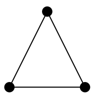
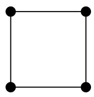
8. Famílias de grafos

Dizemos que um grafo é um *grafo linear* com n vértices ($n \geq 2$), e denotamo-lo por L_n, se é simples e tem n vértices, dos quais dois são de grau um e os restantes, se os houver, de grau dois. Portanto, o grafo admite a seguinte representação:

Outra família de grafos muito habitual é C_n: os *grafos circulares*, que são grafos simples e conexos com n vértices, $n \geq 3$, todos de grau dois.

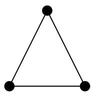


C_3

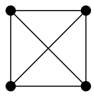


C_4

Se um grafo simples com n vértices tem todas as $\binom{n}{2}$ arestas possíveis, estamos a falar dum *grafo completo* com n vértices, K_n.

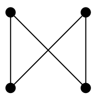


K_3

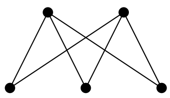


K_4

Uma família de grafos muito importante é a dos *grafos bipartidos*. Nos grafos bipartidos, os vértices podem ser divididos em duas classes, de tal forma que não há arestas entre dois vértices da mesma classe. Um caso especial é o dos *grafos bipartidos completos*, $K_{r,s}$, com $r, s \geq 1$. Um grafo bipartido completo é um grafo simples que tem $r + s$ vértices, divididos em duas classes, uma com r vértices e outra com s vértices, e inclui as $r \cdot s$ arestas que unem os vértices duma classe aos vértices da outra.



$K_{2,2}$



$K_{2,3}$

Árvores

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Se distinguimos um vértice de uma árvore, chamando-lhe *raiz*, os restantes vértices são classificados em diferentes níveis, sendo que o nível de cada vértice é determinado pela sua distância à raiz. A uma árvore à qual se atribuiu uma raiz, chamamos uma *árvore com raiz*. A altura de uma árvore com raiz é o máximo das distâncias dos vértices à raiz. Se dois vértices estão unidos por uma aresta, diz-se que o que está mais próximo da raiz é o *pai* e o outro o *filho*. A um vértice de grau um de uma árvore chamamos *folha*.

Uma árvore chama-se *binária* se o máximo grau dos seus vértices é três. No caso de uma árvore com raiz, o grau da raiz é no máximo dois, e isto é o mesmo que dizer que cada vértice pai tem no máximo dois filhos. Em geral, uma árvore n-ária é uma árvore em que o máximo grau dos seus vértices é $n+1$ (numa árvore n-ária com raiz, a raiz tem no máximo grau n). A *altura* de uma árvore n-ária com raiz é o nível máximo das suas folhas. Uma árvore n-ária com raiz diz-se *cheia* se todos os pais têm n filhos e diz-se *completa* se é cheia e todas as suas folhas têm o mesmo nível.

Proposição 1. *Um grafo G é uma árvore se e só se é conexo e $|A(G)| = |V(G)| - 1$.*

Se G é uma árvore, dado que $|A| = |V| - 1$, tem-se

$$\sum_{v \in V} \operatorname{grau}(v) = 2|V| - 2.$$

Proposição 2. *Toda a árvore com $|V| \geq 2$ tem, pelo menos, dois vértices de grau um.*

Demonstração. Suponhamos que não há vértices de grau um, isto é, $\operatorname{grau}(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Então

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \operatorname{grau}(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

mas isto não pode ser. Mas também não podemos ter só um único vértice w de grau um, porque, nesse caso,

$$\begin{aligned} 2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \operatorname{grau}(v) &= \operatorname{grau}(w) + \sum_{v \neq w} \operatorname{grau}(v) \\ &\geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1. \end{aligned}$$

■

Teorema (Cayley)**.** *O número de árvores diferentes que podem construir-se com o conjunto de vértices* $\{1, \ldots, n\}$ *é* n^{n-2}.

Exercícios e problemas

1. Um dado grafo tem 21 arestas e tem sete vértices de grau um, três de grau dois, sete de grau três e os restantes de grau quatro. Quantos vértices tem o grafo?

2. Existe algum grafo com 19 arestas e com seis vértices de grau um, três de grau dois, sete de grau três e os restantes de grau quatro?

