5. Recorrência

Uma forma bastante útil de definir algumas sucessões é a *recorrência*. São dados os primeiros termos da sucessão e uma regra para determinar cada termo a partir dos anteriores. Por exemplo, a sucessão dos factoriais dos números naturais pode ser definida directamente

$$n! = n(n-1)\cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

com a convenção $0! = 1$, ou por recorrência

$$\begin{cases} 0! = 1; \\ (n+1)! = (n+1)\cdot n!, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mais geralmente, podemos definir por recorrência expressões que dependem de mais de uma variável, como é o caso das combinações. Convencionamos que $\binom{n}{k} = 0$ para os casos $n < 0$, $k < 0$, ou $k > n$ e definimos

$$\begin{cases} \binom{0}{0} = 1; \\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n+1. \end{cases}$$

Também para os arranjos sem repetição, podemos definir directamente

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1), \qquad \text{para } 0 \leq k \leq n,$$

ou, por recorrência,

$$\begin{cases} n^{\underline{0}} = 1; \\ n^{\underline{k+1}} = n^{\underline{k}}(n-k), \quad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n+1. \end{cases}$$

Exercícios e problemas

1. Para cada $n \geq 1$, seja a_n o número de regiões do plano que são determinadas por n rectas, tais que não haja pontos de intersecção de mais de duas rectas e não haja duas rectas paralelas. Para $n = 1$, temos que uma recta divide o plano em duas regiões. Para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, o plano divide-se em quatro, sete e onze regiões, respectivamente.

   (a) Descreva o raciocínio seguido para obter o número de regiões determinadas por quatro rectas a partir do número de regiões determinadas por três. Obtenha desta forma a regra de recorrência geral que descreve a_n.

   (b) Encontre uma expressão geral para a_n.
   Sugestão: lembre-se de que

   $$\sum_{j=1}^{n} j = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

2. As torres de Hanoi. Os monges dum mosteiro de Hanoi, para medir o tempo que falta até o fim do mundo contam com três agulhas feitas de diamante. Numa delas empilham-se, dispostos segundo o seu tamanho, sessenta e quatro discos de ouro. Os monges devem mudar um disco de uma agulha para outra a cada segundo que passa. O fim do mundo chegará quando conseguirem mudar os discos todos de agulha. No processo, nunca podem colocar um disco sobre outro de diâmetro mais pequeno.

   Generalizemos o problema: tomemos n discos e chamemos b_n ao número mínimo de movimentos para transportar n discos de uma agulha para outra.

   (a) Calcule os valores de b_1, b_2 e b_3.

   (b) Tente generalizar o procedimento utilizado no caso $n = 3$, e obtenha uma definição por recorrência para a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Resolva a equação de recorrência obtida na alinea anterior.
   Sugestão: recorde que $\sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$.

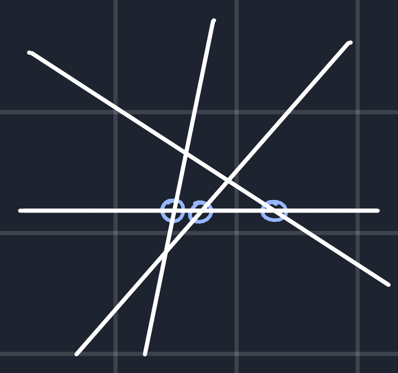
   (d) Segundo esta lenda, quanto tempo falta para o fim do mundo?

3. Considere o integral

   $$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt, \text{ para cada } n \geq 0.$$

   (a) Calcule $\Gamma(0)$.

1. a)



$a_0 = 1$ $\quad a_1 = 2$ $\quad a_2 = 4$ $\quad a_3 = 7$ $\quad a_4 = 11$ $\quad a_5 = 16$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases}$$

b) $a_1 = 1+1$ $\quad a_2 = 1+1+2$ $\quad a_3 = 1+1+2+3$ $\quad a_4 = 1+1+2+3+4$

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2. a) $b_1 = 1$ $\quad b_2 = 3$ $\quad b_3 = 7$

$b_1 = 1$

b) $$\begin{cases} b_n = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 1 \end{cases}$$

c)

(b) Calcule $\Gamma(n+1)$, utilizando a integração por partes, de modo a obter uma definição de $\Gamma(n)$ por recorrência.

(c) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, e $\Gamma(5)$.

(d) Encontre outra expressão geral para $\Gamma(n)$.

4. Considere as sucessões $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} c_0 = 13; \\ c_1 = 17; \\ c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} d_0 = 5; \\ d_1 = 3; \\ d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mostre por indução que todos os termos das sucessões $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são ímpares. Para a sucessão $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá de usar indução completa.

5. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão definida por recorrência tal que os primeiros dois termos s_0 e s_1 são dados e os seguintes se obtêm a partir de

$$s_{n+2} = as_{n+1} + bs_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Então, se $r_1 \neq r_2$, uma expressão geral para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é da forma

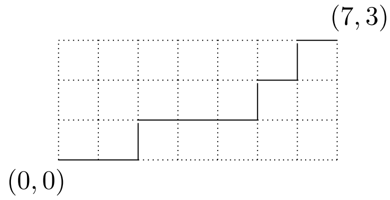
$$s_n = t_1 {r_1}^n + t_2 {r_2}^n,$$

com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Caso $r_1 = r_2$, uma expressão geral para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é da forma

$$s_n = t_1 {r_1}^n + t_2 n {r_1}^n,$$

com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Calcule expressões gerais para as sucessões $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas no exercício 4.

6. Caminhos num reticulado. Para quaisquer naturais m e n, seja $L(m, n)$ o número de caminhos possíveis entre o ponto $(0, 0)$ e o ponto (m, n), obdecendo à seguinte regra: em cada passo do caminho, de um ponto (a, b) apenas se pode ir para $(a + 1, b)$ ou para $(a, b + 1)$. Na figura seguinte está ilustrado um possível caminho entre $(0, 0)$ e $(7, 3)$.



(a) Faça uma representação gráfica de todos os caminhos possíveis entre $(0, 0)$ e $(3, 2)$.

(b) Faça uma representação gráfica de todos os caminhos possíveis entre $(0, 0)$ e $(3, 1)$.

(c) Faça uma representação gráfica de todos os caminhos possíveis entre $(0, 0)$ e $(2, 2)$.

(d) Encontre uma explicação para que $L(3, 2) = L(2, 2) + L(3, 1)$.

(e) Convencionando que $L(0, 0) = 1$, defina $L(m, n)$ por recorrência, para quaisquer naturais m e n.

(f) Mostre por indução que

$$L(m, n) = \binom{m+n}{n}.$$

Sugestão: mostre por indução em $l \in \mathbb{N}$ o seguinte:
"Para quaisquer naturais m e n, se $m + n = l$ então $L(m, n) = \binom{m+n}{n}$".

7. Seja $f(p, k)$ o número de maneiras diferentes de colorir k bolas de golfe iguais tendo p cores disponíveis, com $k, p \geq 1$.

(a) Fazendo uma lista de todos os casos possíveis, calcule $f(2, 3)$ e $f(3, 2)$.

(b) Diga, justificando, qual o calor de $f(p, 1)$ e $f(1, k)$, para cada $k, p \geq 1$.

(c) Mostre que para quaisquer valores de k e p,

$$f(p, k) = L(p - 1, k),$$

4. Base: $C_0 = 13$ é ímpar

Hereditariedade: Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que C_n é ímpar.

Se $n=0$, temos $C_{n+1} = C_{0+1} = C_1 = 17$, logo C_{n+1} é ímpar.

Se $n>0$, temos $C_{n+1} = C_n + 2C_{n-1}$

onde L é a função acima definida, no problema 6.

8. **Números de Bell.** Uma *partição* de um conjunto não vazio A é um conjunto de subconjuntos não vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A. Ou seja, é um conjunto $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que $\emptyset \notin P$ e para quaisquer $X, Y \in P$, $X \cap Y = \emptyset$ e, por outro lado, $\bigcup_{X \in P} X = A$. Por convenção, a única partição do conjunto vazio é o conjunto $\{\emptyset\}$. Chamamos *número de Bell* de ordem n ao número de partições de um conjunto de n elementos. Denotamos este número por B_n.

   (a) Calcule B_3, encontrando explicitamente todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

   (b) Calcule B_4, encontrando explicitamente todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (c) Quanto são B_0, B_1 e B_2?

   (d) Comparando as respostas anteriores, encontre relação entre o número de Bell B_4 e os números anteriroes, e estabeleça uma regra para obter o número de Bell B_{n+1} a partir de $B_0, \dots, B_n$.

   (e) Defina a sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por recorrência.

9. **Números de Stirling de segunda espécie.** Chamamos *número de Stirling de segunda espécie* ao número de partições de um conjunto de n elementos constituídas por k subconjuntos. Denotamos este número por $S_{n,k}$. Convencionamos que $S_{0,0} = 1$. Uma relação imediata entre os números de Stirling e os números de Bell é
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}.$$

   (a) Aproveitando a resolução das alíneas (8a) e (8b), calcule os números de Stirling de segunda espécie $S_{3,1}$, $S_{3,2}$, $S_{3,3}$, $S_{4,1}$, $S_{4,2}$, $S_{4,3}$ e $S_{4,4}$.

