LA FÓRMULA DE LEIBNIZ PARA EL DETERMINANTE

MIGUEL GONZÁLEZ
migueg32@ucm.es

Índice

En este documento vamos a resolver el **ejercicio 8** de la **hoja 2**, que consiste en demostrar la fórmula de Leibniz para el determinante: dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, queremos ver que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

donde S_n es el grupo de permutaciones en n símbolos.

Para ello, primero tenemos que entender esta fórmula, de modo que comenzaremos explicando qué son S_n y $\mathrm{sign}(\sigma)$. También veremos ejemplos ya conocidos para matrices pequeñas. Una vez entendido esto explicaremos la demostración, primero con matrices 2×2 para visualizar bien la idea antes de hacer el caso general (más abstracto). Finalmente explicaremos por qué nos interesa esta fórmula y, lo más importante, gracias a ella llegaremos a **comprender por qué se define así el determinante**, dado que a priori parece una definición arbitraria.

Entender la fórmula: el grupo de permutaciones S_n

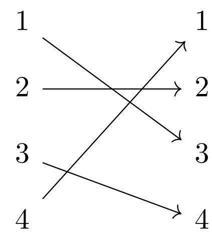
El primer paso para entender la fórmula es observar que se trata de una suma ($\sum$) indexada por los elementos de cierto conjunto S_n. Es decir, tenemos un sumando por cada $\sigma \in S_n$. ¿Qué son estos elementos? Se trata de las **permutaciones de n símbolos**. Dado un conjunto de n elementos (nosotros tomaremos $\{1, \dots, n\}$, el de los números naturales del 1 al n), una permutación consiste en un *cambio de orden* de estos elementos. Por ejemplo, para $n = 4$, una permutación podría ser $4, 2, 1, 3$.

Una manera conveniente (y necesaria para entender la fórmula) de ver las permutaciones es pensarlas como funciones

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

donde $\sigma(i)$ nos indica el elemento que hay en la posición i de la permutación. En el ejemplo anterior $(4, 2, 1, 3)$, el primer elemento es el 4, de modo que $\sigma(1) = 4$. Del mismo modo, $\sigma(2) = 2$,

$\sigma(3) = 1$ y $\sigma(4) = 3$. Podemos representar la función σ de la manera habitual:



Observemos lo siguiente:

- El mismo elemento no puede estar en dos posiciones distintas (ya que solo hemos desordenado $\{1, \ldots, n\}$, no hay repeticiones). Por tanto $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ para posiciones distintas $i \neq j$. Es decir, las permutaciones son funciones **inyectivas**.
- Todos los elementos están en alguna posición (¡no desaparecen elementos al reordenarlos!), de modo que las permutaciones son funciones **sobreyectivas**.

Es decir, las permutaciones son funciones **biyectivas** (tanto inyectivas como sobreyectivas). Del mismo modo, cualquier función biyectiva $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ da lugar al siguiente cambio de orden: $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$, en el que cada uno de los números $1, \ldots, n$ aparece exactamente una vez (dado que σ es biyectiva). Por lo tanto:

Definición. El **grupo de permutaciones de n elementos** se define como

$$S_n := \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}.$$

El término *grupo* en vez de *conjunto* se refiere a que existe una operación natural, la **composición de funciones**, que cumple ciertas propiedades. Efectivamente, al componer dos funciones biyectivas se obtiene otra biyectiva. No entraremos en esto dado que no será necesario para resolver el ejercicio, pero volveréis a encontrarlo en la asignatura de Estructuras Algebraicas.

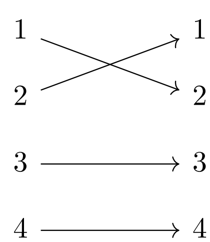
Con esto hemos entendido qué quiere decir S_n, y también hemos entendido el producto

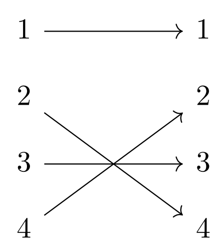
$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Estamos multiplicando un elemento de cada fila pero *cambiando de orden las columnas* según nos indica la permutación σ. Esto lo hacemos para todas las permutaciones posibles $\sigma \in S_n$ y después sumamos todo.

