Programador Universitario
Licenciatura en Informática
Ingenieria en Informática

METODOS NUMERICOS I (P10)

CALCULO NUMERICO

Es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos para simular aproximaciones de solución a problemas en análisis matemático

METODOS NUMERICOS I

TEMAS

Unidad I: Teoría de errores
Unidad II: Solución de Ecuaciones no Lineales
Unidad III: Solución Numérica de Sistemas Lineales
Unidad IV: Interpolación
Unidad V: Integración numérica

Unidad I - *Teoría de errores*

- Conceptos básicos
- Fuentes de error
- Error de truncamiento
- Representación en punto flotante.
- Error de representación
- Aritmética de números reales. Propagación del error
- Métodos de estimación del error

ERRORES FAMOSOS

En el año 1991 durante la Guerra del Golfo, un sistema de misiles americanos Patriot en Arabia Saudita falló en interceptar un misil iraquí Scud. Por un **error de redondeo** se calculó mal el tiempo, y el Patriot ignoró al misil Scud (28 soldados muertos, 100 heridos)

En 1995, el cohete Arianne 5 de la Agencia Espacial Europea explotó 40 segundos después de despegar. El error se atribuyó a un fallo en un sistema de control inercial**,** donde un número de punto flotante de 64 bits se convirtió a un entero de 16 bits, causando un "overflow" (7 billones de US$ y 10 años).

En 1999, el satélite Mars Climate Orbiter se estrelló contra la superficie de Marte al tratar de orbitar. La causa fue el intercambio de información entre dos subsistemas *software* del satélite, que utilizaban unidades de medida diferentes para representar las distancias (kilómetros y millas) programa que operaba la nave desde la Tierra (655 millones de US$)

RESOLUCION DE UN PROBLEMA NUMERICAMENTE

i) Formulación del problema

ii) Elección del método

iii) Programación y codificación

iv) Análisis de los resultados

Formulación del problema

El proceso de análisis del mundo real para interpretar los aspectos de un problema y expresarlo en términos precisos se denomina **abstracción**.

Abstraer un problema del mundo real y simplificar su expresión, tratando de encontrar los aspectos principales que se pueden resolver , los datos que se van a procesar y el contexto del problema se denomina **modelización** (mental)

Formular un ***Modelo Matemático*** es:

Definir las ecuaciones matemáticas del modelo y los parámetros que intervienen

Un ***modelo matemático*** es una ecuación que muestra las características de un sistema físico:

$$y = f\,(\,x,\ \text{parámetros},\ \text{fn.fuerza})$$

y : vble. dep., muestra el comportamiento o estado del sistema

x : vbles. indep., determinan el comportamiento del sistema (tiempo, espacio)

parámetros: constantes que muestran la composición o propiedades del sistema

fn. fuerza: influencias externas sobre el sistema

Ejemplos de Modelos Matemáticos

- Distancia recorrida por un objeto
- Velocidad de descenso de un objeto
- Concentración de una sustancia en una reacción química
- Variación en la demanda de un producto
- Evolución de una enfermedad según tratamiento
- Dinámica de poblaciones
- Desarrollo económico
- Movimientos sísmicos
- Costo de productos

Etc..

Ejemplos de Modelos

- La distancia recorrida por un objeto en caída libre se calcula

Parámetro

$$d(t) = \tfrac{1}{2}\, g\, t^{2}$$

Vble dep vble ind. Fn. Fuerza

.

- Cultivo de bacterias (dinámica de poblaciones)

Si el cultivo tiene al comenzar 1000 bacterias y la población se duplica cada hora, el numero N de bacterias al cabo de t horas será:

$$N(t) = 1000\, 2^{t}$$

Vble dep vble ind. Parametro

-el porcentaje de riesgo R de tener un accidente al manejar un auto, en función de la cantidad de alcohol x en sangre:

Parámetros

$$R(x) = 6(1{,}013)^{x}$$

Vble dep vble ind.

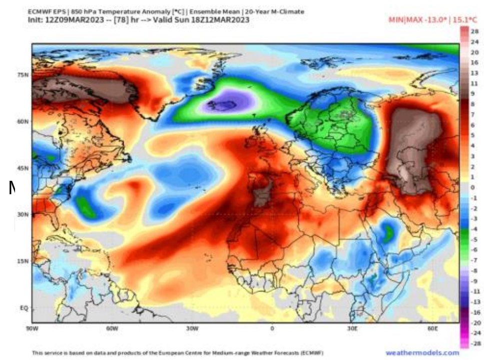
.

