Sesión 3

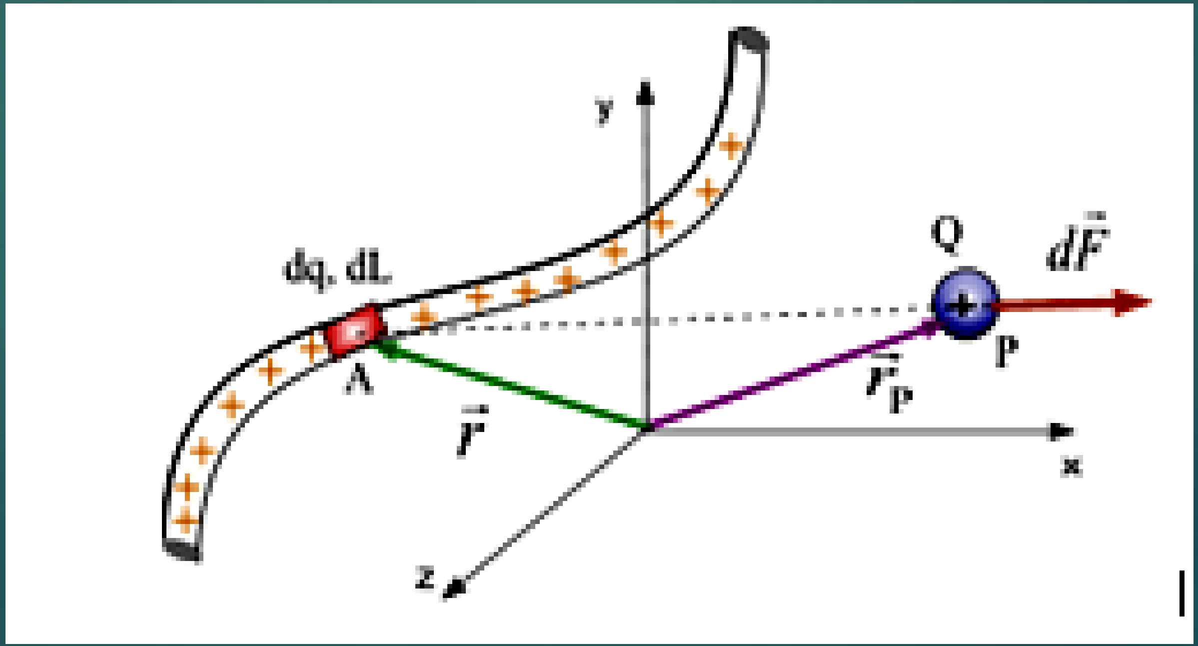
Fuerza eléctrica de una distribución continua de carga.

Distribución continua de carga.

Distribución lineal de carga.

Decimos que un cuerpo presenta una distribución lineal de carga, cuando sobre éste ha sido distribuida una carga en forma homogénea o heterogénea en toda su longitud . La densidad lineal de carga λ se expresa como la carga por unidad de longitud, esto es.

$$\lambda = \frac{dq}{dL}$$



Para evaluar la fuerza eléctrica ejercida por la distribución lineal de carga sobre una carga puntual Q, se divide a la distribución de carga en elementos diferenciales de carga *dq* y se determina la fuerza que produce *dq* sobre Q, es decir

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdq}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

Como: $dq = \lambda dL$

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\lambda dL}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

