Guia de ejercicios 3er parcial

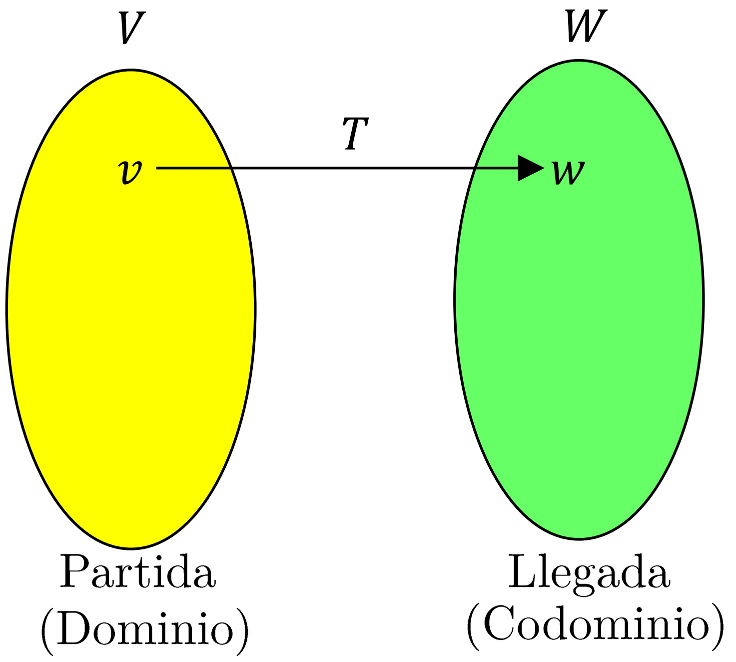
MAT 103 — ALGEBRA LINEAL Y TEORIA MATRICIAL

Auxiliar: Miguel Angel Chiri Yupanqui

Transformaciones Lineales

$$T: V \to W$$

$$T(v) = w \quad v \in V, w \in W$$



Toda transformación lineal verifica las dos condiciones de linealidad

Suma en V　　Suma en W

$$T(v+u) = T(v) + T(u)$$ “Aditividad”

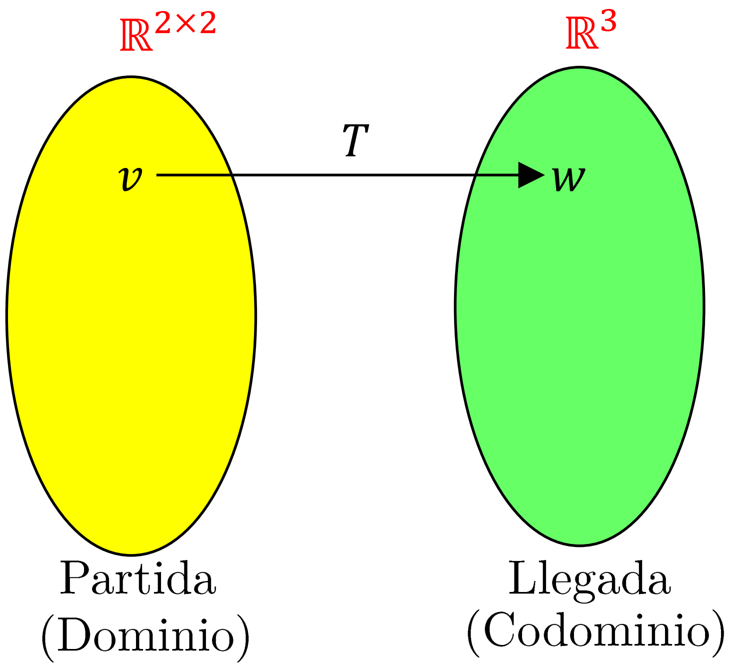
Producto por un escalar en V　　Producto por un escalar en W

$$T(kv) = kT(v)$$ “Homogeneidad”

Sea la transformación lineal T: $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$, verificar que es una transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+t, y-z\,, z)$$

Solución



Condiciones de linealidad

Suma en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Suma en $\mathbb{R}^3$

$$T(v+u) = T(v) + T(u)$$ "Aditividad"

Producto por un escalar en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Producto por un escalar en $\mathbb{R}^3$

$$T(kv) = kT(v)$$ "Homogeneidad"

Suma en $\mathbb{R}^{2\times2}$ Suma en $\mathbb{R}^3$

$$T(v+u) = T(v) + T(u)$$

Producto por un escalar en $\mathbb{R}^{2\times2}$ Producto por un escalar en $\mathbb{R}^3$

$$T(kv) = kT(v)$$

$T(K_1 v + K_2 u) =$

$K_1 T(v) + K_2 T(u)$

Sean: $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x+a & y+b \\ z+c & t+d \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

(p, q, r)

Del enunciado $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+t, y-z, z)$

$$(x+a+t+d, y+b-z-c, z+c) = (x+t, y-z, z) + (a+d, b-c, c)$$

$$(x+a+t+d, y+b-z-c, z+c) = (x+a+t+d, y+b-z-c, z+c)$$

Se verifica la aditividad

$$T\left(k\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = kT\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{pmatrix} kx & ky \\ kz & kt \end{pmatrix}\right) = k(x+t, y-z, z)$$

$$(kx+kt, ky-kz, kz) = k(x+t, y-z, z)$$

$$(kx+kt, ky-kz, kz) = (kx+kt, ky-kz, kz)$$

Se verifica la homogeneidad

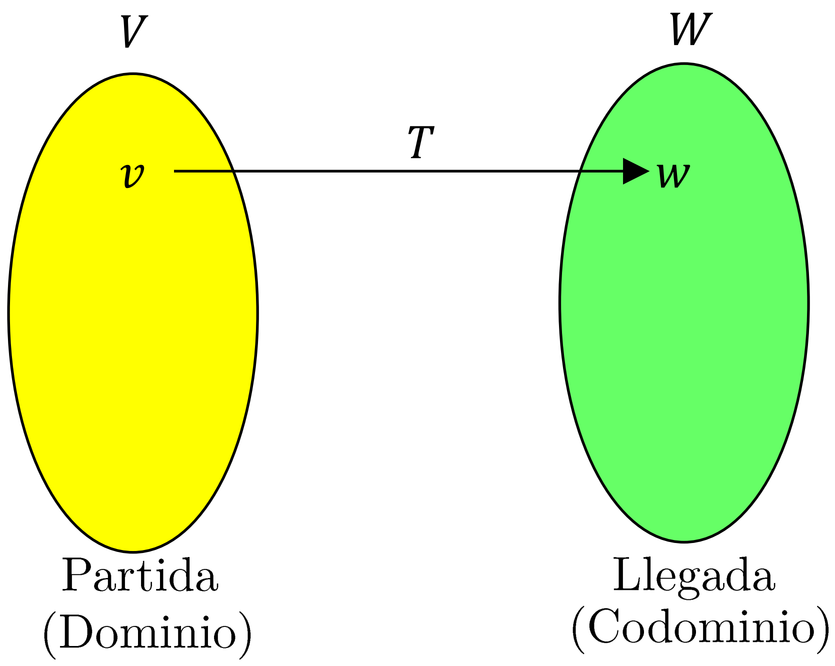
$\therefore$ Es una transformación lineal

Fórmula de transformación

Muestra la transformación del vector de partida al de llegada

$$T: V \to W$$

$$T(v) = w \quad v \in V, w \in W$$



Ejemplo:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}^{2\times 2}$$

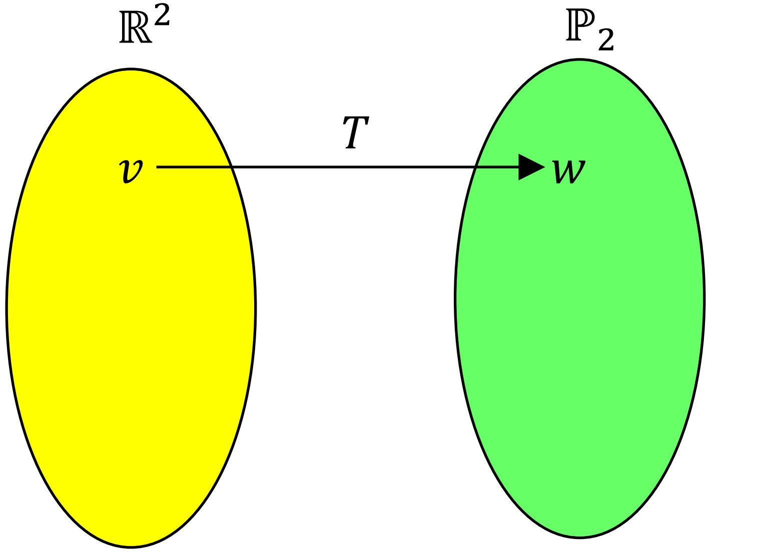
Sean $v = (a,b,c)$; $w = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Fórmula de transformación $\quad T(a,b,c) = \begin{pmatrix} x_{(a,b,c)} & y_{(a,b,c)} \\ z_{(a,b,c)} & t_{(a,b,c)} \end{pmatrix}$

