



(c)

Forma de la funcion, salta de una raiz a otra muy alejada.



(d)

Derivada 0, da error

MÉTODO DE Newton Raphson MODIFICADO

Cuando el cero de la función es de orden mayor a 2
f´(x) = 0 y Newton pierde velocidad de convergencia

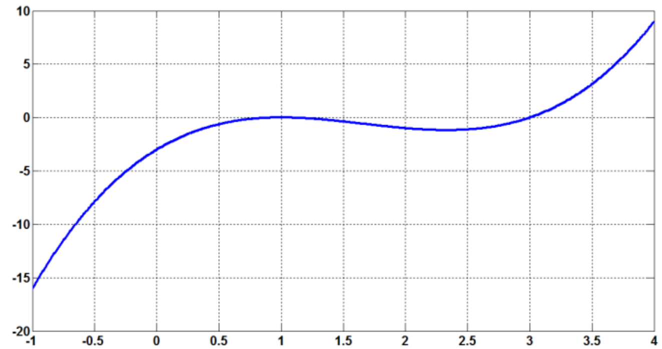
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n) \quad \approx 0$$

Se puede modificar el método de Newton a fin de reducir el orden de ese cero

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)}}$$

Si esta función de iteración verifica una condición de continuidad, entonces se conserva la convergencia cuadrática

Ejemplo:



$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$x_0 = 0$$

Newton Raphson

$$x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

Newton Raphson Modificado

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,f'(x_i)}{\left[f'(x_i)^2\right] - f(x_i)\,f''(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i)(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7)^2 - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Newton Raphson Modificado

Iter	xi
0	0
1	0.4286
2	0.6857
3	0.83286 17
4	0.91332 8.7
5	0.95578 4.4
6	0.97766 2.2

Newton-Raphson

iter	xi
0	0
1	1.10526
2	1.00308
3	1.000002

Orden lineal

Orden cuadrático