3. De quantas maneiras difeentes pode um conjunto de 7 estudantes que vão de férias enviar cada um três postais a três dos restantes, e receber três postais exactamente dos três colegas a quem enviou?

4. Explique porque é que o número de pessoas de Évora que conhcem um número ímpar de pessoas de Évora é par.

5. Considere o grafo completo K_4 com quatro vértices v_1, v_2, v_3, v_4.

   (a) Faça um esboço de todos os subgrafos de K_4 que são isomorfos ao grafo completo K_3.

   (b) Faça um esboço de todos os subgrafos de K_4 que são isomorfos ao grafo completo K_2.

   (c) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo circular C_4?

   (d) Quantos caminhos simples de comprimento dois há de v_1 para v_2?

   (e) Quantos caminhos simples de comprimento dois há no grafo K_4?

   (f) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo linear L_3?

   (g) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo linear L_4?

6. Considere o grafo completo K_8 com oito vértices $v_1, v_2, \ldots, v_8$.

   (a) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo completo K_7?

   (b) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo completo K_5?

   (c) Quantos caminhos simples de comprimento dois há de v_1 para v_2?

   (d) Quantos caminhos simples de comprimento menor ou igual a três há de v_1 para v_2?

   (e) Quantos caminhos simples de comprimento menor ou igual a três há no grafo K_8?

   (f) Quantos caminhos simples de comprimento quatro há de v_1 para v_2?

   (g) Quantos caminhos simples de comprimento quatro há no grafo K_8?

   (h) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_3?

   (i) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_4?

   (j) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_7?

   (k) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo linear L_2?

   (l) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo linear L_5?

7. Esboce todas as possíveis árvores com seis vértices (não isomorfas entre si).

8. Graus dos vértices de uma árvore.

   (a) Qual é a soma dos graus de uma árvore de n vértices? (Mostre o resultado por indução.)

   (b) Uma determinada árvore A tem dois vértices de grau quatro, um de grau três, um de grau dois e os restantes são folhas. Quantos vértices tem? $n = 2.(n-1)$ arestas
   $\Sigma n = 2.(n-1)$

   (c) Uma determinada árvore B tem dois vértices de grau cinco, três de grau três, dois de grau dois e os restantes são folhas. Quantos vértices tem?

6. a) $^8C_7 = \binom{8}{7} = \frac{8!}{7! \times 1!} = 8$

b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$

c) $v_1 — v_x — v_2$

$1 \times 6 \times 1 = 6$

d) Comp3 $= 1 \times 6 \times 5 \times 1 = 30$

Comp2 $= 1 \times 6 \times 1 = 6$

Comp1 $= 1 \times 1 = 1$

$30 + 6 + 1 = 37$

e) Comp3 $= 8 \times 7 \times 6 \times 6$

Comp2 $= 8 \times 7 \times 7$

Comp1 $= 8 \times 7$

f) Comp4 $= 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 1 = 120$

g) Comp4 $= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 5$

h) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$

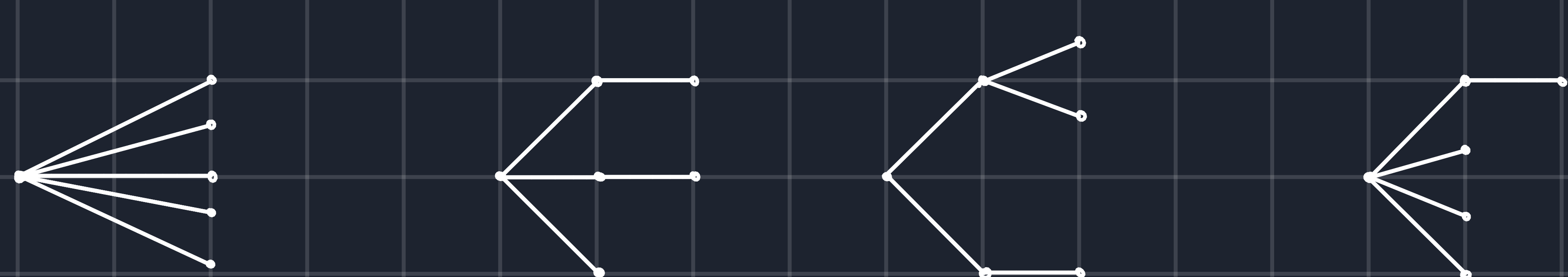
i) $3 \times \binom{8}{4} = 3 \times \frac{8!}{4! \times 4!} = 3 . \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!}$ | $\frac{8!}{4!} \times \frac{1}{8}$

j) $\frac{8!}{1!} \times \frac{1}{7 \times 2} = \frac{8!}{14}$

k) $\frac{8!}{6!} \times \frac{1}{2} = \frac{8 \times 7}{2}$

l) $\frac{8!}{3!} \times \frac{1}{2} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2}$

