TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN

Estadística

Unidad 2:

Probabilidades

UTN FRGP

Contenido

Probabilidades.

El Cálculo de Probabilidades históricamente comenzó a desarrollarse (de forma independiente a la Estadística) con los estudios realizados por Blaise Pascal y Pierre Fermat, junto con el Cardano en los siglos XVI y XVII cuando comienzan a aplicar métodos matemáticos para resolver problemas de juegos de azar con cartas y dados. Y recién en el siglo XIX, Laplace une la estadística con las probabilidades y de esa manera se formalizaron los conceptos teóricos de la estadística actual.

Conceptos básicos.

Experimento aleatorio.

Son aquellos en donde no se puede anticipar el resultado que ocurrirá, pero sí se conocen todos los resultados posibles del experimento. Por ejemplo: si se tira un dado, no sabemos qué valor específico se dará, pero sí sabemos que los valores posibles son números del 1 al 6.

El cálculo de las probabilidades no tiene como objetivo determinar cuál es el resultado del próximo experimento, sino que busca “estimar” qué porcentaje de veces se producirá determinado resultado, si el experimento se repite una gran cantidad de veces.

Espacio muestral o espacio de eventos.

Se denota con “U”, “S” o “E” al conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Cada elemento que pertenece al mismo es llamado un punto muestral.

Por ejemplo: Se arroja un dado, entonces E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Cualquier subconjunto de E se llama evento o suceso.

Se pueden combinar eventos dentro de un espacio muestral para generar otros nuevos, usando operaciones de conjuntos:

a) $A \cap B$ es el evento que sucede si y solo si A y B suceden simultáneamente.
b) $A \cup B$ es el evento que sucede si y solo si A o B o ambos eventos suceden.
c) A’ o $\bar{A}$ es el evento que se da si no sucede A.

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si son disjuntos, es decir, si se da que la intersección entre ambos es vacía: $A \cap B = \emptyset$.

Siguiendo con el ejemplo de arrojar un dado, con E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, podemos definir los siguientes eventos:

A = {x ∈ E / x es par o primo}; B = {x ∈ E / x es impar y primo}; C = {x ∈ E / x no es primo}

A = {2, 3, 4, 5, 6}
B = {3, 5}
C = {1, 4, 6}

Entonces:

A ∪ B = {2, 3, 4, 5, 6}
A ∩ B = {3, 5}
B ∩ C = ∅ (B y C son mutuamente excluyentes).

Tamaño del Espacio Muestral Finito.

Es el cardinal del espacio muestral y representa la cantidad de resultados posibles que tiene nuestro experimento aleatorio.

En ciertas ocasiones, para dimensionar e incluso obtener un listado de los elementos que componen el espacio muestral se utilizan las estrategias vistas en la unidad anterior.

Por ejemplo, supongamos que tiramos dos dados y anotamos los números que salen. Podríamos calcular los resultados posibles con PFC, pensando en un proceso de dos etapas, con seis valores por cada etapa (6 . 6 = 36 resultados posibles).

Definición de probabilidad según distintas escuelas.

Escuela clásica o de Laplace.

Definición:

La probabilidad de la ocurrencia de un evento o suceso aleatorio A, que se denota P(A), es igual al cociente entre la cantidad de casos favorables y los casos posibles.

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

Condiciones de la definición:

- Determinación precisa de E, es decir un espacio muestral de tamaño N.
- Todos los resultados del experimento deben ser equiprobables.

Escuela axiomática.

En 1933, el matemático ruso Andrey Kolmogorov elaboró una formalización de la definición de probabilidad, sobre la base de los siguientes axiomas.

Sea E un espacio muestral, A un evento perteneciente a E y sea P una función de E en los números reales:

- Axioma de la no negatividad:
  La probabilidad de cualquier evento o suceso nunca puede ser negativa. Es decir, para cualquier suceso A, la probabilidad de A debe ser mayor o igual a cero:
  $P(A) \geq 0$.

- Axioma de la aditividad:
  Si A y B son dos sucesos disjuntos, es decir, no pueden ocurrir los dos simultáneamente, entonces la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos (la probabilidad de la unión) es igual a la suma de las probabilidades individuales:
  Si $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Axioma de la normalización:
  La probabilidad del espacio muestral completo es igual a 1, es decir, $P(E) = 1$.

De estos axiomas se desprenden las siguientes propiedades:

1) $P(A') = 1 - P(A)$
2) $P(\emptyset) = 0$
3) $0 \leq P(A) \leq 1$
4) Si A y B no son dos sucesos disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$), entonces:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Escuela experimental o frecuencial.

Definición:

La probabilidad es el **límite de la frecuencia** de aparición del evento favorable cuando la cantidad de experimentos realizados tiende a infinito.

Un ejemplo de esto podría ser el cálculo de la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda mediante la repetición del experimento en condiciones similares.

