TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN

Estadística

Unidad 1:

Conjuntos y conteos

UTN FRGP

Contenido

Conjuntos:

La **teoría de conjuntos** es una rama de la Matemática que investiga las propiedades y relaciones entre conjuntos. El concepto de conjunto es considerado primitivo, es decir, es un término cuyo significado preciso se desconoce, no se da una definición de este, pero sirven para definir otros conceptos que son los definidos. En el caso de la **noción de conjunto** se trabaja con notaciones que describen la colección y agrupamiento de objetos que pertenecen al conjunto.

Los objetos que forman un conjunto son llamados **elementos**. Cabe aclarar que las ideas de elemento y pertenencia también son primitivas.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas A, B, C, ..., Z.

Para especificar todos los elementos que pertenecen a un conjunto, se pueden utilizar dos formas: la forma de extensión o enumeración, y la forma de comprensión.

La forma de extensión o enumeración consiste en escribir uno por uno los elementos que forman un conjunto.

Por ejemplo: A = {a, b, c}, donde no importa el orden en que se disponen los elementos dentro de la notación. Es decir, A también puede escribirse como {a, c, b}, {b, a, c}, {b, c, a}, {c, a, b}, {c, b, a}.

Además, al detallar un conjunto, es común no repetir los elementos. Por ejemplo, el conjunto M = {a, b, b, d, d, d} se simplifica a M = {a, b, d}.

El símbolo $\in$ indica que un elemento pertenece a un conjunto. Por el contrario, para indicar que un elemento no pertenece al conjunto, se utiliza el símbolo con una raya inclinada /, de modo que se obtiene el símbolo como $\notin$. Por ejemplo, dado el conjunto A = {a, b, c}, a $\in$ B y d $\notin$ B.

La forma de comprensión consiste en enunciar la característica que tienen los elementos que conforman un conjunto. Por ejemplo, A = {x / x es una vocal}.

Nótese que la forma por enumeración puede ser utilizada cuando los conjuntos a los que se hace referencia poseen una cantidad finita de elementos. Sin embargo, existen conjuntos que poseen una cantidad infinita de elementos para los cuales la forma de detallar un conjunto por comprensión es la adecuada. Por ejemplo, el conjunto: H = {x ∈ N/ x< 60}

En la expresión se indica que dicho conjunto está por formado por elementos x cumplen con las características de ser un número real (N) y menor que 60. Para poder describir cualquier subconjunto de números reales también se cuenta con la notación de intervalos:

(a;b) = {x ∈ R / a < x < b}

[a; b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}

(a; b] = {x ∈ R / a < x ≤ b}

[a; b) = {x ∈ R / a ≤ x < b}

Los conjuntos pueden clasificarse según la cantidad de elementos que posee:

a) Conjunto vacío:

Es aquel conjunto que carece de elementos y se denota con el símbolo ∅.

b) Conjunto finito:

Es aquel conjunto que posee una cantidad finita de elementos. Dicha cantidad se asocia con un número que pertenece al conjunto N0 y es representada un mediante el concepto denominado cardinal de un conjunto que se denota #(nombre del conjunto). Por ejemplo:

#(∅) = 0

A = {a, b, c} entonces #(A) = 3

c) Conjunto infinito:

Es aquel conjunto que posee una cantidad infinita de elementos. Dichos conjuntos también poseen cardinal pero no se asocia con un número que pertenece al conjunto de los números naturales (N_0).

Inclusión de conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos, se dice que A está incluido en B o que A es un subconjunto de B si y solo si todo elemento que pertenece a A, también pertenece a B: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$). El símbolo $\forall$ antepuesto a la x quiere decir que para todo elemento x debe cumplirse la proposición dada.

Algunas de las propiedades de la inclusión de conjuntos son:

a) Reflexividad:
   Todo conjunto está incluido en sí mismo.
b) Antisimetría:
   Si un conjunto A está incluido en un conjunto B y, a su vez, B está incluido en A, entonces A y B son iguales.
c) Transitividad:
   Si un conjunto A está incluido en un conjunto B y este, a su vez, está incluido en un conjunto C entonces A también está incluido en C. En otras palabras, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
d) Subconjunto propio:
   Un subconjunto propio es aquel en el que no todos los elementos de B son elementos de A. Formalmente, si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, entonces A es un subconjunto propio de B. En estos casos suele usarse el símbolo $\subset$ en lugar de $\subseteq$ ya que este último implica igualdad.
e) El conjunto vacío ($\emptyset$) está incluido en cualquier conjunto:

   Demostración: Sea A un conjunto cualquiera. Queremos demostrar que $\emptyset \subseteq A$, es decir, que todo elemento del conjunto vacío pertenece a A. Supongamos por contradicción que existe un elemento x tal que $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Sin embargo, esto es imposible, ya que el conjunto vacío no contiene elementos. Por lo tanto, no existe ningún elemento en $\emptyset$ que no pertenezca a A, lo que implica que $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto A.

