3^a Frequência de Análise Matemática 1

Departamento de Matemática, Universidade de Évora

21 de dezembro de 2024

Duração: 1h45m

Número de Aluno(a): | | | | | Turma: | |

Nome: ______________________________

1. Estude, quanto à natureza, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+x+x^2}{(5+2x+x^3)\sqrt{x^3}}\, dx$$

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ $\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$\lim\limits_{\varepsilon\to c^-}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim\limits_{\delta\to c^+}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1+x+x^2}{(5+2x+x^3)\sqrt{x^3}}\,dx \;\; \frac{\infty}{\infty} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x^2}{x^3\cdot x^{3/2}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x^2}{x^{9/2}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^{5/2}}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3/2 \times x^{3/2}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{3x^{3/2}}\right]_1^b = -\frac{2}{\infty} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 + 2/3 = 2/3$$

Assim, o integral impróprio é convergente, pois converge para um número finito.

2. Calcule, se possível, o valor do seguinte integral e conclua sobre a sua natureza:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^3 x}\, dx$$

Número de Aluno(a):

3. Determine a área da região do plano

$$A := \{((x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 1 - x,\ y \leq 3 - x^2,\ y \geq 1\}.$$

4. Usando o método de indução matemática, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Número de Aluno(a):

5. Analise a natureza das seguintes séries:

   (a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{3n+1}.$$

   (b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\,2^n}{3^n}.$$

NÚMERO DE ALUNO(A):

6. Estude quanto à convergência (simples ou absoluta), a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\ln^2(n)}.$$

7. Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

uma série de termos positivos. Indique, justificando, a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a_n}$$