

Información cuántica: El modelo LMG

Miguel de Jesús González Martínez^{*}
Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México
(Dated: 19 de julio de 2020)

En este avance presento el estudio que he hecho del Lipkin-Meshkov-Glick (LMG), un breve análisis de su espectro de energía en función de los parámetros de los que depende, el comportamiento de la entropía lineal en función de la partición del sistema completo y el comportamiento del correlador fuera de tiempo (FOTOC) para dos observables.

Keywords: Modelo LMG, Entropía lineal, Enredamiento, FOTOC, Lyapunov cuántico

I. INTRODUCCIÓN

A. Intención de este trabajo

Recientemente se ha observado que existe una relación muy interesante entre la información cuántica de un sistema de muchas partículas, termalización, sistemas caóticos e incluso agujeros negros [1]. La principal motivación de mi tema de investigación durante la maestría es el analizar esta relación principalmente desde el punto de vista de la información cuántica.

En la primera parte se estudia la estructura del estado base en función de los parámetros de los que dependa su Hamiltoniano (aquí se tratará únicamente el Hamiltoniano del modelo LMG pero la intención es extender el estudio al Hamiltoniano del modelo de Dicke). En particular, si el estado base sufre alguna transición de fase. Hay diversas maneras de estudiar las transiciones de fase, ya sean térmicas o cuánticas, pero en este trabajo nos restringiremos al estudio del enredamiento cuántico para observar dicha característica y como medida del enredamiento se utilizará la entropía lineal. La idea es la siguiente, ya que tenemos un sistema de N partículas indistinguibles este puede ser arbitrariamente dividido en dos (un sistema bipartita) y el estudio de la entropía lineal nos puede indicar si un estado del sistema es factorizable o no, el hecho de que sufra cambios nos puede dar información acerca de la estructura del estado del sistema que se esté estudiando.

En la segunda parte se estudia la evolución temporal de los valores esperados y varianzas de ciertas observables y su conexión con el exponente de Lyapunov, característica presente en los sistemas clásicos que presentan caos (en este caso, la contraparte clásica del modelo LMG aunque es integrable tiene un punto inestable donde el exponente de Lyapunov es diferente de cero).

B. El modelo LMG

Este modelo consiste en un sistema de N partículas indistinguibles de dos niveles, mejor conocidas como qubits.

Cada una de ellas les corresponde un espacio de Hilbert de dimensión dos, en donde podemos expresar cualquier operador utilizando las matrices de Pauli. De este modo el espacio de Hilbert del sistema es el producto tensorial de N espacios de Hilbert de dimensión dos, lo que nos da como resultado que la dimensión del espacio de Hilbert de nuestro sistema es de 2^N . Las únicas interacciones que vamos a considerar serán de dos partículas. El Hamiltoniano LMG está dado por:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\gamma}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \frac{\lambda}{2} (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2), \quad (1)$$

en donde el parámetro γ dispersa una partícula del nivel inferior al nivel superior y viceversa. La segunda interacción mediada por λ , dispersa un par de partículas del nivel superior al inferior y viceversa. Por último el parámetro ϵ cuenta la mitad de la diferencia entre el número de partículas en el estado superior e inferior (se ha definido $\hbar = 1$). Los operadores \hat{J}_α son llamados operadores colectivos de pseudospín y están dados por:

$$\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\alpha^i, \quad (2)$$

con $\alpha = x, y, z$. Cabe destacar que la elección de sumar de manera coherente los operadores de Pauli tendrá como consecuencia más adelante que solo podamos estudiar la entropía en los subespacios de mayor proyección, (este punto será explicado más adelante). Por otro lado, esto conlleva también a que la máxima proyección (dado que estamos sumando N partículas con espín $1/2$, esto corresponde a solamente considerar el espín total igual a $N/2$) en la dirección del eje z sea de $N/2$.

De manera análoga, se pueden definir los operadores de pseudospín de creación y aniquilación como:

$$\hat{J}_\pm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\pm^i = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y, \quad (3)$$

Se puede mostrar que debido a su construcción los operadores de pseudospín siguen el álgebra de $SU(2)$ [6]. Además, dado el operador \hat{J}^2 ($\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$) y \hat{J}_z , estos nos generan la base de estados de Dicke que cumplen las siguientes

^{*} mjgm.fisica@ciencias.unam.mx

propiedades:

$$\hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle \quad y \quad \hat{J}_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle. \quad (4)$$

Dadas las observaciones anteriores, el número cuántico j está acotado por $0 \leq j \leq N/2$ y se considerará la representación más grande posible o la simétrica, por lo tanto $j = N/2$, en consecuencia el valor máximo que puede alcanzar el número cuántico m es de $N/2$ [4]. De esta forma, escogeremos al estado que corresponde al de menor energía cuando no hay interacciones ($\lambda = \gamma = 0$) como $|j, -j\rangle$, con esto podemos expresar todos los demás estados de la siguiente manera:

$$|j, m\rangle = \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{\hat{J}_+^{j+m}}{(j+m)!} |j, -j\rangle, \quad (5)$$

en donde $\hat{J}_-|j, -j\rangle = 0$.

Dado que el Hamiltoniano (1) conmuta con el operador \hat{J}^2 , esto produce que su representación matricial se rompa en bloques de dimensión $2j+1$ y el problema se simplifique a resolver dichos bloques.

