Variables Aleatorias < Discretas VAD / Continuas VAC

Funciones con Dominio en el Espacio muestral,
e imagen o recorrido en $\mathbb{R}$

Ejemplo: Se arrojan 2 dados normales; $X$: V.A.D: Cantidad de n° pares

|  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |  |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 |  |
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\sum P(x_i)=1$ |

Cuadro de Distribución.

$X: \underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{2}$ Recorrido.

$D_1: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$D_2: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(x=0) = P(\text{ningún par})$

$P(D_1 = 1 \text{ o } 3 \text{ o } 5) = \frac{3}{6}$

$P(D_2 = 1 \text{ o } 3 \text{ o } 5) = \frac{3}{6}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Como $\sum_{i=1}^{3} P(x_i) = 1$

por diferencia $P(x=1) = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = P(\text{ambos pares})$

$P(D_1 = 2, 4, 6)$

$P(D_2 = 2, 4, 6)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Esperanza VAD $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i)$

Ejemplo anterior $\quad E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$

Esperanza, promedio, valor esperado, valor medio, media

Varianza VAD $\quad V(x) = E(x^2) - \underbrace{[E(x)]^2}_{1^2}$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X=x_i)$$


|  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |  |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 |  |
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\sum P(x_i)=1$ |


$$E(x^2) = \cancel{0^2 \cdot \frac{1}{4}} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$V(x) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0,7$

| 1000 9000 → 5000 → mucho error

| 4500 5500 → 5000 → poco error

$\sigma(x)$ = Desvío.

# Distribución Binomial

→ nº de veces que se repite el experimento "n"

→ éxito o fracaso

→ p : probabilidad de éxito

q : probabilidad de fracaso

$p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p$

→ p y q constantes ⇒ sucesos son independientes

Ejemplo : Se arrojan 2 monedas normales

X : V.A.D nº de caras.

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(x = x_i)$ | $1/4$ | $1/2$ | $1/4$ |

$\rightarrow \Sigma = 1$

$E = \{(c\,c);(c;x);(x;c);(x;x)\}$

$P(x=0) = P(c \cap c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(x=1) = P(c \cap x) = P(c_1 \cap x_2) + P(c_2 \cap x_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2 : Se arrojan 5 monedas normales

X : V.A.D : nº de caras

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

$\rightarrow \Sigma = 1$

$P(x=3) = P(xxxcc) + P(xccxx) + P(ccxxx) \ldots\ldots$

* Si estoy en una situación ideal para utilizar la dist. Binomial

$X \sim Bi\,(n\,;\,p)$ → probabilidad de éxito.

n → nº de veces que repito el experimento

$n = 5 \quad p = 0,5 \qquad X \sim Bi(5; 0,5)$

V.A.D X: nº de caras    Éxito: sale caras.

$X \sim Bi(n; p) \longrightarrow \boxed{P(X=k) = C_{n;k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$

$P(X=3) = C_{5;3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 =$

$P(X=3) = \boxed{0,3125}$

$P(X=4) = C_{5;4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = \boxed{0,156}$

Esperanza Dist. Binomial $E(X) = n \cdot p$

Varianza Dist. Binomial $V(X) = n \cdot p \cdot q$

Desvío Dist Binomial $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejemplo

$E(X) = 5 \cdot 0,5 = 2,5$ nº caras esperado.

$V(X) = 5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,25$

$\sigma(X) = \sqrt{1,25} \cong \boxed{1,118}$

# Distribución de Poisson V.A.D.

- nº de accidentes en un cruce de rutas en una semana
- nº de personas que ingresan a un banco en una hora
- nº de bacterias en $1\ cm^3$
- nº de personas que esperan durante 10 minutos que personal los atienda

$Y \sim P(\lambda) \rightarrow$ parámetro (promedio, media, esperanza)

sigue una
se rige por

$$\boxed{P(Y=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}} \qquad Y = 0, 1, 2, \ldots n$$

Ejemplo El nº de accidentes en una ruta durante una semana tiene un promedio de 1,3 (conocido por estudios anteriores). Calcular la probabilidad de que:

a) En una semana haya 2 accidentes

b) En una semana haya a lo sumo 2 accidentes.

c) En un día haya al menos 1 accidente.

Y: V.A.D: nº de accidentes en una semana.

$Y \sim P_{\lambda = 1,3}$ $\qquad$ ln = ln

a) $P(Y=2) = \dfrac{e^{-1,3} \cdot 1,3^{2}}{2!} = 0,23$

b) $P(Y \le 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$P(Y \le 2) = \dfrac{e^{-1,3} \cdot 1,3^{0}}{0!} + \dfrac{e^{-1,3} \cdot 1,3^{1}}{1!} + \dfrac{e^{-1,3} \cdot 1,3^{2}}{2!}$

$P(Y \le 2) = 0,27 + 0,35 + 0,23 \cong \boxed{0,86}$

c)

c) $P$ (en un día haya al menos un accidente)

$\lambda = 1,3$ en 1 semana

$\lambda = \frac{1,3}{7}$ en 1 día $\rightarrow \boxed{\lambda = 0,185}$ → promedio de accidentes en un día

$W$: VAD: nº de accidentes por día

$W \sim P_{\lambda = 0,185}$

$P(W \geq 1) = P(W=1) + P(W=2) + \ldots + P(W=n)$

$P(W \geq 1) = 1 - P(W < 1)$

$= 1 - P(W = 0) =$

$P(W \geq 1) = 1 - \frac{e^{-0,185} \cdot 0,185^0}{0!} = \boxed{0,17}$

Esperanza y Varianza para $Y \sim P_\lambda$

$E(Y) = \lambda$

$V(Y) = \lambda$

$\sigma(Y) = \sqrt{\lambda}$