Variables aleatorias discretas

Experimento: Se arroja dos veces una moneda ideal.

$$E = \{(ca, ca), (ca, ce), (ce, ca), (ce, ce)\}$$

(ca, ca): $0{,}25$ $\quad$ (ca, ce): $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ $\quad$ (ce, ca): $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ $\quad$ (ce, ce): $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$$P(ca_1 \cap ca_2) = P(ca) \cdot P(ca) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

$$P(ca_1 \cap ca_2) = P(ca_2 / ca_1) \cdot P(ca_1)$$

$$P(ca) = 0{,}5$$

$$P(ce) = 0{,}5$$

X: "Nº DE CARAS"

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$
	0,25	0,5	0,25

$$\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i) = 1$$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X=x_i) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 = 1$$

x_i	-1	1	2	3
	~~X~~ 0,1	0,3	0,2	0,4

Experimento: Se arroja un dado ideal

Y: "Nº QUE SALE"

y_i	1	2	3	4	5	6
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	~~$1/6$~~ X

$$X = 1 - \left(P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)\right)$$

$$P(Y \leq 4) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}$$

$$P(Y \leq 4) = 1 - \left(P(Y=5) + P(Y=6)\right) = 1 - (1/6 + 1/6) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}$$

$$E(Y) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 1/6 \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{6}_{2}} = 3{,}5$$

Esperanza (valor esperado, valor medio o promedio):

Valor que espero obtener en promedio si realizo un número grande de veces el experimento.

$$E(X) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i)}$$

Experimento: Se arroja dos veces una moneda cargada donde la probabilidad de cara es el doble que la de cruz.

$$E = \{(c,c),(c,x),(x,c),(x,x)\}$$

$$\begin{cases} P(c) + P(x) = 1 \\ P(c) = 2P(x) \end{cases} \qquad P(c) = 2/3 \quad P(x) = 1/3$$

$$2 \cdot P(x) + P(x) = 1$$
$$3 \cdot P(x) = 1$$
$$P(x) = 1/3$$

X: "Nº DE CARAS"

$$P(c \cap c) = P(c) \cdot P(c) = 2/3 \cdot 2/3 = \frac{4}{9}$$

$$P(c \cap x) + P(x \cap c) =$$

$$P(x \cap x) = P(x) \cdot P(x) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$$

X_i	0	1	2
	1/9	4/9	4/9

$$E(x) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} = 1,\hat{3} \text{ caras}$$

0	1
1	4
2	4

$$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

$$12/9 = 1,\hat{3}$$

$$\boxed{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x = x_i)}$$

Varianza:

$$\boxed{V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2} = \frac{20}{9} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9} = 0,\hat{4} \text{ caras}^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \text{ caras}}$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(x=x_i) = 0^2 \cdot \frac{1}{9} + 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$$

Desvio (σ) $\quad \sigma_x = \sqrt{V(x)}$ $\quad \boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$

Distribución binomial:

- n = número de veces que se repite el experimento. Debe ser un valor finito.
- Éxito o fracaso.
- P(éxito) = p
- P(fracaso) = q
- p + q = 1
- p sea constante para todos los experimentos.

$p = 0{,}1 \qquad q = 0{,}9$

$X \sim B(n, p)$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x_i)$	0,349	0,387	0,194								

$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2}_{0{,}93} \qquad \underbrace{3 \rightarrow}_{0{,}07} \qquad = 1$

X: "Nº DE PIEZAS DEF." $\quad X \sim B(10, 0{,}1)$

$p = 0{,}1 \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ $\qquad n = 10$

De un total de 100 piezas se sabe que el 10% son defectuosas. Se toma al azar una pieza, se mira si es defectuosa y se la devuelve. Si se repite 10 veces el experimento, calcular:

a) La probabilidad de que ninguna sea defectuosa.

b) La probabilidad de sacar a lo sumo 2 piezas defectuosas.

c) La probabilidad de sacar al menos 2 defectuosas.

$\boxed{P(X=k) = C_{n,k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}}$ $\qquad 10 - 1$

a)

$P(x=0) = C_{10,0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}349 = 0{,}349$

b) $P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$P(x \leq 2) = 0{,}349 + 0{,}387 + 0{,}194 = 0{,}93$

$P(x=1) = C_{10,1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{9} = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}387 = 0{,}387$ $\quad 19$

$P(x=2) = C_{10,2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 45 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}43 = 0{,}194$

$P(x=10) = C_{10,10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^0 = 1 \cdot 0{,}0000000001 \cdot 1 =$

c) $P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + \dots + P(x=10)$

$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - \big(P(x=0) + P(x=1)\big) = 1 - (0{,}349 + 0{,}387) = 1 - 0{,}736 = 0{,}264$

$E(x) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}1 = 1$

$V(x) = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}9$

$\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 0{,}949$

Poisson:

$Y \sim P_\lambda$ λ = promedia

$X \sim B(n,p)$

$$\boxed{P(Y=K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}}$$

Se sabe que el promedio de bacterias en 25 cm cuadrados es igual a 5. Calcular la probabilidad de que:

a) En 25 cm cuadrados haya 7 bacterias.

b) En 5 cm cuadrados haya mas de 2 bacterias.

a)

Y: "Nº DE BACTERIAS EN 25 cm^2" $\lambda = 5$ $Y \sim P_{\lambda=5}$

$$P(Y=7) = \frac{e^{-5} \cdot 5^7}{7!} = 0,104$$

$e = 2,718$

b) X: "Nº DE BACTERIAS EN 5 cm^2"

25 cm^2 — 5 bac.
5 cm^2 — X

$$\frac{5 \cdot 5}{25} = 1$$

$\lambda = 1$ λ = lambda

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 1 - (0,368 + 0,368 + 0,184) = 1 - 0,92 = 0,08$$

$P(X>2) = 0,08$

$$P(X=0) = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = e^{-1} = 0,368$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} = e^{-1} = 0,368$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = 0,184$$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

$\lambda = n \cdot p$

n: grande

p: chiquito