Ahora, cambiaremos un poco la forma en que escribiremos a los estados de Dicke para interpretar de manera más fácil el estudio de la entropía que se hará más adelante. Los eigenvalores del operador \hat{J}_z pueden reescribirse como $m = n - N/2$, con $n = j + m$, representando el número de partículas total en el nivel superior, por lo que toma valores entre 0 y N [4]. De esta manera, reescribimos a los estados de Dicke como:

$$|N, n\rangle = \sqrt{\frac{(N-n)!}{N!n!}} \hat{J}_+^n |N, 0\rangle \quad (6)$$

II. ESPECTRO DE ENERGÍA

Ya que tenemos el Hamiltoniano y una base para trabajar, en el notebook de Mathematica construyo los bloques mencionados anteriormente de dimensión $2J+1$ en función de los parámetros ϵ , γ y λ , y diagonalizo directamente utilizando las funciones ya predefinidas. En la figura (1) se muestra las energías en función de ϵ para un valor de $J = 5/2$, es decir, para $N = 5$ partículas.

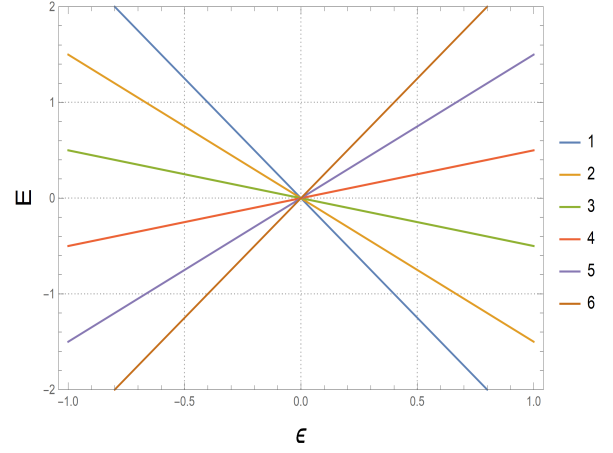


Figura 1. Espectro de energías en función de ϵ para $N = 5$ partículas, $\epsilon = 1$ y $\gamma = \lambda = 0$.

Para el caso en el que no hayan interacciones, el Hamiltoniano (1) es diagonal, por lo que solamente se observa una degeneración cuando $\epsilon = 0$ y cada energía aumenta de manera lineal en función de ϵ .

En la figura (2) se muestra el espectro de energías en función del parámetro γ con $\epsilon = 1$ y $\lambda = 0$. En este caso se observan cruces de niveles para ciertos valores de γ . Esto tiene el efecto de que en el estado base cambie el número cuántico n en función de γ .

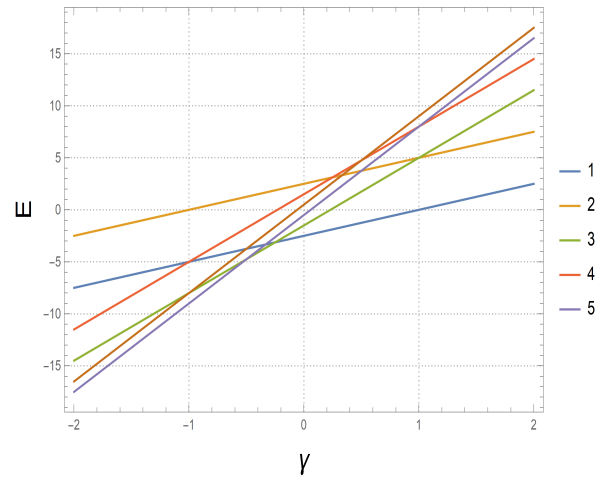


Figura 2. Espectro de energías en función de γ para $N = 5$ partículas, $\epsilon = 1$ y $\lambda = 0$.

En la figura (3), se muestran las primeras cinco energías para el caso $J = 30$, en donde se puede observar un precursor a una transición de fase, ya que para números mayores de J el cruce en $\gamma = 0$ siempre existirá.

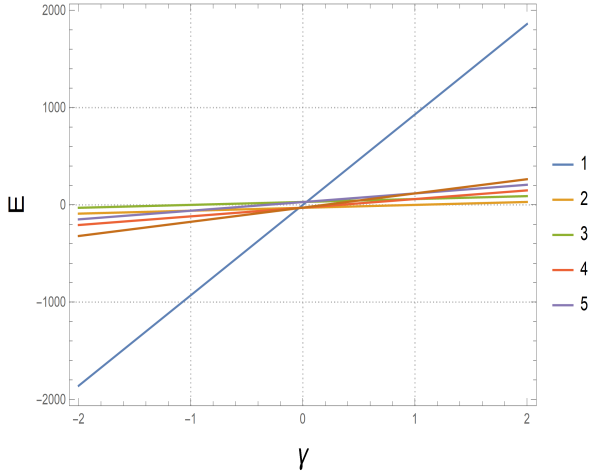


Figura 3. Espectro de energías en función de γ para $N = 60$ partículas, $\epsilon = 1$ y $\lambda = 0$.

En la figura (4) se muestra el espectro de energías en función de λ . En este caso no se presentan cruces sino cruces evitados en $\lambda = 0$ en los niveles de energía de los diferentes estados, de nuevo anunciando un precursor de una transición de fase.

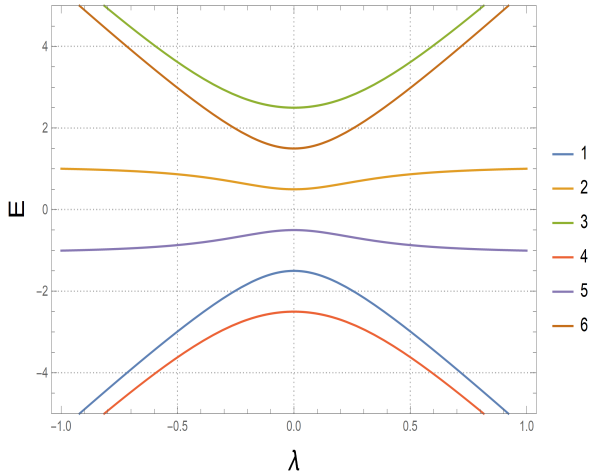


Figura 4. Espectro de energías en función de λ para $N = 5$ partículas, $\epsilon = 1$ y $\gamma = 0$.