Si R $\geq$ 20% no deben conducir vehículos (por ley)
O sea que $x = 95$, es el mayor valor permitido

- Un modelo climático que asume que la energía que llega del Sol equilibra la energía radiada por la Tierra da una ecuación para la temperatura promedio de la Tierra , T

$$\mathbf{T\ (S,\ a,e)=} \left(\frac{\mathbf{(1-a)\ S(t)}}{\boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{e}}\right)^{1/4}$$

S(t) es la energía promedio del Sol,
a es el albedo de la Tierra, (cantidad de luz solar que refleja la Tierra hacia el espacio)
e es la emisividad efectiva de la atmósfera de la Tierra (medición de la capacidad de un objeto de emitir energía infrarroja)
σ es la constante de Boltzman



CLASIFICACION DE LOS ERRORES

i) Errores del modelo o del problema
ii) Errores de cálculo y programación
iii) Errores en los datos
iii) Errores de truncamiento
iv) Errores de redondeo

i) Errores del modelo o del problema

Son los más graves, si modelamos mal , por ejemplo hacemos hipótesis incorrectas o demasiadas simplificaciones para llegar al modelo matemático, entonces no resolvemos el problema real planteado

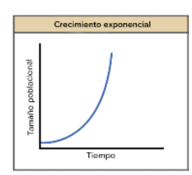
Ej.; Ley de Malthus para dinámica poblacional

población en el año t

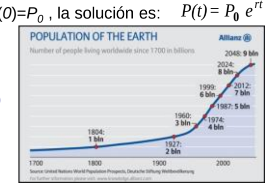
$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)$$

Parámetro

Dado $P(0)=P_0$, la solución es: $P(t) = P_0\, e^{rt}$



Pero …



NO ES EL MODELO ADECUADO!

ii) Errores de cálculo y programación

Causados por el factor humano, antes errores de calculo, ahora los de programación, para evitarlos es fundamental probar adecuadamente los programas

iii) Errores en los datos

En un problema físico los datos son empíricos, por ello tienen errores experimentales, asociados al instrumento de medición. El error en los resultados no puede ser menor que el error en los datos. Relacionado a estos errores esta el concepto de ***condicionamiento***

error pequeño en los datos → error pequeño resultado problema bien condicionado

error pequeño en los datos → error grande resultado problema mal condicionado

Ejemplo : Polinomio de Wilkinson

$$pn(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n) = \prod_{i=1}^{20}(x-i) = x^{20} - 210\,x^{19} + \cdots$$

El valor de a_{19}= -210 si le restamos 2^{-23}; a_{19} = -210.0000001192

Las nuevas raíces son:

1.00000	2.00000	3.00000	4.00000	5.00000
6.00001	6.99970	8.00727	8.91725	20.84691
$10.09527 \pm 0.64350i$	$11.79363 \pm 1.65233i$	$13.99236 \pm 2.51883i$	$16.73074 \pm 2.81262i$	$19.50244 \pm 1.94033i$

Problema mal condicionado

Errores Sistemáticos

Son los que tienen siempre aproximadamente el mismo tamaño y signo, es decir que el error tiene una causa constante, son siempre por exceso o por defecto

Errores Accidentales

Son los relacionados a factores aleatorios en la medición

Precisión y **Exactitud**

Una medición es **exacta** cuando su valor es muy cercano al valor verdadero.

Una medición es **precisa** cuando el instrumento que empleamos nos proporciona muchas cifras decimales, pero la medida puede no ser exacta, por ej. si estamos cometiendo un error sistemático al usar el instrumento.

Una medida para ser exacta debe ser precisa, pero no todas las medidas precisas son exactas.

Ej: precisión y **exactitud**

Pi = 3.14159265358…

Pi = 3.15	**impreciso e inexacto**
Pi = 3.14	**exacto e impreciso**
Pi = 3.151692	**preciso pero inexacto**
Pi = 3.141593	**preciso y exacto**

Los errores vistos en *i) , ii) y iii)* son independientes del instrumento con el que se resuelva el problema.

