7. Grafos

Informalmente, um *grafo* é composto por um conjunto V de elementos a que chamamos *vértices* e um conjunto de *arestas* A, que ligam pares de vértices. Quando as arestas são consideradas com direcção, dizemos que o grafo é *dirigido*.

Numa definição mais formal, um grafo é um triplo (V, A, f), onde V e A são dois conjuntos e f é uma função de A no conjunto dos pares não ordenados ou conjuntos singulares de elementos de V. Um grafo dirigido é um triplo (V, A, f), onde V e A são dois conjuntos e f é uma função de A no conjunto dos pares ordenados de elementos de V. Quando f é injectiva, ou seja, há apenas uma aresta a incidente em cada par de vértices v_1 e v_2 ($f(a) = \{v_1, v_2\}$, ou, no caso dos grafos dirigidos, $f(a) = (v_1, v_2)$), podemos respresentá-la por v_1v_2.

Um *caminho* é uma sequência de vértices do grafo $v_1v_2\cdots v_k$ tal que $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k$ são arestas do grafo (no caso de um grafo dirigido a ordem dos vértices em cada aresta é respeitada). O *comprimento* de um caminho é o número de arestas presentes na sequência. Um caminho é *fechado* se começa e acaba no mesmo vértice. Um caminho é *simples* se não tem vértices repetidos (excepto eventualemte o primeiro e o último). Um *ciclo* é um caminho fechado sem arestas repetidas. Um ciclo é *simples* se os únicos vértices repetidos forem o primeiro e o último. Um grafo diz-se *conexo* se existe um caminho entre cada dois vértices.

Duas arestas que unam o mesmo par de vértices dizem-se *paralelas*. A uma aresta que una um vértice a si mesmo chamamos um *laço*. Um grafo é *simples* se não tiver arestas paralelas nem laços.

O *grau* de um vértice é o número de arestas que incidem nele (os laços contam a dobrar). Um grafo é *regular* se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau.

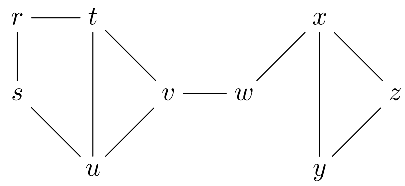
Dois grafos $G_1 = (V_1, A_1, f_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2, f_2)$ são *isomorfos* se existirem bijecções $g : V_1 \to V_2$, entre os seus vértices, e $h : A_1 \to A_2$, entre as suas arestas, tais que para qualquer aresta $a \in A_1$, se $u, v \in V_1$ são os vértices incidentes em a então $g(u), g(v) \in V_2$ são os vértices que incidem em $h(a)$.

Um resultado importante e bastante útil relaciona os graus dos vértices de um grafo com o número de arestas:

Proposição 1. *Para um grafo $G = (V, A)$ qualquer, temos que*
$$\sum_{v\in V} \mathrm{grau}(v) = 2|A|.$$

Exercícios e problemas

1. Considere o grafo:



   Diga quais são os caminhos mais curtos entre:

   (a) s e v;

   (b) s e z;

   (c) u e y;

   (d) t e y;

   (e) v e w.

2. Para cada par de vértices do exercício anterior, diga quais são os caminhos simples mais longos.

3. Dê um exemplo de um grafo com vértices x, y e z que satisfaça em simultâneo as seguintes propriedades:
   - tem um ciclo simples que contém os vértices x e y;
   - tem um ciclo simples que contém os vértices y e z;
   - não tem nenhum ciclo simples que contenha os vértices x e z.

4. Dê um exemplo de um grafo com vértices a, b, c e d que satisfaça em simultâneo as seguintes propriedades:
   - tem um ciclo simples que contém os vértices a, b e c;

- o caminho mais curto entre a e d tem comprimento dois;
- tem um caminho simples de comprimento três que une b a d.

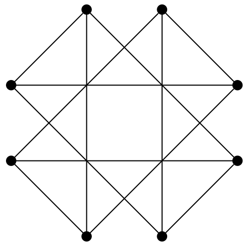
5. (a) Faça um esboço de todos os grafos diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com três vértices e três arestas.
   (b) Faça um esboço de todos os grafos simples diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com quatro vértices e quatro arestas.
   (c) Faça um esboço de todos os grafos simples diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com cinco vértices e cinco arestas.
   (d) Dos grafos das alíneas anteriores, quais são regulares? E quais são conexos?

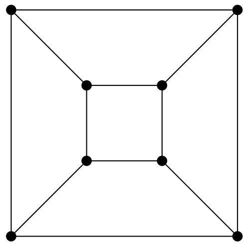
6. (a) Faça um esboço de todos os grafos regulares que se podem fazer com quatro vértices, tendo cada vértice grau 2.
   (b) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com quatro vértices, tendo cada vértice grau 3.
   (c) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com cinco vértices, tendo cada vértice grau 3.
   (d) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com cinco vértices, tendo cada vértice grau 4.

7. Num grafo simples com n vértices, qual é o grau máximo de cada vértice?

8. (a) Num grafo regular com seis vértices e nove arestas qual é o grau de cada vértice?
   (b) Num grafo regular com sete vértices e catorze arestas qual é o grau de cada vértice?
   (c) Justifique que não existe um grafo regular com sete vértices e dez arestas.

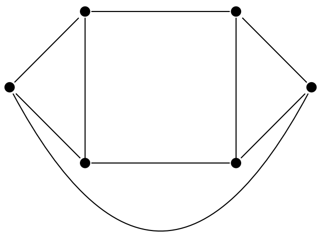
9. Encontre um isomorfismo entre os seguintes grafos:



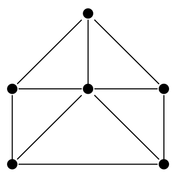


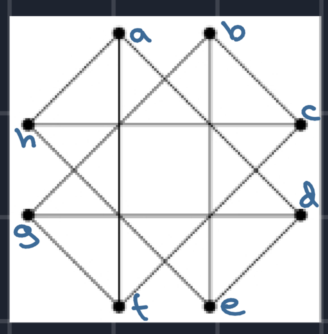
10. Dos seguintes grafos, quais são isomorfos?

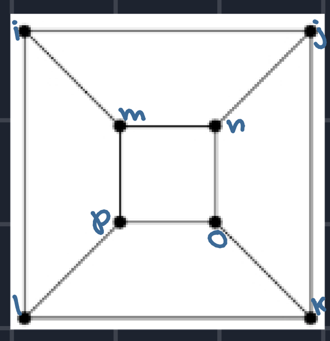
(a)



(b)



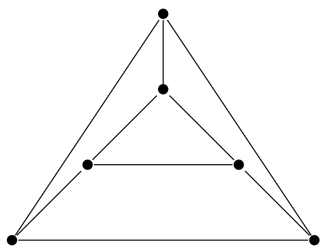
9. 



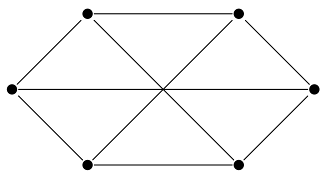
a	—	l	ad	—	li	de	—	im
b	—	n	aj	—	lk	dg	—	ij
c	—	o	ah	—	lp	eh	—	mp
d	—	i	bc	—	no	fg	—	kj
e	—	m	be	—	nm			
f	—	k	bg	—	nj			
g	—	j	cf	—	ok			
h	—	p	ch	—	op			

Logo os grafos são isomorfos.

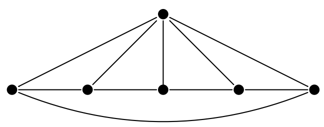
(c)



(d)



(e)



11. **Diagramas de Hasse.** Podemos representar os divisores de um natural positivo n num grafo dirigido definido da seguinte forma: os vértices correspondem aos divisores de n; se dois divisores d e e satisfazem $d|e$ e não existe outro divisor f, distinto de d e de e tal que $d|f$ e $f|e$, então os vértices correspondentes a d e e estão unidos por uma aresta (d, e). Por exemplo o grafo dos divisores de 12 será

$$\begin{tikzcd} & 12 & \\ 4 \arrow[ur] & & 6 \arrow[ul] \\ 2 \arrow[u] \arrow[urr] & & 3 \arrow[u] \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Faça um esboço dos grafos dos divisores de 15, 17, 30, 100 e 1024.

Nota: os diagramas de Hasse são frequentemente grafos não dirigidos, desenhados de tal forma que a relação de ordem é aparente (por exemplo, dispostos de tal forma que se dois elementos a e b satisfazem aRb, b é reprresentado acima de a).

Helmut Hasse (1898–1979) Nascido em Kassel, Hasse estudou também em Berlim, Göttingen, e Marburg. Foi docente em Kiel, Halle, Marburg, Göttingen, e Berlim (Academia de Ciências de Berlim, e depois Universidade Humbolt). Teve contributos importantes para a teoria algébrica de números.

Adaptado a partir de `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

Segundo Birkhoff (1948, p. 6, nota de rodapé), os diagramas de Hesse ganharam esse nome pelo uso que Hesse lhes deu; Birkhoff encontrou estes diagramas em trabalhos anteriores a Hasse, como por exemplo *Leçons sur la Résolution Algébrique des Équations*, de Henri Vogt (1895).

Garrettv Birkhoff (1948), *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 25, American Mathematical Society, New York, xiii+283 pp.