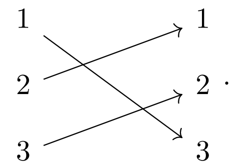
Entender la fórmula: el signo $\mathrm{sign}(\sigma)$

Nos falta entender en qué consiste el factor $\mathrm{sign}(\sigma)$ de cada término. Se trata de una elección de signo ($+$ o $-$) que acompaña a cada producto. Para comprenderla tenemos que fijarnos en las permutaciones más sencillas: las **trasposiciones**. Una trasposición se obtiene cambiando de orden **únicamente dos elementos**. Estas son trasposiciones:

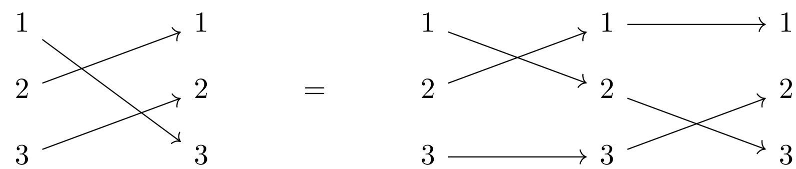




dado que solo hemos cambiado el 1 con el 2 o el 2 con el 4, respectivamente. Sin embargo, esta no es una trasposición:

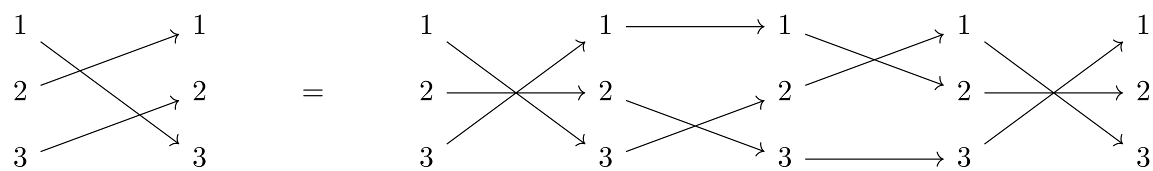


No obstante, **a partir de estas trasposiciones** (componiéndolas) **podemos obtener cualquier permutación** que se nos ocurra. Por ejemplo, la anterior la obtenemos mediante dos trasposiciones como sigue:



Ejercicio. Si estás interesado puedes intentar demostrarlo: prueba que cualquier permutación σ se obtiene componiendo trasposiciones. Pista: utiliza inducción en n. Para el paso inductivo, distingue el caso $\sigma(1) = 1$.

¿Cuántas trasposiciones necesito usar para obtener σ? Esta pregunta no está bien formulada: un mismo σ se puede obtener de maneras distintas (y con una cantidad distinta de trasposiciones). Por ejemplo, podríamos haber hecho:



No obstante, **la paridad del número de trasposiciones siempre es la misma**. Es decir, dada una permutación σ, o bien siempre necesitaremos un número par de trasposiciones, o bien siempre necesitaremos un número impar. En nuestro ejemplo, en ambos casos hemos necesitado un número par.

Ejercicio. De nuevo, si quieres profundizar más, puedes demostrar que la paridad del número de trasposiciones siempre es la misma. ¡Ten en cuenta que este ejercicio es difícil! Pista: considera el *polinomio de Vandermonde* que aparece en el ejercicio 9:

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \Pi_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i - x_j).$$

Dada una permutación σ y un polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$, podemos considerar $\sigma(P)(x_1, \dots, x_n) := P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Intentemos aplicar esto al polinomio Δ. ¿Qué ocurre si σ es una trasposición? ¿Cómo podemos usar esto para demostrar el ejercicio?

Por lo tanto, podemos definir lo siguiente:

Definición. El **signo de una permutación** $\sigma \in S_n$ es

$$\operatorname{sign}(\sigma) := \begin{cases} +1 & \text{si el número de trasposiciones necesario para obtener } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si el número de trasposiciones necesario para obtener } \sigma \text{ es impar} \end{cases}.$$

Fíjate en que también se puede definir el signo declarando que el signo de la identidad es 1 y estableciendo que cada vez que hacemos una trasposición este cambia.