Para una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$, $T(3,-1) = 4 + x^2$ y $T(-1,2) = -3 + 2x$, encuentre la fórmula de la transformación y $T(-5,5)$

Solución



$v = (a, b)$ $\qquad$ $w = px^2 + qx + r$

$$T(v) = w$$

$$T(a,b) = px^2 + qx + r$$

Fórmula de transformación $\quad T(a,b) = p_{(a,b)}x^2 + q_{(a,b)}x + r_{(a,b)}$

$$(a,b) = c_1(3,-1) + c_2(-1,2) \qquad // T$$

$$T(a,b) = T[c_1(3,-1) + c_2(-1,2)]$$

$$T(a,b) = c_1T(3,-1) + c_2T(-1,2)$$

$$T(a,b) = c_1(4 + x^2) + c_2(-3 + 2x)$$

Debemos poner c_1 y c_2 en función de a, b, entonces de la combinación lineal:

$$a = 3c_1 - c_2$$

$$b = -c_1 + 2c_2$$

$$c_1 = \frac{1}{5}(2a + b) \qquad c_2 = \frac{1}{5}(a + 3b)$$

$$T(a,b) = \frac{1}{5}(2a + b)(4 + x^2) + \frac{1}{5}(a + 3b)(-3 + 2x)$$

$$\boxed{T(a,b) = \frac{1}{5}(2a + b)x^2 + \frac{2}{5}(a + 3b)x + (a - b)}$$

Para $T(-5,5)$

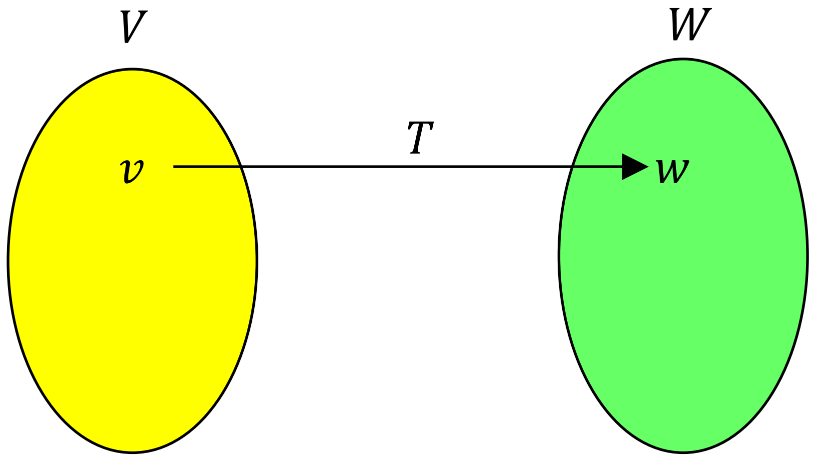
$$T(a,b)=\frac{1}{5}(2a+b)x^2+\frac{2}{5}(a+3b)x+(a-b)$$

$$T(-5,5)=\frac{1}{5}(2(-5)+(5))x^2+\frac{2}{5}((-5)+3(5))x+((-5)-(5))$$

$$\boxed{T(-5,5)=-x^2+4x-10}$$

Forma matricial de una transformación

De momento se asume que las bases de V y W son las bases canónicas



Partida (Dominio)
Base canónica de V

Llegada (Codominio)
Base canónica de W

La forma matricial relaciona las coordenadas del vector de partida con las coordenadas del vector de llegada (relaciona vectores de coordenadas)

$\boxed{T(v) = Av} = w$ A: matriz de transformación $A_{Dim(W)\times Dim(V)}$

Ejemplo: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}^{2\times 2}$ $T(v) = w$

$B(V) = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

$B(W) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Sean $v = (a, b, c)$; $w = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$(a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vectores de coordenadas

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A_{4\times 3}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{(a,b,c)} \\ y_{(a,b,c)} \\ z_{(a,b,c)} \\ t_{(a,b,c)} \end{pmatrix}$$

Fórmula de transformación $T(a, b, c) = \begin{pmatrix} x_{(a,b,c)} & y_{(a,b,c)} \\ z_{(a,b,c)} & t_{(a,b,c)} \end{pmatrix}$

Para una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(3,-1) = 4 + x^2$ y $T(-1,2) = -3 + 2x$, encuentre la matriz de transformación y la fórmula de transformación

Solución $\quad T\colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{P}_2$

$T(v) = Av = w \quad A$: matriz de transformación $A_{Dim(W)\times Dim(V)}$

$v = (a,b) \qquad w = px^2 + qx + r$

Vectores de coordenadas respecto base canónica

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A_{3\times 2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \\ h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \\ h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \\ h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d - e \\ 3f - g \\ 3h - i \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \\ h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d + 2e \\ -f + 2g \\ -h + 2i \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{2}{5} \qquad e = \frac{1}{5}$$

$$f = \frac{2}{5} \qquad g = \frac{6}{5}$$

$$h = 1 \qquad i = -1$$

$$\boxed{A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 6/5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 6/5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \\ \frac{2}{5}a + \frac{6}{5}b \\ a - b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T(a,b) = \frac{1}{5}(2a+b)x^2 + \frac{2}{5}(a+3b)x + (a-b)}$$

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$, la proyección de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x+y+z=0$. Encontrar la matriz de transformación y $T(-1,1,-4)$

Solución W es $\mathbb{R}^3$ donde está el plano

Proyección de un vector sobre un subespacio

W_1: subespacio $B_\perp(W_1) = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n\}$

$$proy_{W_1} v = \langle v, \hat{u}_1\rangle \hat{u}_1 + \langle v, \hat{u}_2\rangle \hat{u}_2 + \cdots + \langle v, \hat{u}_n\rangle \hat{u}_n$$

$$plano = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

Base del plano: $x+y+z=0$

$$x = -y-z$$

$$(x,y,z) = (-y-z, y, z)$$

$$(x,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

$$Base = \{\underset{v_1}{(-1,1,0)};\ \underset{v_2}{(-1,0,1)}\}$$

Nota:
Si no nos dan un producto interno trabajamos con el producto interno estándar

Ortonormalizando por Gram-Schmidt

$$u_1 = (-1,1,0)$$

$$\|u_1\| = \sqrt{\langle(-1,1,0),(-1,1,0)\rangle}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2+(0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)}$$

$$\boxed{u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1}$$

$$u_2 = (-1,0,1) - \frac{\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle}{2}(-1,1,0)$$

$$u_2 = (-1,0,1) - \frac{(-1)(-1)+(0)(1)+(1)(0)}{2}(-1,1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-2,0,2) - \frac{1}{2}(-1,1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-1,-1,2) \qquad u_2 = (-1,-1,2)$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\boxed{\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)}$$

$$B_{\perp}(W_1) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2) \right\}$$

Proyección de un vector sobre el plano:

$$proy_{W_1}\, v = \langle v, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 + \langle v, \hat{u}_2 \rangle \hat{u}_2 \qquad \text{Sea } \boldsymbol{v} = (x, y, z)$$

$$\langle v, \hat{u}_1 \rangle = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\rangle$$

$$\langle v, \hat{u}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (x, y, z), (-1,1,0) \rangle$$

$$\langle v, \hat{u}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

$$\langle v, \hat{u}_2 \rangle = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2) \right\rangle$$

$$\langle v, \hat{u}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (x, y, z), (-1,-1,2) \rangle$$

$$\langle v, \hat{u}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x - y + 2z)$$

$$proy_{W_1}\, v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(-x - y + 2z)\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

$$proy_{W_1}\, v = \frac{1}{6}(-3x + 3y)(-1,1,0) + \frac{1}{6}(-x - y + 2z)(-1,-1,2)$$

