UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

1.ª Frequência **18/03/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

$1-(x-1)^2-y^2>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -(x-1)^2-y^2>-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<1$

√**1)** Considere o conjunto

Quadrantes Ímpares

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{1-(x-1)^2-y^2}>0 \wedge xy\geq 0\right\}.$$

Em cada uma das alíneas seguintes escolha uma opção de modo a obter uma afirmação verdadeira.

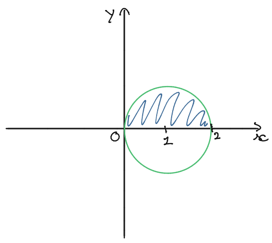
√*a*) O interior do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2<1 \wedge x>0\right\}$.

☒ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2<1 \wedge \underline{y>0}\right\}$.

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2<1\right\}$.

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2>1 \wedge y>0\right\}$.



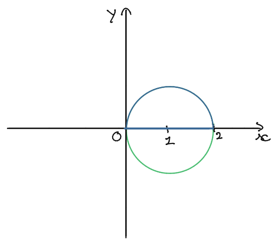
√*b*) A fronteira do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1\right\}$.

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left((x-1)^2+y^2=1 \wedge x\geq 0\right) \vee (y=0 \wedge 0\leq x\leq 2)\right\}$.

☒ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left((x-1)^2+y^2=1 \wedge \underline{y\geq 0}\right) \vee (y=0 \wedge 0\leq x\leq 2)\right\}$.

☐ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1 \vee y=0\right\}$.



√*c*) O conjunto A

☐ é aberto e é fechado.

☐ não é aberto e não é fechado.

☐ não é aberto e é fechado.

☒ é aberto e não é fechado.

2) Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

a) Estude a função f quanto à continuidade.

b) Determine, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

c) Estude a função f quanto à diferenciabilidade.

d) Determine a derivada de f no ponto $(1,1)$ segundo o vector $(1,2)$, $f'_{(1,2)}(1,1)$.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

3) Sejam $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $\mathbf{f}(x,y)=\left(1+e^{2x}+y, 1-x+y\right)$, $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(2,1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Em cada uma das alíneas seguintes escolha uma opção de modo a obter uma afirmação verdadeira.

a) Seja $\mathbf{h}=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$, então

- ☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=-5.$
- ☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=5.$
- ☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=3.$
- ☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=-1.$

b) A divergência de $\mathbf{h}$ no ponto $(0,0)$ é dada por

- ☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=-1.$
- ☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=2.$
- ☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=-2.$
- ☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=1.$

4) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Seja $A\subseteq\mathbb{R}^2$ um conjunto fechado. Então, $\overline{A}=A'$.

b) A função definida por $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ tem por domínio o conjunto $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

c) Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, $z=f\left(x^2-y^2, y^2-t^2\right)$ satisfaz a equação

$$yt\frac{\partial z}{\partial x}+xt\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial t}=0.$$

2. a)

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial/\partial x(2x^2).(x^2+y^2) - 2x^2.\partial/\partial x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x.(x^2+y^2) - 2x^2.2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} + 4xy^2 - \cancel{4x^3}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$$