Variáveis aleatórias bidimensionais

$x \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
x_k	p_{k1}	p_{k2}		p_{kj}	$p_{k\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$		$p_{\cdot k}$	1

$p_{12} = P(X = x_1, Y = y_2)$

$p_{21} = P(X = x_2, Y = y_1)$

$p_{kj} = P(X = x_k, Y = y_j)$

Distribuição de probabilidade conjunta

$p_{2\cdot} = P(X = x_2)$ $\qquad$ $p_{\cdot 2} = P(Y = y_2)$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$f(x)$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{k\cdot}$

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_k
$f(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot k}$

Distribuições marginais

$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$

$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$

Distribuição condicional de y dado x

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Distribuição condicional de x dado y

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow \quad X \,(i)\, Y \quad \text{sse} \quad f(x,y) = \underbrace{f_X(x) f_Y(y)}_{P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)}$$

Covariância

$$\operatorname{cov}(x,y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y) = E(XY) - E(X).E(Y) = \sigma_{x,y}$$

Coeficiente de correlação linear

$$\rho = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

$X \,(i)\, Y \Rightarrow E(xy) = E(X)E(Y) \Rightarrow \operatorname{cov}(x,y) = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$X \,(i)\, Y \Leftrightarrow \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$

$X \,(i)\, Y \Leftrightarrow \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2.\operatorname{cov}(x,y)$

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

FICHA V – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

53. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de processadores das marcas X e Y têm a seguinte função de probabilidade conjunta:

X\Y	0	1	2
0	1/12	1/6	1/12
1	1/6		1/6
2	1/12	1/6	1/12

a) Calcule a probabilidade de num dado dia se vender o mesmo número de processadores das duas marcas.

b) Determine o número médio de processadores vendidos diariamente da marca X e o desvio padrão do número de processadores vendidos semanalmente (5 dias) da marca Y.

c) Pode afirmar que as variáveis são independentes? Justifique.

54. Uma companhia produz artigos, cada um dos quais pode ter 0, 1 ou 2 defeitos, com probabilidades iguais a 0.7, 0.2 e 0.1, respetivamente. Se um artigo tem dois defeitos os inspetores retiram-no e substituem-no por um perfeito antes da distribuição. Seja X o número original de defeitos num artigo produzido e Y o número de defeitos no correspondente artigo distribuído.

a) Determine a função de probabilidade conjunta.

b) Determine a função de probabilidade de Y.

c) Se um artigo distribuído revela ser perfeito, qual a probabilidade de ser fruto de uma substituição?

55. Numa empresa de aluguer de aviões a procura diária de aviões de passageiros, X, e a procura diária de aviões de transporte rápido de correio, Y, constitui uma variável aleatória bidimensional (X, Y) cuja função de probabilidade conjunta é dada por:

Y / **X**	**0**	**1**	**2**	
0	0			0,25
1			0,05	0,35
2	0,1		0,1	$p + 0,2$
3	0	0,1		P
	0,2	0,5		

a) Complete a tabela, determinando o valor de p.

53.

X\Y	0	1	2	
0	1/12	1/6	1/12	1/3
1	1/6		1/6	1/3
2	1/12	1/6	1/12	1/3
	1/3	1/3	1/3	1

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

a) $P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=2, Y=2) = 1/12 + 1/12 = 1/6$

b) $\mu_X = E(X) = 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 2 \times 1/3 = 1$

$\sigma =$

c) $P(X=2, Y=2) = 1/12$

$P(X=2) \times P(Y=2) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$

$P(X=2, Y=2) \neq P(X=2)P(Y=2)$, logo X e Y não são independentes.

54. a)

X\Y	0	1	
0	0,7	0	0,7
1	0	0,2	0,2
2	0,1	0	0,1
	0,8	0,2	1

b)

Y	0	1
f(Y)	0,8	0,2

c) $P(X=2 \mid Y=0) = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125$

55. a)

X\Y	0	1	2	
0	0	0,10	0,15	0,25
1	0,1	0,2	0,05	0,35
2	0,1	0,10 γ	0,1	$\gamma+0,2$ 0,30
3	0	0,1	0	γ 0,10
	0,2	0,5	0,3	1

$0,25 + 0,35 + \gamma + 0,2 + \gamma = 1 \Leftrightarrow 2\gamma = 0,20 \Leftrightarrow \gamma = 0,10$

b) ? X (⫫) Y ? $f(0,0) = P(X=0, Y=0) = 0 \neq \underset{0,25}{P(X=0)} \times \underset{0,20}{P(Y=0)}$

Logo X (⫫̸) Y

c) $E(Y) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 = 1,1$

$E(Y^2) = 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,3 = 1,7$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1,7 - (1,1)^2 =$

$\sigma = \sqrt{Var(Y)}$

d) $Var(3X+1) = 9 Var(X)$ $\quad Var(c) = 0 \quad Var(cX) = c^2 . Var(X)$

$E(X) = 0,35 + 0,60 + 0,3 = 1,25$

$E(X^2) = 0,35 + 1,2 + 0,9 = 2,45$

$Var(X) = 2,45 - (1,25)^2 = 0,89$

$9 Var(X) = 9 \times 0,89 = 8,01$

b) Existe alguma relação entre a procura diária de aviões de passageiros e a procura diária de aviões de transporte? Justifique.

c) Determine o valor médio e o desvio padrão da procura diária de aviões de transporte rápido de correio.

d) Calcule Var (3X+1).