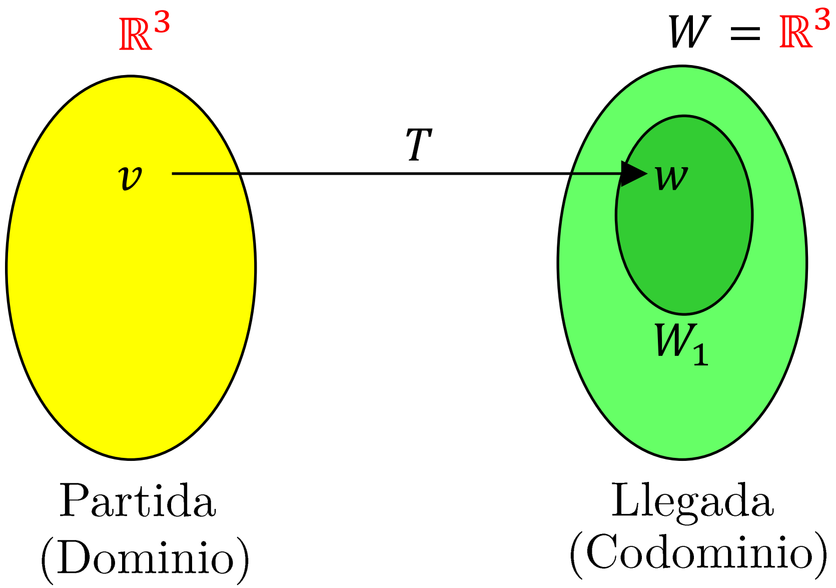
$$proy_{W_1}\, v = \frac{1}{6}(3x - 3y\ , -3x + 3y\ , 0) + \frac{1}{6}(x + y - 2z\ , x + y - 2z\ , -2x - 2y + 4z)$$

$$proy_{W_1}\, v = \frac{1}{6}(4x - 2y - 2z\ , -2x + 4y - 2z\ , -2x - 2y + 4z)$$

$$\boxed{proy_{W_1}\, v = \frac{1}{3}(2x - y - z\ , -x + 2y - z\ , -x - y + 2z)}$$

Del enunciado:

$T\colon \mathbb{R}^3 \to W$, es la proyección de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x + y + z = 0$



(x, y, z) $\qquad$ (a, b, c)

$$T(v) = w$$

$$T(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$T(x, y, z) = (a_{(x,y,z)}, b_{(x,y,z)}, c_{(x,y,z)})$$

$$\boxed{proy_W\, v = \frac{1}{3}(2x - y - z\ , -x + 2y - z\ \ , -x - y + 2z)}$$

$$\boxed{T(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z\ , -x + 2y - z\ \ , -x - y + 2z)}$$

Para la matriz de transformación llevamos a la forma matricial $T(v) = Av$ (v: vector de coordenadas respecto de la base canónica)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$T(-1,1,-4) = \frac{1}{3}(-2 - 1 + 4\ , 1 + 2 + 4\ \ , 1 - 1 - 8)$$

$$\boxed{T(-1,1,-4) = \frac{1}{3}(1, 7, -8)}$$

Núcleo e imagen

Núcleo o kernel:

$$N(T) = \ker(T) = \{v \in V:\ T(v) = 0\ ;\ \ 0 \in W\}$$

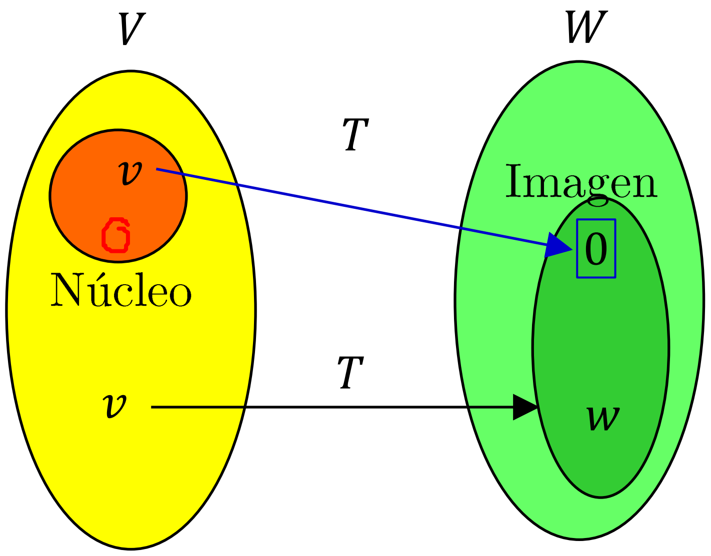
Imagen o recorrido:

$$Im(T) = \{w \in W:\ T(v) = w;\ \ v \in V\}$$

El núcleo es un subespacio del E.V. de partida V

Dimensión del núcleo: Nulidad

$$Dim(N) = Nulidad(T)$$



La imagen es un subespacio del E.V. de llegada W

Dimensión de la imagen: Rango

$$Dim(Im) = Rango(T)$$

Teorema de la dimensión

$$Rango(T) + Nulidad(T) = Dim(V)$$

Conceptos de ayuda:

Rango(T) = Rango de la matriz de transformación

- Una base de la imagen se puede obtener del espacio columna de la matriz de transformación

Para la transformación T(X)=AX hallar la imagen, el núcleo y verificar el teorema de la dimensión

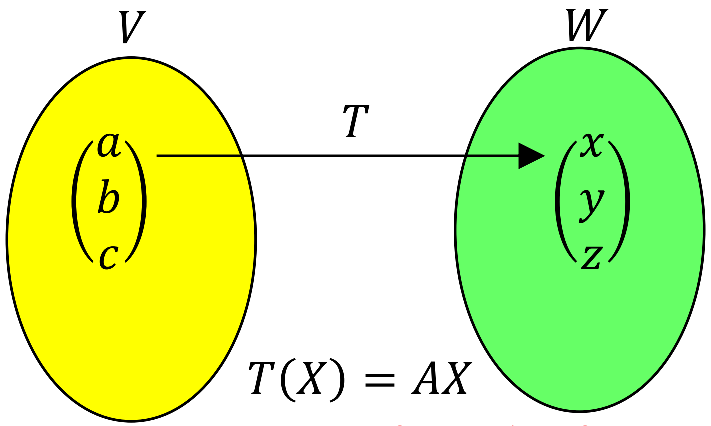
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

Dim (W)

Dim (V)

Solución

Sólo tenemos la forma matricial por lo que no sabemos qué vectores son los de partida y llegada



$$T(X) = T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Teorema de la dimensión

$$Rango(T) + Nulidad(T) = n$$

$$\boxed{n = 3}$$

n es la dimensión del espacio vectorial de partida (V)

Imagen o recorrido

$$Im(T) = \{w \in W: \ T(v) = w; \ v \in V\}$$

$$Im(T) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

Hay que hallar una condición de x, y, z

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & x \\ -3 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \begin{array}{l} 2f_3 + f_1 \to f_1 \\ 3f_3 + f_2 \to f_2 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & x+2z \\ 0 & 2 & 4 & y+3z \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) -2f_1+f_2 \to f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & x+2z \\ 0 & 0 & -4 & y+3z-2x \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 4 & x+2z \\ 0 & 0 & -4 & y+3z-2x \end{array}\right)$$

No hay condición de x, y, z

Im(T) = W

$$\boxed{Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}}$$

3 - 0

$$B(Im) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$Dim(Im) = 3$ $\boxed{Rango(T) = 3}$

Otra forma: hallamos la base con el espacio columna de A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango(T) = Rango de la matriz de transformación

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Escalonando } \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rho(A) = \rho(A^T) \\ \rho(A) = 3 \end{matrix}$$

$$B(Im) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$Dim(Im) = 3$ $\boxed{Rango(T) = 3}$

Desventaja del método: no se halla una expresión para la imagen (que se pedía en el ejercicio), para hallarla habría que hacer una combinación lineal de la base $B(Im)$

Núcleo o kernel $N(T) = \ker(T) = \{v \in V:\ T(v) = 0\,;\ \ 0 \in W\}$

$$N(T) = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Hay que hallar una condición de a, b, c

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En la imagen se llegó a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 4 & x + 2z \\ 0 & 0 & -4 & y + 3z - 2x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Si seguimos escalonando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{N(T) = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a = b = c = 0\right\}}$$

$$\boxed{N(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$$

$$Dim(N) = 0$$

$$Nulidad(T) = 0$$

Teorema de la dimensión

$$Rango(T) + Nulidad(T) = Dim(V)$$

$$3 + 0 = 3$$

$$\boxed{3 = 3}$$

Sea $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación definida por $T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & b \\ a & c \end{pmatrix}$

a) Encuentre el núcleo, el recorrido, la nulidad y el rango de T, compruebe el teorema de la dimensión

