UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

2.ª Frequência **22/04/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere as equações $x^2 + y^2 = 3u + v$ e $x^2 y = 4uv$.

a) Mostre que as equações anteriores definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(1, 0, 0, 1)$.

b) Sendo $\mathbf{f}$ a função implícita na alínea anterior, indique qual das opções seguintes é a verdadeira:

☒ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$. ☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. ☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$.

a) Determine, caso existam, os extremos locias e os pontos de sela de f.

b) Indique qual das opções seguintes corresponde ao terceiro termo (termo de ordem 2) da Fórmula de Taylor de f no ponto $(0, 0)$:

☐ $eh_1^2 + 2e^2 h_1 h_2$. ☒ $eh_1^2 - eh_2^2$. ☐ $eh_1^2 + eh_2^2$. ☐ $eh_1^2 - 2e^2 h_1 h_2$.

3) Considere o integral

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_{x^2-1}^{1+x} f(x, y)\, dydx.$$

a) Esboce a região de integração.

b) Inverta a ordem de integração.

c) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

1. a) $F(x^2+y^2-3u-v,\ \ x^2y-4uv)$

i)
$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,u,v) = 2x \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,u,v) = 2xy \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}(1,0,0,1) = 2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(1,0,0,1) = 0$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,u,v) = 2y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,u,v) = x^2 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,0,0,1) = 0 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,0,0,1) = 1$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) = -3 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) = -4v \qquad \frac{\partial F_1}{\partial u}(1,0,0,1) = -3 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}(1,0,0,1) = -4$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) = -1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) = -4u \qquad \frac{\partial F_1}{\partial v}(1,0,0,1) = -1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(1,0,0,1) = 0$$

F é de classe C^1 pois as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas pois resultam do produto de funções constantes e projeção.

ii) $F(1,0,0,1) = (1^2-1,\ \ 1^2.0-4.0.1) = (0,0) = \vec{0}$

iii) $\det(J_{(u,v)}F(1,0,0,1)) \neq 0$

$$J_{(u,v)}F(x,y,u,v) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4v & -4u \end{bmatrix}$$

$$J_{(u,v)}F(1,0,0,1) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(J_{(u,v)}F(1,0,0,1)) = -4 \neq 0$

Logo, pelo TFI podemos concluir que as equações definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(1,0,0,1)$

b) $J_{(x,y)}F(1,0) = -J_{(u,v)}F(1,0,0,1)^{-1} \times J_{(x,y)}F(1,0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,0)} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}_{(1,0,0,1)} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,0,0,1)} = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 2 & -3/4 \end{bmatrix}$$

2. a) i) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

$\nabla f(x,y) = (2x.e^{1+x^2-y^2},\ -2y.e^{1+x^2-y^2})$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x.e^{1+x^2-y^2} = 0 \\ -2y.e^{1+x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ponto crítico: $(0,0)$

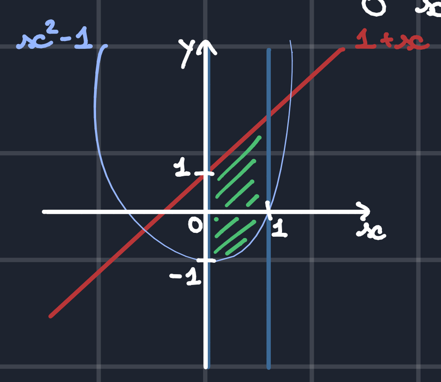
ii)
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2.e^{1+x^2-y^2} + 4x^2e^{1+x^2-y^2} & -4xy.e^{1+x^2-y^2} \\ -4xy.e^{1+x^2-y^2} & -2.e^{1+x^2-y^2} + 4y^2.e^{1+x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

iii) $H(0,0) = \begin{bmatrix} 2.e^1 & 0 \\ 0 & -2.e^1 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1 = 2.e^1 \quad \Delta_2 = -4e^2$

$(0,0)$ é ponto de sela

b)
$$f(0+h_1,\ 0+h_2) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)h_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2.e.h_1^2 + 0h_1h_2 - 2e.h_2^2\right) =$$
$$= e.h_1^2 - e.h_2^2$$

3. a) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2-1}^{1+x} f(x,y)\,dy\,dx$



b) $\int_0^1 \int_{x^2-1}^{1+x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

$x^2-1=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}$

$1+x=y \Leftrightarrow x=y-1$

c) $\int_0^1 \int_{x^2-1}^{1+x} 1\,dy\,dx = \int_0^1 y \Big|_{y=x^2-1}^{y=1+x} dx = \int_0^1 1+x-x^2+1\,dx = \int_0^1 -x^2+x+2\,dx = \frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2 = \frac{13}{6}$

4) Considere o sólido S limitado superiormente por $z = 3$, inferiormente por $z = 2 + x^2 + y^2$ e tal que $y \geq 0$.

$a)$ Sendo V o volume do sólido S, indique qual das opções seguintes é a verdadeira:

□ $V = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dydx.$

□ $V = \displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} \left(1 - \rho^2\right) d\rho d\theta.$

□ $V = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2+x^2+y^2}^{3} dzdydx.$

□ $V = \displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \left(1 - \rho^2\right) \rho \, d\rho d\theta.$

$b)$ Supondo que o sólido S tem a densidade constante igual a k, detemine a massa do sólido.

5) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

$a)$ A função $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$ definida na região do plano dada por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$ tem um extremante no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ A distância mínima entre o ponto $(3, 0, 2)$ e o plano de equação $z = x + y + 2$ é igual a $\sqrt{3}$.

$c)$ Seja $M = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$. Então, $\displaystyle\iiint_M xyz^2 dxdydz = \frac{26}{3}$.

4. a) $z = 3$; $z = 2 + x^2 + y^2$; $y \geq 0$