SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

Dada una función continua ***f (x)***, se quiere encontrar el valor x_0 de x, para el cual $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$; los x_0 para los que se cumple $f(x_0) = 0$ se denominan raíces o solución de la ecuación o ceros .

Problema a resolver:

$$f(x) = 0$$

Clasificación de Métodos

$\Re$

De intervalo	Abiertos	Gráfico
M. Bisección	M. Secante	
M. Regula Falsi	M. Newton Raphson	
	M. Iteración de Punto Fijo	
	M. Müller	

METODO DE ITERACION DE PUNTO FIJO

Método que se basa en la forma de la función:

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = g(x)$$

la iteración es: $\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots}$

Definición: Dada $g(x): [a,b] \rightarrow R$, g continua y si $g(\alpha) = \alpha$, para algún $\alpha \in [a,b]$ entonces $g(x)$ tiene un ***punto fijo*** en [a,b]

Si α es punto fijo de $g(x)$ $\therefore$ α es cero de $f(x)$

por definición $x = g(x)$
si $f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $g(x) = x - f(x)$

si $x = \alpha$ $\quad g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = 0$

Ej: como definir una función de iteración

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \rightarrow 2x = x^2 + 3$
$x = (x^2+3)/2 \rightarrow g(x) = (x^2+3)/2$

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \rightarrow x^2 = 2x - 3$
$x = \sqrt{(2x-3)} \rightarrow g(x) = \sqrt{(2x-3)}$

$f(x) = \sin x \rightarrow x = \sin x + x \rightarrow g(x) = \sin x + x$

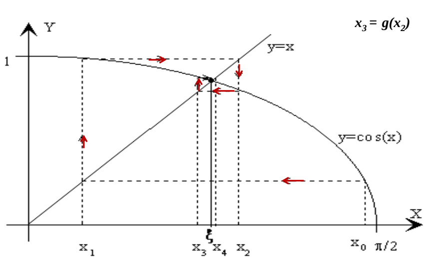
$f(x) = e^{-x} - x \rightarrow x = e^{-x} \rightarrow g(x) = e^{-x}$

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots}$$

Iteración Convergente

$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots$

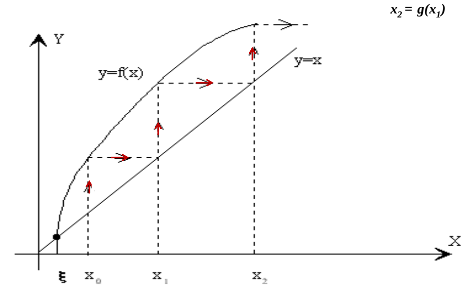
$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$
$x_3 = g(x_2)$



Iteración no Convergente

$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots$

$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$



En función de lo visto, pueden surgir algunas preguntas:

Cuantas funciones g(x) se pueden determinar dada una ecuación f(x) = 0 ?

Cuales de estas funciones de iteración van a dar una sucesión que sea convergente al cero buscado ?

Teorema (Existencia y unicidad del punto fijo)

Si $g \in C_{[a,b]}$ y $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$. Si además $g'(x)$ existe en (a,b), es continua y $|g'(x)| \leq K < 1$ $\forall x \in [a,b]$.
Si $x_0 \in [a,b]$ entonces la sucesión definida $x_{n+1} = g(x_n)$, n ≥ 1 converge al único punto fijo $\alpha \in [a,b]$.

- Es importante interpretar, dentro de las H) del teorema:

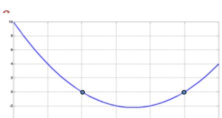
- $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$?

- $|g'(x)| \leq K < 1$ $\forall x \in [a,b]$?

Teorema (existencia y unicidad del punto fijo)

Ejemplo: vale $f(x) = x^2 - x - 2$

$x_{1,2} = -1 , 2$



i) $x = x^2 - 2$ $g_1(x) = x^2 - 2$

- $|g_1'(x)| = 2x < 1$ si $x < 1/2$ $\rightarrow g_1$ no verifica teorema

ii) $x^2 = x + 2$ $g_2(x) = (x + 2)^{1/2}$

$|g_2'(x)| = 0.5(x+2)^{-1/2} < 1$ si $x > 0$

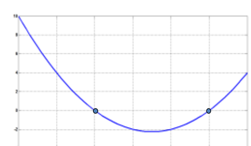
$g_2(1) = 1.732$ y $g_2(3) = 2.236 \rightarrow g_2$ verifica teorema, o sea genera una sucesión convergente