Una diferencia fundamental entre el tratamiento matemático de un problema y el numérico está en las limitaciones que tiene el calculo numérico, tanto para representar procesos como en la representación de los números. Esto genera dos tipos de errores:

Errores de truncamiento y Errores de redondeo

ERROR de TRUNCAMIENTO

Se origina al substituir procesos infinitos por procesos finitos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

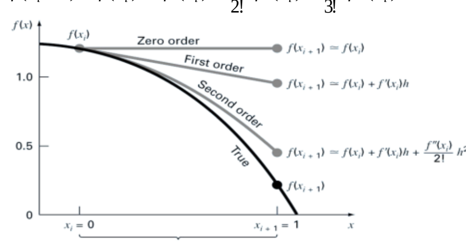
$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Los errores de truncamiento causan inexactitud de los resultados.

SERIE DE TAYLOR

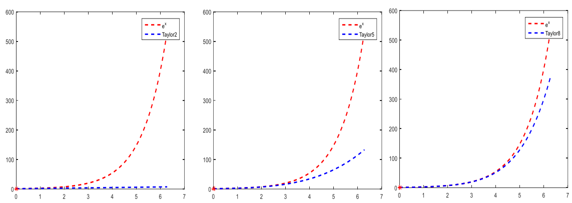
El teorema de Taylor nos dice que toda función suave se puede aproximar con un polinomio .Esto se hace usando la Serie de Taylor

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots + Rn.$$



Desarrollo en serie de Taylor

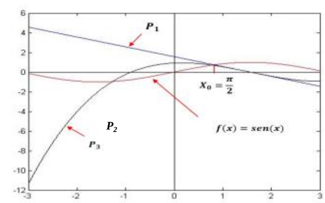
Ejemplo: f(x) = e ^{x}



Ejemplo:

f(x) = sen(x)

$$sen(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots + (-1)^{n+1} x^{2n-1}/(2n-1)!$$



ERROR

Sean x y $\bar{x}$ un número y su valor aproximado

$e = x - \bar{x}$ *error absoluto*

$e_r = \dfrac{x - \bar{x}}{x}$ *error relativo* si $x \neq 0$ (error por unidad de medida)

$e_r \% = e_r\, 100$ *error relativo porcentual*

$|x - \bar{x}| \leq \varepsilon$ *cota de error* $\Longrightarrow$ $x = \bar{x} \pm \varepsilon$

Ejemplo : Cota de error

$|x - \bar{x}| \leq \varepsilon \longrightarrow x = \bar{x} \pm \varepsilon$

Se quiere estimar 11 / 3

x_{real} = 11 / 3 = 3.666666….
x_{aprox} = 3.666

Ea = | 3.666666… - 3.666 | = 0.000666… < 0.001

El error absoluto ε es menor que una milésima

ERROR

Sean x y $\bar{x}$ ϵ R^n

$e = \| x - \bar{x} \|$ error absoluto

$e_r = \dfrac{\| x - \bar{x} \|}{\| x \|}$ error relativo, si $x \neq 0$

Si trabajamos con vectores o matrices , se realiza el calculo del error utilizando el concepto de norma

ERROR DE REDONDEO

Se debe a que una máquina sólo puede representar cantidades con un número finito de dígitos.

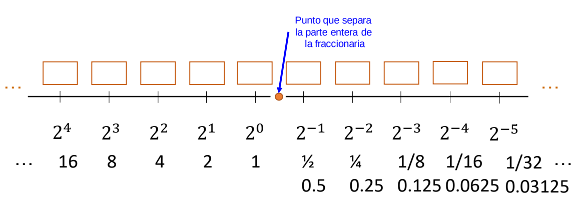
Podemos distinguir dos tipos:

a) error de representación

b) error debido a los cálculos

SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL

En un sistema de numeración posicional, el valor de cada símbolo o cifra depende tanto del símbolo como de su posición



SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL

Ejemplo: Convertir $(25)_{10}$ a binario

25		Resultado	Resto
25 / 2	=	12	1
12 / 2	=	6	0
6 / 2	=	3	0
3/ 2	=	1	1
1 / 2	=	**0**	1

Resultado: $(25)_{10} = (11001)_2$

SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL

Ejemplo: Convertir $(0.71875)_{10}$ a binario

0.71875			Parte entera
0.71875 * 2	=	1.4375	1
0.43750 * 2	=	0.8750	0
0.87500 * 2	=	1.7500	1
0.75000 * 2	=	1.5000	1
0.50000 * 2	=	1.0000	1

