

Unidad III

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones representan problemas físicos o modelos, que involucran la interacción de muchas variables y propiedades.

Las variables en el sistema representan el estado o la respuesta del modelo, las propiedades nos dan características de estos problemas o modelos

Las ecuaciones describen las interacciones entre las variables y las propiedades.

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1$$

$$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n = b_n$$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El problema que vamos resolver es , dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1$$

$$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n = b_n$$

En forma matricial: $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Métodos directos. Métodos para matrices triangulares. Método de Eliminación de Gauss. Descomposición LU. Estrategia de pivoteo y escalamiento. Cálculo de la inversa. Métodos para matrices especiales: Cholesky, Thomas.
- Análisis del error: concepto de norma, número de condición, cotas de error. Método de los residuos.
- Métodos iterativos: Gauss Jacobi, Gauss Seidel. Método SOR. Análisis del error y la convergencia.

Algunas aplicaciones :

- Desarrollo de videojuegos, simuladores
- Programas que simulan procesos de física Newtoniana en ambientes virtuales (utilizados para que los efectos parezcan más realistas)
- Detección de colisiones y respuesta
- Simulación Dinámica
- Codificación y decodificación de mensajes
- Motores de búsqueda de páginas en internet/intranet
- Inteligencia Artificial – Aprendizaje Automático
- Modelos de clima
- Calculo de estructuras
- Procesamiento de imágenes
- Modelos económicos
- Ajuste de funciones
- Etc..

MATRICES

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se define la **matriz transpuesta** , A^T , como $[a_{ji}]$, $j=1,n; i=1,n$

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si, $A = A^T, a_{ij} = a_{ji} \forall i,j$

Una matriz cuadrada A es **ortonormal** si , $A^T A = A A^T = I$

MATRICES

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

Diremos que es **TRIANGULAR SUPERIOR** si : $a_{ij} = 0$ para $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Diremos que es **TRIANGULAR INFERIOR** si: $a_{ij} = 0$ para $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Si la matriz es cuadrada, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Teorema 1: Dada A, matriz cuadrada de orden n , los enunciados siguientes son equivalentes:

- El sistema homogéneo $Ax=0$ tiene solo la solución trivial $x=0$
- \forall miembro de la derecha, b , el sistema $Ax=b$ tiene una solución
- A es invertible

CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS

MÉTODOS DIRECTOS: Son aquellos que nos conducirían a la solución exacta luego de un número finito de operaciones elementales, si no hubiera errores de redondeo

MÉTODOS ITERATIVOS: parten de una estimación inicial x_0 y construyen una sucesión de aproximaciones, que en principio, convergen a la solución x

TIPOS DE MATRICES

MATRICES DENSAS: Son aquellas que poseen pocos elementos nulos y son de orden bajo

MATRICES RALAS(SPARSE): Son aquellas que poseen muchos ceros y son de orden alto

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Dado el sistema $Ax=b$, siendo A una matriz $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, triangular superior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando

sustitución hacia atrás

Algoritmo:

Paso 1 Calcular $x_n = b_n / a_{nn}$

Paso 2 Para $k = n-1, \dots, 1$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular superior, con $a_{ii} \neq 0 \forall i$, entonces A es invertible

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $Ax=b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $x_3 = b_3 / a_{33} = 4/4 = 1$

Paso 2 Para $k = 2, 1$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=3}^3 a_{2j} x_j}{a_{22}} = \frac{3 - a_{23} x_3}{a_{22}} = \frac{3 - 3 \cdot 1}{4} = 0$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^3 a_{1j} x_j}{a_{11}} = \frac{10 - (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)}{a_{11}} = \frac{10 - (5 \cdot 0 + 6 \cdot 1)}{2} = 2$$

$$x^t = (2, 0, 1)$$

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $Ax=b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $x_3 = b_3 / a_{33} = ?$

