

APROXIMACION DE FUNCIONES

Gran parte de las aproximaciones realizadas en Análisis Numérico consisten en aproximar una función $f(x)$ desconocida, mediante una cierta función $g(x)$, que se obtiene como combinación de funciones, partiendo de alguna clase de funciones conocidas.

Supongamos dadas $\{h_n(x), n = 0, 1, \dots\} \therefore$

$$g(x) \approx a_0 h_0(x) + a_1 h_1(x) + \dots + a_n h_n(x)$$

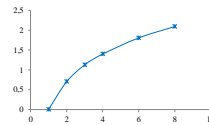
$$g(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i h_i(x)$$

Existen distintos criterios para elegir las a_i , dando lugar a distintos tipos de aproximación:

- Aproximaciones exactas o por interpolación
- Aproximaciones por mínimos cuadrados
- Aproximaciones de error mínimo - máximo

Metodos Numericos I

1

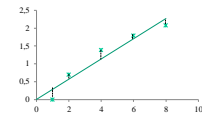


Aproximación por interpolación

$$f(x_i) = g(x_i)$$

Aproximación por error mínimo - máximo

$$\min_{g(x)} (\|f(x) - g(x)\|_{\infty}) = \min_{g(x)} (\max |f(x) - g(x)|)$$



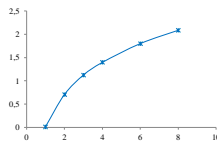
Aproximación por mínimos cuadrados

$$\min_{g(x)} (\|f(x) - g(x)\|_2)^2$$

Metodos Numericos I

2

Aproximación por interpolación



$$f(x_i) = g(x_i)$$

Metodos Numericos I

3

Unidad IV – INTERPOLACION

Contenido

- Concepto de interpolación. Interpolación polinómica.
- Forma de Lagrange. Error en la aproximación.
- Diferencias divididas. Forma de Newton. Error del polinomio interpolante.
- Interpolación segmentaria. Cubic splines.

Metodos Numericos I

4

Algunas aplicaciones :

- Procesamiento de imágenes
- Topografía
- Cartografía
- Modelos económicos
- Diseño industrial
- Tecnologías de comunicación
- Computación Gráfica
- Reconstrucción tridimensional de imágenes médicas.
- Meteorología (Mapas climáticos, detección de inundaciones)
- Etc..

Metodos Numericos I

5

INTERPOLACIÓN

Supongamos tener un conjunto de puntos, $P_i = (x_i, y_i)$, ya sean datos medidos o valores de una tabla; el problema que se nos presenta es que nos dan una función de la cual solo conocemos una serie de puntos: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ y se quiere el valor de un punto x (intermedio de x_0 y x_n) de esta función.

Buscamos una función que pase por esos puntos

Función de Interpolación:

$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i h_i(x)$$

tal que para $x_i, i = 0, n$

$$g(x_i) = \sum_{i=0}^n a_i h_i(x_i) = y_i$$

Metodos Numericos I

6

Familias de Funciones Bases

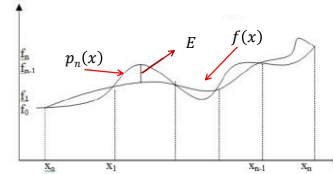
- Monomios : $1, x, x^2, x^3, \dots$
- Trigonómicas: $1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \dots$
- Fns. Spline: polinomios a trozos
- Fns. Exponenciales: e^x, e^{4x}, \dots

Metodos Numericos I

7

Interpolación Polinomial

Los polinomios son muy utilizados por su estabilidad
Supongamos que x_0, x_1, \dots, x_n son $n+1$ puntos $\in [a, b]$ y
sea $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
Queremos estimar el valor de un punto entre x_0 y x_n

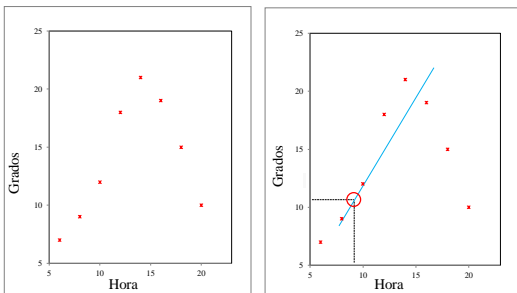


Decimos extrapolación cuando el valor que queremos estimar está fuera del rango medido (después de x_n o antes de x_0)