Resulta: $(0.71875)_{10} = (0.10111)_2$

$(0.71875)_{10}$ tiene representación exacta en el sistema binario

Ejemplo: Convertir $(0.6)_{10}$ a binario

0.6			Parte entera
0.6000 * 2	=	1.2000	1
0.2000 * 2	=	0.4000	0
0.4000 * 2	=	0.8000	0
0.8000 * 2	=	1.6000	1
0.6000 * 2	=	1.2000	1
0.2000 * 2	=	0.4000	0

Resulta: $(0.6)_{10} = (0.100110011\ldots)_2$

$(0.6)_{10}$ **NO** tiene representación exacta en el sistema binario

SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL

Ejemplos:

a) Convertir 35 a binario

b) Convertir $(0.84375)_{10}$ a binario

c) Convertir $(5.625)_{10}$ a binario

REPRESENTACION INTERNA

Existen dos maneras de representar los números:

1. **Punto fijo**: Los números se representan con un número fijo de cifras decimales. 6.358, 0.013
(introducida inicio de los ´80 ; la mayoría de los chips DSP de bajo costo la usan pues no requiere FPU)

2. **Punto flotante**: Los números se representan con un número fijo de dígitos significativas 0.636E01, 0.135E-01

Dígito Significativo: Dado un número x, es cualquier dígito, excepto los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero y que solo sirven para fijar la posición del punto decimal Ej. **1360, 1.360; 0.001360**; tienen cuatro dígitos significativos.

REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

Sea un número x, representado en punto flotante en una base b

$$\mathbf{x = (sign\ x)\ (.a_1a_2a_3\ldots a_t)_b \times b^e}$$

ai : dígitos en el sistema de base b , a1 ≠ 0 o ai =0 ∀ i

t: número de dígitos de la mantisa (determina la **precisión**)

$.a_1a_2a_3\ldots a_t$: mantisa normalizada, por ser a1 > 0

e: exponente o característica (determina el **rango**)

Ej: x = - 9.25 $_{10}$ m = 8 e = 4

Representación en binario:

9 = 1001 $\longrightarrow$ 9.25 $_{10}$ = 1001.01 $_{2}$
0.25 = 0.01

Normalizamos: $0.100101 \times 10^{0100}$

Representación en punto flotante:

1	0100	10010100
sgn	e	m

Ej: x = 11.125 $_{10}$ m = 8 e = 4

Representación en binario:

11 = 1011 $\longrightarrow$ 11.125 $_{10}$ = 1011.001 $_{2}$
0.125 = 0.001

Normalizamos: $0.1011001 \times 10^{0100}$

Representación en punto flotante:

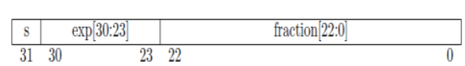
0	0100	10110010
sgn	e	m

Estándar **IEEE 754** (85') se estableció para facilitar la portabilidad de los programas de un procesador a otro.

Define el formato para precisión simple de 32 bits y para precisión doble de 64 bits.

REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

IEEE Standard 754



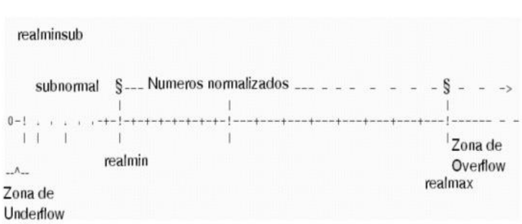
32 bits
- 1 bit para signo número
- 8 bits para exponente (10^{-38}, 10^{38})
- 23 bits para mantisa (~7 digitos)

Overflow: Resultado del cálculo mayor que el numero mas grande que se puede representar

Underflow: Resultado del cálculo menor que el numero mas pequeño (no nulo)que se puede representar. Se considera 0 al valor

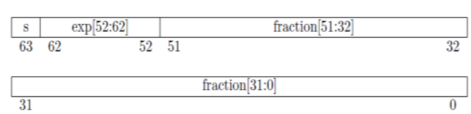
Valores Especiales (single-precision)

Exponente	Mantisa	Valores
00000000	0…0 0	+0.0 , -0.0
00000000	n.….n	números subnormales $(-1)^s \times 2^{-126} \times (0.a_1a_2…a_{23})$ 2^{-149} , 2^{-126}
11111111	0…..0	Infinito
11111111	n.….n	Not a Number (NaN)



REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

Doble Precision



64 bits
- 1 bit para signo número
- 11 bits para exponente (10^{-308}, 10^{308})
- 53 bits para mantisa (~15 dig.)