Paso 2 Para $k = 2, 1$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=k+1}^n a_{2j} x_j}{a_{22}} = ?$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=k+1}^n a_{1j} x_j}{a_{11}} = ?$$

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Dado el sistema $Ax=b$, siendo A una matriz $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, triangular inferior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando

sustitución hacia adelante

Algoritmo:

Paso 1 Calcular $x_1 = b_1 / a_{11}$

Paso 2 Para $k = 2, \dots, n$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular inferior, con $a_{ii} \neq 0 \forall i$, entonces A es invertible

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $Ax = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $x_1 = b_1 / a_{11} = 6/6 = 1$

Paso 2 Para $k = 2, n$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{2j}x_j}{a_{22}} = \frac{12 - a_{21}x_1}{a_{22}} = \frac{12 - 8 \cdot 1}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{3j}x_j}{a_{33}} = \frac{5 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{33}} = \frac{5 - (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1)}{2} = 1$$

$$x^t = (1, 1, 1)$$

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $Ax = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $x_1 = b_1 / a_{11} = ?$

Paso 2 Para $k = 2, n$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{2j}x_j}{a_{22}} = ?$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{3j}x_j}{a_{33}} = ?$$

$$x^t = ?$$

CASO GENERAL

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$Ax = b, \text{ donde } A \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad b \in \mathbb{R}^n$$

siendo la matriz del sistema no triangular entonces utilizamos el método de **Eliminación de Gauss** para transformar el sistema en uno equivalente con matriz triangular superior

Teorema 2 (INVARIANZA DE LA SOLUCIÓN):

Las soluciones de un sistema $Ax = b$ permanecen invariantes ante las siguientes operaciones:

- Intercambio de dos ecuaciones cualesquiera
- Multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo
- Suma de una ecuación con una combinación lineal no nula de otras ecuaciones

ELIMINACION DE GAUSS

ALGORITMO DE TRIANGULACION

Dado el sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema, se requiere el uso de la matriz ampliada del sistema, la cual se define como

$$[A:b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Luego, se sustituye A por la matriz escalonada equivalente, la cual se obtiene aplicando operaciones elementales.

ELIMINACION DE GAUSS

ALGORITMO DE TRIANGULACION

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \text{ matriz ampliada}$$

La idea es llegar a un sistema equivalente que tenga una **matriz triangular superior**.

Paso 1: eliminamos los elementos de la primera columna.

Se eligen m_{21} y m_{31} de forma que los elementos de la columna 1 debajo de la diagonal principal sean nulos

$$1 - m_{21} \times 2 = 0 \rightarrow m_{21} = 1/2 \quad 4 - m_{31} \times 2 = 0 \rightarrow m_{31} = 2$$

Resto a la 2da ecuación la 1era multiplicada por $m_{21} = 1/2$

Resto a la 3era ecuación la 1era multiplicada por $m_{31} = 2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_2 + 6x_3 &= -3 \\ -7x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -10 \end{array} \right) \text{ matriz ampliada}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 6 \\ -3x_2 + 6x_3 & = & -3 \\ -7x_2 + 2x_3 & = & -10 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -10 \end{array} \right)$$

Paso 2: eliminamos los elementos de la segunda columna.

Calculamos: $-7 - m_{32} \times (-3) = 0 \rightarrow m_{32} = \frac{7}{3}$

Resto a la 3era ecuación la 2da multiplicada por $m_{32} = 7/3$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 6 \\ -3x_2 + 6x_3 & = & -3 \\ -12x_3 & = & -3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -3 \end{array} \right)$$

Obtengo una matriz triangular superior.

Utilizando el algoritmo de sustitución hacia atrás resolvemos el sistema: $x^T = (1/4, 3/2, 1/4)$

FACTORIZACION LU

Sea el problema general de resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$Ax = b, \text{ donde } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$$

Este método se usa para resolver sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes y distintos términos independientes.

