Teste 1 2023 Grupo I

1. $\begin{cases} -2x + 9y - 7\alpha z = -1 \\ x - 3y + 2\alpha z = 5 \\ - 2y + \alpha^2 z = \alpha - 8 \end{cases}$

a) Matriz Simples: $\begin{bmatrix} -2 & 9 & -7\alpha \\ 1 & -3 & 2\alpha \\ 0 & -2 & \alpha^2 \end{bmatrix}$

Matriz Completa: $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 9 & -7\alpha & -1 \\ 1 & -3 & 2\alpha & 5 \\ 0 & -2 & \alpha^2 & \alpha-8 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 9 & -7\alpha & -1 \\ 1 & -3 & 2\alpha & 5 \\ 0 & -2 & \alpha^2 & \alpha-8 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 - L_1]{-\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9/2 & 7/2\,\alpha & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2\,\alpha & 9/2 \\ 0 & -2 & \alpha^2 & \alpha-8 \end{array}\right] \longrightarrow$

$\xrightarrow[\substack{L_1-(-9/2)L_2 \\ L_3-(-2)L_2}]{2/3 L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 14 \\ 0 & 1 & -\alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha & \alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1-(-\alpha)L_3 \\ L_2-(-\alpha)L_3}]{\frac{1}{\alpha^2-2\alpha}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14+\frac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha^2-2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 3+\frac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha^2-2\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha} \end{array}\right] \longrightarrow$

$\frac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha^2-2\alpha} = 1$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha} \end{array}\right]$

$\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \vee \alpha = 0$

O sistema é possível e determinado para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$.

O sistema é impossível para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

O sistema nunca será possível e indeterminado, independentemente do valor de α.

c) Para $\alpha = 2$ o conjunto-solução do sistema é igual a $\emptyset$, pois nesse cenário, o sistema seria impossível.

Grupo II

2. $H = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \pi \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 2\pi \end{bmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & \pi \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 2\pi \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_1]{} \begin{vmatrix} 1 & -3 & \pi \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) = -1$

$\det(H) \neq 0$, logo podemos concluir que é invertível.

b) $H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \times \mathrm{Adj}(H)$

$$\mathrm{Adj}(H) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2\pi \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2\pi \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & \pi \\ -5 & 2\pi \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \pi \\ 2 & 2\pi \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & \pi \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 8\pi+5 & 2 & -8 \\ \pi & 0 & -1 \\ -3-4\pi & -1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8\pi+5 & \pi & -3-4\pi \\ 2 & 0 & -1 \\ -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{-1} \times \mathrm{Adj}(H) = (-1) \times \mathrm{Adj}(H) = \begin{bmatrix} -8\pi-5 & -\pi & 3+4\pi \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

3. a) Sabemos que o produto de AB é possível e para isso ~~de~~ é necessário que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B. Sendo o número de colunas de A igual a 3, então concluímos que $\beta = 3$

b) $(C^{-1}X)^T = B^T A^T \Leftrightarrow X^T (C^{-1})^T = B^T A^T \Leftrightarrow X^T ((C^{-1})^T \times C^T) = B^T A^T C^T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X^T I = B^T A^T C^T \Leftrightarrow X^T = B^T A^T C^T \Leftrightarrow (X^T)^T = (B^T)^T (A^T)^T (C^T)^T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X = CAB$

c) $X = CAB \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 3i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6i & -i-1 \\ -15i & 0 \end{bmatrix}$

Grupo III

4. Para ser subespaço vetorial:

F é um subespaço vetorial de E sse:

i) $0_E \in F$;

ii) $u + v \in F$ então $u, v \in E$;

iii) $\alpha . u \in F$ então $\alpha \in K$, $u \in F$;

iv) $F \subseteq E$

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F$?

Para $a=0$ e $b=0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos concluir que a matriz nula 2x2 não pertence a F, consequentemente provamos que não é um subespaço vetorial de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

5. K é um corpo

$A^3 = 0$

Para qualquer inversa, temos que $M \times M^{-1} = I$, logo queremos mostrar que $BB^{-1} = I_n$:

$B = A + I_n$

$B^{-1} = I_n - A + A^2$

$BB^{-1} = I_n \Leftrightarrow (A + I_n)(I_n - A + A^2) = I_n \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow A . I_n - A^3 + A^2 + I_n . I_n - A . I_n + A}$

$\Leftrightarrow A \times I_n + A \times (-A) + A \times A^2 + I_n \times I_n + I_n \times (-A) + I_n \times A^2 = I_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{A} - \cancel{A^2} + A^3 + I_n - \cancel{A} + \cancel{A^2} = I_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 + I_n = I_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_n = I_n$ ✓ Proposição Verdadeira

Assim, como $BB^{-1} = I_n$, provamos que B é inversível e $B^{-1} = I_n - A + A^2$.

6. $(a, b) \otimes (c, d) = (ac + 2bd,\ ad + bc) \quad \in \mathbb{R}^2$

(Em $\mathbb{R}$ temos que existe elemento neutro para $a \otimes e = a$)

⊛ À parte

$(a, b) \otimes (e_1, e_2) = (a, b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ae_1 + 2be_2,\ ae_2 + be_1) = (a, b)$

Para a primeira equação:

$ae_1 + 2be_2 = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(e_1 - 1) + 2be_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_1 - 1 = 0 \ \wedge \ 2e_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_1 = 1 \ \wedge \ e_2 = 0$

Verificar se é solução na segunda equação:
$(e_1, e_2) = (1, 0)$

$ae_2 + be_1 = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a.0 + b.1 = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = b$ ✓ Proposição verdadeira.

Assim, concluímos que $\otimes$ admite elemento neutro, sendo $e = (e_1, e_2) = (1, 0)$.