Igualdad de conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es igual a B si y solo si A está incluido en B y B está incluido en A: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Conjunto universal o conjunto referencial a un conjunto dado.

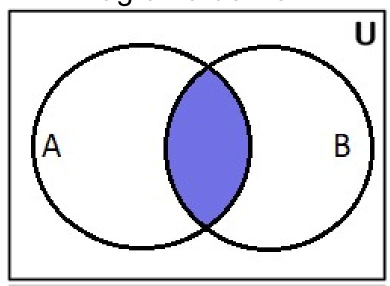
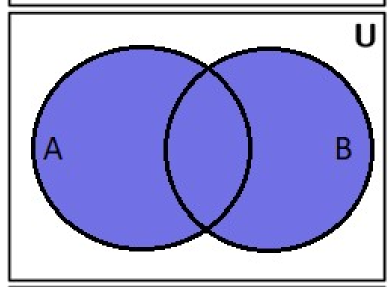
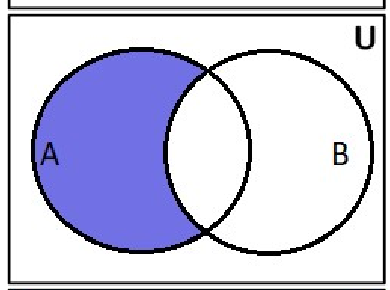
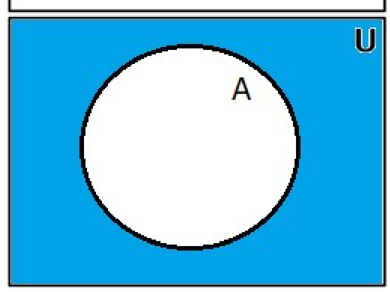
Se denomina conjunto universal a un conjunto dado A, que se denota U, cuando U incluye o es igual al conjunto A: $U \supseteq A$.

Diagramas de Venn-Euler

Los diagramas de Venn-Euler son una representación gráfica que permiten mostrar la agrupación de elementos que pertenecen a un conjunto mediante curvas cerradas, comúnmente circulares o rectangulares, como en el caso de los conjuntos universales. Estos diagramas de Venn pueden superponerse o contenerse entre sí.

Relación de los diagramas con las operaciones entre conjuntos.

Sean A, B conjuntos y U conjunto referencia de A:

	Operación	Diagrama de Venn
Intersección	$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$	
Unión	$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$	
Diferencia	$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$	
Complemento	$A' = U - A = \{x \,/\, x \in U \text{ y } x \notin A\}$	

Nótese que el cardinal de la unión dos conjuntos: $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$

Aplicaciones a problemas de conteo.

Estos diagramas resultan de utilidad en los problemas de conteo. Cabe aclarar que en dichos problemas, se altera la función destinada en la teoría de conjuntos para estos diagramas, ya que no se ubicaran en el interior de las curvas los elementos de cada conjunto sino que se indicaran sus respectivos cardinales.

Veamos un ejercicio de ejemplo:

1- En una entrevista se les preguntó a setenta y cinco personas sobre que deporte practican. Doce indicaron que practican futbol, dieciocho dijeron que practican básquet y veinticuatro que practican vóley. Seis de los que juegan futbol también juegan básquet, cuatro practican futbol y vóley y diez practican vóley y básquet. Sólo una persona practica los tres deportes.

a) ¿Cuántas personas no practican ningún deporte?
b) ¿Cuántas practican sólo futbol?
c) ¿Cuántas practican sólo básquet?
d) ¿Cuántas practican sólo vóley?

Descripción de los conjuntos:

U = {x/x es persona entrevistada}

F = {x/x es entrevistado que practica futbol}

B = {x/x es entrevistado que practica básquet}

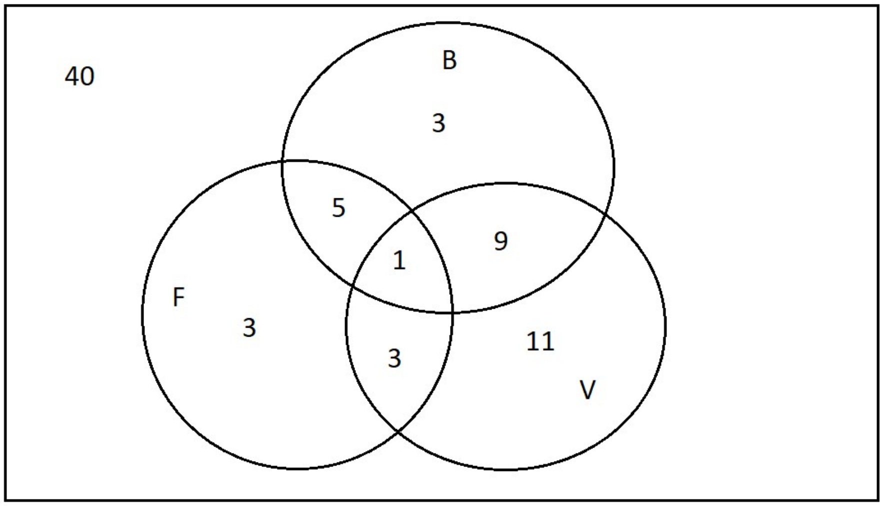
V = {x/x es entrevistado que practica vóley}

Datos:

$\#(U) = 75$; $\#(F) = 12$; $\#(B) = 18$; $\#(V) = 24$;

$\#(F \cap B) = 6$; $\#(F \cap V) = 4$; $\#(B \cap V) = 10$; $\#(F \cap B \cap V) = 1$

Organización de la información en el diagrama de Venn:



Respuestas:

a) $\#(F \cup B \cup V)' = 40$
b) $\#[F - (B \cup V)] = 3$
c) $\#[B - (F \cup V)] = 3$
d) $\#[V - (F \cup B)] = 11$

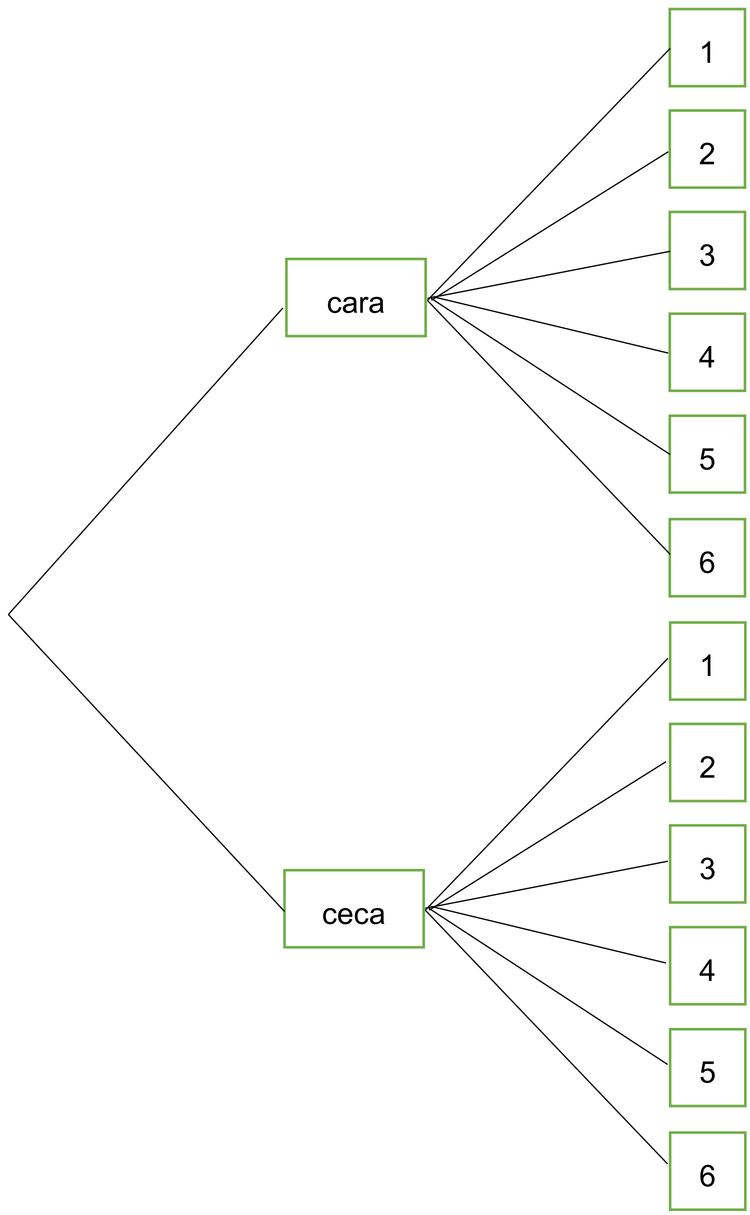
Conteo

Principio Fundamental del Conteo (PFC)

