1. $\begin{cases} -x + y + az = 1 \\ 2x + ay - 2az = a \\ -ax + ay + z = 1+2a \end{cases}$

a) Determine em função do parâmetro real 'a' a característica da matriz simples.

b) Discuta o sistema em função do parâmetro 'a'.

c) Considere $a=-2$. Determine o conjunto solução do sistema.

d) Diga, justificando, se o conjunto de c) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

2. $V = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$ e $U = \{(x,y,z,w) : y + 2w = 0\}$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.

a) Diga, justificando, se o vetor $(-1, 1, -1, 1)$ pertence a U.

b) Escreva o vetor $(2, 0, 2, -1)$ como combinação linear dos vetores de V.

c) Determine uma base para U e a sua dimensão.

d) Determine, justificando, $V+U$. Os geradores $U+V$ geram todo o $\mathbb{R}^4$?

e) Determine, justificando, $V \cap U$.

3. Verdadeiro e Falso

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

- AB é definido
- AC não é definido
- CB é inversível
- A+C é definido
- $(BC)^2$ não é inversível
- αB não é definido

4. $\det A = 1$ $\det B = 2$ $\det C = -4$

Calcula $(-2A^{-1}B^2C^{-1})$

5. $M = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

a) $\det(M)$

b) M não é inversível para qual α.

c) Para $\alpha=2$, a entrada 2,3 do M^T.

d) Para $\alpha=2$, a entrada 2,3 do M^{-1}.

2. a) $U=\{(x,y,z,w): y+2w=0\}$

$(-1,1,-1,1)$

$1+2\times 1=0 \Leftrightarrow 3=0$ P.F.

Assim, o vetor $(-1,1,-1,1)$ não pertence a U.

b) $V=((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$

$(2,0,2,-1) = a(1,0,1,0)+b(0,1,0,0)+c(0,0,0,1)$

$2=a \wedge 0=b \wedge 2=a \wedge -1=c$

Logo, $(2,0,2,-1) = 2(1,0,1,0)+0(0,1,0,0)-1(0,0,0,1)$

c) $y+2w=0 = y=-2w$

$(x,-2w,z,w) = x(1,0,0,0)+w(0,-2,0,1)+z(0,0,1,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-L_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Todos os vetores são linearmente independentes

Logo, a base de $U=((1,0,0,0),(0,-2,0,1),(0,0,1,0))$

$\dim U=3$

d) $V+U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-L_4]{-L_4}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$car(V+U)=4$, logo são linearmente independentes e geram todo o $\mathbb{R}^4$.

e) $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = 3+3-\dim(U\cap V)$

$\Leftrightarrow \dim(U+V) = 2$