Se descompone la matriz A en un producto de dos matrices:

- Una matriz triangular inferior unidad L .
- Una matriz triangular superior U ,

de tal forma que $A=LU$

FACTORIZACION LU

Dado el sistema inicial, $Ax = b$,

$$A^1 = (a_{ij}^1), b^1 = (b_i^1), 1 \leq i, j \leq n$$

Paso 1: suponiendo $a_{11}^1 \neq 0$

$$m_{i1} = a_{i1}^1 / a_{11}^1 \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - m_{i1} a_{1j}^1 \quad i, j = 2, 3, \dots, n$$

$$A^2 = (a_{ij}^2)$$

Paso k: suponiendo $a_{kk}^k \neq 0$

$$m_{ik} = a_{ik}^k / a_{kk}^k \quad i = k+1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - m_{ik} a_{kj}^k \quad i, j = k+1, \dots, n$$

$$A^{k+1} = (a_{ij}^{k+1})$$

FACTORIZACION LU

Despues de n-1 pasos: A^n , triangular superior, $U = A^n$

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & \dots & a_{3n}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^n \end{bmatrix}$$

Definimos ahora la matriz L, formada por los multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3: Factorización LU

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}$ tal que las n sub-matrices principales:

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, k = 1, \dots, n$$

Sean invertibles (esto es, $\det(\Delta_k) \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$). Entonces, $a_{kk}^k \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$ y por lo tanto, existe una matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, con elementos diagonales $l_{ii} = 1, \forall i = 1, \dots, n$ y una matriz diagonal superior $U = (u_{ij})$, tales que $A = LU$. Además, esta factorización es única.

FACTORIZACION LU

Dado el sistema inicial, $Ax = b$, y calculada $A = LU$, la solución del sistema se calcula:

$$LUx = b$$

Se considera $Ux = y$

Se resuelve el sistema $Ly = b$

Calculado y , se resuelve $Ux = y$

FACTORIZACION LU

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $a^1_{11} = 1$

$$m_{21} = a^1_{21} / a^1_{11} = 1/1 = 1, \quad a^2_{2j} = a^1_{2j} - m_{21} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{21} = a^1_{21} - m_{21} a^1_{11} = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$a^2_{22} = a^1_{22} - m_{21} a^1_{12} = 5 - 1 \cdot 3 = 2$$

$$a^2_{23} = a^1_{23} - m_{21} a^1_{13} = 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$m_{31} = a^1_{31} / a^1_{11} = 2/1 = 2, \quad a^2_{3j} = a^1_{3j} - m_{31} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{31} = a^1_{31} - m_{31} a^1_{11} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$a^2_{32} = a^1_{32} - m_{31} a^1_{12} = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$a^2_{33} = a^1_{33} - m_{31} a^1_{13} = 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Metodos Numericos I - 2024

75

FACTORIZACION LU

Ejemplo:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $a^2_{22} = 2$

$$m_{32} = a^2_{32} / a^2_{22} = -2/2 = -1, \quad a^3_{3j} = a^2_{3j} - m_{32} a^2_{2j}, \quad j=2,3$$

$$a^3_{32} = a^2_{32} - m_{32} a^2_{22} = -2 - (-1) \cdot 2 = 0$$

$$a^3_{33} = a^2_{33} - m_{32} a^2_{23} = -3 - (-1) \cdot (-2) = -5$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

NOTA: No hay necesidad de almacenar los 0
Es posible almacenar las matrices L y U en A

Metodos Numericos I - 2024

76

FACTORIZACION LU

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \text{Sust. hacia Adelante} \quad y = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{Sust. hacia Atrás} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metodos Numericos I - 2024