ERROR DE REPRESENTACION

Como la mantisa contiene n dígitos en la base b, todo número más largo debe cortarse

Ej: 10/3 = 3.3333333333…

1/6 = 0.1666666666…

л = 3.141596265358…

También puede ocurrir que haya números con representación exacta en una base pero no en otra

Ej. $4/5 = (0.8)_{10}$,$3/5 = (0.6)_{10} = (0.100110011\ldots)_2$

Si $b = 2$, $t = 6$, $e = 4$ $\Longrightarrow$ 0.6 = 0 10011 0000= $(0.59375)_{10}$

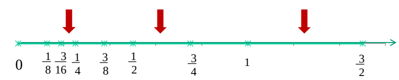
m e

ERROR DE REPRESENTACION

Los valores de b, t y e determinan que valores reales se pueden representar exactamente en una computadora

Ej : b = 2 , t = 2 , e = 2

Observamos que no podemos representar todos los números reales, la distancia entre los números representados (gap) es proporcional a la magnitud del número



ERROR DE REPRESENTACION

Un número x que no tiene representación exacta se denomina **fl(x).**

Los dos métodos mas comunes para determinar la mantisa son :

a) Redondeo: Se suma $0.5 \times 10^{n-(k+1)}$ y luego se corta los dígitos $k+1$ en adelante.

b) Corte: Cortar los dígitos $k+1$ en adelante

Esto es equivalente a la conocida "regla" para redondear:

a) Redondeo: se elige como fl(x) el número de punto flotante normalizado más cercano a x

b) Corte: se elige como fl(x) el número de punto flotante normalizado más cercano entre 0 y x

ERROR DE REPRESENTACIÓN

Ejemplo:
Se desea almacenar el número irracional $\pi = 3.14159265\ldots$ usando 5 dígitos para la mantisa.

$$\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$$

Corte: $fl(\pi)_{CORTE} = 0.31415 \times 10^1$

Redondeo: $fl(\pi)_{REDONDEO} = 0.314159265\ldots \times 10^1 + 5.0 \times 10^{1-(5+1)} =$

$$\begin{array}{r} 0.314159265\ldots \times 10^1 \\ + \; 0.000005000\ldots \times 10^1 \\ \hline 0.314164265\ldots \times 10^1 \end{array}$$

$$fl(\pi)_{REDONDEO} = 0.31416 \times 10^1$$

ERROR DE REPRESENTACION

Se define **fl(x) = x(1+ε)**

ε : error de redondeo,

Si redondeamos:

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2} b^{1-t}$$

Si cortamos:

$$|\varepsilon| \leq b^{1-t}$$

Ejemplo: calcular los errores absoluto y relativo en los casos planteados a continuación:

x	*x**	*e*	*er*
$0.3000\ 10^{1}$	$0.3100\ 10^{1}$		
$0.3000\ 10^{-3}$	$0.3100\ 10^{-3}$		
$0.3000\ 10^{4}$	$0.3100\ 10^{4}$		

Qué se concluye de estos resultados?

OPERACIONES ARITMETICAS EN PUNTO FLOTANTE

Ej: b = 10, t = 3

X = $0.164.10^{3}$, y = $0.280.10^{3}$

Z = x+y = $0.167.10^{3}$

Operaciones en punto flotante: $\hat{+}, \hat{-}, \hat{*}, \hat{/}$

x $\widehat{op}$ y = fl(x op y) = (x op y)(1+ε)

OPERACIONES ARITMETICAS EN PUNTO FLOTANTE

FLOPS

(Floating point Operations Per Second)

Top500.org

2023

DOE/CD/Oak Ridge Nac. Lab.

Rank		System	Vendor	Total Cores	Rmax (TFlops)	Rpeak (TFlops)	Power (kW)
1	Frontier	HPE Cray , EX235a AMD Opt. 3° Gen EPIYC 64C 2.GHz, Slingshot-11	HPE	8,730,112	1,102.00	1,685.0	21,100

OPERACIONES ARITMETICAS EN PUNTO FLOTANTE

Estas operaciones pueden dar resultados incorrectos al operar:
- *Si sumamos dos números de magnitud muy diferente, puede ocurrir que el mas chico no se considere*