7. L_5 

$K_{1,5}$ 

8. b) n vértices $\qquad n-1$ arestas

Σ grau $\overbrace{n}^{\text{vértices}} = \overbrace{2(n-1)}^{\text{Arestas}}$

$2 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + (n-4) \times 1 = 2 \times (n-1)$

$\Leftrightarrow 8 + 3 + \cancel{2} + \cancel{n} - \cancel{4} = \cancel{2}n - \cancel{2}$

$\Leftrightarrow n = 11$

11 vértices $\qquad n-4$ folhas $= 7$ folhas

c) $2 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + (n-7) \times 1 = 2(n-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 + 9 + 4 + \cancel{n} - 7 = \cancel{2}n - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 10 + 9 + 4 - 7 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 18$

18 vértices $\qquad 18 - 7$ folhas $= 11$ folhas

(d) Esboce um exemplo do que poderia ser a árvore A e outro de como poderia ser a árvore B.

9. Para cada n, esboce uma árvore binária com raiz com vértices $1, 2, \dots, n$, com a mínima altura possível.
   (a) $n = 3$;
   (b) $n = 4$;
   (c) $n = 6$;
   (d) $n = 7$;
   (e) $n = 12$;
   (f) $n = 15$.

10. (a) Quantas folhas e quantos vértices tem uma árvore binária completa de altura h?
    (b) Quantas folhas e quantos vértices tem uma árvore n-ária completa de altura h?

11. Conte, sem utilizar o teorema de Cayley, o número de árvores diferentes com 2, 3, 4 e 5 vértices. Comprove o seu resultado com o valor dado pelo teorema.
    Sugestão: estude as diferentes possibilidades para as sucessões de graus e obtenha as diferentes árvores isomorfas. Etiquete depois os vértices destas e conte as diferentes possibilidades.

12. Recorde que os números de Catalan se podem definir por recorrência da seguinte forma:

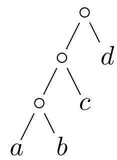
$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Podemos associar os termos numa operação de várias maneiras. por exemplo, se estivermos a operar quatro termos a, b, c e d, podemos fazê-lo de cinco formas distintas:

$$\big((ab)c\big)d, \quad \big(a(bc)\big)d, \quad (ab)(cd),$$
$$a\big((bc)d\big), \quad a\big(b(cd)\big).$$

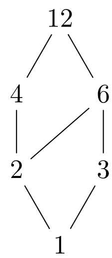
   Expresse o número de maneiras diferentes de associar n termos numa operação utilizando números de Catalan.

   (b) Podemos fazer corresponder a cada forma de associar n termos numa operação uma árvore binária cheia com n folhas. Por exemplo, podemos representar a associação $\big((ab)c\big)d$ pela árvore



   Faça uma correspondência entre todas as árvores binárias cheias de 5 folhas e todas as formas de associar 5 termos numa operação. Generalizando, expresse o némero de árvores binárias cheias de n folhas em termos de núemeros de Catalan.

13. Podemos representar os divisores de um natural positivo n num grafo definido da seguinte forma: os vértices correspondem aos divisores de n; se dois divisores d e e satisfazem $d|e$ e não existe outro divisor f, distinto de d e de e tal que $d|f$ e $f|e$, então os vértices correspondentes a d e e estão unidos por uma aresta. Por exemplo o grafo dos divisores de 12 será



   (a) Quais são os naturais que dão origem a um grafo isomorfo a L_2?
   (b) Quais dão origem a um grafo isomorfo a L_3?
   (c) E quais dão origem a um grafo linear, em geral?
   (d) Quais são os naturais que dão origem a um grafo isomorfo a C_4?