27

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $a^1_{11} = 2$

$$m_{21} = a^1_{21} / a^1_{11} = 1/2, \quad a^2_{2j} = a^1_{2j} - m_{21} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{22} = a^1_{22} - m_{21} a^1_{12} = 2 - (1/2) \cdot 1 = 3/2$$

$$a^2_{23} = a^1_{23} - m_{21} a^1_{13} = 0 - (1/2) \cdot (-1) = 1/2$$

$$m_{31} = a^1_{31} / a^1_{11} = 1/2, \quad a^2_{3j} = a^1_{3j} - m_{31} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{32} = a^1_{32} - m_{31} a^1_{12} = 1 - (1/2) \cdot 1 = 1/2$$

$$A^2 = ?$$

$$a^2_{33} = a^1_{33} - m_{31} a^1_{13} = 1/2 - (1/2) \cdot (-1) = 3/4$$

Metodos Numericos I - 2024

78

FACTORIZACION LU

Paso 2: $a^2_{22} = ?$

$$m_{32} = a^2_{32} / a^2_{22} = ?, \quad a^3_{3j} = a^2_{3j} - m_{32} a^2_{2j}, \quad j=3$$

$$a^3_{33} = a^2_{33} - m_{32} a^2_{23} = ?$$

$$A^3 = ?$$

$$L = \quad U =$$

$$Ly = b \quad Ux = y \quad x = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Metodos Numericos I - 2024

79

NUMERO DE OPERACIONES

Consideramos el costo de:

i) Cálculo de L y U

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 \cong 2 \int_1^{n-1} (n-k)^2 dk = -2 \left(\frac{(n-k)^3}{3} \right)_1^{n-1} = 2 \left(\frac{(n-1)^3}{3} - \frac{1}{3} \right) \cong \frac{2n^3}{3}$$

ii) Resolución de $Ly = b$

$$\sum_{i=1}^n 2(i-1) + 1 = \sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + \dots + 2n - 1 = \frac{1 + 2n - 1}{2} n = n^2$$

iii) Resolución de $Ux = y$

$$\sum_{i=1}^n 2(i-1) + 1 = \sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + \dots + 2n - 1 = \frac{1 + 2n - 1}{2} n = n^2$$

El costo es $O(n^3)$

Metodos Numericos I - 2024

30

CALCULO DEL DETERMINANTE

$$A = LU \longrightarrow \det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U)$$

L triangular con $l_{ii}=1$, $\forall i$, entonces $\det(L) = 1$

CALCULO DE A^{-1}

Dado que: $AA^{-1} = I$

Calculamos: $AX^i = e^i$, $i = 1, \dots, n$

A : matriz de partida

x^i : columna i-esima de la matriz inversa

e^i : columna i-esima de la matriz identidad, $(0, \dots, 1^i, \dots, 0)^t$

Así se calculan las n columnas de la matriz inversa, A^{-1}
Acá se observa la ventaja de la Factorización LU, pues se triangulariza una única vez y luego sólo se cambia el término independiente.

Metodos Numericos I 2024

31

Pivoteo y Escalamiento en el Método de Gauss

Se ha supuesto que $a_{kk} \neq 0 \forall k$, elemento pivote, caso contrario hay que realizar intercambio de filas.

También puede ocurrir que el elemento pivote sea pequeño entonces:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k+1)}}{a_{kk}^{(k+1)}}, \quad i = k+1, \dots, n$$

serán grandes y producen mucho error de redondeo

Metodos Numericos I 2024

32

Ejemplo: Sin Pivoteo

$$t = 4 \quad \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.93 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31 \quad \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 0.000 & -113.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ -113.8 \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^1 = a_{22}^1 - m_{21}a_{12}^1 = -113.7$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9956 \\ 1.001 \end{bmatrix} \quad \text{Pérdida de precisión}$$

Metodos Numericos I 2024

33

Ejemplo: Con Pivoteo

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 1.133 & 5.281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 6.414 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04693 \quad \begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 0.000 & 5.338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 5.338 \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^2 = a_{22}^1 - m_{21}a_{12}^1 = 5.338$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Metodos Numericos I 2024