Solución

La fórmula de transformación debería estar en la forma

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} x_{(a,b,c)} & y_{(a,b,c)} \\ z_{(a,b,c)} & u_{(a,b,c)} \end{pmatrix}$$

Llevando a la forma convencional:

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & b \\ a & c \end{pmatrix}$$

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix}$$

$$T(v) = \begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix}$$

a) Imagen o recorrido

$w \in W : T(v) = w$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T(v_{\mathbb{P}_2}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \right\}$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} : T(v) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \right\}$$

Hay que hallar una condición de x, y, z, u

$$T(v) = \begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c-a &= x \\ b-c &= y \\ 2c+a &= z \\ 2b+c &= u \end{aligned}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 3}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 2 & 1 & u \end{array}\right) \quad -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 3 & z+x \\ 0 & 0 & 3 & u-2y \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+x-u+2y \\ 0 & 0 & 3 & u-2y \end{array}\right)$$

$$\boxed{Im(T) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}}_{4-1=3} : z + x - u + 2y = 0 \right\}}$$

Para la Base de la imagen

$$u = x + 2y + z$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+2y+z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rango

$$R(T) = Dim(Im(T))$$

$$\boxed{R(T) = 3}$$

Núcleo o kernel $N(T) = \ker(T) = \{v \in V: \ T(v) = 0 \ ; \ \ 0 \in W\}$

$$\ker(T) = \{v \in \mathbb{P}_2 : T(v) = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\}$$

$$\ker(T) = \{v : T(v) = 0\}$$

$$\ker(T) = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2 : T(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Hay que hallar una condición de a, b, c

$$\begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la imagen se llegó a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+x-u+2y \\ 0 & 0 & 3 & u-2y \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} c-a=0 \\ b-c=0 \\ \\ c=0 \end{array}$$

$$\boxed{\ker(T) = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2 : a = b = c = 0\}}$$

$$\boxed{\ker(T) = \{0x^2 + 0x + 0\}}$$

Nulidad

$$Nul(T) = Dim(\ker(T))$$

$$\boxed{Nul(T) = 0}$$

Teorema de la dimensión

$$R(T) + Nul(T) = n$$

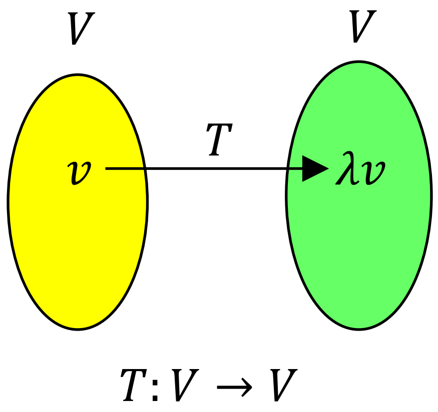
n es la dimensión del espacio vectorial de partida $(\mathbb{P}_2, \ n = 3)$

$$3 + 0 = 3$$

$$\boxed{3 = 3}$$

Autovalores

También llamados eigenvalores, valores propios o valores característicos



Son aquellos que cumplen: $Av = \lambda v$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$ Sistema de ec. homogéneo

El determinante de este sistema se denomina **polinomio característico**

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

Igualando el polinomio característico a cero obtenemos la **Ecuación característica**

$$p(\lambda) = 0 \qquad |A - \lambda I| = 0$$

Resolviendo la ecuación característica se obtienen los autovalores

Al conjunto de autovalores se le conoce como espectro de la matriz σ

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

Encontrar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solución

$\boldsymbol{p(\lambda) = |A - \lambda I|}$ **(Polinomio característico)**

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (10-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - (2)(6-\lambda)(2)$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (6-\lambda)^2(11-\lambda)$$

$\boldsymbol{|A - \lambda I| = 0}$ **(Ecuación característica)**

$$(6-\lambda)^2(11-\lambda) = 0$$

$\boxed{\lambda_1 = 6 \text{ de multiplicidad } 2}$

$\boxed{\lambda_2 = 11}$

Espectro de la matriz

$\boxed{\sigma(A) = \{6^{(2)}, 11\}}$

$Av = \lambda v$

$Av = 6v$

$Av = 11v$

Teorema de Cayley - Hamilton

Evaluando la matriz A en el polinomio característico se hace cero

$$p(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$$

$$p(A) = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}|$$

$$p(A) = \mathbf{0}$$

Se usa para hallar la matriz inversa

Encontrar A^{-1} por Cayley - Hamilton; donde $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (6-\lambda)^2(11-\lambda)$$

Solución

$$p(\lambda) = (6-\lambda)^2(11-\lambda)$$

$$p(\lambda) = 396 - 168\lambda + 23\lambda^2 - \lambda^3$$

Evaluando en A

$$p(A) = 396I - 168A + 23A^2 - A^3$$

Por Cayley - Hamilton

$$p(A) = \mathbf{0}$$

$$396I - 168A + 23A^2 - A^3 = 0 \qquad //A^{-1}$$

$$396A^{-1} - 168I + 23A - A^2 = 0$$

$$396A^{-1} = 168I - 23A + A^2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{396}(168I - 23A + A^2)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{396}\left(168\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 23\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}^2\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{396}\left(\begin{pmatrix} 168 & 0 & 0 \\ 0 & 168 & 0 \\ 0 & 0 & 168 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 230 & 0 & 46 \\ 0 & 138 & 0 \\ 46 & 0 & 161 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 104 & 0 & 34 \\ 0 & 36 & 0 \\ 34 & 0 & 53 \end{pmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{396}\begin{pmatrix} 42 & 0 & -12 \\ 0 & 66 & 0 \\ -12 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{6}{396}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 11 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 11 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}}$$

Autovectores

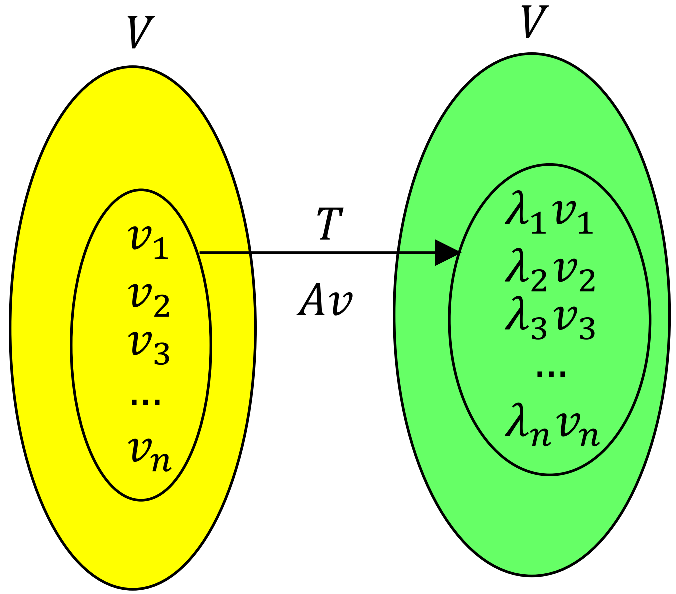
También llamados eigenvectores, vectores propios o vectores característicos

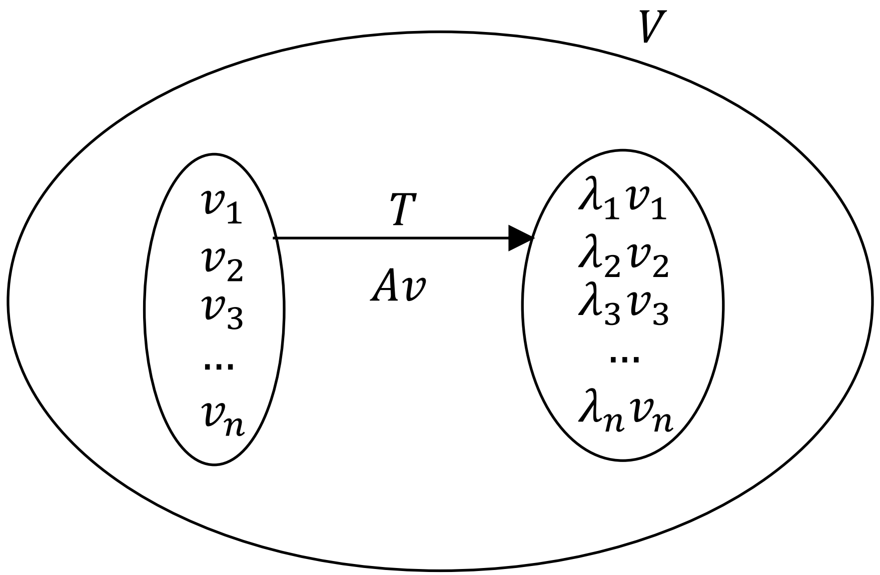
Se asocian a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$

Para hallarlos se reemplazan los autovalores uno a uno en el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$

Se tendrán infinitas soluciones en este sistema, parametrizando se hallan los autovectores

(Los autovectores son bases de los **autoespacios** de la T.L.)