Por último, en la figura (5) se observa la superficie de energía del estado base en función de γ y λ para $N = 30$.

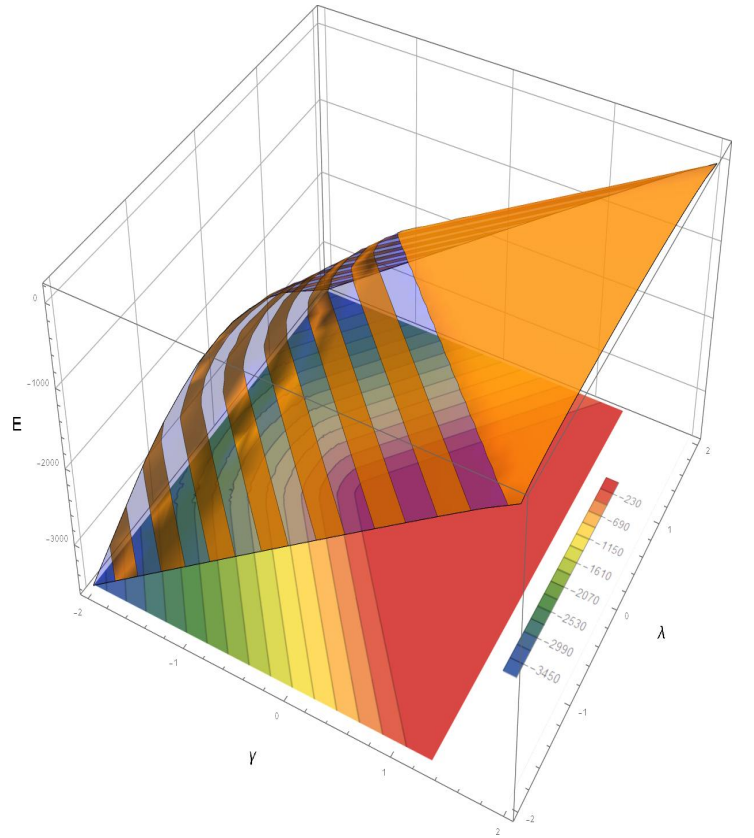


Figura 5. Energía del estado base para $N = 30$ partículas y $\epsilon = 1$. Las franjas sobre la superficie de energía son cortes a energías constante y debajo se muestran sus proyecciones.

Aquí se puede observar claramente las regiones en donde existen precursores de transiciones de fase, en toda la línea de $\lambda = 0$ se observa el cambio más grande y esperado, ya que es la región en donde el Hamiltoniano es diagonal. La otra región que se observa es en la primera curva de nivel (primera región naranja de arriba para abajo) o la línea que separa el color rojo y naranja en la proyección de la superficie de nivel. Aunque aquí no se estudiará a detalle las transiciones ni el orden de estas, lo que muestra la figura anterior es una ayuda visual para localizar donde están las transiciones de fase que se estudiarán utilizando la entropía lineal.

III. MEDIDAS DE INFORMACIÓN

Como en este trabajo se pretende estudiar la dinámica de las correlaciones que existen en el sistema de N qubits, una forma de comenzar es estudiando lo que le pasa a las entropías de enredamiento como un tipo particular de correlación (más aún, no local). Decimos entropías porque no existe una sola definición en general, depende del sistema que se esté estudiando la definición más conveniente. En nuestro caso, dividiremos el sistema en dos partes y se estudiará el enredamiento entre estos nuevos subsistemas, es decir, estudiaremos un sistema bipartita. Esta división que se está haciendo es completamente arbitraria considerando que nuestro sistema físico son los N qubits y como las interacciones que estamos estudiando son de dos cuerpos esto implica que el sistema es uno solo y las partículas o N qubits están conectados entre

si. En principio podrían existir otras implementaciones con sistemas físicos espacialmente separados que den como resultado el mismo Hamiltoniano de la ecuación (1), en donde sea más natural la división del sistema en dos, pero esta discusión la dejaremos de lado por el momento.

A. Entropía lineal

De manera breve, la teoría de la información cuántica describe la transferencia y procesamiento de la información utilizando sistemas cuánticos. En este contexto, la entropía de von Neumann cumple con los siguientes roles [5]:

- Permite describir información clásica codificada en sistemas cuánticos.
- Permite cuantificar los recursos mínimos cuánticos necesarios para guardar cierta cantidad de información.
- Permite cuantificar el enredamiento que exista en sistemas cuánticos compuestos.

De nuevo para contextualizar tenemos un sistema de N qubits el cual se dividirá en dos subsistemas y se estudiará el enredamiento entre el sistema bipartita resultante de esta división.

Entonces, tenemos un espacio de Hilbert de dimensión 2^N , en donde tenemos una base dada por la ecuación (6). Si nos restringimos al caso de considerar solamente estados puros, sabemos que la matriz de densidad del sistema está dado por:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (7)$$

con $|\psi\rangle \in H$. Ahora consideramos la partición del sistema en dos subsistemas con número de partículas N_1 y N_2 respectivamente, tal que $N = N_1 + N_2$ y sin pérdida de generalidad consideraremos que $N_1 < N_2$. Por lo que ahora, el espacio de Hilbert original es el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada subsistema. Con todo lo anterior, se define la entropía de von Neumann como:

$$S_{VN}(\rho_i) = -Tr(\hat{\rho}_i \ln \hat{\rho}_i), \quad (8)$$

en donde $\hat{\rho}_i$ es la matriz reducida del subsistema $i = 1, 2$ dada por la traza parcial $\hat{\rho}_i = Tr_j(\hat{\rho})$, con $j = 1, 2$. La entropía lineal se puede obtener como una aproximación a primer orden de la entropía de von Neumann y está dada por:

$$S_L(\rho_i) = 1 - Tr(\hat{\rho}_i^2). \quad (9)$$

El hecho de que exista más de una definición de entropía es debido a la conveniencia o facilidad para calcularla en cada sistema en particular, dando en general la misma información (en la referencia [4] se discute el comportamiento de estas dos entropías y se concluye para este modelo en particular que ambas dan información equivalente, por lo

que se trabajará con la entropía lineal).