34

Pivoteo Parcial

Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de una columna

Paso k :

$$c_k = \max_{i=k \dots n} |a_{ik}^k|$$

Siendo i el menor índice $\geq k$ tal que se obtiene el valor c_k

Nótese que de esta forma los multiplicadores

$$|m_{ik}| \leq 1, \quad i = k+1, \dots, n$$

Si $i > k$ se intercambian las filas en A y b

Metodos Numericos I 2024

35

Paso k :

$$c_k = \max_{i=k \dots n} |a_{ik}^k|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3i}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Fila Pivote

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3i}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ki}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Columna Pivote

El mas grande

Fila Pivote

Metodos Numericos I 2024

36

Pivoteo Total

Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de toda la matriz

Paso k :

$$c_k = \max_{i,j=k \dots n} |a_{ij}^k|$$

El más grande

es muy caro por el numero de comparaciones, por ello es más usado el pivoteo parcial

Implementación de LU con Pivoteo

Si representamos con $P = (P_{n-1} \dots P_1)$ las permutaciones de filas realizadas, entonces $PA = LU$

Dado $Ax = b$ si $PA = LU \therefore A = PLU$

El sistema a resolver quedaría:

$$PLUx = b$$

$$Ly = Pb$$

$$Ux = y$$

Nota:

Cuando dos filas de A se intercambian, las filas de b deben también ser intercambiadas.

Es conveniente usar un vector pivote; se inicializa desde 1 hasta n .

Cuando dos filas de A son intercambiadas, se aplica esto al vector pivote.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $C1 = \max\{0, -4, 1\}$

$$A' = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $a_{11}^{11} = -4$

$$m_{21} = a_{21}^{11} / a_{11}^{11} = 0 / -4 = 0, \quad a_{2j}^{2j} = a_{2j}^{1j} - m_{21} a_{1j}^{1j}, \quad j=2,3$$

$$a_{22}^{22} = a_{22}^{1j} - m_{21} a_{12}^{1j} = 3 - 0 \cdot (-2) = 3$$

$$a_{23}^{23} = a_{23}^{1j} - m_{21} a_{13}^{1j} = 2 - 0 \cdot (-2) = 2$$

$$m_{31} = a_{31}^{11} / a_{11}^{11} = -1 / -4, \quad a_{3j}^{3j} = a_{3j}^{1j} - m_{31} a_{1j}^{1j}, \quad j=2,3$$

$$a_{32}^{32} = a_{32}^{1j} - m_{31} a_{12}^{1j} = 4 - (-1/4) \cdot (-2) = 7/2 = 3.5$$

$$a_{33}^{33} = a_{33}^{1j} - m_{31} a_{13}^{1j} = -2 - (-1/4) \cdot (-2) = -7/4 = -1.75$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \end{bmatrix}$$

Paso 2

$$C2 = \max\{3, 3.5\}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^{22} = 3.5$$

$$m_{32} = a_{32}^{22} / a_{22}^{22} = 3 / 3.5, \quad a_{3j}^{3j} = a_{3j}^{2j} - m_{32} a_{2j}^{2j}, \quad j=3$$

$$a_{33}^{33} = a_{33}^{2j} - m_{32} a_{23}^{2j} = 2 - (3/3.5) \cdot (-1.75) = 3.5$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema hay que calcular:

$$Ly = Pb \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 &= b_1 = -5 \\ y_2 &= b_2 - (-0.25)y_1 = 3 + 0.25y_1 = 1.75 \\ y_3 &= b_3 - (3/3.5)y_2 = 12 - (3/3.5)y_2 = 10.5 \end{aligned}$$

$$Ux = y \quad \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1.75 \\ 10.5 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= y_3 / u_3 = 10.5 / 3.5 = 3 \\ x_2 &= (y_2 - (-1.75)x_3) / u_2 = (1.75 + 1.75 \cdot 3) / 3.5 = 2 \\ x_1 &= (y_1 - (-4)x_3 - (-2)x_2) / u_1 = (-5 - (-4 \cdot 3) - (-2 \cdot 2)) / -4 = 1 \end{aligned}$$

$$x^T = (1, 2, 3)$$

Escalamiento Implícito

Wilkinson propone que una matriz debe *equilibrarse* antes de aplicar un algoritmo de solución de sistemas lineales.

