Teste 1

9 de Novembro de 2023

Versão A

Resolva os grupos I, II e III em folhas de teste separadas. Justifique todas as respostas.

Grupo I

1. Dado um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, considere em $\mathbb{R}$ o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} -2x + 9y & -7\alpha z = -1 \\ x - 3y & +2\alpha z = 5 \\ -2y & +\alpha^2 z = \alpha - 8 \end{cases}$$

a) Indique a matriz simples e a matriz completa do sistema.

b) Discuta o sistema em função do parâmetro α.

c) Para $\alpha = 2$, indique o conjunto-solução do sistema.

Grupo II

2. Seja $H \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ a matriz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \pi \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 2\pi \end{bmatrix}$$

a) Calcule o determinante de H e justifique que H é invertível.

b) Calcule a inversa de H.

3. Considere as matrizes $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times 2}(\mathbb{C})$, e $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

a) Sabendo que é possível realizar o produto AB, qual é o valor de p?

b) Supondo que C é invertível, resolva a equação matricial

$$(C^{-1}X)^T = B^T A^T$$

na incógnita X.

c) Sabendo que

$$AB = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 3i & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

determine a matriz X encontrada na alínea anterior.

Grupo III

4. Justifique que o conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

não é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer e seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \in \mathbb{N}$, uma matriz tal que $A^3 = 0$. Seja $B = A + I_n$. Mostre que B é invertível e que a sua inversa é a matriz $I_n - A + A^2$.

6. Considere em $\mathbb{R}^2$ a operação θ definida por

$$(a, b)\theta(c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

Averigue se θ admite elemento neutro.