Ahora, como hemos dividido el sistema en dos partes, los estados del sistema completo en general serán una combinación lineal del producto tensorial de los estados de los subsistemas (puede pensarse como en teoría de momento angular, la base acoplada en términos de la base no acoplada) dados por los coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$|N, n\rangle = \sum_{n_1=0}^N P^{1/2}(n_1, n) |N_1, n_1\rangle |N_2, n - n_1\rangle, \quad (10)$$

en donde n_i es el número de partículas que se encuentra en el nivel superior de energía de cada subsistema $i = 1, 2$ respectivamente, cumpliéndose que $n = n_1 + n_2$ [4]. Los coeficientes de Clebsch-Gordan están dados por:

$$P(n_1, n) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}}. \quad (11)$$

Ya que tenemos la forma de expresar a los estados de Dicke en función de la partición, comenzamos construyendo la matriz de densidad del sistema, para esto vamos a considerar algún eigenestado del Hamiltoniano, que expresado en términos de la base de Dicke se escribe como:

$$|\Psi^\alpha\rangle = \sum_{n=0}^N b_n^\alpha |N, n\rangle, \quad (12)$$

con $\alpha = 0, 1, \dots, N$ etiquetando los eigenestados ordenados energéticamente de menor a mayor, siendo $\alpha = 0$ el estado base. De esta manera, la matriz de densidad del sistema es $\hat{\rho} = |\Psi^\alpha\rangle\langle\Psi^\alpha|$ y al calcular los elementos de matriz (ver apéndice A) de la matriz de densidad reducida trazando sobre el segundo subsistema $\hat{\rho}^1 = Tr_2(\hat{\rho})$ se obtiene:

$$\rho_{i,j}^1 = \sum_{n=0}^{N_2} b_{i+n}^\alpha b_{j+n}^\alpha P^{1/2}(i, i+n) P^{1/2}(j, j+n). \quad (13)$$

Ya que se tiene la matriz de densidad reducida se procede a calcular la entropía lineal. Dado que la entropía lineal mide el grado de enredamiento del estado a estudiar, la partición $(N, 0)$ correspondiente al estado base es un estado completamente factorizable $|N, 0\rangle = |N_1, 0, N_2, 0\rangle$ dando una entropía igual a cero, por lo que no se tomará en cuenta más adelante. Aunado a esto, podemos considerar la siguiente situación, en donde separamos al sistema en el estado de máxima proyección de momento angular $|N, N/2\rangle$ en una partícula y en $N-1$ en la otra, de tal modo que la partición con $N_1 = 1$ y $N_2 = N-1$ nos da un estado posible dado por:

$$|N, N/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle |N-1, N/2\rangle + |1, 1\rangle |N-1, N/2\rangle),$$

que resulta ser el estado con máximo enredamiento ya que si se mide el estado del primer subsistema se sabe con absoluta

certidumbre el estado del segundo subsistema. Entonces, ya que esta partición contendrá el estado de máximo enredamiento, es conveniente normalizar a la entropía lineal como:

$$S_L(\rho_1) = \left(\frac{N_1 + 1}{N_1} \right) (1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_1^2)). \quad (14)$$

En la figura (6) se muestra la entropía lineal en función de γ y λ para el caso de $N = 30$ con la partición $N_1 = 1$ y $N_2 = 29$. Como se puede observar es muy clara la sensibilidad de esta partición a la región de parámetros que se mencionó en la figura (5), pero no se observa ningún comportamiento en la línea definida por $\lambda = 0$. Es muy interesante el observar que aunque solamente en esa línea el Hamiltoniano es diagonal, para esta partición hay una región más amplia en donde las correlaciones son máximas y pasando ciertos valores de γ y λ (región del fondo) las correlaciones se hacen cero resultando en un estado factorizable.

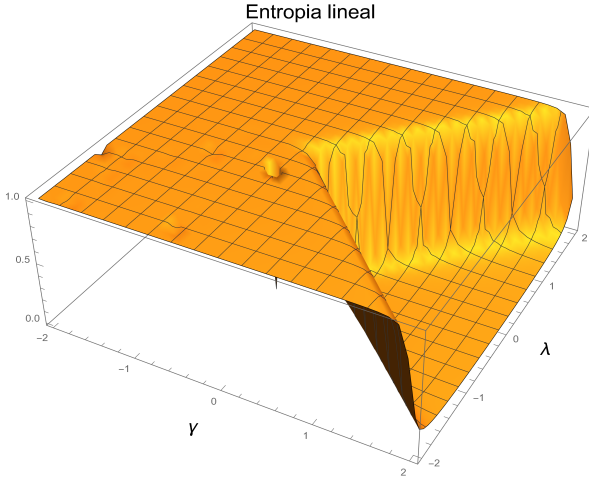


Figura 6. Entropía lineal en función de λ y γ para $N = 30$ partículas con la partición $N_1 = 1$ y $N_2 = 29$.

