Unidad III - SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Métodos directos. Métodos para matrices triangulares. Método de Eliminación de Gauss. Descomposición LU. Estrategia de pivoteo y escalamiento. Cálculo de la inversa. Métodos para matrices especiales: Cholesky, Thomas.
- Análisis del error: concepto de norma, número de condición, cotas de error. Método de los residuos.
- Métodos iterativos: Gauss Jacobi, Gauss Seidel. Método SOR. Análisis del error y la convergencia.

Análisis del Error en Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^{n}$

En realidad tenemos:

$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$

$A\,x + A\,\delta x + \delta A x + \delta A\,\delta x = Ax + \delta b$

Si despreciamos $\delta A\,\delta x$:

$$\boxed{\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x)}$$

Análisis del Error Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^{n}$

$\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x)$

Si se quiere tener una estimación numérica de la magnitud del error es necesario considerar la norma de estos vectores y matrices

$$\boxed{\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta b - \delta A x\|}$$

Norma

Medida escalar de la magnitud de un vector o una matriz.

Norma Vectorial: Dado un vector $X \in \Re^{n}$, definimos **norma p**

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$p = 1: \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$p = 2: \quad \|X\|_2 = \|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{Norma euclidiana}$$

$$p = \infty: \quad \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Norma

Ejemplos :

$x^T = (4, -3, 1)$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = (4+3+1) = 8$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{16+9+1} = 5.1$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \max(4,3,1) = 4$$

$x^T = (-12, -1, 0,4)$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = (12+1+0+4) = ?$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{144+1+16} = ?$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \max(12,1,4) = ?$$

Norma Matricial

Dada un matriz $A \in \Re^{nxn}$, y si $\|\circ\|$,es una norma vectorial definimos las normas matriciales , en función de las normas vectoriales definidas antes, con la siguiente expresión:

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Se llama Norma Inducida

Norma Matricial (Inducida)

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Norma Columna $\quad \| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Norma Fila $\quad \| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Norma Raíz $\quad \| A \|_2 = (\lambda_{max})^{1/2}$,

λ_{max} : radio espectral de $[A]^T[A]$

Definición: Dada una matriz A cuadrada, se define el *radio espectral* de A y se denota por $\rho(A)$ como $\rho(A) = \max |\ \lambda\ |$ siendo λ valor propio de A.
si λ es complejo, $\lambda = \alpha + \beta i$ se tiene $|\ \lambda\ | = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Ejemplo: $\quad A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max((4+2); (1+3)) = \max (6,4)=6$

$\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max((4+1); (2+3)) = \max (5,5)=5$

$\| A \|_2 = (\lambda_{max})^{1/2} = (26.18)^{1/2} = 5.117$

λ_{max} : radio espectral de A^TA

$A^TA = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$

$P(\lambda) = \det(A- \lambda I)= \lambda^2 -30\lambda +100 \longrightarrow \sigma(A)=(3.82,26.18) \longrightarrow \lambda_{max} =26.18$

Número de Condición

$\mathrm{Cond}(A) = \kappa(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$

- El producto de normas es un medida cuantitativa del grado de mal condicionamiento de la matriz de coeficientes. Mide cuan cerca está una matriz de ser singular
- Se usa para calcular como afectan los errores relativos en A y/o b el cálculo de x.
- Se puede demostrar que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \mathbf{k}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad \text{y} \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \le \mathbf{k}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

- Si A y b tienen t cifras significativas y $\kappa(A)$ es de un orden 10^s entonces la precisión del resultado será 10^{s-t}

Error en Sistemas Lineales

Teorema: Supongamos tener el sistema $Ax=b$, A no singular y sean δA y δb perturbaciones de A y de b, respectivamente ,si se cumple que $\|A\| < 1/ \|A^{-1}\|$ entonces:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{k(A)}{1- k(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Vemos que un $k(A)$ grande amplifica los errores en los datos

Sistema de ecuaciones mal condicionadas

- Una pequeño error en las entradas de la matriz A, causa una gran error en la solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Uparrow$

$\Delta b = -0.01 \qquad \Delta x = ?$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 101 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k(A) = ||\ A\ ||\ ||A^{-1}|| = 2.01 \times 201 = 404}$

Definición de Residuo

Dado el sistema $A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^n$

Sea x_c valor calculado

$$e = x - x_c$$
$$r(x) = b - Ax_c$$
$$r(x) = Ax - Ax_c = A(x - x_c) = Ae$$
$$e = A^{-1} r$$
$$si \quad r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

Teorema: Para toda matriz $A \in \Re^{nxn}$ vale que

$$\frac{1}{k(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Error en Eliminación de Gauss

- Wilkinson estudió el efecto del redondeo en el método de Eliminación de Gauss, considerando la triangulación con pivoteo y la solución de los dos sistemas triangulares, concluyendo que es un proceso muy estable, considerando que la matriz A no sea mal condicionada.
- Una forma de chequear esto es controlando los elementos de U, si crecen mucho es una señal de mala condición de la misma
- También multiplicar la inversa por la matriz de coeficientes original y estimar si el resultado es suficientemente cercano a la matriz identidad.

