6. Sucessões de Fibonacci e de Lucas e número de ouro

Fibonacci (1170–1250) Leonardo Pisano, conhecido entre nós pela alcunha Fibonacci, nasceu em Itália, mas foi educado no Norte de África, onde o pai era diplomata, representante dos mercadores da República de Pisa. No livro *Liber abaci*, apresentou um problema sobre repodução de coelhos que deu origem aos números de Fibonacci.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

A sucessão de Fibonacci é definida por recorrência da seguinte maneira:

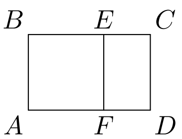
$$\begin{cases} F_0 = 0; \\ F_1 = 1; \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) Formado pela École Normale em Amiens, trabalhou no Observatório de Paris e mais tarde tornou-se professor de matemática no Lycée Saint Louis, depois da Guerra Franco-Prussiana (1870–1871). Estudou a sucessão de Fibonacci e, entre outras coisas, inventou o jogo das Torres de Hanoi.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

A sucessão de Lucas é também definida por recorrência, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} L_0 = 2; \\ L_1 = 1; \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Considere um rectângulo $ABCD$ e suponhamos que o lado AB é menor que o lado BC. Considere pontos E e F sobre os segmentos BC e AD respectivamente tais que $ABEF$ é um quadrado. Dizemos que $ABCD$ é um rectângulo de ouro se o rectângulo $FCDE$ é semelhante a $ABCD$.



O *número de ouro* é definido como a razão entre o comprimento e a largura de um rectângulo de ouro. É habitualmente denotado por Φ.

1. Calcule os dez primeiros termos das sucessões de Lucas e Fibonacci.

2. (a) De quantas maneiras se pode subir uma escada de n degraus, se se sobem um ou dois degraus de cada vez?

   (b) De quantas maneiras se pode subir uma escada de n degraus, se se sobem um, dois ou três degraus de cada vez?

3. (a) Calcule as somas dos números de cada um dos três caminhos assinalados no triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

   (b) Mostre por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   $$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots$$

   Note que $\binom{a}{b} = 0$, quando $a < b$.

4. Calcule o número de ouro.

5. Mostre que o número de ouro satisfaz as seguintes propriedades:

   (a) $\Phi^2 = \Phi + 1$;

   (b) $(1 - \Phi)^2 = (1 - \Phi) + 1$;

   (c) $\Phi^{-1} = \Phi - 1$.

6. **Fórmulas de Binet.** Mostre por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   (a)
   $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - (1 - \Phi)^n \right];$$

3. a) 2 ; 3 ; 5; 8; 13; 21

b) $F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{n} + \binom{n-3}{3} + \dots$

Base: $F_{0+1} = 1 = F(1)$

Hereditariedade: Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que para qualquer natural $k < n$, temos $F_{n+1} = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \binom{k-3}{3} + \dots$

Então

- se $n = 0$, $F_{0+1} = F_1 = 1 = \binom{0}{0}$.
- se $n = 1$, $F_{1+1} = F_2 = 1 = \binom{1}{0}$ ✓
- se $n > 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} =$

$$= F(n-1) + 1 + F(n-2) + 1 =$$

$$= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots\right] + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots\right] =$$

$$= 1 + \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0}\right] + \left[\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1}\right] + \left[\binom{n-4}{3} + \binom{n-4}{2}\right] + \dots$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

(b)

$$L_n = \Phi^n + (1-\Phi)^n.$$

7. Mostre, por indução ou utilizando as fórmulas de Binet, que para quaisquer $m, n > 0$,

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1;$$

   (b)
   $$\sum_{l=0}^{2n} (-1)^l F_l = F_{2n-1} - 1;$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3;$$

   (d)
   $$\sum_{r=0}^{n} F_{2r+1} = F_{2n+2};$$

   (e)
   $$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n;$$

   (f)
   $$L_{n+1}L_{n-1} - {L_n}^2 = 5(-1)^{n+1};$$

   (g)
   $$L_n = F_{n+1} + F_{n-1};$$

   (h)
   $$F_{2n+1} = {F_{n+1}}^2 + {F_n}^2;$$

   (i)
   $$F_{2n} = {F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2;$$

   (j)
   $$F_{2n} = F_n L_n;$$

   (k)
   $$F_{n+m+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m;$$

   (l)
   $$\sum_{k=1}^{n} {F_k}^2 = F_n F_{n+1}.$$

8. Mostre, por indução, que para qualquer natural n, F_{3n} é par.

9. Mostre, por indução, que para qualquer natural n, F_{5n} é múltiplo de 5.

10. Mostre, por indução, em simultâneo, que para qualquer natural n,

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

e

$$F_{n+1}F_n + F_{n+2}F_{n+1} = F_{2n+2}.$$

11. Mostre que podemos conhecer um número de Fibonacci de índice ímpar conhecendo os dois números de Fibonacci de índice ímpar anteriores, mostrando por indução que para qualquer natural n,

$$F_{2n+5} = 3F_{2n+3} - F_{2n+1}.$$