En la figura (7) se muestra la entropía lineal para el mismo número de partículas con la partición $N_1 = N_2 = N/2$. Aquí se puede observar una caída en general de la entropía respecto al caso anterior pero con la característica que esta partición si detecta la transición de fase en la línea $\lambda = 0$. Aunque el Hamiltoniano en esta región es diagonal, la entropía no llega a uno pero se cree que este efecto es exclusivamente de la partición y como un estado de Dicke es expresado en términos de los estados de ambos subsistemas.

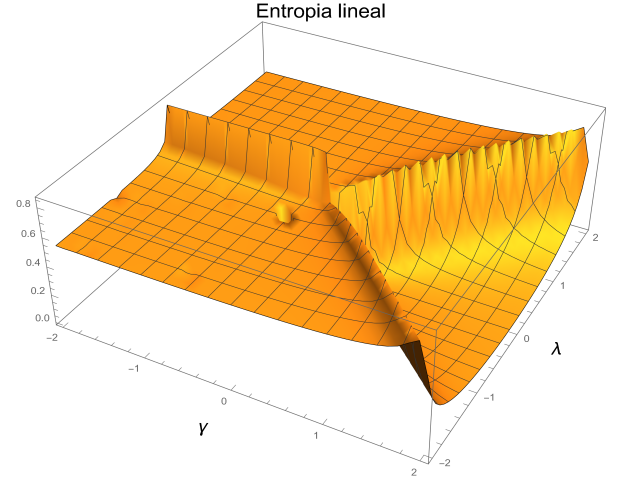


Figura 7. Entropía lineal en función de λ y γ para $N = 30$ partículas con la partición $N_1 = N_2 = N/2$.

IV. FOTOC

Desde esta sección en adelante se restringirá al estudio el Hamiltoniano 1 para el caso en que $\gamma = \lambda$ obteniéndose el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\lambda}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) = \epsilon \hat{J}_z + \lambda \hat{J}_x^2,$$

en donde se usó que $\hat{J}_x = (1/2)(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$. Además, para poder observar los cambios al escoger J cada vez más grandes, se hace un cambio al Hamiltoniano anterior quedando como:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\lambda}{2J} \hat{J}_x^2 \quad (15)$$

Una forma en la que se puede observar la correspondencia entre un modelo clásico y uno cuántico, es analizando el Correlador Fuera de Tiempo (OTOC por sus siglas en inglés, Out Of Time Order Correlator). El OTOC mide el grado de no conmutatividad de dos operadores en función del tiempo y está definido como:

$$O(t) = -\langle [\hat{W}(t), V(0)]^2 \rangle. \quad (16)$$

En el caso en que $\hat{W}(t) = e^{i\delta\phi\hat{G}}$ con \hat{G} un operador hermitiano, $\delta\phi$ una pequeña perturbación y $V = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ el proyector a cierto estado inicial, al OTOC se le conoce como FOTOC $F(t)$ (por sus siglas en inglés, Fidelity Out of Time Order Correlator). El FOTOC es una cantidad que proviene del sistema cuántico pero se ha mostrado que el crecimiento exponencial del FOTOC está relacionado con los exponentes de Liapunov de la contraparte clásica del sistema en las regiones en donde se presente caos (o puntos inestables).

En el apéndice B se muestra como se relaciona el FOTOC con la varianza del operador \hat{G} , obteniéndose:

$$\frac{1 - F(t)}{(\delta\phi)^2} \approx \langle \hat{G}(t)^2 \rangle - \langle \hat{G}(t) \rangle^2 \equiv \sigma_G^2(t). \quad (17)$$

Lo que nos muestra la ecuación 17, es la relación que existe entre la varianza del operador \hat{G} con el FOTOC. Ahora, la relación que se ha observado entre el FOTOC y el exponente de Lyapunov se da en el crecimiento inicial del FOTOC de la forma $F(t) \approx \hbar e^{2\Lambda t}$ y dada esta relación se podrá entonces calcular este exponente de Liapunov cuántico a través del cálculo de la varianza de \hat{G} .

A. FOTOC para estados coherentes

Una forma de obtener un Hamiltoniano clásico a partir de uno cuántico, es a través de un principio variacional tomando el valor esperado del Hamiltoniano cuántico con ciertos estados de prueba para después minimizar la función resultante y así poder aproximar la energía del estado base variando los parámetros del estado de prueba. Una vez determinado el estado base se puede proceder a calcular los valores esperados de las observables de interés. Como resultado de todo este procedimiento, se deducen los estados coherentes de Bloch o $SU(2)$.

Para obtener el Hamiltoniano clásico (con sus respectivas variables canónicamente conjugadas (q, p)) a partir del Hamiltoniano 15, se toma su valor esperado utilizando los estados coherentes de Bloch definidos como:

$$|z\rangle \equiv \frac{1}{(1 + |z|^2)^J} e^{z\hat{J}_+} |N, 0\rangle, \quad (18)$$

con el número complejo $z \equiv (q - ip)/\sqrt{4 - q^2 - p^2}$. La deducción y análisis del Hamiltoniano clásico queda fuera del alcance de este trabajo, pero de ahí se eligen las cantidades relevantes que esperamos calcular y comparar con nuestro Hamiltoniano cuántico. Calculando el valor esperado y varianza de los operadores anteriormente mencionados con estos estados coherentes, se obtendrá información acerca del exponente de Liapunov cuántico.

En el apéndice B se muestra como expresar a los estados coherentes en función de los estados de Dicke obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \frac{1}{(1 + |z|^2)^J} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \sqrt{\frac{(N-n)!}{N!n!}} |N, n\rangle \\ &\equiv A \sum_{n=0}^N B(N, n, z) |N, n\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

con $A \equiv (1 + |z|^2)^{-J}$ y $B(N, n, z) \equiv \frac{z^n}{n!} \sqrt{\frac{(N-n)!}{N!n!}}$. A partir de estas definiciones se pueden calcular los valores esperados y varianzas respecto al tiempo.

