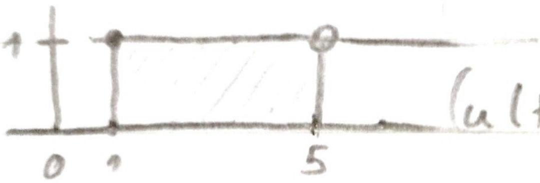
1

a) $x(t) = 2\sin(8\pi t) - \frac{4}{2}(\sin(20\pi t) + \sin(4\pi t)) \Rightarrow \omega \in \{4\pi, 8\pi, 12\pi\}$

$f \in \{2, 4, 6\}$

b) $f_0 = \text{mdc}(2, 4, 6) = 2 \Rightarrow T_0 = \frac{1}{2}$

c)



$(u(t-1) - u(t-5)) = 1, \ 1 \leq t < 5$

Limitando assim o sinal, pelo que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)(u(t-1) - u(t-5))|^2 < \infty$

$\Rightarrow$ Sinal de energia com potência média nula.

d) $\Omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} = \frac{4\pi}{40} = \frac{\pi}{10}$, $T_s = \frac{1}{40}$

$x[n] = x(t)\Big|_{t = nT_s} = 2\sin[8\pi \frac{1}{40} n] - 2\sin[\frac{20\pi}{40} n] + \sin[\frac{4\pi}{40} n] =$

$= 2[\sin[5\pi n] - \sin[\frac{1}{2}\pi n] + \sin[\frac{1}{10}\pi n]$

2. $x[n] = -3 + 2\cos[0{,}2\pi n] \xrightarrow{an-b} y[n] = -3 - 2\sin[0{,}6\pi n]$

Sabemos que $x[am - b] = y[m]$

$x[am-b] = -3 + 2\cos[0{,}2\pi am - \frac{\pi}{5} b]$

$y[m] = -3 - 2\sin(0{,}6\pi m) = -3 + 2\cos(0{,}6\pi m + \frac{\pi}{2})$

$\begin{cases} 0{,}2\pi am = 0{,}6\pi m \Rightarrow a = 3 \\ -\frac{\pi}{5} b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$a > 1 \Rightarrow$ Expansão, $b < 0 \Rightarrow$ Avanço

b) Ambos são sinais sinusoidais, como tal, a potência média de ambos, apenas depende da amplitude, que é igual em ambos:

$P = \frac{A^2}{2}$ $\qquad$ $P = \frac{(-3)^2}{2} + \frac{2^2}{2} = 6,5 \text{ W}$

3 a) Não linear, é um sistema recursivo

Invariante no tempo pois $y_K[n] = y_{x[n-K]}[n]$

Não causal porque o termo $-y[n+1]$ depende de valores futuros.

b) $y[n] = 0,5y[n-1] + 0,4x[n-1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Y(z) = 0,5z^{-1}Y(z) + 0,4z^{-1}X(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Y(z)(1-0,5z^{-1}) = 0,4z^{-1}X(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)\Big|_{c.i.\,nulas} = G(z) = \frac{0,4z^{-1}}{1-0,5z^{-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h[n] = 0,4 \cdot 0,5^{n-1} \cdot u[n-1]$

n ↓ / $h[n]$	$x[n]$ →	0: 200	1: 100	2: 200	3: 200
0	0	0	0	0	0
1	0,4	80	40	80	80
2	0,2	40	20	40	40
3	0,1	20	10	20	20
4	0,05	10	5	10	10

$y[0] = 0$
$y[1] = 80$
$y[2] = 80$
$y[3] = 120$
$y[4] = 140$

$\sum_{n=0}^{4} y[n] = 420$

4 a) $\frac{z^4}{z^4}G(z) = \frac{-3z+3,3}{z^4(1-0,8z^{-1})(1-0,25K^2z^{-2})}$

Zeros: $-3z + 3,3 = 0 \Leftrightarrow z = 1,1$

$$\text{Polos: } \overbrace{z^4 = 0}^{\text{Polo de ordem 4}} \; ; \; 1 - 0{,}8 z^{-1} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{z = 0{,}8}^{\text{Polo simples}}$$

$$1 - \frac{1}{4K^2 z^{-2}} = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{4K^2} \Leftrightarrow \underbrace{z = \frac{1}{2K} \vee z = -\frac{1}{2K}}_{\text{Polos simples}}$$

b) Como $\left|\frac{1}{2K}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq K$ e ~~como~~ o sistema é estável se, todos os polos estiverem contidos na circunferência unitária, o sistema é estável se K for maior ou igual a $\frac{1}{2}$.

c) $X(z) = 2z^{-2} U(z) - 4z^{-70} = 2z^{-2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) - 4z^{-70}$

$$Y(z) = G(z)X(z) = \left(\frac{-3(1-1.1z^{-1})z^{-3}}{(1-0{,}8z^{-1})(1-0{,}25z^{-2})}\right)\left(\frac{2z^{-2}}{1-z^{-1}} - 4z^{-70}\right)$$

Pelo T. valor final: $\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\, Y(z) =$

$$= \left(\frac{-3(1-1.1)}{(1-0{,}8)(1-0{,}25)}\right)\left(2 - 4(1-1)\right) = \frac{0{,}3 \cdot 2}{0{,}15} = 4$$

5 a) $X_{DFT}[K] = f_s X_{FT}\left(K \frac{2\pi f_s}{N}\right) \Rightarrow 40 = f_s . 2 |\left(\frac{6\, 2\pi\, f_s}{240}\right) / 4\pi| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 = \left(\frac{\pi f_s^2}{10}\right) / 4\pi \Leftrightarrow 40\pi = f_s^2 / 40 \Leftrightarrow f_s = 40$