Encontrar los autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\boxed{\lambda_1 = 6 \text{ de multiplicidad } 2}$ $\boxed{\lambda_2 = 11}$

Solución

Hallando los autovectores $(A - \lambda I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2x_1 + x_3 = 0$$

$$x_3 = -2x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\boxed{v_1}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{v_2}}$$

Para $\lambda_2 = 11$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 2x_3 = 0 \qquad x_1 = 2x_3$$

$$x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boxed{v_3}}$$

Autovectores

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\lambda_1 = 6^{(2)}}$ $\boxed{\lambda_2 = 11}$

Los autovectores son las bases de los autoespacios de la T.L.

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Al poner lo autovectores en columnas se forma la matriz **P** $P = (v_1|v_2|v_3| \dots |v_n)$

La matriz **P** es aquella que diagonaliza la matriz **A** donde se obtiene la matriz **D** diagonal

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$$

En la diagonal de D están los autovalores

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$T: V \to V$

$P^{-1}AP = A'$

Encontrar la matriz que diagonalia a $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Y diagonalizar la matriz

Autovectores $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Autovalores $\boxed{\lambda_1 = 6^{(2)}}$ $\boxed{\lambda_2 = 11}$

Solución $P = (v_1|v_2|v_3)$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$
$$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

P es la matriz que diagonaliza a A

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}}$$

En la diagonal principal están los autovalores

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar consiste en verificar que los autovalores estén en la diagonal principal

Si escogíamos otro orden de los autovectores hallamos otra matriz D igual de válida

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

Utilidad de la diagonalización

Con la diagonalización $\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$

Obtenemos la ecuación $\boldsymbol{A = PDP^{-1}}$

Con la que es posible hallar diversas funciones de matrices

Ejemplos $A^n = PD^nP^{-1}$

$$\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

$$\ln A = P \ln D \, P^{-1}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} \quad \text{(Matriz exponencial)}$$

Etc…

$$A = PDP^{-1}$$

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}$$

$$f(A) = P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

Encontrar A^{10} mediante diagonalización; donde $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\boldsymbol{A = PDP^{-1}}$$

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 6^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 6^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 11^{10} \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 6^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 11^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 6^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 6^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 11^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^{10} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{10} & 0 & -2 * 6^{10} \\ 0 & 6^{10} & 0 \\ 2 * 11^{10} & 0 & 11^{10} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{10} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6^{10} + 4 * 11^{10} & 0 & 2 * 11^{10} - 2 * 6^{10} \\ 0 & 5 * 6^{10} & 0 \\ 2 * 11^{10} - 2 * 6^{10} & 0 & 4 * 6^{10} + 11^{10} \end{pmatrix}}$$

Encontrar e^{At} mediante diagonalización; donde $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\boldsymbol{A = PDP^{-1}}$$

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{11t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 & -2e^{6t} \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 2e^{11t} & 0 & e^{11t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{6t} + 4e^{11t} & 0 & 2e^{11t} - 2e^{6t} \\ 0 & 5e^{6t} & 0 \\ 2e^{11t} - 2e^{6t} & 0 & 4e^{6t} + e^{11t} \end{pmatrix}}$$

Cambio de base

Sean dos bases en V:

V

$B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ $\qquad v \qquad$ $B' = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$

$$v = \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_n v_n} \qquad v = \underbrace{k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots + k_n u_n}$$

Matriz de coordenadas de v respecto a B $\quad [v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Matriz de coordenadas de v respecto a B' $\quad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Matriz de transición de B' a B

$$[v]_B = P[v]_{B'}$$

$$\begin{tikzcd} {[v]_B} \arrow[d, shift left, "P^{-1}"] \\ {[v]_{B'}} \arrow[u, shift left, "P"] \end{tikzcd}$$

V

V

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} & \cdots & p'_{1n} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & \cdots & p'_{2n} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} & \cdots & p'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{n1} & p'_{n2} & p'_{n3} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Matriz de transición de B a B'

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

Ej, Sean las bases en $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(2,-1,3)\,;(1,-2,3)\,;(1,4,5)\}$$
$$B' = \{(3,3,3)\,;(2,2,0)\,;(1,0,0)\}$$

Hallar la matriz de transición de la base B' a la base B y de la base B a la B' respectivamente

Solución $\qquad v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \qquad v = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$

$$c_1(2,-1,3) + c_2(1,-2,3) + c_3(1,4,5) = k_1(3,3,3) + k_2(2,2,0) + k_3(1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 & 1/12 & -1/4 \\ -17/24 & -7/24 & 3/8 \\ -1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 11/2 \\ -15/8 & -2 & -17/24 \\ 3/8 & 0 & -1/8 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de transición de } B' \text{ a } B}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$[v]_B = P[v]_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 11/2 \\ -15/8 & -2 & -17/24 \\ 3/8 & 0 & -1/8 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/3 \\ -2 & -5/2 & -1/2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de transición de } B \text{ a } B'}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

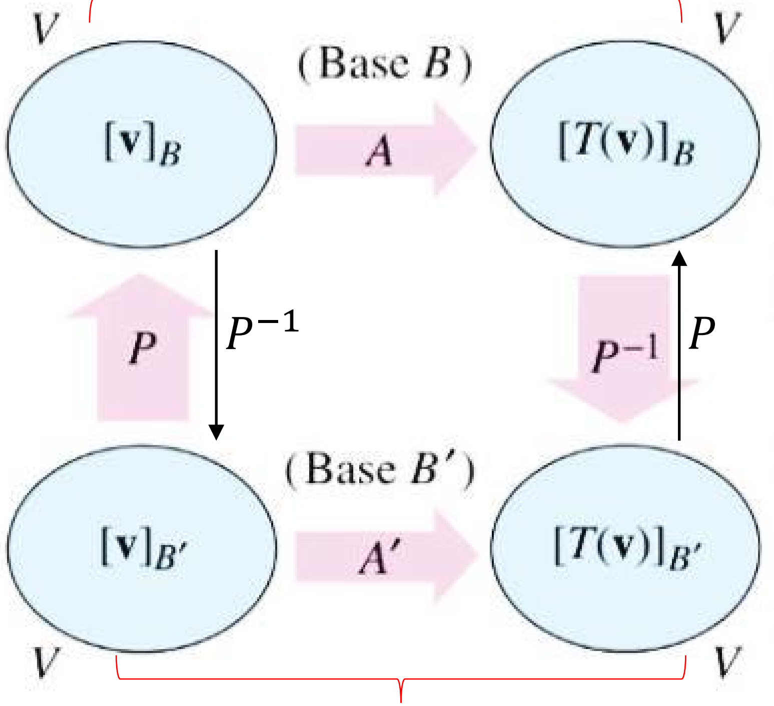
$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

Para transformaciones del tipo $T: V \rightarrow V$

$B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ $\quad$ $B' = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ $\quad$ $T(v) = Av = w$

A es la matriz de transformación con respecto a B

$$A[v]_B = [T(v)]_B = [w]_B$$



$[v]_B = P[v]_{B'}$

$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$

$[T(v)]_B = P[T(v)]_{B'}$

$[T(v)]_{B'} = P^{-1}[T(v)]_B$

$[w]_B = P[w]_{B'}$

$[w]_{B'} = P^{-1}[w]_B$

$$A'[v]_{B'} = [T(v)]_{B'} = [w]_{B'}$$

A' es la matriz de transformación con respecto a B'

$$P^{-1}AP[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$$

$$A'[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$$

$$\boxed{P^{-1}AP = A'}$$

Sea la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ definida en B1 como la base estándar y sea B2={(2,1),(3,4)}, calcular la matriz de T respecto a B2, y hallar la matriz de cambio de base