Metodos Numericos I

8

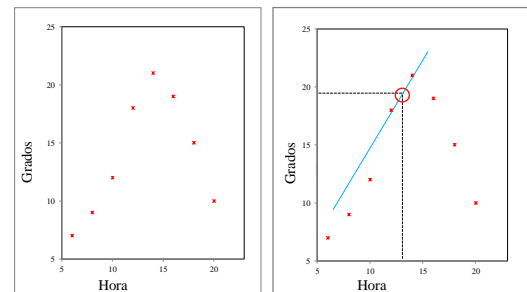
Ejemplo: $hr = [6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$
 $T = [7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]$



Metodos Numericos I

9

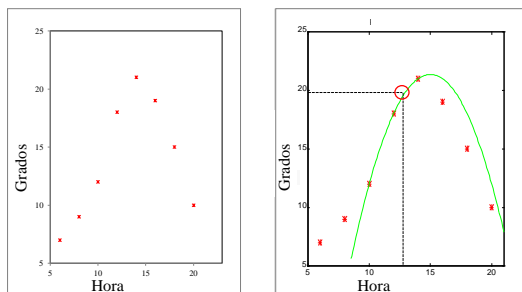
Ejemplo: $hr = [6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$
 $T = [7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]$



Metodos Numericos I

10

Ejemplo: $hr = [6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$
 $T = [7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]$



Metodos Numericos I

11

Interpolación Polinomial

Queremos construir un polinomio $p(x)$, de grado $\leq n$
que interpole a $f(x)$ en esos puntos

$$p(x_i) = f(x_i)$$

si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

tenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Metodos Numericos I

12

En forma matricial:

$$\vec{X} \vec{a} = \vec{f(X)}, \vec{X}: \text{matriz de Vandermonde}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Metodos Numericos I

13

Teorema de Existencia y Unicidad

Dados $n+1$ puntos distintos $x_i, i=0, \dots, n$ y $n+1$ ordenadas y_i existe y es único un polinomio interpolante $p(x)$ de grado $\leq n$ que interpola a los y_i en los puntos x_i

Polinomios de LAGRANGE

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

FORMA DE LAGRANGE

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

Metodos Numericos I

14

EJEMPLO : Interpolare en $x=2$ $f(x)=\ln(x)$; $f(2) = 0.6931472$

x	$f(x)$
1	0
4	1.386294
6	1.791760

i) Usando P_0 y P_1 :

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-4}{1-4} \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-1}{4-1}$$

$$p_1(x) = l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1)$$

$$p(2) = \frac{2-4}{1-4} 0 + \frac{2-1}{4-1} 1.386294 = 0.4620981$$

ii) Usando P_0 , P_1 y P_2 :

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad l_2(x) = ?$$

$$p_2(x) = l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2)$$

$$p(2) = \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)} 0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)} 1.386294 + \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)} 1.79176 = 0.565844$$

Calcular $p(x)$, en $x = 1.5$, usando i) P_0 y P_1 y ii) P_0 y P_2 (2,0.693147); cuál es el error en cada caso ?

Metodos Numericos I

15

Metodos Numericos I

16

ERROR DE INTERPOLACION

Teorema

Sea $f(x): [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ veces diferenciable en (a,b) , y sean $\{x_i\}_{i=0}^n$ $n+1$ puntos distintos en $[a,b]$.

