Pureza de Choi-Jamiolkowski como indicador de caos cuántico de muchos cuerpos

Jose Alfredo de Leon[1] Miguel Gonzalez[2] Carlos Diaz-Mejia[2]

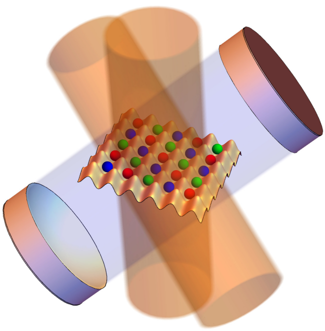
16 de octubre de 2025

1 Instituto de Física, UNAM

2 Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

¿Cómo diagnosticar caos cuántico de muchos cuerpos?

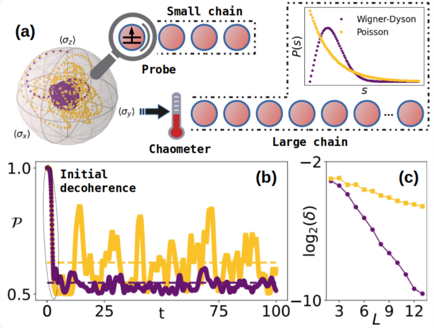
- Propiedades estadísticas del Hamiltoniano $\rightarrow$ matriz aleatoria



- Desafío: Acceso limitado a propiedades completas del sistema

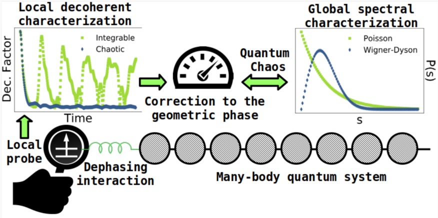
[PRA 93 063632 (2016)]

Monitoreo de la pureza

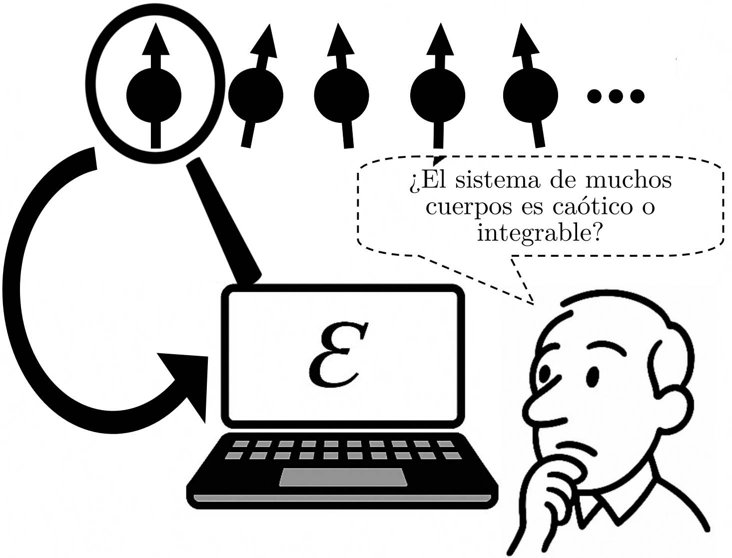


[Physical Review E 103 L020201 (2021)]

Reavivamientos en el factor de decoherencia



[Quantum Science and Technology 6 045018 (2021)]



¿Señales de caos en el canal cuántico $\mathcal{E}$?

Pureza de Choi

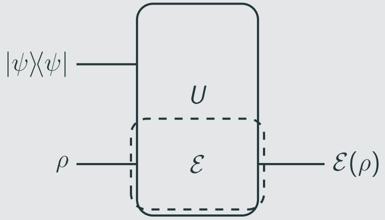
Canales cuánticos

Describen ruido cuántico, mediciones generalizadas y dinámica de sistemas cuánticos abiertos.