Ej, si $m = 5$ y tenemos los valores:
$x = 8647300$; $y = 12 \longrightarrow$ fl(x)= $0.86473x\ 10^7$; fl(y) = $0.12x10^2$
es decir que x e y se pueden representar exactamente.
Si calculamos

$x + y = 8647312$,
fl($x+y$) = $0.86473x10^7$ = fl(x) = x

Es decir que si en un calculo se suman primero los términos más pequeños se pierden menos cifras significativas que si se empieza sumando los términos de mayor valor

OPERACIONES ARITMETICAS EN PUNTO FLOTANTE

-*Comparación de números de punto flotante*

Nunca se deben comparar con el operador de igualdad directamente: $a = b$ sino $abs(a-b) < eps$
O si es un numero muy pequeño, no con 0, sino con una cota $abs(x) < eps$

En sintesis

El producto de dos números de máquina es un cálculo estable, sólo se pueden producir errores de overflow

La división de dos números de máquina es un cálculo estable, también sólo se pueden producir errores de overflow

La suma de dos números de máquina es estable cuando los dos números tienen el mismo signo, y puede ser inestable cuando los dos números tienen signo distinto.

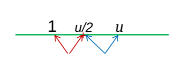
La resta de dos números de máquina es inestable cuando los dos números están muy próximos, y es estable cuando los dos números tienen distinto signo (en este caso es una suma de números del mismo signo).

Error de Representacion

Unidad de redondeo:
Se define como el menor valor $\boldsymbol{u}$ tal que

$$1 \hat{+} u > 1$$

Esto significa que no puede representarse ningún numero entre 1 y 1+u
Dado un numero g / 1 + g,
- 0 < g <$u/2$, se redondea a 1,
- si $u/2$< g < *1* se redondea a 1+u



Ej: utilizando Phyton

```
In [8]: print(np.finfo(np.float32).eps)
1.19209e-07

In [9]: print(np.finfo(float).eps)
2.22044604925e-16
```

ERROR DE REDONDEO ACUMULADO

Es la suma de todos los errores efectuados durante el cálculo

Ej: b = 10, t = 8

a= 0.23371258 10^{-4}

b = 0.33678429 10^{2}

c = $-0.33677811\ 10^{2}$

Calculamos $a\hat{+}b\hat{+}c$ de dos formas diferentes:

i) $a\hat{+}(b\hat{+}c)$ = 0.64137126 10^{-3}

ii) $(a\hat{+}b)\hat{+}c$ = 0.64100000 10^{-3}

Resultado exacto: a+b+c = 0.641371258 10^{-3}

ERROR DE REDONDEO ACUMULADO

Cada operación de punto flotante que realiza la computadora tiene asociado un error de redondeo; este error se acumula.

Analicemos el ej. anterior: dado a, b, c calculamos $z = a + b + c$

$a' = 0.23371258 \times 10^{-4}$

$b = 0.33678429 \times 10^{2}$

$c = -0.33677811 \times 10^{2}$

Se realiza el cálculo de dos maneras

i. $a\hat{+}(b\hat{+}c)$ *ii)* $(a\hat{+}b)\hat{+}c$

$a\hat{+}(b\hat{+}c)$

$$\left.\begin{array}{r} 0.33678429 \times 10^{2} \\ - \ 0.33677811 \times 10^{2} \\ \hline 0.00000618 \times 10^{2} \end{array}\right\} (b\hat{+}c)$$

0.00000618×10^{2} Redondeo $0.023371258 \times 10^{-3}$

$$\left.\begin{array}{r} 0.02337126 \times 10^{-3} \\ + \ 0.61800000 \times 10^{-3} \\ \hline 0.64137126 \times 10^{-3} \end{array}\right\} a\hat{+}(b\hat{+}c)$$

$(a\hat{+}b)\hat{+}c$

$$\left.\begin{array}{r} 0.00000023371258 \times 10^{2} \\ + \ 0.33678429000000 \times 10^{2} \\ \hline 0.33678452371258 \times 10^{2} \end{array}\right\} (a\hat{+}b)$$

$$\begin{array}{r} 0.33678452 \times 10^{2} \\ - \ 0.33677811 \times 10^{2} \\ \hline 0.00000641 \times 10^{2} \equiv 0.641 \times 10^{-3} \end{array}$$

Si $a + b + c = 0.641371258 \times 10^{-3}$ Qué concluye ?

