Teste 6

Versão A

Justifique todas as respostas.

1. (a) Utilize o algoritmo de Euclides para encontrar inteiros s e t tais que
$$s \cdot 23 + t \cdot 35 = 1.$$
   (b) Aplique o teorema chinês do resto para encontrar todas as soluções em $\mathbb{Z}$ do sistema
$$\begin{cases} x \equiv_5 3 \\ x \equiv_7 5 \\ x \equiv_{23} 12 \end{cases}.$$
   (Nota: pode usar as seguintes igualdades: $33 \cdot 7 - 2 \cdot 115 = 1$ e $1 \cdot 161 - 32 \cdot 5 = 1$.)
   (c) Encontre um elemneto invertível em $\mathbb{Z}_{161}$. (Sugestão: pode utilizar alguma informação das alíneas anteriores.)
   (d) Mostre que $\overline{14}$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_{35}$.

2. (a) Quantas arestas tem uma árvore geradora do grafo bipartido completo $K_{8,7}$?
   (b) Quantas das árvores geradoras de $K_{8,7}$ são grafos lineares?
   (c) Quantos subgrafos do grafo completo K_{17} são isomorfos ao grafo completo K_6? E quantos são isomorfos a K_{12}?
   (d) Dos dois resultados da resposta anterior, qual é o maior?

3. Mostre por indução que para qualquer natural n,
$$\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^k = 3^{n+1} - 1.$$

4. Seja n um natural positivo e sejam x, y e z inteiros. Mostre que se $x \equiv_n y$ então $xz \equiv_n yz$.

1. a) $s.23 + t.35 = 1$

$35 \equiv_{23} 1$

$35 = 1.23 + 12$

$23 = 1.12 + 11$

$12 = 1.11 + \underline{1}$

$\underline{11} = 11.\underline{1} + 0$

$1 = 12 - 1.11$

$= 35 - 1.23 - 1.(23 - 1.12) = 35 - 1.23 - 1.23 + 1.12 =$

$= 35 - 2.23 + 35 - 1.23$

$= 2.35 - 3.23$

$s = -3$

$t = 2$

b) $\begin{cases} x \equiv_5 3 \\ x \equiv_7 5 \\ x \equiv_{23} 12 \end{cases}$ $\begin{cases} a \equiv_5 3 \\ a \equiv_7 0 \\ a \equiv_{23} 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b \equiv_5 0 \\ b \equiv_7 5 \\ b \equiv_{23} 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c \equiv_5 0 \\ c \equiv_7 0 \\ c \equiv_{23} 12 \end{cases}$

$161\, l \equiv_5 3$

$161 = 32 \times 5 + \underline{1}$

$\underline{5} = 5 \times \underline{1} + 0$

$1 = 161 - 32.5$

$1.161 \equiv_5 1$

$\therefore 3.161 \equiv_5 3$

$a = 3.161 = 483$

$115m \equiv_7 5$

$115 = 16.7 + 3$

$7 = 2 \times 3 + \underline{1}$

$\underline{3} = 3.\underline{1} + 0$

$1 = 7 - 2.3$

$= 7 - 2.115 + 32.7$

$= -2.115 + 33.7$

$(-2).115 \equiv_7 1$

$\therefore (-10).115 \equiv_7 5$

$b = (-10).115 = -1150$

$35n \equiv_{23} 12$

$35 = 1.23 + 12$

$23 = 1.12 + 11$

$12 = 1.11 + \underline{1}$

$\underline{11} = 11.\underline{1} + 0$

$1 = 12 - 1.11$

$= 35 - 1.23 - 23 + 1.12$

$= 35 - 1.23 - 23 + 35 - 1.23$

$= 2.35 - 3.23$

$2.35 \equiv_{23} 1$

$\therefore 24.35 \equiv_{23} 12$

$c = 24.35 = 840$

$a + b + c = 483 - 1150 + 840 = 173$

$5.7.23 = 840$

$C.S. = \{173 + 805k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $1.161 - 32.5 = 1$

$-32.5 \equiv_{161} 1$

Logo, $\overline{5}$ é elemento invertível de $\mathbb{Z}_{161}$.

d) $14 \equiv_{35} 0$

$35 = 2 \times 14 + \underline{7}$

$14 = 2 \times \underline{7} + 0$

mdc > 1

2. a) Nº Arestas = $8 + 7 - 1 = 14$

b) $\frac{8! \times 7!}{2}$ → Ciclo de Hamilton

→ Restringir a apenas um sentido

c) Subgrafos de K_{17} isomorfos a K_6 = $\binom{17}{6}$ Escolhidos 6 vértices do grafo completo K_{17}

Subgrafos de K_{17} isomorfos a K_{12} = $\binom{17}{12}$

d) $\frac{17}{2} = 8.5$ $8.5 - 6 = 2.5$ $12 - 8.5 = 3.5$

$\binom{17}{6}$ está mais próximo do centro do triângulo de Pascal, então é maior que $\binom{17}{12}$

3. Base: $2.3^0 = 2 = 3^{0+1} - 1$ ✓ Proposição Verdadeira

Hereditariedade: Suponhamos que $\sum_{k=0}^{n} 2.3^k = 3^{n+1} - 1$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{n+1} 2.3^k = \sum_{k=0}^{n} 2.3^k + (3^{n+1} - 1) =$

$= 2.3^{n+1} + (3^{n+1} - 1)$

$= 3.3^{n+1} - 1 = 3^{n+2} - 1$

Logo, por indução matemática, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 2.3^k = 3^{n+1} - 1$.

4. $n \in \mathbb{N}^+$

Suponhamos que $x \equiv_n y$, então existe $a \in \mathbb{Z}$, tal que $x - y = an$.

Logo $2(x-y) = 2(na)$, portanto $2x - 2y = (a2)n$, logo $2x \equiv_n 2y$.

Teste 6

Versão B

Justifique todas as respostas.

1. (a) Utilize o algoritmo de Euclides para encontrar inteiros s e t tais que

$$s \cdot 93 + t \cdot 5 = 1.$$

   (b) Aplique o teorema chinês do resto para encontrar todas as soluções em $\mathbb{Z}$ do sistema

$$\begin{cases} x \equiv_3 2 \\ x \equiv_5 3 \\ x \equiv_{31} 12 \end{cases}.$$

   (Nota: pode usar as seguintes igualdades: $1 \cdot 31 - 2 \cdot 15 = 1$ e $52 \cdot 3 - 1 \cdot 155 = 1$.)

   (c) Encontre um elemneto invertível em $\mathbb{Z}_{155}$. (Sugestão: pode utilizar alguma informação das alíneas anteriores.)

   (d) Mostre que $\overline{12}$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_{15}$.

2. (a) Quantas arestas tem uma árvore geradora do grafo bipartido completo $K_{9,8}$?

   (b) Quantas das árvores geradoras de $K_{9,8}$ são grafos lineares?

   (c) Quantos subgrafos do grafo completo K_{19} são isomorfos ao grafo completo K_7? E quantos são isomorfos a K_{13}?

   (d) Dos dois resultados da resposta anterior, qual é o maior?

3. Mostre por indução que para qualquer natural n,

$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 4^k = 4^{n+1} - 1.$$

4. Seja n um natural positivo e sejam x, y e z inteiros. Mostre que se $x \equiv_n y$ então $xz \equiv_n yz$.