Representación sistema-entorno

Para todo $\mathcal{E}$, existe $\{U, |\psi\rangle\}$:

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}\left(U\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|\, U^{\dagger}\right).$$



Representación de Choi

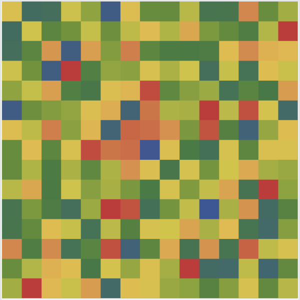
A $\mathcal{E}$ le corresponde un único estado

$$\mathcal{D} = (\mathcal{E} \otimes I)[|\Phi\rangle\langle\Phi|],$$
$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle \otimes |i\rangle\,.$$

- $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$
- $\frac{1}{d^2} \leq \mathrm{Tr}\left(\mathcal{D}^2\right) \leq 1$

Caos cuántico

Caos cuántico = RMT



Eigenvalores correlacionados

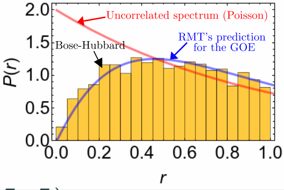
- Repulsión de niveles

$$\tilde{r}_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}}, \; r_n = \text{mín}\left(\tilde{r}_n, \frac{1}{\tilde{r}_n}\right)$$

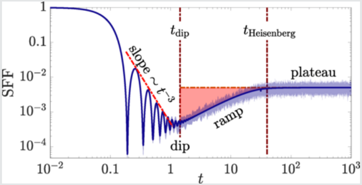
$$\langle r \rangle_{\mathrm{GOE}} \approx 0{,}536$$

$$\langle r \rangle_{\mathrm{Poisson}} \approx 0{,}386$$

[PRL 110 084101 (2013)]



- $SFF(t) = \sum_{i,j} e^{-i(E_i - E_j)t}$



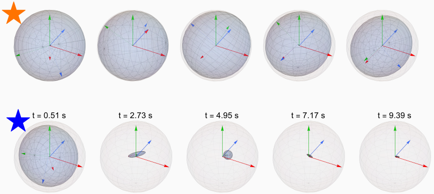
Eigenvectores deslocalizados

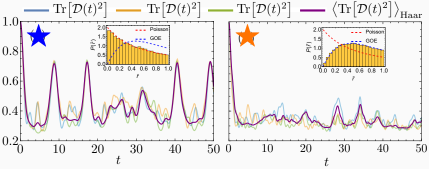
$$|E_i\rangle \approx |\psi_{\mathrm{random}}\rangle$$

Dado un Hamiltoniano H,

$$\mathcal{E}_t(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}\left(e^{-iHt}\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|\, e^{iHt}\right), \quad |\psi\rangle = \bigotimes_i |\phi_i\rangle\,.$$

¿Cómo se ve el canal cuántico $\mathcal{E}_t$?





Promedio de Haar de $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}(t)^2\right]$

- El caos está en H
- Sin embargo, $\mathcal{E}$ depende de $|\psi\rangle$
- Removemos analíticamente la dependencia en $|\psi\rangle$:

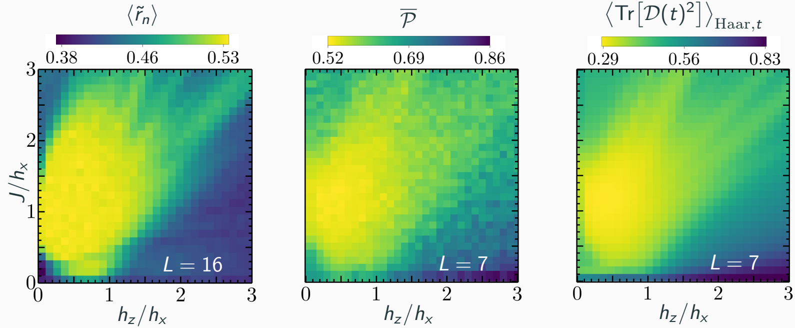
$$\mathop{\mathbb{E}}_{|\phi_i\rangle\sim\mu_{\mathrm{Haar}}}\left[\mathrm{Tr}\,\mathcal{D}^2(t)\right] = \frac{1}{12^{L-1}} \sum_{\vec{k}\in\{0,1,2,3\}^{L-1}} 3^{\frac{1}{2}(L-1-w(\vec{k}))}\, \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}_S^2\left(U(t)\sigma_{0,\vec{k}}U^\dagger(t)\right)\right]$$