Ejemplo: $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

$g_2(x) = (x+2)^{1/2}$

Vamos usar para aproximar la raíz 2

$x_{n+1} = g(x_n)$ $n = 0, 1, \ldots$



$x_0 = 2.1$

it=1	$x_1 = (x_0+2)^{1/2} = 2.0248$	$e = \lvert x_1 - x_0 \rvert = 0.0752$
it=2	$x_2 = (x_1+2)^{1/2} = 2.0062$	$e = \lvert x_2 - x_1 \rvert = 0.0186$
It=3	$x_3 = (x_2+2)^{1/2} = 2.0015$	$e = \lvert x_3 - x_2 \rvert = 0.0047$
It=4	$x_4 = (x_3+2)^{1/2} = 2.0004$	$e = \lvert x_4 - x_3 \rvert = 0.0011$

Ej: $f(x) = e^x - 3x^2$

$f(x) = e^x - 3x^2 \Rightarrow e^x = 3x^2$
$x = \ln(3x^2) \Rightarrow$ $g_1(x) = \ln(3x^2)$

$f(x) = e^x - 3x^2 \Rightarrow e^x = 3x^2$
$x = \sqrt{e^x/3} \Rightarrow$ $g_2(x) = \sqrt{e^x/3}$

Se quiere encontrar una de las raíces, cercana a 1 :

$|g_1'(x)| = |6x/3x^2| = |2/x| < 1 \Rightarrow x > 2$

$|g_2'(x)| = |1/(2\sqrt{3})\sqrt{e^x}| < 1$

- Por ej. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = 3$, $x = -1$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 2x + 3$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{2x+3}$$
$$\Rightarrow g_1(x) = \sqrt{2x+3}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x(x-2) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{3}{x-2}$$
$$\Rightarrow g_2(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 2x = x^2 - 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{x^2 - 3}{2}$$
$$\Rightarrow g_3(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

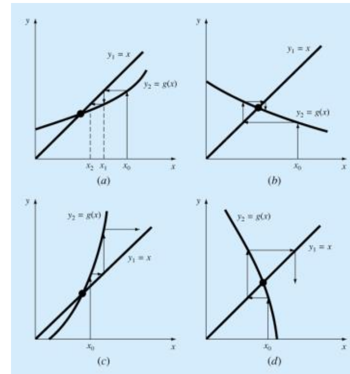
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
$x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}$	$x_{i+1} = \dfrac{3}{x_i - 2}$	$x_{i+1} = \dfrac{x_i^2 - 3}{2}$
1. $x_0 = 4$	1. $x_0 = 4$	1. $x_0 = 4$
2. $x_1 = 3.31662$	2. $x_1 = 1.5$	2. $x_1 = 6.5$
3. $x_2 = 3.10375$	3. $x_2 = -6$	3. $x_2 = 19.625$
4. $x_3 = 3.03439$	4. $x_3 = -0.375$	4. $x_3 = 191.070$
5. $x_4 = 3.01144$	5. $x_4 = -1.263158$	
6. $x_5 = 3.00381$	6. $x_5 = -0.919355$	
	7. $x_6 = -1.02762$	
	8. $x_7 = -0.990876$	
	9. $x_8 = -1.00305$	
Converge x = 3	Converge x = -1	No Converge

(a) $|g'(x)| < 1,\ g'(x) > 0$
$\Rightarrow$ converge, monótona

(b) $|g'(x)| < 1,\ g'(x) < 0$
$\Rightarrow$ converge, oscilante

(c) $|g'(x)| > 1,\ g'(x) > 0$
$\Rightarrow$ diverge, monótona

(d) $|g'(x)| > 1,\ g'(x) < 0$
$\Rightarrow$ diverge, oscilante



Algoritmo de Iteración de Punto Fijo

ENTRADA : x_0 ; Eps: real ;max: entero
SALIDA : x_1: real o mensaje de error
VARIABLES: iter: entero

PASO 1: iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2*$ Eps
PASO2: MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|x_1 - x_0|$ > Eps)
    $x_1 \leftarrow g(x_0)$
    iter $\leftarrow$ iter+1
    $x_0 \leftarrow x_1$
PASO3 : Si (iter > max) ENTONCES
    ESCRIBIR ((‘No converge en max iteraciones’)
  SINO
    ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_1)
PASO4 : Parar

ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición: Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x' y que $e_n = x_n - x'$ para cada n>0
Si existen constantes positivas λ, α tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x'|}{|x_n - x'|^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\alpha}} = \lambda$$

decimos que **$\{x_n\}$ converge a x' con orden α**, con una constante de error asintótico λ.
Por lo tanto:

$\alpha = 1$: método lineal
$\alpha = 2$: método cuadrático

ORDENES DE CONVERGENCIA

$\alpha = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{método de bisección} \\ \text{método Regula Falsi} \\ \text{iteración de punto fijo} \end{array} \right.$