METODOS ITERATIVOS

Son recomendados para matrices *sparse* (ralas), caracterizadas por ordenes altos y muchos elementos nulos.

Las ventajas respecto a los métodos directos vistos se relacionan con: número de operaciones
posiciones de memoria
errores de redondeo

El principio de estos métodos es dividir a la matriz A , de forma tal que el sistema sea fácil de resolver.

A partir de $A\,x = b$ generamos la ecuación: $x^{k+1} = B\,x^k + c$
esta sucesión ,si converge, lo hace al valor buscado $x^k \longrightarrow x_v$

B se llama matriz de iteración,
Este método es una generalización del método de punto fijo

METODOS ITERATIVOS

Método directo $\longrightarrow$ O(n³ / 3)

n = 100	≈	$3.3\ 10^{5}$	flops
n = 10.000	≈	$3.3\ 10^{11}$	flops
n = 100.000	≈	$3.3\ 10^{14}$	flops

Tamaño limite más "grande " que podía ser tratado por los métodos directos:

Año	Tamaño
1950	20
1980	2000
2000	20000
….	…..

Método de Jacobi

Escribimos

$$A = L + D + U$$

D: matriz diagonal , L y U: matrices triangulares

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 \end{cases}$$

Suponiendo que los $a_{ii} \neq 0\ \forall\ i$, D es invertible

$$A\,x = b$$
$$(D + L + U)\,x = b$$
$$D\,x = -(L+U)\,x + b$$
$$x = -D^{-1}(L+U)\,x + D^{-1}\,b$$

$$\boxed{x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)\,x^k + D^{-1}\,b}$$

$B = -D^{-1}(L+U)$ $\qquad c = D^{-1}\,b$

Método de Jacobi

Este método se puede ilustrar usando las siguientes ecuaciones:

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2$$
$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3$$

Despejo cada x_i de la ecuación i-ésima, arrancamos de x^0

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(k)} - a_{13}\cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(k)} - a_{23}\cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(k)} - a_{32}\cdot x_2^{(k)}}{a_{33}}$$

Método de Jacobi

Forma Gral:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{k}}{a_{ii}} \qquad i = 1,\ldots,n \quad k > 0$$

Criterios de Convergencia

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$$

$$\frac{\left\| x^{k+1} - x^k \right\|}{\left\| x^{k+1} \right\|} < \varepsilon$$

$$k > N$$

Algoritmo Jacobi

Mientras $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\| \geq \varepsilon$ y $k < N$

Para i=1,2,…, n

$x_i = 0$

Para j=1,2,…,i-1,i+1,…,n

$x_i = x_i + a_{ij} x_j^k$

Fin

$x_i^{k+1} = (b_i - x_i) / a_{ii}$

Fin

Fin Mientras

Este método se dice de *aproximaciones simultaneas*

Ejemplo

$$A\,x = b \Longrightarrow \begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -4.5 \end{aligned}$$

$x^0 = (0,0,0)$

It 1

$$x_1^{(1)} = \frac{4 + 2\cdot 0 - 1\cdot 0}{6} = 2/3$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 0}{7} = 1/7 \qquad \left\| x^1 - x^0 \right\|_\infty = \max(0.666, 0.143, 0.9) = 0.9$$

$$x_3^{(1)} = \frac{-4.5 - 0 - 2\cdot 0}{-5} = 0.9$$

It 2

$$x_1^{(2)} = \frac{4 + 2\cdot(1/7) - 1\cdot(0.9)}{6} = 0.564 \qquad \left\| x^2 - x^1 \right\|_\infty = \max(0.10, 0.067, 0.19) = 0.19$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1 + 2\cdot(2/3) - 2\cdot 0.9}{7} = 0.076$$

$$x_3^{(2)} = \frac{-4.5 - 2/3 - 2\cdot(1/7)}{-5} = 1.09$$

It 3

$$x_1^{(3)} = \frac{4 + 2\cdot 0.076 - 1\cdot(1.09)}{6} = 0.510$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1 + 2\cdot(0.564) - 2\cdot 1.09}{7} = -0.007 \qquad \left\| x^3 - x^2 \right\|_\infty = \max(0.054, 0.083, 0.047) = 0.083$$

$$x_3^{(3)} = \frac{-4.5 - 0.564 - 2\cdot(0.076)}{-5} = 1.043 \qquad \Longrightarrow \quad x^m = (0.5, 0, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = L + D + U \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)\,x^k + D^{-1}\,b \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -D^{-1}(L+U) \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & -0.333 & 0.167 \\ -0.286 & 0 & 0.286 \\ -0.200 & -0.400 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss Seidel