ERROR DE REDONDEO ACUMULADO

En resumen:

Los resultados de las operaciones en la computadora tendrán en general errores debido a los errores de los operandos y al redondeo o truncamiento que ocurre al efectuar estas operaciones.

Errores de redondeo invalidan leyes básicas de la aritmética tal como la ley asociativa

$(x + y) + z \neq x + (y + z)$.

Si en un método los errores crecen mucho hablamos de método **mal condicionado o inestable**

Ej: Cálculo de e^{1} utilizando la serie:

$e^{x} = \sum_{i=0}^{n} x^{i}/_{i\,!} = 1 + x + x^{2}/2! + x^{3}/3! + \ldots + x^{n}/n!$

Si consideramos una precisión de 5 cifras

Término	Valor	Error
1	1	1.71828
2	2	0.71828
3	2.5	0.21828
4	2.66667	0.05161
5	2.70833	0.00995
6	2.71667	0.00161
7	2.71806	0.00022
.	.	.

ESTABILIDAD

Si pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en los resultados diremos que es **estable**, caso contrario es **inestable,** en algunos casos la estabilidad depende del conjunto de datos, entonces se dice: **condicionalmente estable**

Inestabilidad inherente es aquella propia del problema o sistema.

Inestabilidad inducida es la que se produce por usar un método equivocado para resolver un determinado problema.

ERROR DE SIGNIFICACIÓN

Se dice que el número p^* aproxima a p hasta t dígitos significativos, si t es el mayor entero no negativo para el cual :

$$\frac{|p-p^*|}{|p|} \leq 0.5 \times b^{1-t}$$

Ejemplo:
Sea $p=\sqrt{3}$.¿En cuantos dígitos significativos aproxima $p^*=1.7$ a p y $p^*=1.73$?
Si se toma $p^*=1.7$:

$\underline{t=2}$ es el mayor entero no negativo que verifica la desigualdad:

$$\frac{|\sqrt{3}-1.7|}{\sqrt{3}} = 0.0185 \leq 0.5 \times 10^{1-2}$$

Si se toma $p^*=1.73$:

$\underline{t=3}$ es el mayor el entero no negativo que verifica la desigualdad:

$$\frac{|\sqrt{3}-1.73|}{\sqrt{3}} = 0.001184 \leq 0.5 \times 10^{1-3}$$

ERROR DE SIGNIFICACIÓN

Este error se produce cuando al operar se produce una perdida de dígitos significativos

Ejemplo:
Sea $x_1 = 0.84456\ 10^0$ e $y_1 = 0.84444\ 10^0$ aproximaciones de x e y , en 4 cifras significativas. Queremos calcular $z = x - y$

Calculamos : $z_1 = x_1 - y_1$
$z_1 = 0.82457\ 10^0 - 0.82444\ 10^0$
$z_1 = 0.00013\ 10^0$
$z_1 = 0.13000\ 10^{-3}$

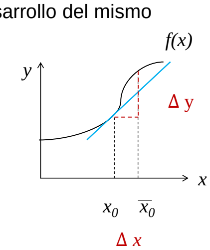
¿En cuantos dígitos significativos aproxima z_1 a z ?
Solo en 1 digito pues el 2 proviene de la 5ta cifra ,que estaba afectada de error. Esto ocurre cuando se restan cantidades muy próximas entre si

PROPAGACION DE ERRORES

Cuando usamos métodos numéricos , el error del resultado será la suma de los errores en el desarrollo del mismo

Funciones de una variable

$$y = f(x)$$
$$\Delta y = y(x_0) - y(\overline{x_0})$$
$$\Delta y \approx y'(\overline{x_0})\ \Delta x$$



FORMULA GRAL DE PROPAGACION DEL ERROR

Supongamos conocer $\overline{x1}$, $\overline{x2}$, … $\overline{xn}$ ~ x1, x2, … xn y sea y función de estas vbles.