Ejemplo: la fórmula en matrices de tamaño pequeño

Veamos que aspecto tiene la fórmula de Leibniz para una matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Como hemos entendido antes, habrá un sumando por cada permutación de dos elementos. Solo hay estas dos:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[ur] & 2 \end{tikzcd}.$$

La primera es la identidad, y su signo es $+1$ (¿por qué?). Por lo tanto, el sumando correspondiente en la fórmula es

$$a_{11}a_{22},$$

el producto de los elementos de la diagonal. La segunda es una trasposición que cambia el 1 con el 2, luego su signo es -1. El sumando correspondiente es, por tanto,

$$-a_{12}a_{21}.$$

La fórmula, entonces, queda así:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Se trata de la fórmula habitual para el determinante 2×2. Veamos ahora qué ocurre en el caso 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos seis posibles permutaciones (¡comprueba que solo hay estas!):

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \\ 3 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[ddr] & 1 \\ 2 \arrow[ur] & 2 \\ 3 \arrow[ur] & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[dr] & 2 \\ 3 \arrow[uur] & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[ur] & 2 \\ 3 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1 \\ 2 \arrow[dr] & 2 \\ 3 \arrow[ur] & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[ddr] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \\ 3 \arrow[uur] & 3 \end{tikzcd}$$

Puedes comprobar que las tres primeras tienen signo $+1$ y las tres últimas, que son trasposiciones, tienen signo -1. Por lo tanto, sus respectivos sumandos en la fórmula son los siguientes:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{13}a_{21}a_{32}, a_{12}a_{23}a_{31}, -a_{12}a_{21}a_{33}, -a_{11}a_{23}a_{32}, -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

La fórmula de Leibniz, por tanto, queda así:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Esto no es otra cosa que la **regla de Sarrus** habitual.

Uno podría pensar mirando los casos 2×2 y 3×3 que la regla de Sarrus se generaliza de esta manera: *sumar los productos de los elementos de cada una de las n diagonales positivas (hacia abajo a la derecha) con signo positivo y los de las n diagonales negativas (hacia arriba a la derecha) con signo negativo.* La fórmula de Leibniz nos muestra que **esto no es correcto**, dado que solo hay $2n$ diagonales mientras que la fórmula de Leibniz tiene $n!$ sumandos (recuerda que esta es la cantidad de permutaciones de n elementos).

Por ejemplo, si $n = 4$, el término

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$

no se obtiene de ninguna diagonal.

Entender la demostración en el caso 2×2

Una vez entendida la fórmula, podemos comenzar con la demostración. Hay por lo menos dos maneras de hacerla:

- Mediante la definición de determinante (recuerda que se define de manera recursiva a través de los adjuntos de la primera columna), por inducción en n. Esta manera es menos interesante y algo complicada, así que no la haremos aquí, pero puedes intentarla.
- Mediante las propiedades del determinante. Esta es la que explicaremos, y es más ilustrativa dado que posteriormente nos permitirá entender la definición de determinante.

Aunque el caso 2×2 es extremadamente sencillo (de hecho, ya lo hemos demostrado al calcular la fórmula en la sección anterior) vamos a hacerlo de una manera distinta, aparentemente más complicada, para ilustrar la estrategia de la demostración general. La estrategia es la siguiente: **usar las propiedades del determinante para relacionar** $\det(A)$ **con el determinante de la identidad** $\det(I_n)$.

El primer paso clave es usar la propiedad que nos permite separar una fila en varios sumandos (Propiedad 1 de la sección 5.2 del libro de Merino–Santos). Así, por ejemplo, usando que la primera fila se puede separar como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En cada una de estas dos matrices podemos hacer exactamente lo mismo con la segunda fila, es decir:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Con esto, hemos separado $\det(A)$ en cuatro sumandos. Ahora que solamente nos aparece una entrada no nula en cada fila, podemos sacarla multiplicando fuera del determinante, utilizando la propiedad 4 de la sección 5.2 del libro: mutliplicar el determinante por un escalar es igual a calcular el determinante multiplicando una fila por el mismo escalar. Así pues, estos son nuestros cuatro sumandos:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}a_{21}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}a_{22}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos utilizar la propiedad 2 de la sección 5.2 del libro: si dos filas son iguales, el determinante se anula. Con esto, los sumandos primero y último que hemos escrito anteriormente se anulan y ya solo nos quedan dos de ellos. El segundo ya está en términos del determinante de la identidad y, para el tercero, podemos utilizar la propiedad 3 del libro: cambiar dos filas de orden cambia el signo del determinante.

$$a_{12}a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -a_{12}a_{21}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La estrategia ha funcionado, y hemos llegado a que

$$\det(A) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det(I_2),$$

lo que concluye la demostración para $n = 2$ puesto que $\det(I_2) = 1$.