56. Para um dado clube de futebol, considere a variável aleatória X que representa o número de golos marcados num jogo futebol e Y a variável aleatória que representa o número de golos sofridos. Com base nos últimos jogos desse clube estimou-se a seguinte função de probabilidades conjunta:

X \ Y	0	1	2
0	0,10	0,0	0,0
1	0,15	0,1	0,0
2	0,10	0,2	0,0
3	0,15	0,2	0,0

a) Sabendo que a equipa sofreu um golo, determine a probabilidade de ter vencido o jogo.

b) Determine o número médio de golos que a equipa marca por jogo.

c) Determine o valor da covariância entre X e Y.

57. Um aluno da Universidade de Évora para se deslocar para as aulas utiliza 2 meios de transporte, cuja duração conjunta é uma variável aleatória bidimensional (X, Y) com densidade

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y) \text{ ; } 0<x<2,\ 2<y<4 \\ 0 \text{ ; restantes valores} \end{cases}.$$

a) Determine a constante k.

b) Calcule o tempo médio de duração do segundo transporte (Y).

c) Calcule o tempo mediano de duração do primeiro transporte (X).

d) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

58. Sendo X o saldo e Y o rendimento mensal dos clientes de um dado banco (em milhares de Euros) e a função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(y+1)}{216} \text{ ; } 3<x<6,\ 1<y<5 \\ 0 \text{ ; restantes valores} \end{cases}$$

a) Calcule o rendimento médio mensal dos clientes do banco.

56.

X\Y	0	1	
0	0,10	0	0,10
1	0,15	0,10	0,25
2	0,10	0,20	0,30
3	0,15	0,20	0,35
	0,50	0,50	1

a) $P(\text{vencer} \mid \text{sofrer 1 golo}) = \dfrac{P(\text{vencer}, \text{sofrer 1 golo})}{P(\text{sofrer 1 golo})} = \dfrac{P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{0{,}20 + 0{,}20}{0{,}50} = 0{,}80$

b) $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}35 = 1{,}9$

$E(Y) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$

c) $E(XY) = \sum_x \sum_y x \cdot y \; f(x,y) = \sum_x x \left(0 \cdot f(x,0) + 1 \cdot f(x,1)\right) = \cancel{0 \cdot (0 \cdot f(0,0) + 1 \cdot f(0,1))} + 1 \cdot (\cancel{0 \cdot f(1,0)} + 1 \cdot f(1,1)) + 2 \cdot (\cancel{0 \cdot f(2,0)} + 1 \cdot f(2,1)) + 3 \cdot (\cancel{0 \cdot f(3,0)} + 1 \cdot f(3,1)) =$

$= 1 \cdot (1 \cdot f(1,1)) + 2 (1 \cdot f(2,1)) + 3 (1 \cdot f(3,1)) = 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}20 = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}6 = 1{,}1$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \overset{1{,}1}{E(XY)} \overset{-}{-} \overset{1{,}9 \times 0{,}5}{E(X)E(Y)} = 1{,}1 - 0{,}95 = 0{,}15$

57.

b) Calcule a probabilidade de o rendimento mensal dos clientes do banco ser superior a 3 milhares de Euros.

c) Calcule a probabilidade de um cliente ter um saldo superior a 4 milhares de Euros, sabendo que o seu rendimento mensal é superior a 3 milhares de Euros.

Soluções:

53.

a) P(X=Y)=1/6
b) E(X)=1; 4,08
c) As variáveis não são independentes.

54.

a)

X\Y	0	1
0	0,7	0
1	0	0,2
2	0,1	0

b)

Y	0	1
p(y)	0,8	0,2

c) P(X=2 | Y=0) = 0,125

55.

a) p= 0,1
b) Sim, porque as variáveis não são independentes.
c) E[Y] = 1,1; Var[Y] = 0,49
d) Var(3X+1)= 7,99

56.

a) 0,8
b) E[X]=1,9
c) 0,15

57.

a) 1/8
b) E[Y] = 17/6
c) Mediana X = 0,764
d) Não, porque $f(x,y) \neq f(x)f(y)$

58.

a) E[Y]=3,33
b) 5/8
c) 0,74