Para comenzar, la suma de las variables clásicas conjugadas q y p (estas variables surgen de manera análoga a la forma en que se construyen los estados coherentes para el campo electromagnético cuantizado, en ese caso el estado coherente $|\alpha\rangle$ está parametrizado por el número complejo $\alpha = q + ip$, con el cual podemos obtener una representación en el espacio fase, además de obtener los valores esperados clásicamente de observables como el campo eléctrico) es directamente proporcional al valor de la variable J_z a través de la siguiente expresión:

$$q^2 + p^2 = 2(J_z + 1), \quad (20)$$

en donde $q = \sqrt{2}J_x/\sqrt{1 - J_z}$ y $p = -\sqrt{2}J_y/\sqrt{1 - J_z}$, todas estas variables son clásicas en el espacio fase del Hamiltoniano $H = \Omega/2(q^2 + p^2) - \Omega + \xi(q^2 - q^2p^2/4 - q^4/4)$. Este Hamiltoniano clásico tiene un punto inestable en $q = p = 0$, en donde el exponente de Lyapunov clásico tiene un valor positivo aunque el sistema sea integrable. Entonces, para la parte cuántica se espera que se cumpla la siguiente relación en el punto inestable $\sigma_q^2 + \sigma_p^2 = 2(\langle \hat{J}_z \rangle + 1)$ (dedido a que en ese punto $q^2 = p^2 = 0$).

En resumen, ya que se tiene un par de variable clásicas a partir de un Hamiltoniano cuántico obtenidas por medio de los estados coherentes de Bloch, se puede analizar qué tanto se espere un estado inicial en el espacio fase cuántico en función del tiempo, esto es similar a la noción clásica del exponente de Lyapunov que es una medida de como crece la separación de dos trayectorias clásicas en el espacio fase cuando el Hamiltoniano es caótico. En la figura (8) se muestra el FOTOC (con una traslación) en función del tiempo para tres puntos dados por $P = 0$ y $Q = 0$, $Q = 0,04$ y $Q = 0,08$.

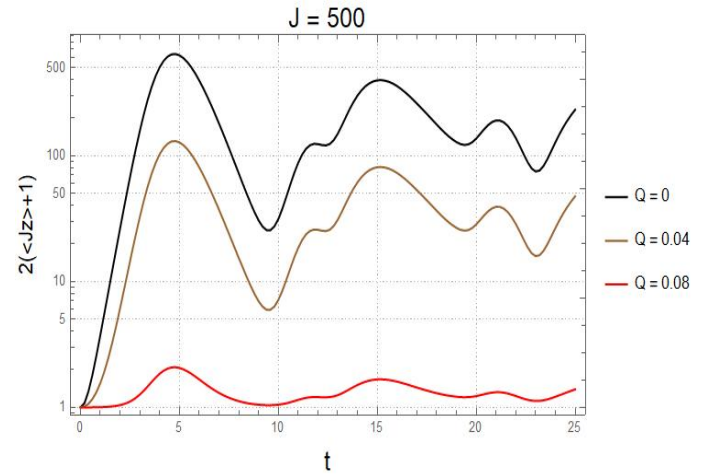


Figura 8. Fotoc $2(\langle \hat{J}_z \rangle + 1)$ en escala semilog para $\lambda = -1$ y $\epsilon = 1$ para $J = 500$ para los puntos con $P = 0$ y $Q = 0$, $Q = 0,04$ y $Q = 0,08$.

Como puede observarse en la figura anterior, se corrobora el crecimiento exponencial inicial que se describió con anterioridad. Este crecimiento en general se espera para cualquier observable, por lo que en la figura (9) se muestra la varianza del operador \hat{J}_x en función del tiempo, en donde también se

observa el mismo tipo de crecimiento.

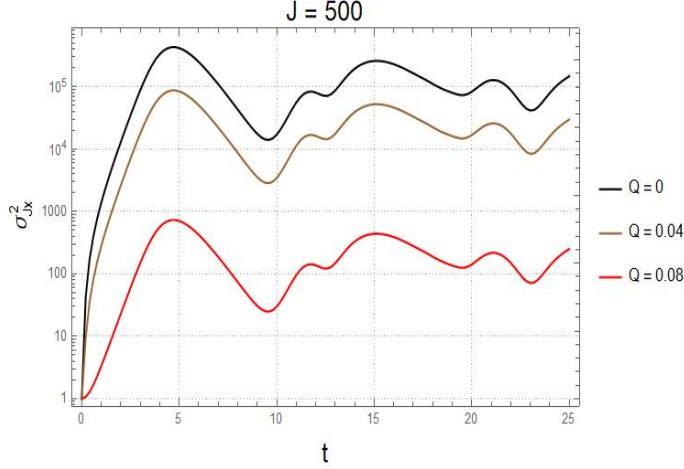


Figura 9. Fotoc $\sigma_{J_x}^2$ en escala semilog para $\lambda = -1$ y $\epsilon = 1$ para $J = 500$ para los puntos con $P = 0$ y $Q = 0$, $Q = 0,04$ y $Q = 0,08$.

En ambos casos, mientras se calcule el FOTOC para puntos más lejos del punto inestable con $Q = 0$ menor es el tiempo en el que se presenta el crecimiento exponencial (clásicamente solamente para el punto inestable se obtendría un exponente de Lyapunov mayor que cero).