   (b) Sejam N e R dois conjuntos finitos, de cardinalidades n e r respectivamente.

      i. Quantas funções de N para R existem?

      ii. Quantas funções injectivas de N para R existem?

      iii. Encontre uma expressão para o número de funções sobrejectivas de N para R, utilizando números de Stirling de segunda ordem.
      Sugestão: pense se f é uma função sobrejectiva de N para R, o conjunto
      $$P_f = \{f^{\leftarrow}(\{y\}) : y \in R\}$$
      é uma partição de N com r subconjuntos de N; quantas funções se podem construir dando origem à mesma partição?

   (c) Recorrendo às respostas obtidas na alínea anterior, mostre que
$$r^n = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} r^{\underline{k}}.$$

   (d) Mostre que os números de Stirling de segunda ordem podem ser definidos por recorrência da seguinte forma:
$$\begin{cases} S_{0,0} = 1; & \\ S_{0,k} = 0, & k > 0; \\ S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k}, & n, k \geq 1. \end{cases}$$
   Sugestão: pense que se N é um conjunto com $n+1$ elementos, podemos escolher $a \in N$ e contar separadamente as partições nas quais a aparece isolado, isto é, as que incluem o conjunto $\{a\}$, e aquelas em que a aparece num conjunto de mais de um elemento.

10. Uma *partição* de um número natural $n > 0$ é uma sequência de naturais $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$; chamamos a k o número de *partes* da partição λ. Para cada $n, k > 0$, denotamos por $\Pi(n)$ o número de partições do número n, e denotamos por $\Pi(n, k)$ o número de partições do nú-

mero n em k partes. Uma relação imediata entre estas duas expressões é

$$\Pi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Pi(n,k).$$

(a) Calcule $\Pi(5)$ e $\Pi(6)$, encontrando explicitamente todas as partições dos números 5 e 6.

(b) Calcule $\Pi(10,4)$, encontrando explicitamente todas as partições do número 10 em 4 partes.

(c) Apresente uma explicação informal para a igualdade

$$\Pi(n) = \Pi(2n,n).$$

Sugestão: repare que $\Pi(n)$ é o número de maneiras de colocar n bolas iguais em n caixas iguais.

(d) Observe que $\Pi(n,k)$ é o número de maneiras de colocar n bolas iguais em k caixas iguais de tal modo que nenhuma caixa fica vazia. Com base nisto, tendo em conta que podemos contar separadamente os casos em que há uma caixa com exactamente uma bola e os casos em que todas as caixas têm pelo menos duas bolas, mostre que podemos obter a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
&\Pi(n,k) = 0, \text{ se } k > n;\\
&\Pi(n,n) = \Pi(n,1) = 1;\\
&\Pi(n,k) = \Pi(n-1,k-1) + \Pi(n-k,k).
\end{aligned}$$

(e) Explique a igualdade

$$\Pi(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \Pi(n-j,j).$$

11. **Números de Catalan.** Os *números de Catalan* podem definir-se por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Calcule os números de Catalan C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6.

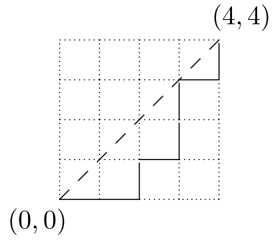
(b) Desenhe um quadrilátero e faça uma representação de todas as formas possíveis de o triangular (isto é, dividi-lo em triângulos, unindo vértices). Faça o mesmo para um pentágono.

(c) De quantas maneiras podemos triangular um polígono convexo com n lados? Expresse o resultado em números de Catalan.

(d) Chamamos *palavra de Dyck* a uma sequência que se pode fazer com duas letras (por exemplo, as letras A e B), utilizando igual número de cada e de forma a que o primeiro B esteja depois do primeiro A, o segundo B depois do segundo A, etc. Por exemplo, a sequência AABABB é válida, mas ABBAAB não é. Faça uma lista de todas as palavras de Dyck que se podem fazer com três letras de cada.

(e) Quantas palavras de Dyck se podem fazer com as letras A e B, utilizando n letras de cada? Expresse o resultado em números de Catalan.
Sugestão: Repare que qualquer palavra de Dyck se pode escrever de forma única como AxBy, onde x e y são palavras de Dyck mais pequenas.