Al aplicar el **escalamiento implícito**, supongamos estar en el paso k del proceso de triangulación:

$$c_k = \max_{i=k \dots n} \frac{|a_{ik}^k|}{s_i}$$

i es el menor índice tal que $i \geq k$, si son distintos se intercambian las filas

Siendo s_i vector tamaño, que se inicializa al comenzar el algoritmo

$$s_i = \max_{j=1 \dots n} |a_{ij}|$$

Ejemplo de pivoteo con escalamiento:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1:

$$C1 = \max \left| \frac{a_{ij}}{s_i} \right| = \max \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{2} \right\}$$

Paso 1: $a^1_{11} = 4$

$$m_{21} = a^1_{21} / a^1_{11} = -1/4, \quad a^2_{2j} = a^1_{2j} - m_{21} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{22} = a^1_{22} - m_{21} a^1_{12} = 0 - 2 \cdot (-1/4) = 1/2$$

$$a^2_{23} = a^1_{23} - m_{21} a^1_{13} = 6 - (-1/4) \cdot 1 = 25/4$$

$$m_{31} = a^1_{31} / a^1_{11} = 2/4 = 1/2, \quad a^2_{3j} = a^1_{3j} - m_{31} a^1_{1j}, \quad j=2,3$$

$$a^2_{32} = a^1_{32} - m_{31} a^1_{12} = 2 - (1/2) \cdot 2 = 1$$

$$a^2_{33} = a^1_{33} - m_{31} a^1_{13} = 1 - (1/2) \cdot 1 = 1/2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Paso 2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \max \left| \frac{a_{ij}}{s_j} \right| = \max \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a^2_{22} = 1$$

$$m_{32} = a^2_{32} / a^2_{22} = 0.5, \quad a^3_{3j} = a^2_{3j} - m_{32} a^2_{2j}, \quad j=3$$

$$a^3_{33} = a^2_{33} - m_{32} a^2_{23} = 6.25 - (0.5)(0.5) = 6$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$s = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema hay que calcular:

$$L y = P b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 &= b_1 = 7 \\ y_2 &= b_2 - (-0.25)y_1 = 5 - 0.5y_1 = 1.5 \\ y_3 &= b_3 - (-0.25y_1 + 0.5y_2) = 5 - (-7/4 + 3/4) = 6 \end{aligned}$$

$$U x = y \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1.5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= y_3 / u_{33} = 6/6 = 1 \\ x_2 &= (y_2 - (0.5)x_3) / u_{22} = (1.5 - 0.5) / 1 = 1 \\ x_1 &= (y_1 - (1x_3 + 2x_2)) / u_{11} = (7 - (1+2)) / 4 = 1 \end{aligned}$$

$$x^T = (1, 1, 1)$$

Variantes de Eliminación de Gauss

Método de Gauss Jordan

Es similar al método de Gauss, la diferencia es que se diagonaliza la matriz

Paso k: suponiendo $a^k_{kk} \neq 0$

$$m_{ik} = a^k_{ik} / a^k_{kk} \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k$$

$$a^{k+1}_{ij} = a^k_{ij} - m_{ik} a^k_{kj} \quad j = k, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & \dots & a^{(1)}_{1n} & b^{(1)}_1 \\ a^{(1)}_{21} & a^{(1)}_{22} & \dots & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{(1)}_{n1} & a^{(1)}_{n2} & \dots & a^{(1)}_{nn} & b^{(1)}_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{bmatrix} a^{(1)}_{11} & 0 & \dots & 0 & b^{(n-1)}_1 \\ 0 & a^{(2)}_{22} & \dots & 0 & b^{(n-1)}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{(n)}_{nn} & b^{(n)}_n \end{bmatrix}$$