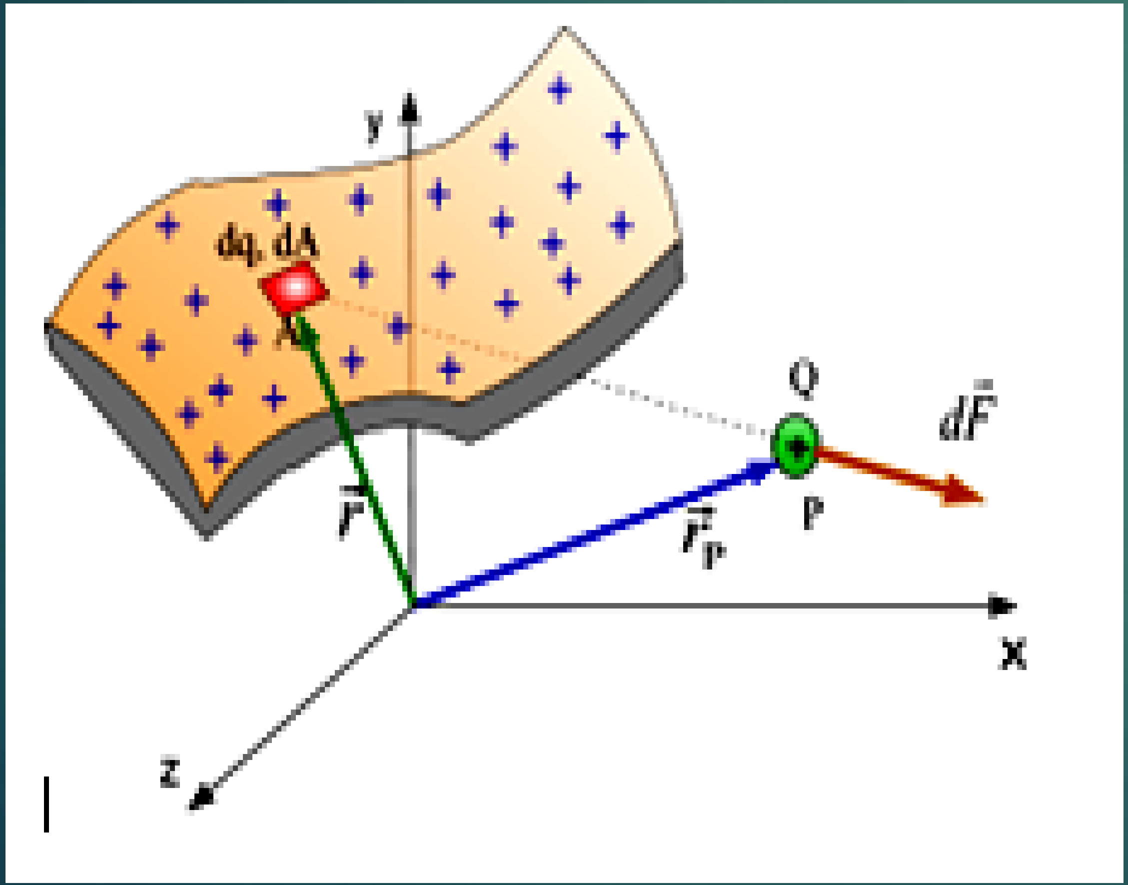
La fuerza eléctrica resultante sobre Q debido a la distribución lineal se obtiene integrando la ecuación (1.24), esto es

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dL}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

Distribución superficial de carga.

Se dice que un cuerpo presenta una distribución superficial de carga, cuando sobre su superficie ha sido distribuida homogéneamente o heterogéneamente una carga q, con una densidad superficial de carga σ, expresada como la carga por unidad de área, esto es

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$



$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdq}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

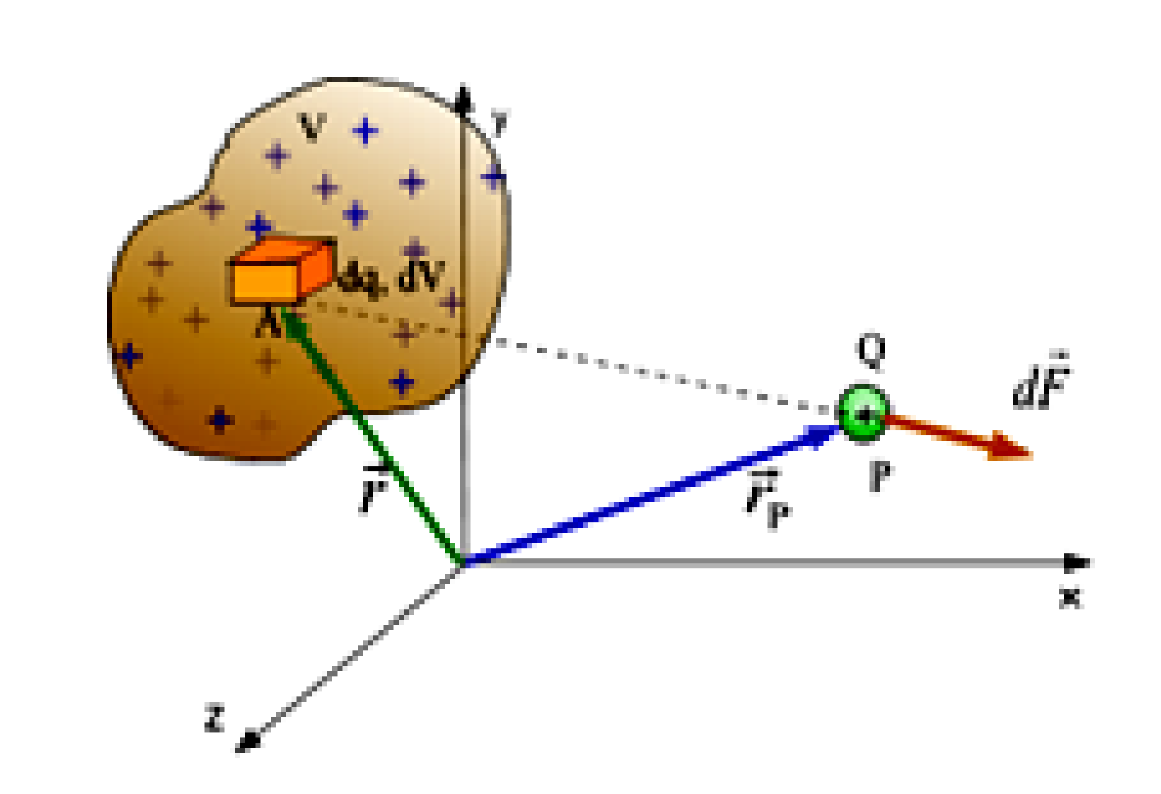
$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\sigma dA}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_A \frac{\sigma dA}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}}$$

