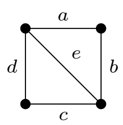
9. Árvores geradoras. Caminhos de Euler e de Hamilton

Consideremos o grafo $G = (V, A)$. Dizemos que um subgrafo H de G é uma *árvore geradora* de G se H for uma árvore com todos os vértices de G.

Proposição 1. *Um grafo G é conexo se e só se tem, pelo menos, uma árvore geradora.*

Um grafo conexo tem, em geral, mais de uma árvore geradora,... mas quantas? Para obter uma árvore geradora do grafo a seguir temos de tirar duas arestas, mas não duas quaisquer. Por exemplo, se tirássemos as arestas a e b, ficaríamos com um grafo não conexo.



Seguem-se dois algoritmos de procura de árvores geradoras em grafos.

Breadth-First Search. Escolher um vértice v_1 para raiz; etiquetar os seus vértices vizinhos $v_2, \ldots, v_k$ e construir na árvore as arestas $v_1v_2, \ldots, v_1v_k$; etiquetar os vértices vizinhos de v_2 que ainda não tenham sido considerados e construir as respectivas arestas na árvore, depois os de v_3 e assim sucessivamente até não se poder etiquetar mais. Se todos os vértices estão etiquetados no fim, o grafo é conexo e construímos uma árvore geradora; caso contrário, o grafo é desconexo.

Depth-First Search. Escolher um vértice v_1 para raiz; etiquetar um dos seus vértices vizinhos denotando-o com v_2 e construir na árvore a aresta v_1v_2; etiquetar um dos vértices vizinhos de v_2 que ainda não tenha sido considerado denotando-o com v_3 e construir na árvore a aresta v_2v_3, e assim sucessivamente até não se poder etiquetar mais; se o último vértice etiquetado é v_k, verificar se v_{k-1} tem vizinhos por etiquetar e seguir o algoritmo como antes; se não, verificar para v_{k-2} e assim sucessivamente. Se todos os vértices estão etiquetados no fim, o grafo é conexo e construímos uma árvore geradora; caso contrário, o grafo é desconexo.

Leonhard Euler (1707–1783) Leonhard Euler nasceu na Basileia, e foi nesta cidade que frequentou a escola e a universidade, onde começou por estudar Teologia, seguindo os passos do pai. No entanto, a matemática entusiasmava-o muito mais que outros assuntos como teologia, grego ou hebreu. Euler dedicou-se a estudar matemática através da leitura de textos e de aulas particulares. Johann Bernoulli orientou-o nalguns destes estudos e, vendo o potencial de Euler, convenceu o pai a deixá-lo mudar para Matemática.

Entre muitas contribuições importantes de Euler para a matemática está a solução do problema das pontes de Königsberg, no artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, publicado em 1736.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

William Rowan Hamilton (1805–1865) Nascido em Dublin, William Rowan Hamilton já sabia latim, grego e hebreu aos cinco anos. Dedicou a maior parte do seu trabalho à matemática, e criou a álgebra dos quaterniões, a primeira álgebra não comutativa a ser estudada. Em 1857, apresentou o Jogo Icosiano, que consistia em encontrar um caminho que passasse por todos os vértices de um dodecaedro sem repetir nenhum. Deste jogo nasceu a noção de caminho hamiltoniano, que vamos esudar.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

Caminhos de Euler e de Hamilton.

Seja G um grafo conexo. Chamamos *caminho de Euler* ou *caminho euleriano* de G a um caminho que contenha todas as arestas de G sem repetir nenhuma. Chamamos *ciclo de Euler* ou *ciclo euleriano* de G a um caminho fechado que contenha todas as arestas de G sem repetir nenhuma. Chamamos *caminho de Hamilton* ou *caminho hamiltoniano* de G a um caminho simples que contenha todos os vértices de G. Chamamos *ciclo de Hamilton* ou *ciclo hamiltoniano* de G a um ciclo simples que contenha todos os vértices de G. Um grafo que admite um ciclo de Hamilton chama-se *hamiltoniano*.