Si $p_n(x)$ es el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a $f(x)$ en x_0, \dots, x_n \therefore para cada $x \in [a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ tal que:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

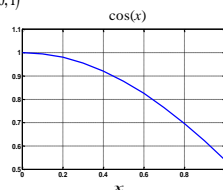
EJEMPLO : Calcular un cota para el error de interpolación si se interpola $f(x) = \cos(x)$ usando un polinomio de grado 3 en el intervalo $[0,1]$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

$$e_n = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4!} \cos(\xi), \quad \xi \in (0,1)$$

$$e_n \leq \frac{1}{24} \cos(\xi), \quad \xi \in (0,1)$$

$$e_n \leq \frac{1}{24} \approx 0.0417$$



Metodos Numericos I

17

Método de LAGRANGE

- Evita resolver el sistema de ecuaciones ($O(n^3)$)

- Tiene un costo del orden de $O(n^2)$

- Para estimar una cota del error se necesita conocer la derivada de orden $n+1$

- No es fácil de utilizar en problemas de integración o diferenciación

- Si se agrega un punto, hay que recalcular todos los coeficientes

Metodos Numericos I

18

FORMA DE NEWTON

La idea en este método es, dado p_{n-1} poder calcular p_n reusando lo anterior

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C(x)$$

$$C(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) \quad (1)$$

$C(x)$ debe ser de orden n , -----

Newton propuso el siguiente polinomio:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n-1}(x-x_0)\dots(x-x_{n-2}) + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Metodos Numericos I

19

FORMA DE NEWTON

$$C(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) \quad (1)$$



$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n-1}(x-x_0)\dots(x-x_{n-2}) + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n-1}(x-x_0)\dots(x-x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$C(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) = a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$C(x)$ tiene los n ceros x_0, \dots, x_{n-1} y por ser interpolante $p_n(x_n) = f(x_n)$

$$a_n = \frac{p_n(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}$$



$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

n -ésima diferencia dividida de f en x_0, \dots, x_{n-1}

Metodos Numericos I

20

Forma de NEWTON

Vamos a construir el polinomio en la forma de Newton

Con 1 punto $(x_0, f(x_0)) \rightarrow p_0(x) = a_0 = f(x_0)$

Con 2 puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Con n puntos

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Forma de Newton de Diferencias Divididas

Metodos Numericos I

21

Forma de NEWTON

$$p_0(x) = a_0 = f(x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

·
·

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Metodos Numericos I

22

Propiedades de las Diferencias Divididas

i) Las diferencias divididas se pueden escribir recursivamente en función de diferencias divididas anteriores

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

ii) Si los z_i son un reordenamiento de los x_i

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = f[z_1, z_0, z_2, \dots, z_n]$$

Metodos Numericos I

23

Tabla de Diferencias Divididas

i	x_i	$f(x_i)$	Primera	Segunda	Tercera
0	x_0	$f(x_0)$			
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Metodos Numericos I

24

Ejemplo: construir la tabla de dif. divididas. Si $f(x)=\cos(x)$

x_k	$f[x_k]$				
0.0	1.0000000				
1.0	0.5403023	-0.4596977			
2.0	-0.4161468	-0.9564491	-0.2483757		
3.0	-0.9899925	-0.5738457	0.1913017	0.1465592	
4.0	-0.6536436	0.3363499	0.4550973	0.0879318	-0.0146568

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.5403023 - 1}{1} = -0.4596977$$

$$P_1(x) = 1 - 0.4596977(x-0)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.9564491 - (-0.4596977)}{2 - 0} = -0.2483757$$

$$P_2(x) = 1 - 0.4596977(x-0) - 0.2483757(x)(x-1)$$

Metodos Numericos I

25

Ejemplo: construir la tabla de dif. divididas. Si $f(x)=\cos(x)$

x_k	$f[x_k]$				
0.0	1.0000000				
1.0	0.5403023	-0.4596977			
2.0	-0.4161468	-0.9564491	-0.2483757		
3.0	-0.9899925	-0.5738457	0.1913017	0.1465592	
4.0	-0.6536436	0.3363499	0.4550973	0.0879318	-0.0146568

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = 1 - 0.4596977(x-0) - 0.2483757(x)(x-1) + 0.1465592x(x-1)(x-2)$$

$$p_4(x) = ?$$

Metodos Numericos I

26

Error de interpolación al usar Newton

Sea $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n}$, $n+1$ puntos distintos en $[a, b]$. Si $P_n(x)$ es el polinomio de grado $< n$ que interpola a $f(x)$ en x_0, \dots, x_n entonces, el error que se comete en la interpolación viene dado por: $e_n = f(x) - p_n(x)$