Al finalizar el algoritmo tenemos $x = b^n$

Desventaja: Costo aumenta en 50%

Variantes de Eliminación de Gauss

Método de Cholesky

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica y definida positiva:

A simétrica si $A = A^T$

A definida positiva si $X^T A X > 0 \quad \forall X \neq 0$

Para estas matrices se puede encontrar una matriz triangular inferior L , con elementos diagonales positivos, tal que

$$A = L L^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = L L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Una vez calculada L y L^T resolvemos el sistema:

$$L y = b$$

$$L^T x = y$$

Variantes de Eliminación de Gauss

Método de Cholesky

Los elementos de L se obtienen comparando los a_{ij} con l_{ij}

Por ej. para $n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad l_{21} = a_{21} / l_{11} \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

Forma Gral:

$$l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{1/2} \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}) / l_{ii} \quad j = i+1, \dots, n$$

Ventajas: costo es la mitad de LU, $\frac{n^3}{3}$, y no necesita pivoteo

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$l_{21} = a_{21}/l_{11} = 16.5/2.4495 = 6.7361 \quad j = 2$$

$$l_{31} = a_{31}/l_{11} = 14/2.4495 = 5.7155 \quad j = 3$$

Para $i = 2$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{76.25 - (6.7361)^2} = 5.5565$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{21}l_{31})/l_{22} = (48 - 6.7361 \times 5.7155)/5.5565 = 1.7097 \quad j = 3$$

Para $i = 3$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{54 - 5.7155^2 - 1.7097^2} = 4.2907$$

Metodos Numericos I 2024

49

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.7361 & 5.5565 & 0 \\ 5.7155 & 1.7097 & 4.2907 \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} 2.4495 & 6.7361 & 5.7155 \\ 0 & 5.5565 & 1.7097 \\ 0 & 0 & 4.2907 \end{bmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.7361 & 5.5565 & 0 \\ 5.7155 & 1.7097 & 4.2907 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 &= b_1/l_{11} = 54/2.4495 = 22.045 \\ y_2 &= (b_2 - 6.7361 \cdot y_1)/5.5565 = 17.097 \\ y_3 &= (b_3 - (5.7155 y_1 + 1.7097 y_2))/4.2907 = -12.872 \end{aligned}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 6.7361 & 5.7155 \\ 0 & 5.5565 & 1.7097 \\ 0 & 0 & 4.2907 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.045 \\ 17.097 \\ -12.872 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= y_3/u_{33} = -3 \\ x_2 &= (y_2 - (1.7097)x_3)/u_{22} = 4 \\ x_1 &= (y_1 - (5.7155x_3 + 6.7361x_2))/u_{11} = 5 \end{aligned}$$

$$x^T = (5, 4, -3)$$

Metodos Numericos I 2024

50

MATRIZ DE BANDA

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

Diremos que es de banda si: $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > m$

Siendo $2m+1$ el ancho de banda,

si $m = 1$ la matriz es tridiagonal,

$m = 2$ la matriz es pentadiagonal

Una matriz tridiagonal seria: $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Estas matrices son llamadas matrices de Jacobi

Metodos Numericos I 2024

51

Variantes de Eliminación de Gauss

Método de Thomas

Para estas matrices, tridiagonales, se implementa una variante de LU, con un costo $O(n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y vale que:

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11} & u_{12} &= a_{12}/l_{11} \\ l_{ii} &= a_{ii} - a_{i,i-1}u_{i-1,i} & u_{i,i+1} &= a_{i,i+1}/l_{ii} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ l_{nn} &= a_{nn} - a_{n,n-1}u_{n-1,n} \end{aligned}$$

Metodos Numericos I 2024

52