B. Exponente de Lyapunov cuántico

Por último, para corroborar lo que se mencionó anteriormente respecto al crecimiento exponencial inicial del FOTOC dado por $F(t) \approx e^{2\Lambda t}$, en escala semilog se ajustó una recta a la parte inicial para calcular el coeficiente del crecimiento exponencial en función de Ω (este parámetro del Hamiltoniano clásico es igual a ϵ del Hamiltoniano cuántico de este trabajo). En la figura (10) se muestra esta relación y su comparación con la relación clásica dada por $\lambda = \sqrt{-(\Omega^2 - 2\Omega)}$.

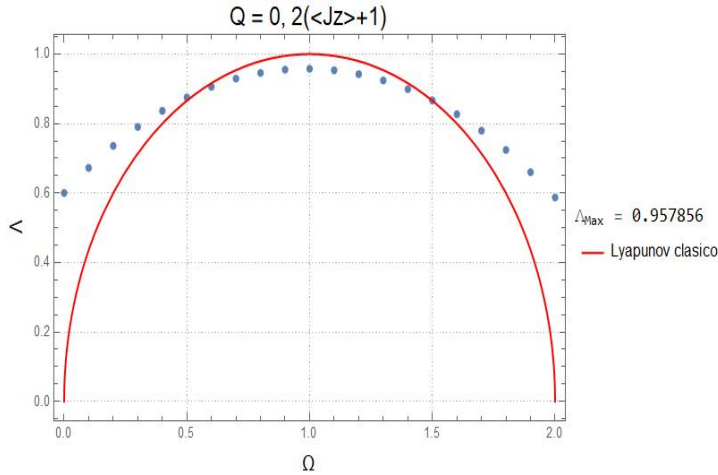


Figura 10. Exponente de Lyapunov en función de Ω correspondiente al FOTOC $2(\langle \hat{J}_z \rangle + 1)$ para $\lambda = -1$ con $J = 500$ para el punto $Q = P = 0$.

Como se puede apreciar en la figura anterior, el exponente

de Lyapunov cuántico obtenido se asemeja cualitativamente al clásicamente esperado, por lo que aún falta refinar la metodología. Sin embargo, que se cumpla al menos cualitativamente el resultado es producto de que si se obtuvo el crecimiento exponencial del FOTOC. El hecho de que se haya marcado el Λ_{max} es solamente para corroborar que no se pase de uno, cota establecida por la expresión anterior para el exponente de Lyapunov clásico λ .

De la misma forma en la figura (11) se hizo la gráfica correspondiente a la varianza de \hat{J}_x pero aquí no se tiene analíticamente cuál sería la relación del exponente en función de Ω ya que aún no se ha establecido la relación entre esta observable y las variables clásicas q y p , aún así se observa un comportamiento muy similar.

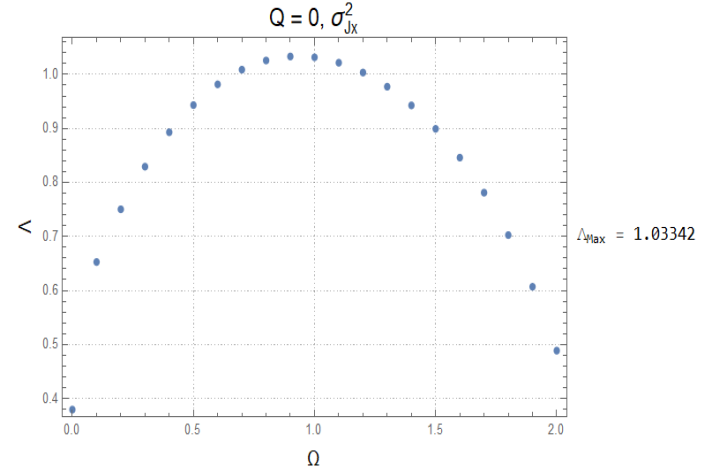


Figura 11. Exponente de Lyapunov en función de Ω correspondiente al FOTOC $\sigma_{J_x}^2$ para $\lambda = -1$ con $J = 500$ para el punto $Q = P = 0$.

V. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

A. Conclusiones generales

Uno de los aspectos más importantes que considero debo mencionar respecto a la presentación que hice del proyecto que estoy realizando en la maestría, es que en este trabajo la primera parte sobre transiciones de fase y entropía con la segunda parte correspondiente al FOTOC parecen estar desconectadas. Justo la forma en que se conecten es lo que espero indagar al final de la maestría, por lo que ahora no puedo abordar mucho en ello.

Respecto a los objetivos planteados inicialmente al parecer fueron demasiado ambiciosos, podría decir que he cumplido la mitad ya que solamente estudié el modelo LMG y no pude realizar numéricamente ningún estudio sobre el modelo de Dicke. Dado que me propuse estudiar la relación de varios temas, eso me involucró una gran parte de tiempo dedicado en leer mucho marco teórico sin poder adentrarme en particular en alguno pero justo esa es la motivación. Sin embargo, ahora que tengo los conocimientos básicos de los temas que quiero estudiar, siento que la transición a aplicar

todo esto al modelo de Dicke será más fácil.

Para saber que iba en el camino correcto los resultados de la primera parte los fui comparando principalmente con la referencia [4] y para la segunda con [3], en particular para la segunda parte ya que tengo un Hamiltoniano más general que ahí y estoy estudiando las dos principales regiones donde existen transiciones de fase que observé en la primera parte, cosa que aún no se ha reportado en la literatura.

B. Conclusiones del trabajo numérico

Respecto al trabajo computacional que hice, al principio comencé programando todas las expresiones y graficando para valores de J muy pequeños y así ver cualitativamente si estaba haciendo bien las cosas. Pero para poder comparar mis resultados con las referencias mencionadas, tenía que evaluar valores de J más grandes.