Proposição 2. *Um grafo conexo admite um caminho de Euler se e só se o número de vértices de grau ímpar for dois ou zero. Um grafo conexo admite um ciclo de Euler se e só se todos os seus vértices têm grau par.*

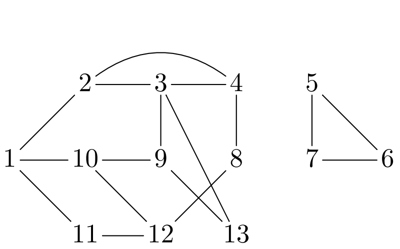
O algoritmo seguinte pode ser utilizado para encontrar um caminho de Euler num grafo conexo:

Algoritmo de Fleury. Esta descrição do algoritmo está pensada para papel e lápis, mas pode ser facilmente adaptada a um computador. Fazer uma cópia do grafo original, e escolher um vértice de grau ímpar para começar (caso não exista, começar em qualquer vértice); em cada passo do algotimo, se designarmos por v o último vértice que considerámos, escolhemos, das arestas que incidem em v, uma tal que se a apagarmos, o grafo não deixa de ser conexo; se não for possível, escolher uma aresta qualquer; seja vw a aresta escolhida; apagamos vw e repetimos o passo anterior com w no papel de v; o algoritmo termina quando apagarmos todas as arestas.

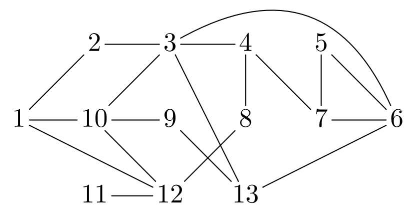
Exercícios e problemas

1. Aplique os algoritmos *Breadth-First Search* e *Depth-First Search* aos grafos seguintes, duas vezes para cada algoritmo: uma começando pelo vértice 1 e outra começando pelo vértice 6:

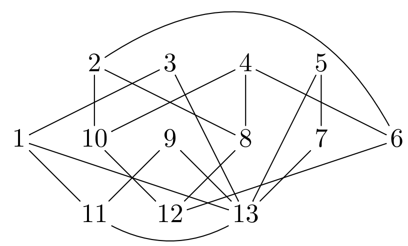
   (a)



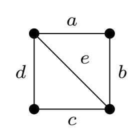
   (b)



   (c)

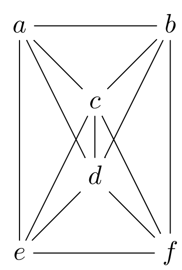


2. Comprove que o seguinte grafo tem oito árvores geradoras diferentes e desenhe-as.



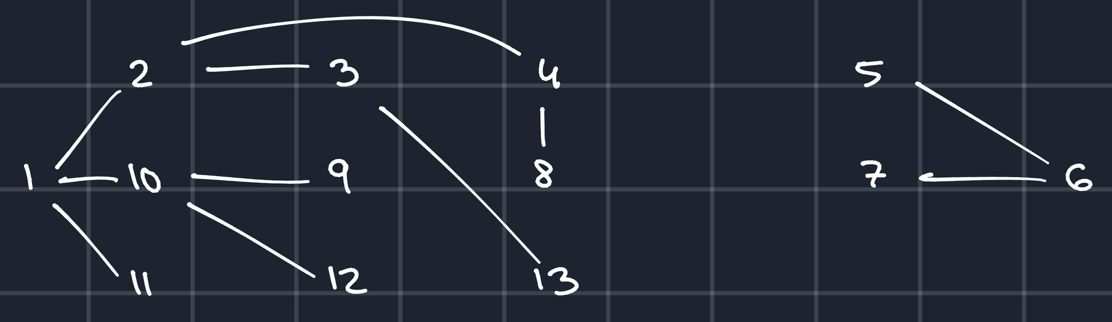
3. Conte o número de árvores geradoras das seguintes famílias de grafos: grafos circulares com n vértices C_n, grafos lineares com n vértices L_n, e grafos completos com n vértices K_n.

4. Considere os seguintes grafos G, H e I:

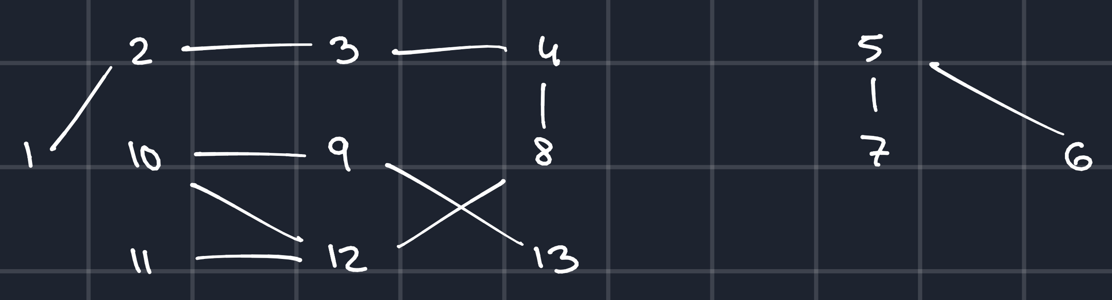


G

1. a) Breadth-First Search:



Depth-First Search:

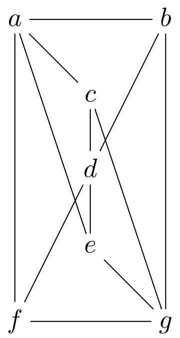


3. $L_n \rightarrow 1$ árvore geradora

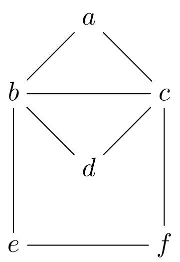
$C_n \rightarrow n$ árvores geradoras

$K_n \rightarrow n^{n-2}$ árvores geradoras

$K_{n,m} \rightarrow m^{n-1} \times n^{m-1}$ árvores geradoras



H



I

A respeito de cada um dos grafos, responda às seguintes questões:

(a) Admite um caminho de Euler? Se sim, apresente um; caso contrário explique porquê.

(b) Admite um ciclo de Euler? Se sim, apresente um; caso contrário explique porquê.

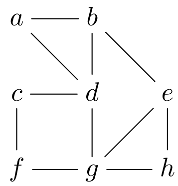
(c) É hamiltoniano?

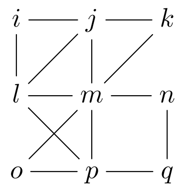
(d) É completo?

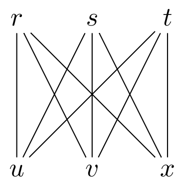
(e) É bipartido?

(f) É bipartido completo?

5. Para os seguintes grafos apresente um caminho de Euler, ou um ciclo de Euler, caso existam. Caso contrário, explique porquê. Aplique o algoritmo de Fleury.







6. (a) Quantos ciclos de Hamilton tem o grafo $K_{n,n}$, para $n \geq 2$?

   (b) Quantos caminhos de Hamilton tem o grafo $K_{n,n-1}$, para $n \geq 2$?

   (c) Para que valores de n tem K_n um ciclo de Euler?

   (d) Para que valores de m e n, tem o grafo $K_{m,n}$ um caminho de Euler?

7. Construa o grafo G cujo conjunto de vértices é $\{0,1\}^3$ e dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm exactamente duas coordenadas distintas. Construa o grafo H com os mesmos vértices de G, mas tal que dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm pelo menos duas coordenadas distintas. Em relação a estes dois grafos, responda às seguintes questões:

   (a) Quantas componentes conexas têm os grafos?

   (b) Quantos vértices há de cada grau?

   (c) Os grafos são regulares?

4. a) cbacdaecfdefbd

Sim, admite caminho de Euler, pois tem 0 ou 2 vértices de grau ímpar.

b) Não, não admite ciclo de Euler pois todos os vértices teriam de ter grau par.

c) caefbdc

Sim, admite ciclo de Hamilton

6. a) $2\times(n!)^2$

b) $n!(n-1)!$

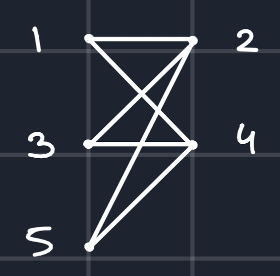
c) K_n n vértices n-1 grau

n tem de ser ímpar para que o seu grau seja par.

d)