La forma de $p_{n+1}(x)$ usando Newton es:

$$p_{n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Por ser interpolante: $p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$

O sea que:

$$f(x_{n+1}) = f(x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x_{n+1} - x_0) \dots (x_{n+1} - x_{n-1}) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x_{n+1} - x_0) \dots (x_{n+1} - x_n)$$

Por lo tanto:

$$e_n = f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x_{n+1} - x_0) \dots (x_{n+1} - x_n)$$

Metodos Numericos I

27

Si comparamos con la fórmula de error vista antes:

$$f(x_{n+1}) - p_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)$$

vemos que:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \xi \in (a, b)$$

es decir que con un punto más podemos calcular el error

$$e_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Regla del Término Siguiente

Metodos Numericos I

28

Observaciones:

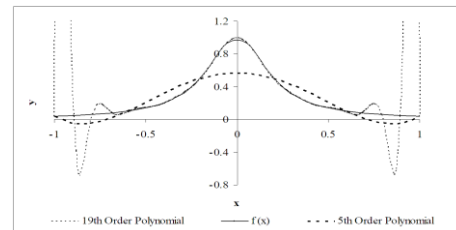
- El polinomio de interpolación suele usarse para estimar valores de una función tabulada, en las abscisas que no aparecen en la tabla.
- El aumento de grado no siempre mejora la aproximación, pues el polinomio se vuelve oscilante.
- Tipos de error:
 - redondeo: datos, coeficientes, aproximación
 - truncamiento: depende de la derivada

Metodos Numericos I

29

Ejemplo

Función de Runge $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ $[-1, 1]$



Si los datos son igualmente espaciados se observa inestabilidad cuando el grado crece, también el error crece con el número de puntos

La interpolación con polinomios de grado alto es un problema mal condicionado

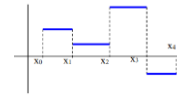
Metodos Numericos I

30

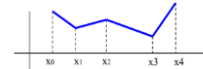
Interpolación Polinómica Segmentaria

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, una función spline de orden k (k -Spline) sobre dichos puntos es una función S verificando:

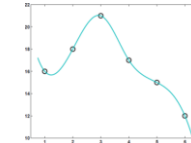
- (i) $S(x) = q_k(x)$ polinomio de grado $\leq k$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$
- (ii) $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$
- (iii) $S \in C^{k-1}[x_0, x_1]$



Spline orden 0



Spline orden 1



Spline orden 3

Metodos Numericos I

31

Metodos Numericos I

32

Cubic Spline

Sea $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ $n+1$ puntos distintos en $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

- a) En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, S es un polinomio cúbico denotado por $S_i(x)$.
- b) $S_i(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n-1$
- c) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$
- d) $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$
- e) $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$
- f) Se satisface alguna de las siguientes condiciones de frontera: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre)
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta)

Metodos Numericos I

33

Metodos Numericos I

34

Se plantea un sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes del polinomio $S_i(x)$:

$$a) S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$b) S_i(x_i) = f(x_i) = a_i$$

si $h_i = x_{i+1} - x_i$ y utilizando las restantes propiedades tenemos:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i+1} - h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i} [a_{i+1} - a_i] - \frac{6}{h_{i-1}} [a_i - a_{i-1}]$$

Esta matriz es tridiagonal, diagonalmente dominante, o sea que siempre tiene solución y se resuelve con el método de Thomas

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_0) & h_1 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_2 + h_1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Una vez calculados los c_i :

$$b_i = \frac{1}{h_i} [a_{i+1} - a_i] - \frac{h_i}{3} [2c_i + c_{i+1}]$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

Si el punto a interpolar está en el intervalo (x_i, x_{i+1}) se debe utilizar la función S_i

Metodos Numericos I

35

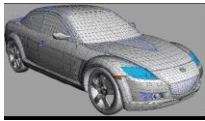
Metodos Numericos I

36

Error de Interpolación

Al usar una spline natural para interpolar una función $f(x)$, el error es proporcional a h^4 . Lo mismo ocurre cuando utilizamos una spline cúbica sujeta.

Diseño



Metodos Numericos I

Video Juegos



37

Animación



Metodos Numericos I

38