Solución

Nos piden A' $\boxed{P^{-1}AP = A'}$

$B1 = \{(1,0),(0,1)\}$ $B2 = \{(2,1),(3,4)\}$

$v = c_1 v_1 + c_2 v_2$ $v = k_1 u_1 + k_2 u_2$

$$c_1(1,0) + c_2,(0,1) = k_1(2,1) + k_2(3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Matriz de transición de $B2$ a $B1$

$$T([v]_{B2}) = A'([v]_{B2})$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}}$$

Matriz de transición de $B1$ a $B2$

Ahora, obtenemos la forma matricial de T

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ Matriz de T respecto de la base canónica

$B1$: base canónica para este ejercicio

$A' = P^{-1}AP$

$$A' = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 \\ -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}}$ Respecto de la base $B2$

Otra forma: Usando la fórmula de transformación lineal estándar $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - 2x_2\\-x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

B1 B1

$B1 = \{(1,0),(0,1)\}$

Transformamos cada vector de la base de partida $B1$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2*0\\-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad T(1,0) = (1,0)$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2*1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \qquad T(0,1) = (-2,1)$$

Hallamos las matrices de coordenadas de las transformaciones respecto de $B1$ (base de llegada)

$$T(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \qquad [T(1,0)]_{B1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(0,1) = (-2,1) = -2(1,0) + 1(0,1) \qquad [T(0,1)]_{B1} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}$$ es respecto de B1

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

B2 B2

$B2 = \{(2,1),(3,4)\}$

Transformamos cada vector de la base de partida $B2$

$$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2*1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \qquad T(2,1) = (0,-1)$$

$$T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2*4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix} \qquad T(3,4) = (-5,-4)$$

Hallamos las matrices de coordenadas de las transformaciones respecto de $B2$ (base de llegada)

$$T(2,1) = (0,-1) = a(2,1) + b(3,4) \qquad [T(2,1)]_{B2} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$T(3,4) = (-5,-4) = c(2,1) + d(3,4) \qquad [T(3,4)]_{B2} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$$ es respecto de $B2$

Hay que hallar a, b, c, d...

$$T(2,1) = (0,-1) = a(2,1) + b(3,4)$$
$$T(3,4) = (-5,-4) = c(2,1) + d(3,4)$$

Igualando hallamos a,b,c,d

$$T(2,1) = (0,-1) = a(2,1) + b(3,4)$$
$$T(3,4) = (-5,-4) = c(2,1) + d(3,4)$$

$$2a + 3b = 0 \qquad a = 3/5$$
$$a + 4b = -1 \qquad b = -2/5$$

$$2c + 3d = -5 \qquad c = -8/5$$
$$c + 4d = -4 \qquad d = -3/5$$

$$A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 \\ -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}}$$

NOTA:
Con éste último procedimiento se puede hallar cualquier matriz de transformación respecto de cualesquiera dos bases

$$T: V \to W$$
BV BW

Transformar la base de partida BV

Expresar estas transformaciones en C.L. de la base de llegada BW para hallar las matrices de coordenadas

$$A = ([T(v_1)]_{BW} | [T(v_2)]_{BW} | \dots)$$

A: matriz de transformación respecto de las bases BV, BW

Sea la T.L.

$$T(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix} c-a & b-c \\ 2c+a & 2b+c \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de T respecto a las bases:

$$B_1=\{x-1, x+1, x^2-1\}$$

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Solución

ANTES

$T: P^2 \to \mathbb{R}^{2x2}$

BC1 BC2

BC1,BC2:base canonica

DESPUES

$T: P^2 \to \mathbb{R}^{2x2}$

B1 B2

Transformamos la base de partida B1

$$T(x-1)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2-1)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos las matrices de coordenadas de las transformaciones respecto de $B2$ (base de llegada)

Las transformaciones en combinación lineal de la base de llegada B2 (hallamos los coeficientes de la C.L.)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\left[a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_{31}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{41}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\left[a_{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_{32}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{42}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\left[a_{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_{33}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{43}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$[T(x-1)]_{B_2}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \quad [T(x+1)]_{B_2}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} \quad [T(x^2-1)]_{B_2}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$$

$$[T(x-1)]_{B_2}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}\quad [T(x+1)]_{B_2}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}\quad [T(x^2-1)]_{B_2}=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\overbrace{\hspace{4cm}}^{I}\hspace{4cm}\\ \left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&1&-1&1&-2\\1&1&1&0&2&0&1\\1&1&0&0&2&2&-1\\1&-1&0&0&1&3&-1\end{array}\right)\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41} & a_{11}+a_{21}+a_{31}-a_{41}\\ a_{11}+a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$a_{11}=1\qquad a_{21}=-3\qquad a_{31}=\frac{5}{2}\qquad a_{41}=-\frac{3}{2}$$

$$\begin{pmatrix}a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{42} & a_{12}+a_{22}+a_{32}-a_{42}\\ a_{12}+a_{22} & a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$$a_{12}=3\qquad a_{22}=-1\qquad a_{32}=-\frac{3}{2}\qquad a_{42}=\frac{1}{2}$$

$$T\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}_{B_1}=\left[\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right]_{B_2}$$

$$\begin{pmatrix}a_{13}+a_{23}+a_{33}+a_{43} & a_{13}+a_{23}+a_{33}-a_{43}\\ a_{13}+a_{23} & a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$a_{13}=-1\qquad a_{22}=0\qquad a_{32}=\frac{1}{2}\qquad a_{42}=-\frac{3}{2}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-3&-1&0\\5/2&-3/2&1/2\\-3/2&1/2&-3/2\end{pmatrix}}$$

De una transformación lineal $T\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ se conoce que la representación matricial respecto de las bases $B = \{2+x, 2-x\}$ y $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es la matriz $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Con esta información se pide a) la formula de la transformación lineal, b) verificar el teorema de la dimensión, c) la imagen de $8+4x$ utilizando la matriz dato, d) la matriz estándar

Solución

a) $T(v) = Av$

$$T\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right]_C$$

$v \in \mathbb{P}_1$

$v = c_1(2+x) + c_2(2-x) \ldots (1)$

$T(v) = c_1 T(2+x) + c_2 T(2-x)$

$$T(v) = c_1\left[1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+c_2\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$T(v) = c_1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ldots (2)$$

De (1)

$$v = c_1(2+x) + c_2(2-x)$$

En base canónica $v = a + bx$

$$a + bx = c_1(2+x) + c_2(2-x)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(a+2b) \qquad c_2 = \frac{1}{4}(a-2b)$$

En (2)

$$T(v) = c_1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(a+bx) = \frac{1}{4}(a+2b)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(a-2b)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T(a+bx) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a+2b & -3a+2b \\ 3a-2b & -3a-2b \end{pmatrix}}$$

$$\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$$

b) A verificar: $nulidad + rango = Dim(\mathbb{P}_1)$

$$nulidad = Dim(N(T))$$

$$N(T) = \{v \in \mathbb{P}_1 : T(v) = 0\,;0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$$

$$N(T) = \{v : T(v) = 0\}$$

$$N(T) = \left\{a + bx : T(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$T(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a+2b & -3a+2b \\ 3a-2b & -3a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 2/4 \\ -3/4 & 2/4 \\ 3/4 & -2/4 \\ -3/4 & -2/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = b = 0$$

$$N(T) = \{0 + 0x\}$$

$$nulidad = 0$$

$$rango = Dim(Im(T))$$

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T(v) = w; v \in \mathbb{P}_1\}$$

$$Im(T) = \{w : T(v) = w\}$$

En base canónica $w = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$

$$Im(T) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} : T(a+bx) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\right\}$$

$$T(a+bx) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a+2b & -3a+2b \\ 3a-2b & -3a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 2/4 \\ -3/4 & 2/4 \\ 3/4 & -2/4 \\ -3/4 & -2/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