Limitaciones de la definición:

- Requiere una gran cantidad de repeticiones en el experimento que no necesariamente pueden suplirse con simulaciones.
- No todos los fenómenos de estudio podrán reproducirse en experimentos repetibles una gran cantidad de veces.

Escuela subjetiva.

Es un enfoque en la teoría de la probabilidad que se centra en la asignación de probabilidades subjetivas basadas en creencias individuales y en la actualización de esas probabilidades a medida que se obtiene nueva información.

Desde la perspectiva de la Escuela Subjetiva, la probabilidad se concibe como una medida de la creencia o grado de confianza de un individuo en la ocurrencia de un evento. En lugar de basarse en la frecuencia relativa de ocurrencia de eventos en un conjunto de repeticiones de un experimento, la probabilidad se basa en la información y el conocimiento subjetivo de cada persona.

Limitaciones:

Su falta de formalización hace que sea muy fácil caer en inconsistencias o contradicciones. No tiene utilidad más que como concepto intuitivo, para pensar en la definición de probabilidad en contextos de menor rigor.

Reglas de probabilidad

Probabilidad de la unión.

Sean A y B dos sucesos de E, cada uno de los cuales puede presentarse o no cada vez que se realiza el experimento, se considera el suceso aparición de “al menos uno de ellos”, es decir, el suceso se cumplirá si aparece A, si lo hace B o si lo hacen ambos.

La fórmula para calcular la probabilidad de la unión es:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se le debe restar $P(A \cap B)$ ya que está incluida tanto en $P(A)$ como en $P(B)$, por lo que la estamos sumando dos veces.

Cuando A y B son disjuntos, la fórmula se simplifica ya que $P(A \cap B) = 0$, quedando:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad del complemento.

Sea A un suceso de E, A’ su complemento. Entonces podemos calcular la probabilidad de A’ como P(E) menos P(A):

P(A’) = P(E) – P(A)

Y como por el axioma de normalización sabemos que P(E) = 1, nos queda:

P(A’) = 1 – P(A)

Probabilidad condicional

En muchos casos, conocer o suponer que se da un evento puede aportar información para el cálculo de la probabilidad de otro evento. Siendo A y B dos sucesos cualesquiera de E, aplicamos la noción de probabilidad condicional a estas situaciones, que se expresa: P(A / B), y se lee “probabilidad de que, habiendo ocurrido B, ocurra A”, o “probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B”.

Es importante no confundirlo con P(A ∩ B). La probabilidad de la intersección es la probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez y se calcula como el número de casos favorables sobre el total de casos del espacio muestral, mientras que la probabilidad condicionada P(A / B) ya da por sentado que ocurrió el suceso B, por lo que se buscan solo los casos favorables a A dentro de ese subconjunto y se divide por el total de casos de ese subconjunto. Escrito como fórmula nos queda:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De esta fórmula también podemos despejar P(A ∩ B), quedándonos:

$$P(A \cap B) = P(A / B) \,.\, P(B)$$

Y dado que la intersección es conmutativa:

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B / A) \,.\, P(A)$$

Sucesos independientes

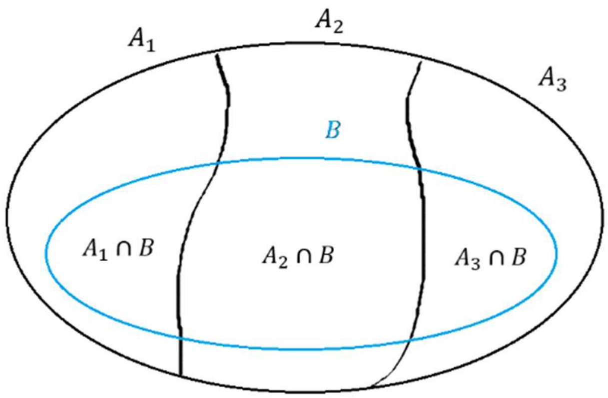
Decimos que dos sucesos A y B son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Que dos eventos sean independientes significa que

P(A / B) = P(A) (ya que la probabilidad de A no es afectada por la ocurrencia de B), lo que nos deja que:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

Probabilidad total

Supongamos que un evento B perteneciente a E puede suceder como parte de la realización de varios otros eventos A_i, también de E. Supongamos también que queremos calcular la probabilidad de B sin relación a ningún otro conjunto.



Mirando el diagrama queda claro que si conociéramos las probabilidades $P(A_i \cap B)$ para todo i, podríamos simplemente sumarlas y reconstruiríamos P(B):

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Como vimos anteriormente, la probabilidad de la intersección puede calcularse como el producto entre la probabilidad condicional por la probabilidad del suceso que ya ocurrió, quedándonos:

$P(B) = P(B / A_1) \,.\, P(A_1) + P(B / A_2) \,.\, P(A_2) + P(B / A_3) \,.\, P(A_3)$

Esto se cumple para cualquier número de sucesos A_i.

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes nos permite relacionar la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A:

$$P(A / B) = \frac{P(B / A) \,.\, P(A)}{P(B)}$$