

por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que también se cumple que $A^{-1} \cdot A = I_2$, luego A es invertible, tiene inversa. Si el sistema no tiene solución, la matriz no tiene inversa.

Por ejemplo, en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, del mismo modo :

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=0 \\ 2x+2z=0 \\ 2y+2t=1 \end{cases}$$

Y por ejemplo de $2x+2z=0$ se obtiene $x = -z$, si se sustituye en la primera ecuación es $-z+z=1$, es decir $0 = 1$ (imposible). El sistema no tiene solución.

Por tanto A no es invertible, es singular.

Este método directo sólo se suele utilizar para matrices cuadradas de tamaño 2, puesto que para las de tamaño 3 obtenemos un sistemas de ¡9 ecuaciones con 9 incógnitas! que realmente es difícil de resolver.

6.6.2. Método de Gauss-Jordan:

Consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz para llegar a obtener la matriz identidad. Realizando estas mismas transformaciones con la matriz identidad llegamos a la matriz A^{-1} .

Se llama transformación elemental en una matriz a:

T1) Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.

T2) Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número real no nulo.

T3) Intercambiar el lugar de dos filas entre sí.

Veamos como se realiza el método de Gauss-Jordan, realizándolo a la vez con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Consideramos la matriz formada por A y la matriz identidad correspondiente . En nuestro caso:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ii) Se hace la matriz triangular superior (es decir, hacemos ceros por debajo de la diagonal principal) usando transformaciones elementales en filas.

La mejor forma de realizar esto es hacer cero los elementos por debajo de la diagonal en la primera columna usando la fila 1. Luego, hacer cero los elementos por debajo de la diagonal en la segunda columna usando la fila 2, y así sucesivamente.

En nuestro caso, basta sumar la fila 2 con la fila 1, y se obtiene:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

iii) Una vez hecha la matriz triangular superior, se hace la matriz triangular inferior, haciendo ceros a los elementos por encima de la diagonal. El proceso es parecido al anterior:

Hacer cero los elementos por encima de la diagonal en la última columna usando la última fila. Luego, hacer cero los elementos por encima de la diagonal en la penúltima columna usando la penúltima fila, y así sucesivamente. En nuestro caso:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \cdot F_1 - 2 \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

iv) Ya tenemos una matriz diagonal. Lo único que falta es dividir a cada fila entre el número adecuado para obtener unos en la diagonal principal, es decir, para obtener la matriz identidad en la parte izquierda:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_1}{3}, \frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

v) Una vez se tiene la matriz identidad en la parte de la izquierda, la parte derecha es la matriz inversa, es decir, llegamos a:

$$(I_2, A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz que habíamos obtenido antes por el método directo.

Si al realizar el método de Gauss-Jordan en algún momento alguna fila es de ceros, la matriz no tiene inversa.

Cuanto mayor sea el orden de la matriz, mejor es este método frente al directo.

Veamos otro ejemplo:

Calcular la inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.

Siguiendo los pasos anteriores:

$$\begin{aligned} (B|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{2 \cdot F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4 \cdot F_1-F_2} \\ &\xrightarrow{4 \cdot F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_1}{4}, \frac{F_2}{4}, \frac{F_3}{4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right) = (I_3|B^{-1}) \\ &\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

También se puede expresar, sacando factor común:

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es la inversa de B.

Si calculamos por este método la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ resulta:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Como aparece una fila de ceros, la matriz A no tiene inversa.

Ejercicios: