UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

3.ª Frequência **20/05/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e S a região definida por

$\rho\cos\theta + \rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) =$

(ρ, θ, z)
$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$
$z = z$

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

$2^2 \quad 0 \leq z \leq \rho^2$

$0 \leq z \leq 2$

Então,

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\rho^2} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)\, \rho\, dz d\theta d\rho,$$

? 2

onde (ρ, θ, z) são as coordenadas cilíndricas.

2) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e M a região definida por

(r, θ, φ)
$x = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$
$y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$
$z = r\cos\varphi$

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq \underset{2}{4} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq \underset{3}{9} \wedge y \geq 0\right\}.$$

Então,

$$\iiint\limits_M f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{2}^{3} f(r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)\, r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr d\phi d\theta,$$

onde (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas.

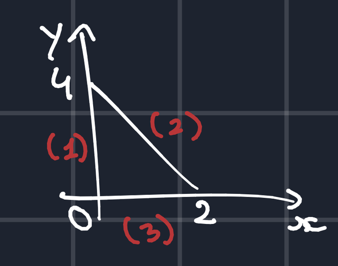
3) Considere o triângulo $\mathcal{C}$ de vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(2, 0)$.

a) Calcule, usando integrais de linha, o comprimento de $\mathcal{C}$.

b) Calcule, usando integrais de linha, o trabalho realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy, x - y)$ ao longo do triângulo $\mathcal{C}$, orientado no sentido indirecto.

c) Pode aplicar-se o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo do triângulo $\mathcal{C}$? Em caso de resposta afirmativa, confirme o resultado obtido na alínea *b*).

3. a) Seja (1) $e(t) = (0, t)$, $t \in [0, 4]$



(2) $\varphi(t) = (t, 4-2t)$, $t \in [0, 2]$

(3) $\beta(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2]$

$$\int_{e} f ds = \int_{e_1} f ds +$$

$$\int_{0}^{4} \|e'(t)\| \, ds +$$

b) $$w_1 = \int_{e} f \mid ds = \int_{a}^{b} f(e(t)) \mid e'(t) \, dt =$$

$$= \int_{0}^{4} (1, -t) \mid (0, 1) \, dt = \int_{0}^{4} -t \, dt =$$

$$= \left[\frac{-t^2}{2} \right]_0^4 = \frac{-4^2}{2} = -8$$

$$w_2 = \int_{a}^{b} f(\varphi(t) \mid \varphi'(t) \, dt =$$

$$= \int_{0}^{2} (1 + t.(4-2t), \; t-4+2t) \mid (1, -2) \, dt =$$

$$= \int_{0}^{2} (1 + 2t, \; -4+3t) \mid (1, -2) \, dt =$$

$$= \int_{0}^{2} (1 + 2t, \; 8-6t) \, dt = \quad \ldots$$

$w_3 = \quad \ldots$

c) $4/3$

4) Considere o campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{3y} + y \operatorname{sen} x, 3xe^{3y} - \cos x\right)$ e $\mathcal{C}$ a curva definida por $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \wedge y \geq 0\right\}$ e orientada no sentido directo.

a) Mostre que F é conservativo e determine uma função potencial de F.

b) Calcule, usando o Teorema fundamental dos integrais de linha, o integral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}|ds$.

c) Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "Existem curvas $\widetilde{\mathcal{C}}$ para as quais o integral $\displaystyle\int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \mathbf{F}|ds = 0$".

5) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2$ e seja $\mathcal{S}$ uma superfície parametrizada por $\boldsymbol{\phi} : [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\phi}(u,v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u)$.

Então,

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \cdots\cdots\cdots\cdots \|(\cdots\cdots\cdots, \cdots\cdots\cdots, \cdots\cdots\cdots)\| \; dudv =$$

$$= \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \cdots\cdots\cdots\cdots (\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) \; dudv = \cdots\cdots\cdots$$