Método De Gauss - Jordan

Este método utiliza las mismas técnicas de eliminación Gaussiana (incluyendo el pivoteo), pero con el objetivo de finalizar con una matriz de la siguiente forma:

$$(A \vdots B) \rightsquigarrow (I_n \vdots \hat{B})$$

donde I_n es la *matriz identidad* de nxn.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para lograr esto, se usa la técnica del pivoteo con la única diferencia que el pivote se usa para hacer ceros hacia abajo y hacia arriba.

<u>Ejemplo 1</u>: Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & +0.5x_3 & = & -5 \\ -2x_1 & +5x_2 & -1.5x_3 & = & 0 \\ -0.2x_1 & +1.75x_2 & -x_3 & = & 10 \end{array}$$

So*lución.* Comenzamos con la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Procedemos a hacer el primer pivoteo, y para ello, intercambiamos los renglones 1 y 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

y haciendo ceros debajo del pivote, obtenemos:

$$[illegible]\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \end{pmatrix}$$

Ahora, para colocar adecuadamente el segundo pivote intercambiamos los renglones 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \end{pmatrix}$$

Para hacer ceros arriba del pivote 1.25, multiplicamos el renglón 2 por $\frac{-5}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 1; para hacer ceros debajo del mismo pivote, multiplicamos al mismo renglón 2 por $\frac{-0.5}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 3 . Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1.9 & -40 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a hacer ceros arriba del pivote 0.09 . Para ello, multiplicamos el renglón 3 por $\frac{0.85}{0.09}$ y se lo sumamos al renglón 2; igualmente multiplicamos el renglón 3 por $\frac{-1.9}{0.09}$ y se lo sumamos al renglón 1. Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1.25 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}$$

Finalmente para hacer los 1's (unos) en la diagonal principal, multiplicamos los renglones 1 , 2, y 3 por $\frac{-1}{2}, \frac{1}{1.25}$ y $\frac{1}{0.09}$, respectivamente. Obtenemos entonces la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -75 \\ 0 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \end{pmatrix}$$

La cual nos da la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= -75 \\ x_2 &= -60 \\ x_3 &= -100 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ -0.4x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 10 \\ 0.5x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 15 \end{array}$$

Solución. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -0.4 & 2 & -1 & 10 \\ 0.5 & -3 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Observamos que el primer elemento pivote está bien colocado y por lo tanto no hay necesidad de intercambiar renglones. Por lo tanto hacemos ceros debajo del pivote $a_{11} = 1$; para ello, multiplicamos el renglón 1 por 0.4 y se lo sumamos al renglón 2, y también multiplicamos el mismo renglón 1 por –0.5 y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2.8 & 0.2 & 10.4 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \end{pmatrix}$$

Para elegir el segundo elemento pivote, debemos escoger el elemento mayor (con valor absoluto) entre $a_{22} = 2.8$ y $a_{32} = -4$, el cual obviamente es éste último. Por lo tanto, debemos intercambiar el renglón 2 y el renglón 3. Tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 2.8 & 0.2 & 10.4 \end{pmatrix}$$

Procedemos a hacer ceros arriba y abajo de nuestro segundo elemento pivote; para ello, multiplicamos el renglón 2 por 0.5 y lo sumamos al renglón 1, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{2.8}{4}$ y lo sumamos al renglón 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.75 & 8.25 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{pmatrix}$$

Nuestro tercer elemento pivote es $a_{33} = -0.15$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{0.5}{0.15}$ y lo sumamos al renglón 2, y también multiplicamos el mismo renglón 3 por $\frac{2.75}{0.15}$ y lo sumamos al renglón 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & -4 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos los 1's (unos) en la diagonal, multiplicando el renglón 2 por $-\frac{1}{4}$ y el renglón 3 por $-\frac{1}{0.15}$. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & 1 & 0 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & -137 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 385 \\ x_2 &= 13.5 \\ x_3 &= -137 \end{aligned}$$