Resolución del ejercicio: la demostración general

La estrategia que hemos mostrado para el caso $n = 2$ funciona de manera idéntica para cualquier valor de n, aunque la notación se complica ligeramente al tener las matrices tamaño arbitrario. Vamos a ver cómo hacerlo en esta sección, lo que resuelve el ejercicio. Necesitaremos exactamente las mismas propiedades que para el caso $n = 2$. Denotemos por $A_i \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ la fila i-ésima de A, de tal manera que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Recordemos las **propiedades** que necesitaremos (todas están en la sección 5.2 de Merino–Santos):

1. Se tiene que
$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$
2. Si $k \in \mathbb{K}$, tenemos
$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$
3. Si $A_i = A_j$ con $i \neq j$, entonces $\det(A) = 0$.
4. Si A' se obtiene intercambiando dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
5. $\det(I_n) = 1$.

Como curiosidad, cualquier función $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ (por ejemplo, el determinante) que cumple 1 y 2 se llama **multilineal**, si además cumple 3 se llama **alternada** y si cumple 4 se llama **antisimétrica**. Se puede comprobar (¡inténtalo!) que 1 y 3 implican automáticamente 4.

Para la demostración, seguiremos la misma estrategia que en el caso $n = 2$, usando las propiedades para relacionar $\det(A)$ con $\det(I_n)$. Para ello, introducimos las siguientes filas:

$$e_j := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donde el 1 está en la posición j-ésima. Estas son las filas de la identidad I_n. Observa que esto nos permite expresar las filas de A así:

$$A_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}.$$

Fíjate en que, para evitar confusiones más adelante, hacemos que el índice de la suma sea distinto para cada A_i llamándolo j_i. ¡Es solo un nombre!

Con esto, podemos usar la propiedad 1 con la primera fila:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1} \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

¿Qué hemos conseguido? Que la primera fila en cada sumando ahora es de la forma e_j, y por tanto nuestra matriz se parece más a I_n, que es lo que queremos. Hacemos ahora lo mismo con la segunda fila en cada sumando, con la propiedad 1:

$$\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2} \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Por supuesto, podemos continuar hasta la fila n, obteniendo finalmente lo siguiente:

$$\det(A) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Ahora mismo hay muchísimos sumandos: n^n. No obstante, podemos usar el mismo truco que en el caso $n = 2$: **si hay dos filas iguales** (es decir, siempre que algún j_{i_1} sea igual a algún otro j_{i_2}), **el determinante vale cero** por la propiedad 3. Por lo tanto, solo necesitamos quedarnos con aquellos sumandos en los que $j_1, \dots, j_n$ sean todos distintos, es decir, ¡con los sumandos en los que $j_1, \dots, j_n$ sea una permutación!. Como ya sabemos, podemos llamar a esta permutación σ, con la relación $\sigma(i) = j_i$.

De esta manera, pasamos a tener simplemente $n!$ sumandos:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \dots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix},$$

y la fórmula ya empieza a parecerse a lo que queremos. El último paso es darse cuenta de que las filas $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ son precisamente las filas de la identidad, cambiadas de orden según la permutación σ. Esto es así porque $e_1, \dots, e_n$ son las filas de la identidad. Entonces, podemos utilizar la propiedad 4 para cambiarlas de orden de dos en dos (es decir, aplicando trasposiciones de filas), y solo nos aparecerá un signo positivo o negativo dependiendo de si el número de cambios es par o impar. Fíjate en que este signo es precisamente $\operatorname{sign}(\sigma)$ por la manera en la que lo hemos definido. Así pues:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \det(I_n)$$

y concluimos el ejercicio por la propiedad 5, es decir, usando que $\det(I_n) = 1$.