Sistema consistente si $y + z = 0$ y $x + u = 0$

$$Im(T) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} : y + z = 0 \wedge x + u = 0\right\}$$

$$rango = 2$$

$$nulidad + rango = Dim(\mathbb{P}_1)$$

$$0 + 2 = 2$$

$$\boxed{2 = 2}$$

c) Imagen de $8 + 4x$

$8 + 4x$ está en base canónica

Llevando a la base B

$$v = c_1(2+x) + c_2(2-x)$$

$$a + bx = c_1(2+x) + c_2(2-x)$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(a+2b) \qquad c_2 = \frac{1}{4}(a-2b)$$

$$8 + 4x = \frac{1}{4}(8 + 2\cdot 4)(2+x) + \frac{1}{4}(8 - 2\cdot 4)(2-x)$$

$$8 + 4x = 4(2+x) + 0(2-x)$$

$$[8+4x]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}_B = \left[\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1/2 & -1\\ 1/2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right]_C$$

$$T\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}_B = \left[\begin{pmatrix}4\\-2\\2\\-4\end{pmatrix}\right]_C$$

$$\boxed{T(8+4x)_B = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}_C}$$

d) $T(v) = Av$

$$v = a + bx = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$T(a+bx) = Av$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3a+2b & -3a+2b\\ 3a-2b & -3a-2b\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3/4 & 2/4\\ -3/4 & 2/4\\ 3/4 & -2/4\\ -3/4 & -2/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

comparando

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}3/4 & 2/4\\ -3/4 & 2/4\\ 3/4 & -2/4\\ -3/4 & -2/4\end{pmatrix}}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -6 & a\end{pmatrix}$ se pide a) el valor de la constante "a" sabiendo que uno de sus valores propios es igual a 3, b) diagonalizar la matriz A, c) hallar $\sqrt[5]{A}$ y $\ln(A)$, d) la matriz inversa por Hamilton-Cayley

Solución

a) $|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & -2\\ 4 & -3-\lambda & 4\\ 4 & -6 & a-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Se sabe que: $\lambda=3$

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -6 & 4\\ 4 & -6 & a-3\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & -2\\ 8 & -2 & 4\\ a+1 & a-9 & a-3\end{vmatrix}=0$$

$$-2[8(a-9)+2(a+1)]=0$$

$$8a-72+2a+2=0$$

$$10a-70=0$$

$$\boxed{a=7}$$

b)

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 7\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & -2\\ 4 & -3-\lambda & 4\\ 4 & -6 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -2\\ 4 & 1-\lambda & 4\\ 4 & 1-\lambda & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -2\\ 4 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -2\\ 4 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)=0$$

$$\sigma(A)=\{1,3,5\}$$

$$(A-\lambda I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ 4 & -6 & 7-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-\lambda & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 7-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Para $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2 \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1/2 \\ 1/10 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{5}x_3$$

$$-x_2 + \frac{4}{5}x_3 = 0 \qquad x_2 = \frac{4}{5}x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5x_3 \\ 4/5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) -1 \quad 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = PDP^{-1} \qquad \sqrt[5]{A} = P\sqrt[5]{D}P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sqrt[5]{D} = \begin{pmatrix} \sqrt[5]{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{5} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt[5]{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[5]{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt[5]{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&4&1\\1&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3\\0&-\sqrt[5]{3}&\sqrt[5]{3}\\\sqrt[5]{5}&\sqrt[5]{5}&-\sqrt[5]{5}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt[5]{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&4&1\\1&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3\\0&-\sqrt[5]{3}&\sqrt[5]{3}\\\sqrt[5]{5}&\sqrt[5]{5}&-\sqrt[5]{5}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{A}=\begin{pmatrix}\sqrt[5]{5}&\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}&\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{5}\\\sqrt[5]{5}-1&\sqrt[5]{5}-4\sqrt[5]{3}+4&4\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{5}-3\\\sqrt[5]{5}-1&\sqrt[5]{5}-5\sqrt[5]{3}+4&5\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{5}-3\end{pmatrix}}$$

$$\ln(A)=P\ln(D)\,P^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad \ln(D)=\begin{pmatrix}\ln 1&0&0\\0&\ln 3&0\\0&0&\ln 5\end{pmatrix}$$

$$\ln(A)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&4&1\\1&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\ln 3&0\\0&0&\ln 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3\\0&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\ln(A)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&4&1\\1&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\ln 3&\ln 3\\\ln 5&\ln 5&-\ln 5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\ln(A)=\begin{pmatrix}\ln 5&\ln 5-\ln 3&\ln 3-\ln 5\\\ln 5&\ln 5-4\ln 3&4\ln 3-\ln 5\\\ln 5&\ln 5-5\ln 3&5\ln 3-\ln 5\end{pmatrix}}$$

d) $(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)=0$

$$\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0$$

Teorema de Cayley - Hamilton $p(A)=0$

$$A^3-9A^2+23A-15I=0 \qquad //A^{-1}$$

$$A^2-9A+23I-15A^{-1}=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{15}(A^2-9A+23I)$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}3&-2&2\\-12&43&-28\\-12&38&-23\end{pmatrix}}$$

Para los auto espacios del operador lineal T: $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definido por

$$T(a+bx+cx^2) = (3a-2b) + (-2a+3b)x + (5c)x^2$$

a) Encuentre la ecuación característica y el polinomio característico

b) Encuentre los autovalores y sus bases

c) Encuentre una matriz que diagonalice a la matriz estándar de T y compruebe

d) Encuentre la décima potencia de la matriz estándar

Solución

$$T(v) = Av$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 2^2]$$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)$$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$$

$$\boxed{|A - \lambda I| = (5-\lambda)^2(1-\lambda)}$$

$$\boxed{(5-\lambda)^2(1-\lambda) = 0}$$

$$\boxed{\lambda = 5^{(2)}} \quad \boxed{\lambda = 1}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base del auto espacio de T para $\lambda = 5$

$$\boxed{B_{\lambda=5} = \{-1 + x,\, x^2\}}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad x_1 = x_2$

$x_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base del auto espacio de T para $\lambda = 1$

$$\boxed{B_{\lambda=1} = \{1 + x\}}$$

c) Encuentre una matriz que diagonalice a la matriz estándar de T y compruebe

$$A = PDP^{-1} \qquad D = P^{-1}\cancel{D}AP$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) Encuentre la décima potencia de la matriz estándar

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^{10}+1 & -5^{10}+1 & 0 \\ -5^{10}+1 & 5^{10}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot 5^{10} \end{pmatrix}}$$

Para una transformación lineal $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ de la cual se conoce la matriz estándar $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ b & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Si se conoce que uno de sus autovalores es 7 y que uno de sus autovectores es $(-1 \quad 0 \quad 1)^t$. Con estos datos determinar a) la formula de la transformación lineal, b) halle A^n y e^{At}, c) la base en $\mathbb{P}_2$ cuya representación matricial sea una matriz diagonal

Solución

$$|A - \lambda I| = 0$$

-1

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ a & 3-\lambda & 2 \\ b & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ a & 3-\lambda & -1+\lambda \\ b & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ a & 3-\lambda & -1 \\ b & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ a+b & 6-\lambda & 0 \\ b & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)[(2-\lambda)(6-\lambda) - a - b] = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$(2-\lambda)(6-\lambda) - a - b = 0$$

Se sabe $\lambda = 7$

$$(2-7)(6-7) - a - b = 0$$

$$5 - a - b = 0$$

$$a + b = 5$$

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ b & 3 & 4 \end{pmatrix} x = \lambda x$$

Se sabe $x = (-1 \quad 0 \quad 1)^t$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ b & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -a+2 \\ -b+4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1$$

$$a = 2 \qquad b = 3$$

a) la formula de la transformación lineal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T \colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$$

$$T(v) = Av$$

$$v = at^2 + bt + c$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + c \\ 2a + 3b + 2c \\ 3a + 3b + 4c \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T(at^2 + bt + c) = (2a + b + c)t^2 + (2a + 3b + 2c)t + (3a + 3b + 4c)}$$

b) halle A^n y e^{At}

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$$

$\lambda=7 \qquad \lambda=1$

$x=(-1\ \ 0\ \ 1)^t$

$(A-\lambda I)x=0$

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\3&3&4-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$Si\ \lambda=7$

$$\begin{pmatrix}2-7&1&1\\2&3-7&2\\3&3&4-7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{pmatrix} \quad 2/5 \quad 3/5$$

$$\begin{pmatrix}-5&1&1\\0&-18/5&12/5\\0&18/5&-12/5\end{pmatrix} \quad -5/6$$

$$\begin{pmatrix}-5&1&1\\0&-18/5&12/5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5&1&1\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix} \quad -1/3$$

$$\begin{pmatrix}-5&0&5/3\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$-5x_1+\frac{5}{3}x_3=0 \qquad x_1=\frac{1}{3}x_3$$

$$3x_2-2x_3=0 \qquad x_2=\frac{2}{3}x_3$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x_3\\\frac{2}{3}x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{x_3}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ para } \lambda=7$$

