UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2023/24

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

1.ª Frequência **23/03/2024**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere a função $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}, \ln\left(y - 2 - x^2\right)\right).$$

a) Determine e represente geometricamente o domínio D de $\mathbf{f}$.

b) Indique o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}.$$

a) Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

b) Indique a função prolongamento g por continuidade da função f ao ponto $(0,0)$.

c) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

d) Estude a função g quanto à diferenciabilidade.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

f) Diga, justificando, sem calcular, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "A função f tem máximo e mínimo no conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\right\}$".

3) Seja $z = xy + f\left(x^2 + y^2\right)$, onde f é uma função diferenciável. Mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2.$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + 2x \cdot f'(x^2+y^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y \cdot f'(x^2+y^2)$

$y \cdot (y + 2x \cdot f'(x^2+y^2)) - x \cdot (x + 2y \cdot f'(x^2+y^2)) =$

$= y^2 + \cancel{2xy \cdot f'(x^2+y^2)} - x^2 - \cancel{2xy \cdot f'(x^2+y^2)} =$

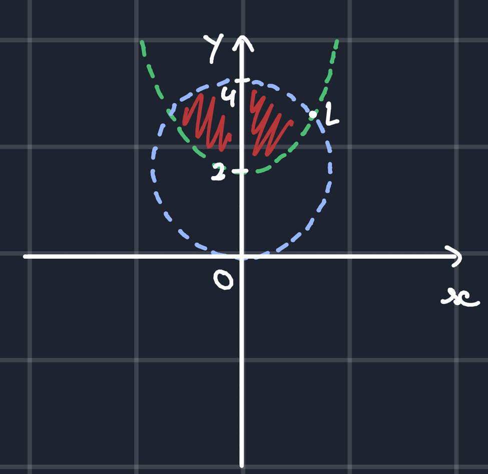
$= y^2 - x^2$

c.q.m

1. a) $\vec{f}(x,y)\ (\sqrt{4-x^2-(y-2)^2},\quad \ln(y-2-x^2))$

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4-x^2-(y-2)^2 > 0 \ \wedge\ y-2-x^2 > 0\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 < 4 \ \wedge\ y > x^2+2\}$



b) $\text{int}(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 < 4 \ \wedge\ y > x^2+2\}$

$\text{ext}(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 > 4 \ \wedge\ y < x^2+2\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+(y-2)^2 = 4 \wedge y > x^2+2) \vee (x^2+(y-2)^2 < 4 \ \wedge\ y = x^2+2)\}$

$\overline{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 \leq 4 \ \wedge\ y \geq x^2+2\}$

$D' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 \leq 4 \ \wedge\ y \geq x^2+2\}$

$D = \text{int}(D)$, logo D é aberto.

$D \neq \overline{D}$, logo D não é fechado.

L existe, sendo $L=4$, logo D é limitado.

2. a) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^2+\cancel{y^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^2}+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+m^2} = \frac{0}{1+m^2} = 0$$

Assim, sendo $(1+m^2) \neq 0$, concluímos que existe limite direcional.

$\forall\, \delta>0 \quad \exists\, \varepsilon>0 \qquad \forall\, \vec{x}\in D: \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow |(x,y)-0| < \delta$

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^4}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} \leq (\sqrt{x^2+y^2})^3$$

$(\sqrt{x^2+y^2})^3 = \varepsilon^3$

$\varepsilon^3 = \delta \Leftrightarrow \varepsilon = \pm\sqrt[3]{\delta}$

Basta tomar $\varepsilon = \pm\sqrt[3]{\delta}$ para que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$.

Assim, a função f é contínua na origem e consequentemente contínua em todos os pontos do seu domínio.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial/\partial x(x^4).(x^2+y^2) - x^4 . \partial/\partial x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3.(x^2+y^2) - x^4.(2x)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x^5 + 4x^3y^2 - x^6}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial/\partial y(x^4).(x^2+y^2) - x^4 . \partial/\partial y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-x^4 . 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^4 . y}{(x^2+y^2)^2}$$

d) A função g tem derivadas parciais contínuas pois resultam de operações com funções projeção, sendo estas por si só contínuas.

Assim, pertence à classe C^1

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4}{h^2+k^2} - 0 + 0.h - 0.k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=mx}} \frac{h^4\sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^2)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4\sqrt{h^2+m^2h^2}}{(h^2+m^2h^2)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4\sqrt{h^2+m^2h^2}}{h^4+2m^2h^4+m^4h^4} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^4}.\sqrt{h^2(1+m^2)}}{\cancel{h^4}(1+2m^2+m^4)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|.\sqrt{1+m^2}}{1+2m^2+m^4} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{1+2m^2+m^4} =$$

$$= \frac{0}{1+2m^2+m^4} = \qquad (1+2m^2+m^4)\neq 0$$

$$= 0$$

Concluímos que o limite é igual a 0 e consequentemente provamos que a função g é diferenciável.

e) $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) =$$

$$= 1 + 3x - 3 + 0 =$$

$$= 3x$$

f) É limitada inferiormente e superiormente em ordem a x e a y, logo terá min. e máx.

4) Sejam $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $(0,1)$, $f(0,1)=(1,0)$ e $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $(1,0)$. Indique qual das opções seguintes corresponde à matriz jacobiana de $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ no ponto $(0,1)$:

- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(1,0)) \times J\mathbf{f}(1,0)$.
- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(1,0) \times J\mathbf{f}(1,0)$.
- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(0,1) \times J\mathbf{f}(0,1)$.
- ☒ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(0,1)) \times J\mathbf{f}(0,1)$.

$J\vec{g}(\vec{f}(0,1)) \times J\vec{f}(0,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J\vec{g}(1,0) \times J\vec{f}(0,1)$

$J(g\circ f)(x) = Jg(f(x)) \cdot Jf(x)$

5) Das opções seguintes indique, com V ou F, as que são **verdadeiras** ou **falsas**, respectivamente.

F — A existência de todas as derivadas parciais de primeira ordem finitas num ponto implica a continuidade da função nesse ponto.

V — Se uma função é diferenciável num ponto, então a função é contínua nesse ponto.

F — Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existem todos os limites direccionais e com o mesmo valor na origem, então existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

V — Se não existe alguma derivada parcial de primeira ordem num ponto, então a função não é diferenciável nesse ponto.

____ Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$ e $f'_{(1,2)}(1,0) = 4$. Então, f não é diferenciável em $(1,0)$.