$\alpha = 1.6$ método de la secante

$\alpha = 2$ método de Newton-Raphson

Newton-Raphson vs. Iteración de Punto Fijo

$f(x) = e^{-x} - x$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-xn}(xn + 1)}{(e^{-xn} + 1)}$$

i	x_i	F(xi)
0	0	1
1	0,500000000	0,10653066
2	0,566311003	0,00130451
3	0,567143165	1,9654E-07
4	0,567143290	6,4219E-10

$x_{n+1} = e^{-xn}$

i	x_i	F(xi)
0	0	1,00000000
1	1,000000	1,71828183
2	0,367879	1,07679312
3	0,692201	1,30590753
4	0,500473	1,14902830
5	0,606244	1,22728770
6	0,545396	1,17989546
7	0,579612	1,20573358
8	0,560115	1,19075884
9	0,571143	1,19914634
10	0,564879	1,19435590

Ejemplo: $f(x) = e^{-x} - x$

$\alpha = 2$

Dado $x_0 = 0$

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0.5	0.1065306
2	0.566311003	0.0013045
3	0.567143165	$1.965\ 10^{-7}$
4	0.567143290	$6.426\ 10^{-10}$

Δ^2 DE AITKEN

Supóngase que $\{x_n\}$ converge linealmente al limite p y que, para valores suficientemente grandes de n, $(x_n - p)(x_{n+1} - p) > 0$
Entonces, la sucesión

$$\boxed{\hat{x} = x_n - \frac{(\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}}$$

Converge con orden cuadrático

Acelera la convergencia de cualquier sucesión de orden lineal.

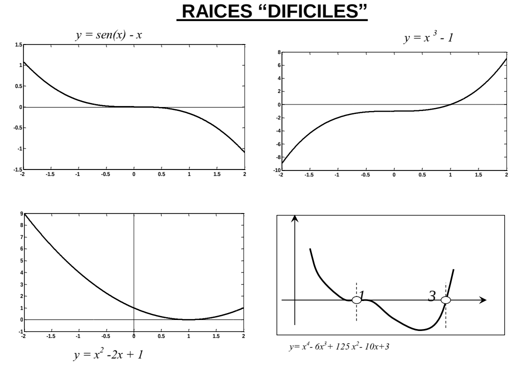
METODO DE STEFFENSEN

Se obtiene al aplicar Δ^2 de Aitken a la sucesión generada con iteración de punto fijo:

$$\hat{x}_s = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Dado x_0, Eps
iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2$* Eps
MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|x_1 - x_0|$ > Eps)
  $x_1 \leftarrow g(x_0)$
  $x_2 \leftarrow g(x_1)$
  iter $\leftarrow$ iter+1
  $x_s \leftarrow x_0 - (x_1 - x_0)^2 / (x_2 - 2x_1 + x_0)$
  $x_0 \leftarrow x_s$
Si (iter > max) ENTONCES
  ESCRIBIR (‘No converge en max iteraciones’)
SINO
  ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_0)

RAICES "DIFICILES"



CEROS DE POLINOMIOS

Dado un polinomio, de orden n, con coeficientes a_i, $i = 0,.., n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

Recordemos:

•Para un orden n, hay n raíces reales o complejas, no necesariamente distintas.
•Si n es impar, hay al menos una raíz real.
•Si las raíces complejas existen, existe un par conjugado.

Teorema de Acotación de Raíces: Todos los ceros de un polinomio se hallan en el disco cerrado cuyo centro está en el origen del plano complejo y cuyo radio es ρ siendo:

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0 \leq k < n} |a_k|$$

Ej: si tomamos el polinomio

$$p(x) = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$$

Calculamos: $$\rho = 1 + \frac{6}{3} = 3$$

En función de este valor las raíces están el intervalo (-3,3)

METODO DE HORNER

Dado un polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$
y un valor x_0

Si se toman $\begin{cases} b_n = a_n \\ b_k = a_k + b_{k+1}x_0 \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0) \\ \therefore\ b_0 = P(x_0) \end{cases}$

más aun si : $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$

entonces $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$

METODO DE HORNER

Dado que $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$ (1)

Siendo $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$

Si derivamos (1) $P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$

Para $x = x_0$ $P'(x_0) = Q(x_0)$

Método de Newton Raphson

Dado el polinomio, $P(x)$, se calcula:

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n) / P'(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

usando Horner para calcular $P_{(x)}$ y $P'_{(x)}$.