- Vamos a usar el siguiente número como indicador de caos:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\,\mathcal{D}^2(t)\right\rangle_{\mathrm{Haar},t} = \int_0^T \mathop{\mathbb{E}}_{|\phi_i\rangle\sim\mu_{\mathrm{Haar}}}\left[\mathrm{Tr}\,\mathcal{D}^2(t)\right]\mathrm{d}t$$

Modelo de Ising con campos transverso y longitudinal

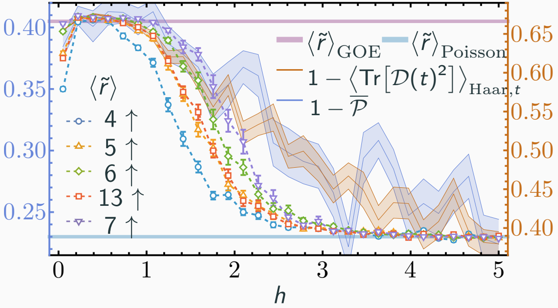
$$H = \sum_{i=1}^{L} \left(h_x \sigma_i^x + h_z \sigma_i^z \right) - J \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z,$$



- ¡¡Cadenas mucho más pequeñas para $\overline{\mathcal{P}}$ y $\left\langle \mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^2(t)\right] \right\rangle_{\mathrm{Haar},t}$!!
- Para $J > 1$ la resolución de $\left\langle \mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^2(t)\right] \right\rangle_{\mathrm{Haar},t}$ se vuelve mejor que la de $\overline{\mathcal{P}}$

Modelo de Heisenberg con campos aleatorios

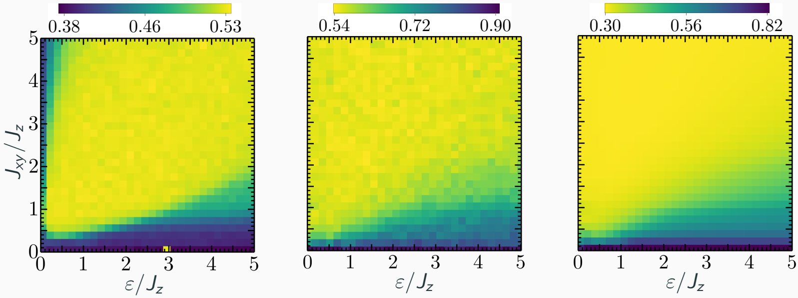
$$H = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{L-1}\left(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L} h_i\sigma_i^z, \quad h_i \sim [-h, h]$$



- $\left\langle \mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^2(t)\right]\right\rangle_{\mathrm{Haar},t}$ tiene una desviación estándar no visible al ojo en la región de caos

Modelo XXZ con defecto local

$$H = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{L-1}\left[J_{xy}\left(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y\right) + J_z\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_d^z.$$



- Un sólo defecto es capaz de romper la integrabilidad [Journal of Physics A: Mathematical and General 37 4723 (2004)]
- $\overline{\mathcal{P}}$ y $\left\langle \mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^2(t)\right]\right\rangle_{\mathrm{Haar},t}$ deben capturar correlaciones mezcladas de espacios distintos.

¿Qué captura la pureza de Choi?

Para un canal cuántico arbitrario

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}} \left(U\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \, U^\dagger \right)$$

la pureza de Choi puede escribirse:

$$\mathrm{Tr}\big(\mathcal{D}^2\big) = \left\langle \psi \middle| \mathrm{Tr}_S \left\{ U^\dagger \Lambda \left[U \left(\frac{I_2}{2} \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \right) U^\dagger \right] U \right\} \middle| \psi \right\rangle,$$

- Evolución para adelante U
- Un proceso de ruido blanco sobre el sistema Λ
- Evolución para atrás $U^\dagger$

Echo de Loschmidt
$\langle\psi_0|e^{i(H+V)t}e^{-iHt}|\psi_0\rangle$

La pureza de Choi cuantifica la irreversibilidad de la evolución ante una perturbación que destruye el entrelazamiento.

Muchas gracias

¿Preguntas?

Jose Alfredo de Leon
deleongarrido.jose@gmail.com