Teste 2 e exame de época normal

15 de Janeiro de 2024

Versão A

Este enunciado tem as questões do teste 2 e do exame de época normal. Deve responder apenas às perguntas da prova que está a realizar. Resolva os grupos que fizer em folhas de teste separadas. Justifique todas as respostas.

Teste 2 (2 horas): grupos **II**, **III** e **IV**.

Teste 2, com pergunta suplementar (2 horas e 15 minutos): os alunos que tiveram menos de 7,5 valores no teste 1, mas pelo menos 5 valores, devem fazer os grupos **II**, **III** e **IV**, e a pergunta **2** do grupo **I**.

Exame de época normal (2 horas e 30 minutos): grupos **I**, **III** e **IV**.

Grupo I (*apenas para o exame de época normal, excepto a pergunta 2, que é suplementar para o teste 2*)

1. Dados parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3\alpha - 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ \beta + 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

a) Discuta o sistema de equações lineares representado pela equação matricial $AX = B$, onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}\right]^T$, em função dos parâmetros α e β.

b) Para $\alpha = 2$ e $\beta = -4$, utilize a regra de Cramer para calcular o valor de z na solução.

2. Considere as matrizes $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$, e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{C})$.

a) Sabendo que é possível realizar a adição $AB + C$, quais são os valores de p e q?

b) Seja $X = 3B^T A^T C^{-1}$. Supondo que $|AB| = i - 1$ e $|C| = i$, qual é o determinante de X?

3. Considere em $\mathbb{Q}^2$ a operação θ definida por

$$(a, b)\theta(c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$$

Mostre que θ é comutativa.

Grupo II (*apenas para o teste 2*)

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + 2 & 0 & x^2 + y \\ yz & 1 & z - x \end{bmatrix}.$$

Mostre que f não é uma aplicação linear.

Equipa docente: Bruno Dinis, Joaquim Correia, Pedro Macias Marques

5. Considere as aplicações lineares $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ e $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, representadas pelas matrizes

$$\mathcal{M}(g, \text{b.c.}_{\mathbb{C}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ i & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(h, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ -2 & 3i \end{bmatrix}.$$

em relação à base canónica de $\mathbb{C}^3$ e à base $\mathcal{B} = \{(1, i), (i, 0)\}$ de $\mathbb{C}^2$.

a) Calcule a matriz $\mathcal{M}(h \circ g, \text{b.c.}_{\mathbb{C}^3}, \mathcal{B})$.

b) Calcule $g(2, 1-i, i)$.

Grupo III

6. Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z, w) = (2x - y, y + z + w, 2x + z + w)$$

e a base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 3)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

a) Calcule a matriz $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$, que representa g em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Encontre uma base para $\operatorname{Nuc} g$. A aplicação linear g é injectiva?

c) Determine a dimensão de $\operatorname{Im} g$. A aplicação linear g é sobrejectiva?

7. Seja E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ um sistema de vectores de E linearmente independente e seja $v = u_1 - u_3$.

a) Mostre que o sistema de vectores $\{u_1, u_2, v\}$ é equivalente a $\{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Sejam F e G subespaços de E, de dimensões 5 e 7, respectivamente, tais que $F \cap G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Determine $\dim(F + G)$.

Grupo IV

8. Considere as matrizes $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $V \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que V é vector próprio de A e indique o respectivo valor próprio.

b) Encontre todos os valores próprios de A e indique as suas multiplicidades algébricas.

c) Encontre todos os espaços próprios de A e indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

d) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^{-1}AP$.

9. Considere a aplicação bilinear $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

Mostre que g define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. [Sugestão: represente g por uma matriz em relação a uma base de $\mathbb{R}^2$ à sua escolha.]