Sea $\bar{x}$ = ($\overline{x1}$, $\overline{x2}$, … $\overline{xn}$) , x = (x1, x2, … xn)

$\Delta xi = \bar{x}i$ - xi , $\Delta y = y(\bar{x} - x)$

Veamos el siguiente Teorema: Dados $\bar{x}$, x e y(x) entonces,

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial xi}(\overline{x})\Delta xi \quad \text{, por lo tanto}$$

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial xi}(\overline{x})\right| |\Delta xi|$$

Ej: Calcular el error absoluto y relativo que se cometería al calcular $y = x^3$ si $x = 3 \pm 0.1$

$$x = 3 \quad , \Delta x = 0.1$$
$$\Delta y \approx (d(y)/dx)\Delta_x = (3x^2)\Delta_x$$
$$\Delta y \approx (3 \times 9)(0.1)$$
$$\Delta y \approx 2.7 = ea$$

$$yap = 3^3 = 27$$
$$yv = yap \pm ea = 27 \pm 2.7$$
$$er = 2.7/27 = 0.10\ \%$$

Ej: Una corriente pasa a través de una resistencia de 10 Ohmios, este valor tiene una precisión de 5%, la corriente es de 2 A y fue medida con una aproximación de ±0.1 A.

A) Hallar el valor aproximado del voltaje ***(v=i*r).***

B) Hallar el error absoluto y relativo

$$i = 2 \quad , \quad r = 10$$
$$\Delta i = 0.1 \quad , \Delta r = 5\%(10) = 0.5$$
$$v = i * r$$
$$\Delta v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial i}\right|\Delta_i + \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|\Delta_r$$
$$\Delta v \approx r\Delta_i + i\Delta_r$$
$$\Delta v \approx (10)(0.1) + (2)(0.5)$$
$$\Delta v \approx 2$$

$$v = i * r = 2 * 10 = 20$$
$$v = 20 \pm 2$$
$$vr = 2/20 = 10\ \%$$

Ej: Se tiene un triangulo rectángulo cuya altura h~ 3 cm y la base , b~ 4 cm Si se quiere calcular el área con un error no mayor al 10 %. Qué errores se pueden tener en los valores de h y b ?

Suponiendo que cada variable contribuye en igual proporción

$$h = 3$$
$$b = 4$$
$$area = (b * h)/2 = 6$$
$$\xi_a^* = 0.1(6) = 0.6$$
$$\xi_a \approx \xi_b * h + \xi_h * b$$

$$\xi_b^* = \frac{\xi_a^*}{2h} = \frac{0.6}{2(3)} = 0.1$$
$$\xi_h^* = \frac{\xi_a^*}{2b} = \frac{0.6}{2(4)} = 0.075$$

Ej: Calcular el error absoluto y relativo que se cometería al calcular **z = a ^{3} + b^{2}** si a = 2.02 ±0.01 y b = 0.60 ± 0.01

$a = 2.02 \quad , \quad b = 0.60$

$\Delta a = 0.01 \quad , \Delta b = 0.01$

$z = a^{3} + b^{2}$

$$\Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial a}\right| \Delta_a + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\right| \Delta_b$$

$\Delta z =$?

$\left|\frac{\partial z}{\partial a}\right| =$?

$\left|\frac{\partial z}{\partial b}\right| =$?

$zap =$?

$z = \quad zap \pm \Delta z =$?

La pérdida de precisión debida al error de redondeo puede ser resuelta, reescribiendo los cálculos o con una reformulación del problema; si es posible.

También es conveniente buscar métodos que reduzcan el número de operaciones Por ej: Método de Horner para evaluar un polinomio en un punto

Analizando las magnitudes de los números que intervienen en los cálculos

….

METODOS DE ESTIMACION DEL ERROR

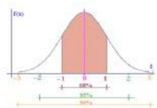
- Doble precisión
- Análisis regresivo del error
- Aritmética de intervalo
- Enfoque estadístico

METODOS DE ESTIMACION DEL ERROR

- **Enfoque estadístico**: en este método se adopta un modelo estocástico de la propagación del error de redondeo, los errores locales se tratan como si fueran variables aleatorias y se asume que tienen una distribución normal entre sus valores extremos. Se pueden calcular así la desviación estándar, la varianza y estimaciones del error de redondeo acumulado.
- Aun cuando requiere un mayor análisis matemático y tiempo adicional de calculo da muy buenas estimaciones del error , siendo el método más usado actualmente

Elementos de Estadística

La medida se repite n veces y se obtienen los valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_i, \dots x_n$.



Valor medio $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$

Desviación $\quad D_i = x_i - \bar{x}$

Desviación media $\quad \bar{D} = \dfrac{\sum |D_i|}{n}$

Desviación standard $\quad \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum D_i^2}{n-1}}$

68% datos en **x±1σ**
95% datos en **x±2σ**
99% datos en **x±3σ**

Error cuadrático medio $\quad \Delta x = \varepsilon = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum D_i^2}{n(n-1)}}$