Distribución volumétrica de carga.

Se dice que un cuerpo presenta una distribución volumétrica de carga, cuando sobre su volumen ha sido distribuida homogéneamente o heterogéneamente una carga q, con una densidad superficial de carga ρ, expresada como la carga por unidad de volumen, esto es

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



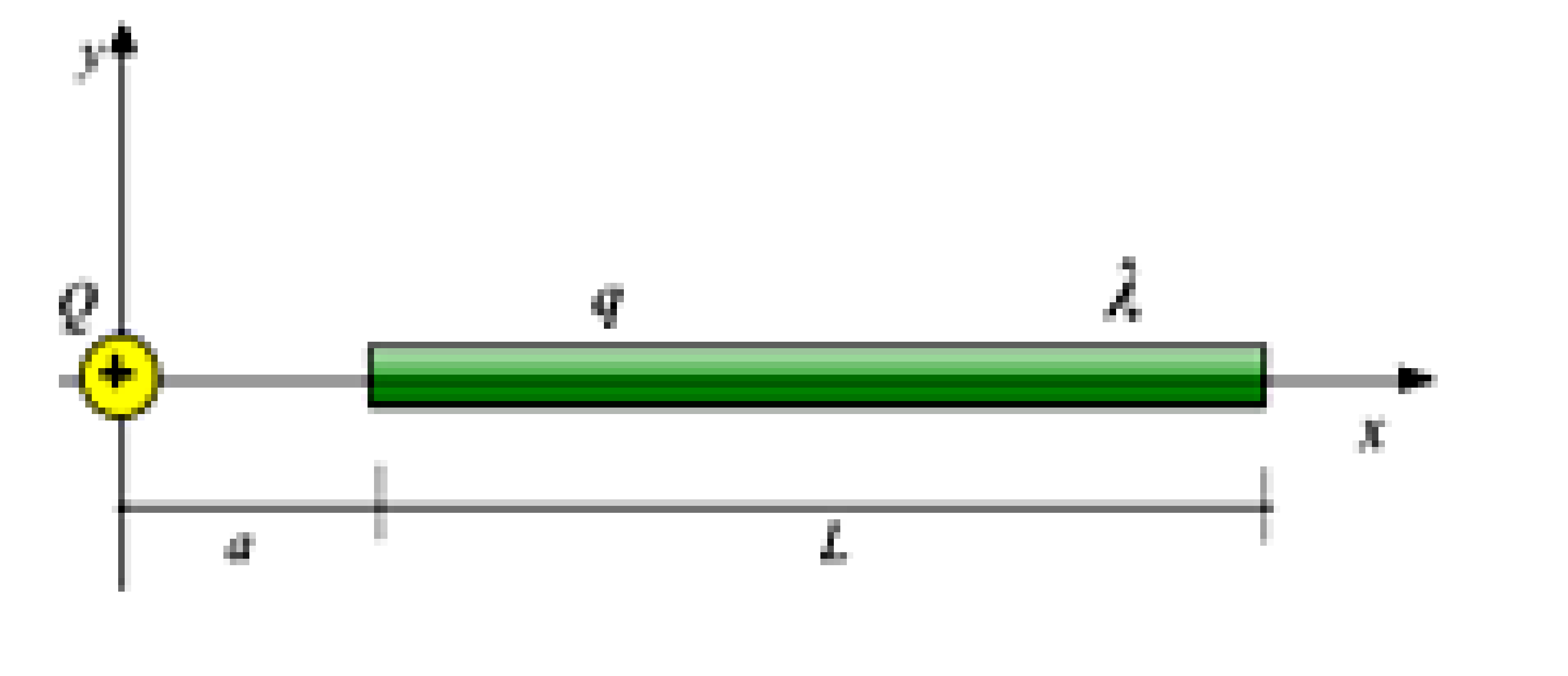
$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdq}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\rho dV}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho dV}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3}\overrightarrow{AP}}$$