$Si\ \lambda=1$

$$\begin{pmatrix}2-1&1&1\\2&3-1&2\\3&3&4-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ & \\ & \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para } \lambda = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^n & 7^n & 7^n \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7^n + 5 & 7^n - 1 & 7^n - 1 \\ 2 \cdot 7^n - 2 & 2 \cdot 7^n + 4 & 2 \cdot 7^n - 2 \\ 3 \cdot 7^n - 3 & 3 \cdot 7^n - 3 & 3 \cdot 7^n + 3 \end{pmatrix}}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{7t} & e^{7t} & e^{7t} \\ -2e^{t} & 4e^{t} & -2e^{t} \\ -3e^{t} & -3e^{t} & 3e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^{7t} + 5e^{t} & e^{7t} - e^{t} & e^{7t} - e^{t} \\ 2e^{7t} - 2e^{t} & 2e^{7t} + 4e^{t} & 2e^{7t} - 2e^{t} \\ 3e^{7t} - 3e^{t} & 3e^{7t} - 3e^{t} & 3e^{7t} + 3e^{t} \end{pmatrix}}$$

c) la base en $\mathbb{P}_2$ cuya representación matricial sea una matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \{t^2 + 2t - 3; -t^2 + t; -t^2 + 1\}}$$

Diagonalización ortogonal

Sólo si la matriz A es simétrica
Se ortonormaliza el conjunto de autovectores y se forma la matriz P ortogonal

Matriz ortogonal $P^{-1} = P^T$ $\boldsymbol{D = P^T A P}$ $\boldsymbol{A = P D P^T}$ $P = (\hat{u}_1|\hat{u}_2|\hat{u}_3|\ldots|\hat{u}_n)$

Dados los autovalores $\{-3,3,3\}$ y autovectores $\{v,(1,1,0),(-k,0,k)\}$ de una matriz A, donde v corresponde al autovalor no repetido, se pide:

a. Hallar el valor de k y el vector v para que A sea simétrica

b. Halle la matriz A

c. Halle la matriz inversa de A por Cayley-Hamilton

Solución

$$\sigma(A) = \{-3,3^{(2)}\}$$

$$\begin{array}{c} \{v,(1,1,0),(-k,0,k)\} \\ -3 \quad\quad 3 \quad\quad\quad 3 \end{array}$$

Subespacio generado (autoespacio)

$$(x,y,z) = c_1(1,1,0) + c_2(-k,0,k)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -k & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & k & z \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -k & x-y \\ 1 & 0 & y \\ 0 & k & z \end{array}\right) +$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x-y+z \\ 1 & 0 & y \\ 0 & k & z \end{array}\right)$$

$$x - y + z = 0$$

$$x = y - z$$

$$(x,y,z) = (y-z,y,z)$$

$$(x,y,z) = y(1,1,0) + z(-1,0,1)$$

Comparando

$$\boxed{k = 1}$$

$$\begin{array}{ccc} \{(a,b,c), & (1,1,0), & (-1,0,1)\} \\ v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

ortonormalizando

$$\boxed{u_1 = v_1 \qquad \hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}}$$

$$u_1 = (1,1,0) \qquad \|u_1\| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

$$\boxed{u_2 = v_2 - \langle v_2, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 \qquad \hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}}$$

$$\langle v_2, \hat{u}_1 \rangle = (-1,0,1) \circ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$\langle v_2, \hat{u}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = (-1,0,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-2,0,2) + \frac{1}{2}(1,1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-1,1,2)$$

$$\|u_1\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+2^2}$$

$$\|u_1\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$$

$$\{\underset{v_3}{(a,b,c)}, \underset{v_1}{(1,1,0)}, \underset{v_2}{(-1,0,1)}\}$$

v_3 ortogonal a u_1 y u_2

$$\langle v_3, u_1 \rangle = (a,b,c) \circ (1,1,0) = 0$$

$$a + b = 0$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = (a,b,c) \circ (-1,1,2) = 0$$

$$-a + b + 2c = 0$$

$$si\ v_3 = v = \hat{u}_3$$

$$\langle \hat{u}_3, \hat{u}_3 \rangle = (a,b,c) \circ (a,b,c) = 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$a + b = 0 \qquad a = -b$$

$$-a + b + 2c = 0 \qquad c = -b$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad 3b^2 = 1$$

$$b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad a = c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aux. Miguel Angel Chiri Yupanqui

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

P es ortogonal $P^{-1}=P^{t}$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

Polinomio característico $\quad |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 3-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\,-2$$

$$(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Aux. Miguel Angel Chiri Yupanqui

$$(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)^2(-1-\lambda-2)=0$$

$$(3-\lambda)^2(-\lambda-3)=0$$

$$(9-6\lambda+\lambda^2)(\lambda+3)=0$$

$$9\lambda-6\lambda^2+\lambda^3+27-18\lambda+3\lambda^2=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda+27=0$$

Cayley - Hamilton

$$A^3-3A^2-9A+27I=0 \qquad //A^{-1}$$

$$A^2-3A-9I+27A^{-1}=0$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{27}(A^2-3A-9I)$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{27}\left[\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{27}\left[-3\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

Sea la transformación lineal $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida por:

$$T(at^2 + bt + c) = (ka + 2b + c)t^2 + (2a - b + 2c)t + (a + mb)$$

a) Determine el valor de "k" y "m" de modo que $(1\ \ 1\ \ 1)^t$ sea un autovector de la matriz que representa a T, b) Halle una base ortonormal respecto a la cual, la matriz que represente a T sea diagonal, c) halle A^n y e^{At}, d) hallar la matriz inversa mediante Hamilton-Cayley

Solución

a) $v \in \mathbb{P}_2$

$$v = at^2 + bt + c$$

$$T(v) = Av$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$T(v) = aT(t^2) + bT(t) + cT(1)$$

$$T(v) = a[kt^2 + 2t + 1] + b[2t^2 - 1t + m] + c[1t^2 + 2t + 0]$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} k-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & m & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $X = (1\ \ 1\ \ 1)^t$

$$\begin{pmatrix} k-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & m & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k+3-\lambda \\ 3-\lambda \\ 1+m-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$ $\boxed{k = 0}$ $\boxed{m = 2}$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A es simétrica, se puede diagonalizar ortogonalmente

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

-1

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)(3+\lambda)(1+\lambda) = 0$$

$$\sigma(A) = \{-3, -1, 3\}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Si $\lambda = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad -2 \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) -2 \qquad -1/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ 1/2 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \quad 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad -1/8$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizando

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}[-1+1]\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}[1-2+1]\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}[-1+1]\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Diagonalizando:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad P^{-1}=P^{t}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP$$

$$D=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \boxed{D=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

c)

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (-3)^n + 3(-1)^n + 2(3)^n & -2(-3)^n + 2(3)^n & (-3)^n - 3(-1)^n + 2(3)^n \\ -2(-3)^n + 2(3)^n & 4(-3)^n + 2(3)^n & -2(-3)^n + 2(3)^n \\ (-3)^n - 3(-1)^n + 2(3)^n & -2(-3)^n + 2(3)^n & (-3)^n + 3(-1)^n + 2(3)^n \end{pmatrix}}$$

$$A = PDP^{-1}$$
$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-3t} + 3e^{-t} + 2e^{3t} & -2e^{-3t} + 2e^{3t} & e^{-3t} - 3e^{-t} + 2e^{3t} \\ -2(-3)^n + 2(3)^n & 4e^{-3t} + 2e^{3t} & -2e^{-3t} + 2e^{3t} \\ e^{-3t} - 3e^{-t} + 2e^{3t} & -2e^{-3t} + 2e^{3t} & e^{-3t} + 3e^{-t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}}$$

d)

$$|A-\lambda I|=0$$

$$(3-\lambda)(3+\lambda)(1+\lambda)=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9=0$$

$$A^3+A^2-9A-9I=0 \qquad //A^{-1}$$

$$A^2+A-9I-9A^{-1}=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}(A^2+A-9I)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 0 & 9 & 0\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 2 & 1\\ 2 & -10 & 2\\ 1 & 2 & -9\end{pmatrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 2 & -4\end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 2 & -4\end{pmatrix}}$$