Mediante el proceso de **deflación** podemos calcular todos los ceros del polinomio

METODO DE HORNER

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ $\boxed{x_0 = -2}$ V. i. para Newton

	2	0	-3	3	-4
-2		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$\boxed{10}$

$$P(x) = (x+2)\underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7)}_{\boxed{Q(x) = P'(x)}} + 10$$

METODO DE HORNER

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ $\boxed{x_0 = -2}$ ← V. i. para Newton

	2	0	-3	3	-4
-2		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$\boxed{10}$ → $\boxed{P(-2)}$

$$P(x) = (x+2)\underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7)}_{\boxed{P'(x) = Q(x)}} + 10$$

Aplico Horner nuevamente para encontrar **Q(-2)=P'(-2)**

	2	-4	5	-7
-2		-4	16	-42
	2	-8	21	$\boxed{-49}$ → $\boxed{P'(-2)}$

Método de Newton Raphson

Esta seria 1era iteración del método

$$x_1 = x_0 - P(x_0) / P'(x_0) = -2 - 10 / (-49) \cong \boxed{-1.796}$$

Una 2da iteración seria:

	2	0	-3	3	-4
-1.796		-3.592	6.451	-6.198	5.744
	2	-3.592	3.451	-3.198	$\boxed{1.744}$ → $\boxed{P(-1.796)}$

	2	-3.592	3.451	-3.198
-1.796		-3.592	12.90	-29.36
	2	-7.184	16.35	$\boxed{-32.56}$ → $\boxed{P'(-1.796)}$

$$x_2 = x_1 - P(x_1) / P'(x_1) = -1.796 - 1.744 / (-32.56) \cong \boxed{-1.742}$$

Se continua las iteraciones hasta alcanzar la precisión buscada

Algoritmo para calcular *P(x) y P'(x)*

ENTRADA : ***n***: grado de $P(x)$, ***ai***: coeficientes de $P(x)$,
x_0 : punto donde evaluar $P(x)$
SALIDA : $y = P(x_0)$, $z = P'(x_0)$

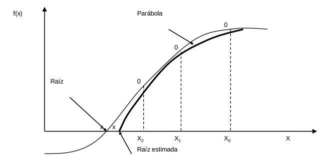
PASO 1: $y = a_n$
PASO2: $z = a_n$
PASO 3: PARA $j = n-1 , n-2, \dots 1$
$y = x_0 * y + a_j$
$z = x_0 * z + y$
PASO 4: $y = x_0 * y + a_0$
PASO 5: Devolver y , z

Método de Muller

Permite calcular las raíces del polinomio, $p_n(x)$, donde n es el orden del polinomio y las a_n son coeficientes constantes.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n$$

Este método es una generalización del método de la secante, trabaja con la parábola que intersecta al polinomio dado en tres puntos



Supongamos buscar las raíces de

$$p_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Debemos conocer a, b y c
Dados $P0, P1$ y $P2$: $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$, planteamos el sig. sistema de ecuaciones:

$$p_2(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c = f(x_0)$$
$$p_2(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c = f(x_1)$$
$$p_2(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c = f(x_2)$$

vemos que $f(x_2) = c$

El sistema será: $c = f(x_2)$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)\ [f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

La nueva aproximación a la raíz será la solución de $p_2(x3) = 0$
Para el cálculo de la raíz, x_3, debemos resolver:

$$x_3 - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para prevenir error de redondeo

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Cual signo hay que tomar ?

En cada iteración, se recalculan los valores $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$ hasta alcanzar la raíz con la precisión deseada

Este método también permite calcular raíces complejas, se debe tomar un *v.i.* complejo, y es más estable que Newton, siendo su orden de convergencia ≅ 1.8.

La principal desventaja es que en cada iteración descarta una posible raíz de la parábola sin conocer sus características.

Método de Muller

Ejemplos:

$F(x) = x^3 - 13x - 12$

$x_0 = 4.5$, $x_1 = 5.5$, $x_2 = 5$

i	x_i	*Ea*
0	5	
1	3.9765	1.0235
2	4.0011	0,0246
3	4.0000	0.0011
4	4.0000	0

Raiz

$F(x) = x^3 - 0.5x^2 + 4x - 2$

$x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.8$

i	x_i	*Ea*
0	0.8	
1	0.5007	0.2993
2	0.49999	0,0007
3	0.50000	0.00001

Raiz

En resumen:

- Los métodos numéricos para resolver raíces se dividen en abiertos y de intervalo

- Métodos que usan intervalos, necesitan dos valores iniciales que contengan la raíz, tienen garantizada la convergencia. Pero son lentos.

- Métodos abiertos abandonan la acotación de la raíz, ganando en velocidad; pero pueden diverger. La convergencia depende de una buena elección de los valores iniciales