Ejercicio. Resuelve la segunda parte del ejercicio, es decir, demuestra que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Pista: usa alguna propiedad del determinante, o replica la misma demostración con las columnas de A en lugar de con sus filas.

Consecuencias: entender el determinante

Puede parecer que esta fórmula no tiene utilidad. En efecto, permite calcular el determinante de A mediante $n!$ sumandos, cada uno de los cuales requiere de multiplicar n elementos. ¡Esto es terriblemente ineficiente! Una manera mucho mejor de hacer este cálculo es mediante el método de Gauss: podemos convertir el determinante en uno de una matriz triangular superior aplicando operaciones elementales por filas, y este último se calcula de manera inmediata multiplicando los elementos de la diagonal. Esto cuesta del orden de n^3 operaciones, dado que el método de Gauss requiere hacer a lo sumo n operaciones en cada una de, a lo sumo, n filas, para obtener cada uno de los n pivotes. (Por cierto, aplicar de manera recursiva la definición por adjuntos también es ineficiente: cuesta del orden de $n!$ operaciones.)

No obstante, esta fórmula es de enorme **utilidad teórica**, debido a que **solo hemos utilizado las propiedades** $1-5$ **para demostrarla**. Es decir, si yo quiero tener una función

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

que asigne a cada matriz un escalar en $\mathbb{K}$ y que cumpla las propiedades $1-5$, hemos demostrado que **obligatoriamente** ha de cumplirse

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(A).$$

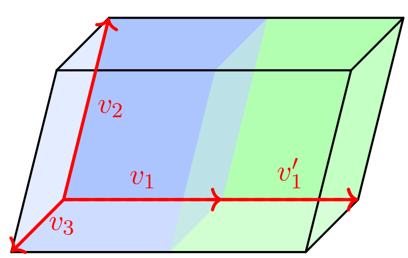
El determinante es la única función que asigna a las matrices cuadradas un escalar y que cumple las propiedades $1-5$.

Esto justifica la definición de determinante: no hay otra definición posible, siempre que queramos esas 5 propiedades. La pregunta ahora es **¿por qué queremos esas propiedades?**

Una posible respuesta, de carácter **algebraico**, es que precisamente esas propiedades nos permiten aplicar operaciones elementales sin que el determinante cambie (salvo un escalado si multiplicamos una fila por un escalar). Como el determinante de una matriz con filas nulas es cero (también se deduce de las propiedades), esto quiere decir que $\det(A) = 0 \iff \operatorname{rk}(A) \neq n$. Es decir, el determinante nos permite detectar si una matriz es invertible. Por supuesto, de esas propiedades se deducen muchas otras utilidades del determinante (la regla de Cramer, el cálculo del rango con menores,...).

Otra respuesta de carácter **geométrico** es que las propiedades $1-5$ son precisamente las propiedades del **volumen**. Piénsalo: dada una matriz A, **¿cómo podemos definir el volumen** del paralelepípedo (n dimensional) cuyos lados están dados por las filas de A (como vectores de $\mathbb{K}^n$). Esto presenta **dos dificultades**: estamos en dimensión n y en un cuerpo $\mathbb{K}$ arbitrario. Sin embargo, **sabemos las propiedades que debería cumplir el volumen**:

- Si tengo dos paralelepípedos dados por los vectores $v_1, \dots, v_i, \dots, v_n$ y $v_1, \dots, v_i', \dots, v_n$ y los junto, obtengo uno dado por los vectores $v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n$ y su volumen es la suma de ambos volúmenes.



- Si multiplico un lado de la figura por $k \in \mathbb{K}$, dejando los demás igual, el volumen se multiplica por k.
- Si dos de los lados son el mismo vector, la figura no es n-dimensional: tiene dimensión menor. Por tanto su volumen tiene que ser 0.
- Si cambio de orden dos de los lados de la figura, cambio la orientación de la misma, luego su volumen (orientado) tiene que cambiar de signo.
- El volumen del cubo unidad (en dimensión n) es 1.

¡Estas son precisamente nuestras propiedades $1-5$! Por lo tanto, con este ejercicio 8 hemos demostrado que **la única manera de definir el volumen (de un paralelepípedo, en cualquier dimensión y cuerpo) es mediante el determinante**.