Se supone un proceso que comprende una sucesión de k etapas. De modo que n_1 es la cantidad finita de maneras diferentes en que pueda darse la primera etapa y n_2 la cantidad finita de maneras distintas en que pueda ocurrir la segunda etapa luego de la primera. Y así sucesivamente, tal que sea n_k la cantidad de formas diferentes en que la k-esima etapa pueda darse. Entonces, la cantidad total de maneras diferentes en el suceso pueda ocurrir resulta de multiplicar los n_i desde i=1 hasta i=k:

$$\text{Total de casos posibles} = n_1 \,.\, n_2 \ldots n_k$$

El diagrama de árbol es una representación gráfica del PFC. Es utilizado en situaciones de conteo y en el cálculo de probabilidades. Veamos un ejemplo de un diagrama de árbol con los resultados posibles al tirar un dado y una moneda.



Como vemos en el diagrama, si seguimos cada rama de izquierda a derecha tenemos cada uno de los posibles resultados del experimento planteado. Podemos escribirlo con notación de conjunto de la siguiente manera:

E= {(cara; 1); (cara; 2); (cara; 3); (cara; 4); (cara; 5); (cara; 6); (ceca; 1); (ceca; 2); (ceca; 3); (ceca; 4); (ceca; 5); (ceca; 6)}

El conjunto E es denominado **espacio muestral** y representa al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El cardinal del espacio muestral es la cantidad de resultados posibles que tiene el experimento, en este caso 12. Si calculamos el total de casos posibles usando el PFC, tenemos que n_1 es igual a 2 (los posibles resultados de tirar una moneda) y n_2 es igual a 6 (los posibles resultados de tirar un dado), lo que nos da $\#(E) = n_1 . n_2 = 2 . 6 = 12$.

Factorial de un número N_0.

Se define como el factorial de un número n, que se denota como **n!**, de la siguiente manera:

$$n! = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ 1 & si\ n = 1 \\ n\,.\,(n-1)! & si\ n > 1 \end{cases}$$

Esto quiere decir que si queremos calcular el factorial de 5, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$5! = 5 . 4! = 5. 4 . 3! = 5 . 4 . 3 . 2! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1! = 5 . 4 . 3 . 2 .1$$

Vemos como al ir aplicando la definición de factorial nos termina quedando la multiplicación de todos los valores desde el 5 hasta el 1.

Permutaciones y combinaciones.

Al inicio de la unidad se comentó que la Combinatoria es la rama de la Matemática que se dedica a buscar métodos y estrategias para el conteo de los elementos de un conjunto o bien la forma de agrupar los elementos de un conjunto.

Existen distintas formas de realizar estos agrupamientos (o arreglos), ya sea que se puedan tomar todos los elementos de los cuales se disponga o no, según puedan repetirse los elementos o no, y si es importante o no el orden en que se ubiquen dichos elementos.

Variaciones simples.

Se define como un arreglo ordenado de k objetos, sin repetición, que se seleccionan entre n objetos distintos. Se denota como $V_{n;\,k}$, que se lee como variaciones de n tomados de a k y se calcula:

$$V_{n;\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Si k = n (se toman todos los elementos de los que se dispone para formar las agrupaciones), nos queda que el denominador es el factorial de 0 lo que, por definición, es igual a 1. Suele denominarse como P_n, que se lee como **permutaciones de n** (o de n elementos tomados de a n) y se calcula directamente como el factorial de n.

Combinatoria.

Se define como un arreglo de k objetos, donde carece de importancia el orden y sin repetición, que se seleccionan entre n objetos distintos. Suele simbolizarse como $C_{n;\,k}$ y se calcula:

$$C_{n;\,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$$

Al dividir por el factorial de k, estamos sacando las permutaciones propias que cada grupo con que tienen los mismos elementos pero en distinto orden.