Garante reconstrução sem aliasing pois $f_{max} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10\,Hz$ e

$$f_s > 2 . f_{max}$$

b) $c_m = \frac{X_{FT}(m\,w_0)}{T_0} \Rightarrow \frac{X_{FT}\left(3\frac{\pi}{3}\right)}{6} = c_3 \Leftrightarrow c_3 = 2\left|\frac{\pi}{4\pi}\right| / 6 = \frac{1}{2} / 6 = 1/12$

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{3}$

$C_m = 2|c_m| \Rightarrow C_3 = \frac{1}{6}\ ,\ \theta_m = \measuredangle c_m \Rightarrow \theta_3 = 0$

c) Passa-Alto com $\Omega_c = \frac{2\pi \cdot 9}{f_s} = \frac{18\pi}{40} = \frac{9\pi}{20}$

6 a) $f_s = 2000\,Hz$, $Sol_{sust} = 415\,Hz$

A resolução temporal tem de ser um múltiplo de 415.

$$\Delta f = \frac{1}{l_w} \Rightarrow 415 = \frac{1}{l_w} \Leftrightarrow l_w = \frac{1}{415}\,ms$$

b) $\frac{f_s}{N} = \frac{1}{l_w} \Leftrightarrow N = f_s \cdot \overset{0{,}4s}{l_w} \Leftrightarrow N = 800$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = 2{,}5 \qquad m = \frac{415}{2{,}5} = 166 //$$

c) $\Delta f = 10\,Hz$ $\quad X_{DFT}[3] = -X_{DFT}[-3] = -50j$

$X_{DFT}[9] = X_{DFT}[-9] = 25$

$c_m = \frac{X_{DFT}[m]}{N}$

$N = \frac{f_s}{\Delta f} = 200$

$$c_3 = \frac{X[3]}{200} = \frac{-50j}{200} = -\frac{1}{4}j \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2} \wedge \theta_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$\frac{1}{4}e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$$c_9 = \frac{X[9]}{200} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}e^{i0} \Rightarrow C_9 = \frac{1}{4} \wedge \theta_9 = 0.$$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{100}$

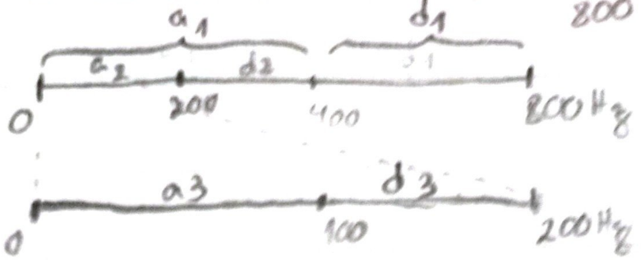
$$\boxed{\frac{1}{2}\cos\left[\frac{3\pi}{100}n - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{4}\cos\left[\frac{9\pi}{100}n\right]}$$

$$x[n] = \left[\frac{1}{2}\cos\left[\frac{3\pi}{100}n - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{4}\cos\left[\frac{9\pi}{100}n\right]\right]\underbrace{\left[u[n - \overset{1000}{5N}] - u[n - \overset{1200}{6N}]\right]}$$

Restringir a expressão do sinal à 6ª janela

7. $f_s = 800\,Hz$ e há 1200 amostras $\Rightarrow \frac{1200}{800} = 1{,}6\,s$

a)



Cada intervalo tem 0,5s

d3: $f \in [100, 200]$, $C = 2$

a3: 0 - 399 | 400 - 799 | 800 - 1199

$f = 0, C = 2$ | $f = 0, C = 4$ | $f = 0, C = 3$

$f = \frac{3}{0{,}5} = 6, C = 2$ | | $f = \frac{5}{0{,}5} = 10, C = 1$

b) [0, 100[a3

[0, 50[a4 — [50, 100[d4

a5 [0, 25[— [25, 50[d5

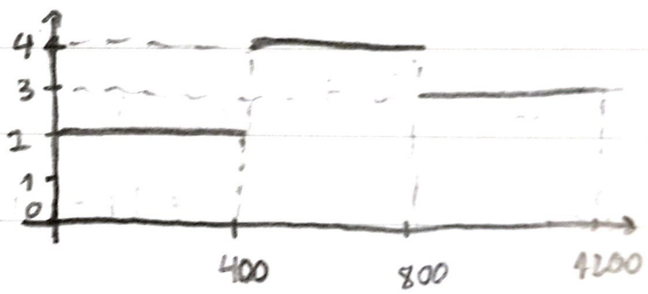
a6 [0, 12,5[— [12,5, 25[d6

a7 [0, 6,25[— [6,25, 12,5[d7

[0, 3,125[a8 — [3,125, 6,5[d8

Queremos excluir $f = 6$

em a8, $f \in [0, 3{,}125[\,Hz$, excluindo 6 Hz.



8. a) E0: $T(6) = 9$

E linear: $\frac{T(4) - T(2)}{4 - 2} = -\frac{1}{2} = m$ $\quad T(6) = T(4) + m(6-4) = 9 - 1 = 8$

I linear: $\frac{T(8) - T(4)}{8 - 4} = \frac{1}{2} = m$ $\quad T(6) = T(4) + m(6-4) = 9 + 1 = 10$

b) 1º: Estacionarizar a série, usando, por exemplo, diferenciação ou remoção de tendências. 2º: Usar funções de autocorrelação parcial (PACF) para comparar uma série com ela própria em diferentes intervalos, a ordem do AR é dada pelo delay que cruza um dado threshold definido

c) $T(6) = a_1 T(4) + a_2 T(2) + a_3 T(0) =$

$= 2 \cdot 9 - 1{,}1 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 8 = 9{,}4$