Ejemplo 1:

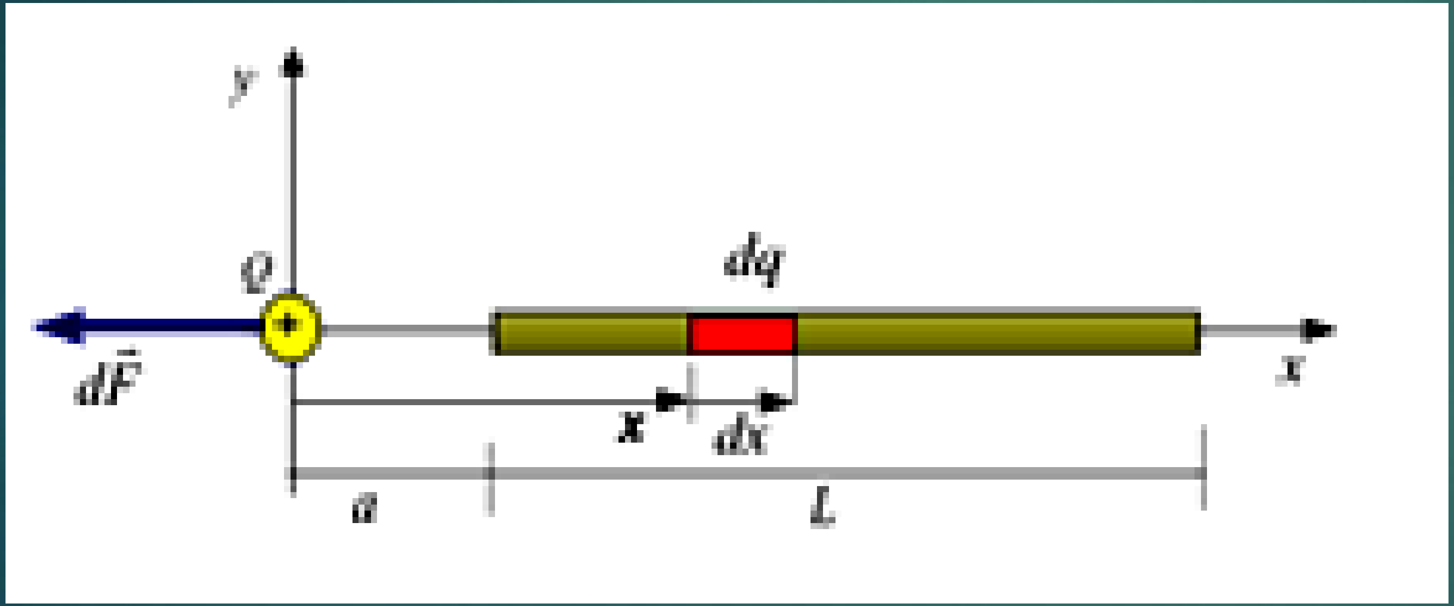
Una barra no conductora de longitud L con una carga por unidad de longitud λ y una carga total q está ubicado a lo largo del eje x, como se muestra en la figura. Determine, la fuerza eléctrica sobre una carga puntual Q ubicada en el origen de coordenadas



Solución:

Para evaluar la fuerza solicitada se divide la distribución de carga en elementos diferenciales (ver figura) con carga dq y longitud dx, dado por

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dx}$$



La fuerza producida por dq sobre Q será y está dada por

$$d\vec{F} = k\frac{Q(dq)}{x^2}\left(-\vec{i}\right)$$

$$d\vec{F} = k\frac{Q(\lambda dx)}{x^2}\left(-\vec{i}\right)$$

La fuerza total se obtiene integrando la ecuación anterior, es decir

$$\vec{F} = k\lambda Q\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2}\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{F} = -k\lambda Q\left(\frac{L}{a(L+a)}\right)\vec{i}$$

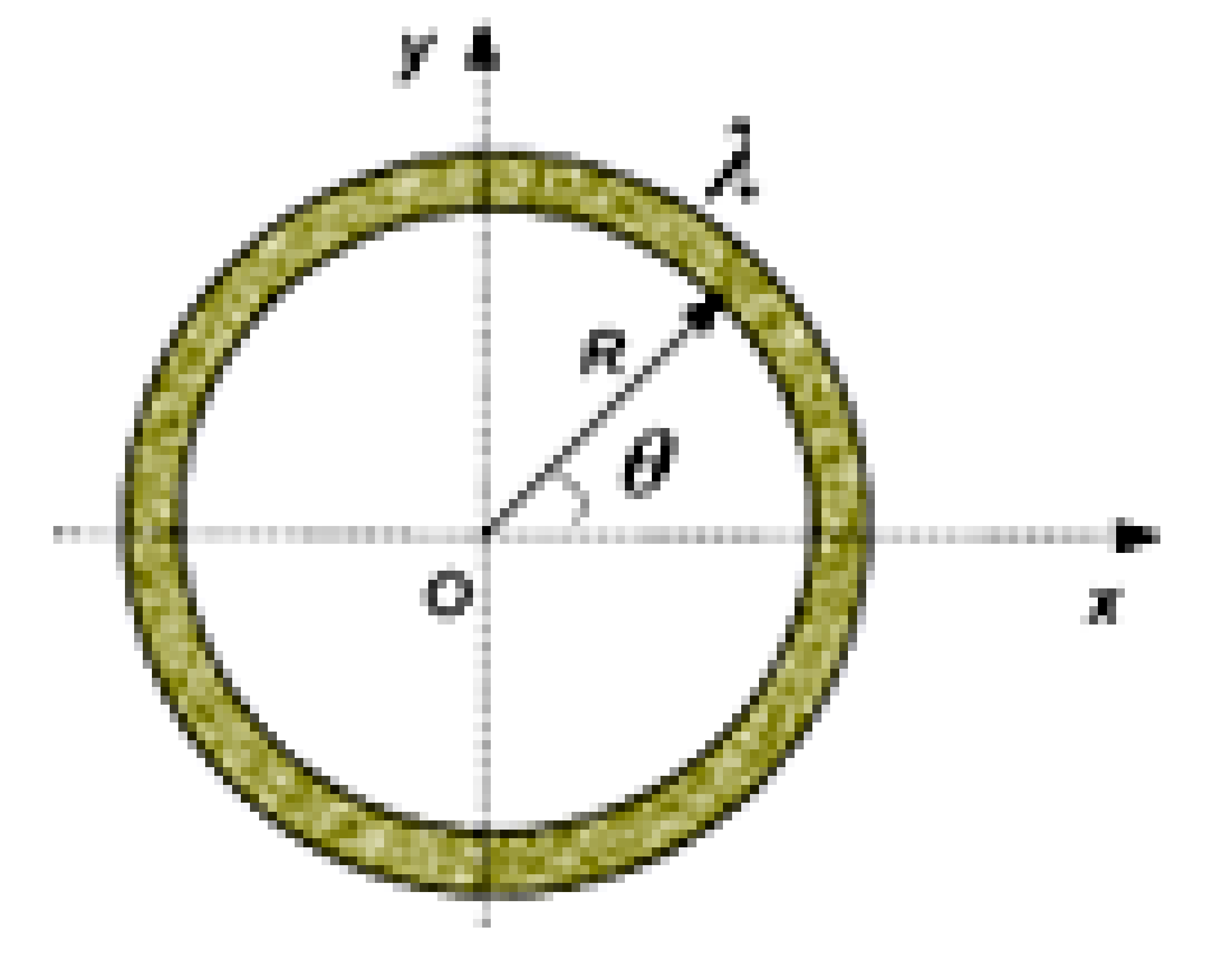
Si se remplaza el valor de la densidad de carga en función de la carga total q resulta

$$\vec{F} = -kQ\left(\frac{q}{L}\right)\left(\frac{L}{a(l+a)}\right)\vec{i}$$

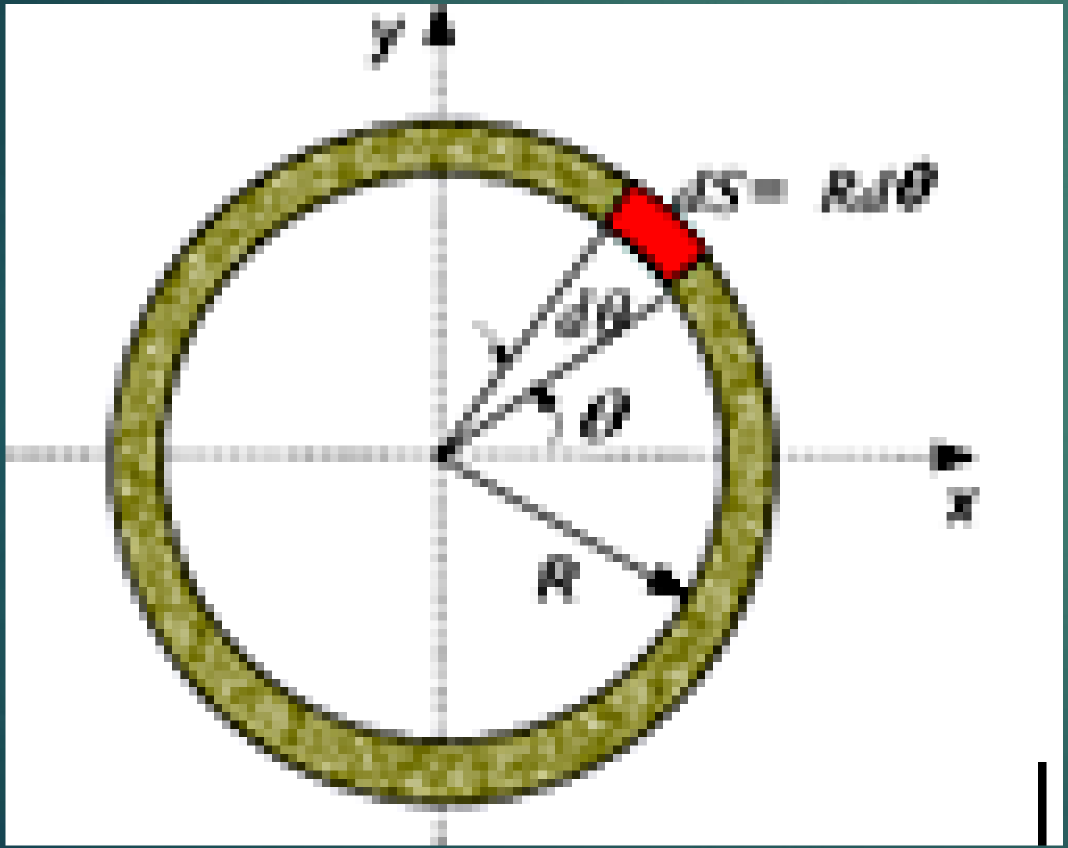
$$\boxed{\vec{F} = -k\left(\frac{qQ}{a(l+a)}\right)\vec{i}}$$

Ejemplo 2:

Un anillo circular delgado de radio R posee una distribución lineal de carga variable dada por $\lambda = \lambda_0 (1+\cos\theta)$, como se muestra en la figura. Determine la carga total del anillo.



Para resolver el problema se divide a la distribución de carga en elementos diferenciales de carga *dq* y longitud *ds* tal como se muestra en la figura.



De la definición de densidad de carga lineal tenemos

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \lambda dS = \lambda R d\theta$$

$$dq = \lambda_0 R(1+\cos\theta)d\theta$$

Integrando

$$Q = \int dq = \int_0^{2\pi} \lambda_0 R(1 + \cos\theta) d\theta$$

$$Q = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta) d\theta$$

$$Q = \lambda_0 R \left[\theta + sen\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$Q = 2\pi\lambda_0 R$$