(f) Faça uma representação de todos os caminhos que pode fazer de $(0,0)$ a $(4,4)$, tal com no problema 6, mas não passem acima da diagonal. Um exemplo é



(g) Encontre uma forma de representar os caminhos de $(0,0)$ a (n,n) que não passam acima da diagonal como palavras de

11. a) $C_0 = 1$ $C_1 = 1$ $C_2 = 2$ $C_3 = 5$ $C_4 = 14$ $C_5 = 42$ $C_6 = 132$

d) AA BA BB

AA AB BB

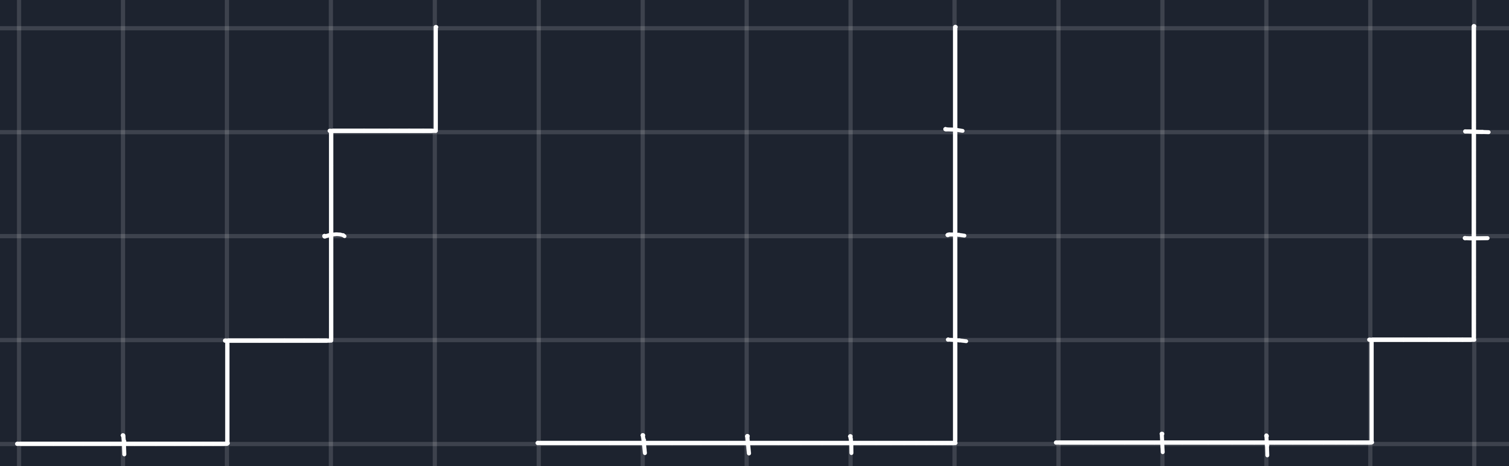
AA BB AB

AB AB AB

AB AA BB

e) AxBy

f)



g) DD CD CC DC

DD DD CC CC

DD DC DC CC

Dyck e conclua daí o número de possíveis caminhos.

12. Considere a sucessão $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência

$$\begin{cases} t_0 = 1; \\ t_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} t_n + 1, \text{ para } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

   (a) Calcule os cinco primeiros termos da sucessão.
   (b) Mostre que para qualquer natural $n > 3$, $t_n > 2 + \frac{2}{n}$.
   (c) Mostre que para qualquer natural $n > 3$, $t_{n+1} < t_n$.
   (d) Justifique que a sucessão $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.
   (e) Calcule $\lim_{n\to+\infty} t_n$.
   Sugestão: recorde que qualquer subsucessão de uma sucessão convergente tende para o mesmo limite.
   (f) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

13. **Relações de comparação.** Dadas duas sucessões de números reais positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *fracamente inferior* a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma constante $c > 0$ e um natural n_0 tais que, para qualquer natural $n \geq n_0$

$$a_n \leq c \cdot b_n.$$

Quando isto acontece, usamos a notação de Bachmann-Landau $a_n = O(b_n)$ [O sinal de igualdade aqui não tem o significado habitual].

   (a) Mostre que $3n^3 + 2n - 4 = O(n^3)$.
   (b) Mostre que $\binom{n}{4} = O(n^4)$.
   (c) Mostre que $\frac{5n-3}{2n+1} = O(1)$.
   (d) Mostre que a relação "ser fracamente inferior" é reflexiva no conjunto das sucessões de némeros reais positivos e transitiva. Esta relação é anti-simétrica?.