Escribimos

$A = L + D + U$

D: matriz diagonal , L y U: matrices triangulares

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 \end{cases}$$

Suponiendo que los $a_{ii} \neq 0\ \forall\, i$, D es invertible

$$A\,x = b$$

$$(D + L + U)\,x = b$$

$$(D + L)\,x = -U\,x + b$$

$$D x^{k+1} = -L x^{k+1} - U x^{k} + b$$

$$\boxed{x^{k+1} = -D^{-1}(L\,x^{k+1} + U\,x^{k}) + D^{-1}\,b}$$

$B = -(D+L)^{-1}\,U \qquad c = (D+L)^{-1}\,b$

Método de Gauss-Seidel

Este método es muy parecido al de Jacobi, la diferencia es que en Jacobi se usan todas las componentes de la iteración k-ésima, x^k, para determinar las de la iteración (k+1), x^{k+1}, en cambio en Gauss-Seidel se van utilizando los valores de las incógnitas recién calculados en la misma iteración

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3$$

Despejo cada x_i de la ecuación i-ésima, arrancamos de x^0

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(k)} - a_{13}\cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(k+1)} - a_{23}\cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(k+1)} - a_{32}\cdot x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$$

Algoritmo Gauss-Seidel

Forma Gral:

$$x_i^{k+1} = \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} \right]}{a_{ii}}$$

Mientras $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\| \geq \varepsilon$ y $k < N$

Para i=1,2,…, n

sum=0

Para j=1,2,…,i-1,

$sum = sum + a_{ij} x_j^{k+1}$

Fin

Para j=i+1,…,n

$sum = sum + a_{ij} x_j^{k}$

Fin

Fin

$x_i^{k+1} = (b_i - sum) / a_{ii}$

Fin Mientras

Ejemplo

$$A\,x = b \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -4.5 \end{array}$$

$x^0 = (0,0,0)$

aproximaciones sucesivas

It 1

$$x_1^{(1)} = \frac{4+2\cdot 0-1\cdot 0}{6} = 2/3$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1+2\cdot 2/3-2\cdot 0}{7} = 0.333$$
$$x_3^{(1)} = \frac{-4.5-2/3-2\cdot 0.333}{-5} = 1.166$$

It 2

$$x_1^{(2)} = \frac{4+2\cdot 0.333-1.166}{6} = 0.583$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1+2\cdot 0.583-2\cdot 1.166}{7} = -0.0236$$
$$x_3^{(2)} = \frac{-4.5-0.583-2\cdot(-0.0236)}{-5} = 1.007$$

It 3

$$x_1^{(3)} = \frac{4+2\cdot(-0.0236)-1.007)}{6} = 0.491$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1+2\cdot(0.491)-2\cdot 1.007}{7} = -0.004$$
$$x_3^{(3)} = \frac{-4.5-0.491-2\cdot(-0.004)}{-5} = 0.9966 \Rightarrow x^m = (0.5,0,1)$$

Método Sobrerelajación (SOR)

Este método usa un factor de ponderación para mejorar el valor calculado

$$\boxed{x^{k+1} = \omega\, x^{k+1} + (1-\omega)\, x^k} \qquad 0 \le \omega \le 2$$

Forma Gral:

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right] \quad i = 1,\ldots n$$

$0 < \omega < 1$ hace convergente el método (subrelajación)

$\omega = 1$ Gauss Seidel

$1 < \omega < 2$ acelera convergencia del método (sobre relajación)

Convergencia

Método de Jacobi: Podemos afirmar su convergencia si A es diagonalmente dominante:

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Método de Gauss Seidel: Podemos afirmar su convergencia si A es diagonalmente dominante y también si es simétrica y definida positiva

Convergencia

Teorema de Convergencia

Suponiendo tener la ecuación: $x^{k+1} = B\,x^k + c$, si en alguna norma matricial $||B||$ < 1 y si x^0, x^1, … es la sucesión generada por esta ecuación, esta sucesión converge a la única solución x de la ecuación vectorial $x = B\,x + c$ independientemente del x^0 escogido

$$\begin{array}{l} x^{k+1} = B\,x^k + c \\ \underline{\quad x = B\,x + c \quad} \\ x^{k+1} - x = B(\,x^k - x\,) \\ e^{k+1} = B\,e^k \end{array}$$

$$\|e^{k+1}\| = \|B\|\,\|e^k\| \qquad \text{si } ||B|| < 1 \;\Rightarrow\; x^{k+1} \to x$$

Comparacion Métodos Directos e Iterativos

• Tiempo de ejecución	$O(n^3)$	n^2 x iter
• Almacenamiento	n x n	n
• Errores de redondeo	grandes	despreciable
• Tiempo de ejecución	Finito	?
• T. i. adicionales	´´barato´´	´´caro´´
• Aplicaciones	Generales	Específicas