6. b) $K_{n,n-1}$

$K_{3,2}$



1 2 3 4 5

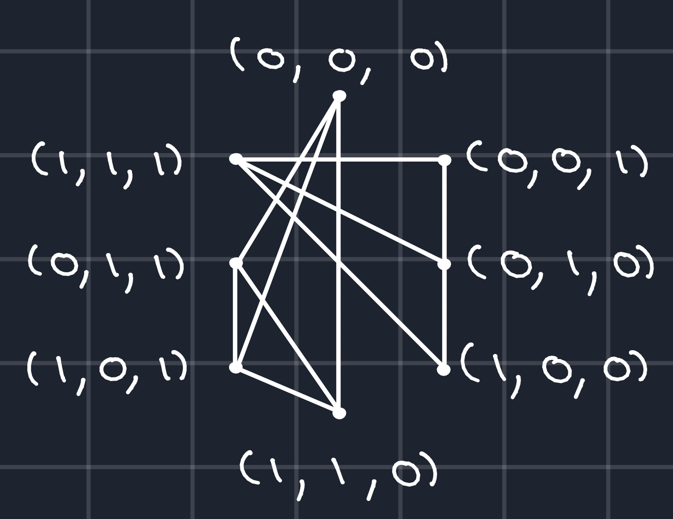
3 4 5

7. $\{0, 1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} =$

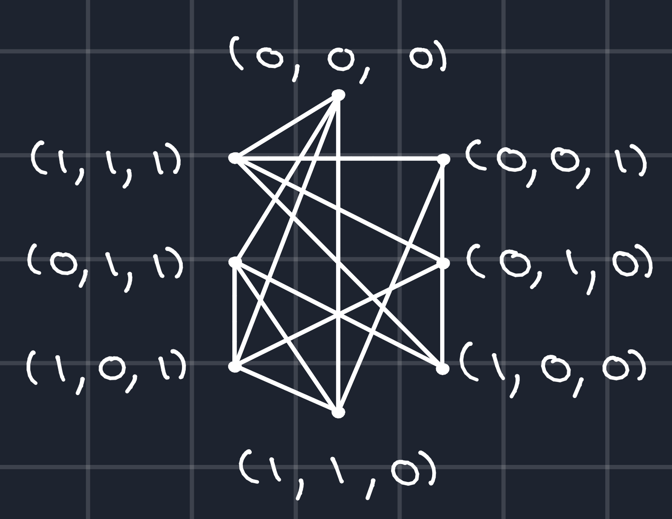
$= \{(0,0,0); (0,0,1); (0,1,0); (1,0,0);$

$(1,0,1); (1,1,1); (1,1,0); (0,1,1)\}$

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$



G



(d) Os grafos admitem um ciclo de Euler?

8. Construa o grafo I cujo conjunto de vértices é $\{0,1,2\}^2$ e dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm exactamente coordenada distinta.

   (a) Quantas componentes conexas tem o grafo?

   (b) Quantos vértices há de cada grau?

   (c) O grafo é regular?

   (d) O grafo admite um ciclo de Euler?

9. Um grupo de quatro espiões que estão em diferentes países quer partilhar informações entre si, de modo a que todos tenham acesso a toda a informação. Cada um tem uma informação diferente para partilhar com os restantes três.

   (a) Se utilizarem mensagens escritas, qual é o número mínimo de mensagens que têm de ser enviadas para que todos tenham toda a informação? (Se uma pessoa enviar a mesma mensagem a outras duas, contamos duas mensagens.)

   (b) Se utilizarem chamadas telefónicas (apenas entre duas pessoas), qual é o número mínimo de chamadas que têm de ser realizadas para que todos tenham toda a informação? (Numa só chamada, os dois interlocutores podem partilhar informação em ambas as direcções.)

   (c) Gereralize as respostas anteriores para qualquer natural $n \geq 4$.

   Adaptado do artigo "Can you solve it? Get the gossip with Bobby Seagull", de Alex Bellos.[1]

10. **Diagramas de Hasse em conjuntos parcialmente ordenados.** Podemos representar os elementos de um conjunto parcialmente ordenado A num grafo dirigido definido da seguinte forma: os vértices correspondem aos elementos de A; se dois elementos a e b satisfazem aRb e não existe outro elemento c, distinto de a e de b tal que aRc e cRb, então os vértices correspondentes a a e b estão unidos por uma aresta (a,b). Por exemplo o grafo que representa o conjunto $\mathcal{P}\big(\{3,7\}\big)$ com a relação de ordem dada pela inclusão ($\subseteq$) será

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{3,7\} & \\
\{3\} \arrow[ur] & & \{7\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

   (a) Faça um esboço dos grafos de $\mathcal{P}\big(\{5\}\big)$ e de $\mathcal{P}\big(\{3,5,7\}\big)$, com a relação de ordem dada pela inclusão.

   (b) Faça um esboço do grafo do conjunto $\{1,\ldots,20\}$, com a relação de ordem dada pela divisibilidade.

[1] https://www.theguardian.com/science/2019/aug/12/can-you-solve-it-get-the-gossip-with-bobby-seagull

10. a) $\mathcal{P}(\{5\})$

$$\begin{tikzcd} \{5\} \\ \emptyset \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}(\{3,5,7\})$

$$\begin{tikzcd}
 & \{3,5,7\} & \\
\{3,5\} \arrow[ur] & \{3,7\} \arrow[u] & \{5,7\} \arrow[ul] \\
\{3\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{5\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{7\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$