En la primera parte como en principio solamente necesitaba la energía del estado base, utilicé la función Eigenvalues de Mathematica (con las opciones utilizadas en la tarea 2) para obtenerla pero al momento de hacer la gráfica esta se veía horrible con demasiadas manchas peor de como se muestra en la figura (12) en donde calculé la entropía lineal para $N = 30$.

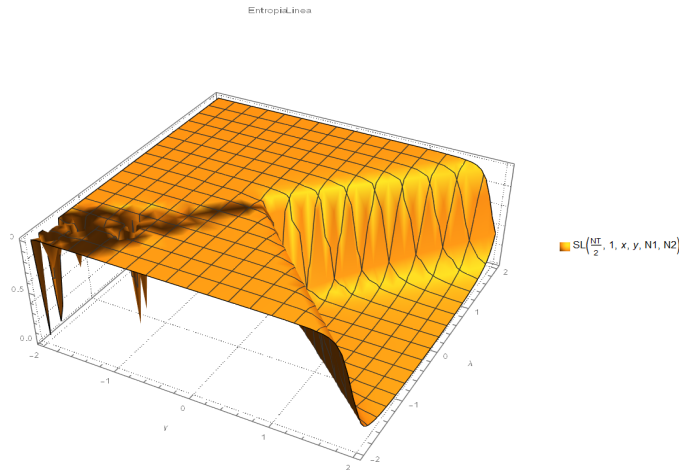


Figura 12. Resultado parcial de la Entropía lineal en función de γ y λ

Lo que posteriormente identifiqué fue que la forma en que estoy calculando los Clebsch-Gordan estoy dividiendo números demasiado grandes. Para remediar esto (que se propaga en la segunda parte) calculo estos coeficientes aplicando logaritmo natural a ambos lados y al final aplico una exponencial (aquí aprendí la forma en que Mathematica asume las cantidades, puede hacerlo de manera simbólica, con precisión de máquina o con cualquier número de decimales que se quiera, pero hay un costo en cuanto a la rapidez de computo punto fundamental en la segunda parte), esto mejoró la calidad de las gráficas pero no completamente. La otra cosa que hice para mejorar las gráficas fue calcular todos los eigenvalores cosa que mejoró completamente las

gráficas (que muestro como resultados en este trabajo). Hasta este momento no he hallado la manera de mejorar las gráficas porque aún obtengo algunas deformaciones y picos comenzando a aparecer desde valores de $J = 30$, aunque también identifiqué que la función de Plot tampoco es la más indicada, porque haciendo una tabla de los valores y haciendo un ListPlot se obtienen resultados un poco mejor, pero hay regiones de parámetros de γ y λ que ambos métodos me arrojan picos o deformaciones y no los he resuelto completamente.

Para la parte del FOTOC comencé calculando todos los arreglos y coeficientes en una sola función, para los dos casos en que $Q = 0$ y $Q \neq 0$. La idea en general era englobar todos los cálculos y arrojar un solo resultado, utilizando las expresiones para los valores esperados en términos de sumas de coeficientes, dado que ahí sí utilicé todos los eigenvalores y eigenvectores, también lo realizaba al principio. Ya que obtuve los resultados esperados comencé a evaluar mis operaciones para valores de J por arriba de cincuenta o cien, pero en definitiva era extremadamente ineficiente y lento, tardándose más de seis horas sin obtener las gráficas completas, solo para tiempos de cero a cinco segundos que es donde está el crecimiento exponencial, aunado al hecho de que Mathematica consumía toda mi memoria RAM y ya no ejecutaba los cálculos. Este fue el problema más grande ya que me iba a resultar imposible calcular para $J = 500$ en mi computadora (AMD Ryzen 3200U 2 núcleos, con 12 GB de RAM a 2.60 GHz de frecuencia base, trabajando en promedio a 2.9 GHz). Aquí fue donde comencé a indagar cuáles eran las capacidades de computo de Mathematica y las funciones más eficientes para realizarlas.

Lo que aprendí fue que Mathematica trabaja de manera muy eficiente los arreglos (listas, vectores y matrices) y que mis cálculos eran repetitivos y redefinidos en numerosas ocasiones. Entonces procedí a convertir mi función original en varias funciones de arreglos que guardaban sus resultados, intentando varias combinaciones y formas de definirlos. Un aspecto importante fue omitir por completo la parte de diagonalización, matemáticamente me cambié del cuadro de Schrödinger al cuadro de Heisenberg porque la evolución temporal es solo un producto de Matrices, cosa que Mathematica hace excepcionalmente bien incluso con matrices exponenciales. El otro aspecto fue el aprovechar los comandos Parallel para utilizar de manera eficiente todos los núcleos físicos de la computadora en cuestión (corroboré esto corriendo mis códigos en una computadora con el doble de núcleos y es increíble la reducción en el tiempo total de computo), y para que este comando funcione, hay que verificar que todas las cosas que definidas deban de ir de acuerdo a la lógica de paralelización y no contener cálculos secuenciales como condicionales. Al final, obtuve una versión que aprovecha todo esto y logré tiempos de cómputo del orden de 4000 segundos para mis gráficas de $J = 500$ con un consumo al rededor de 4 GB de RAM (estos valores relativos a mi equipo). Otro aspecto que consideré muy importante que no logré implementar fue el uso de versiones compiladas de mis funciones, ya que Mathematica puede compilar ciertas funciones en lenguaje objetivo C, dando como resultado para ciertos casos en particular una ejecución más rápida que sus propias implementaciones,

pero yo no logré mejorar los tiempos ya mencionados.

En general, todo el trabajo del curso me sirvió para familiarizarme con la sintaxis de Mathematica y cómo implementar ciertos problemas matemáticos, para poder enfocarme exclusivamente a no solo poder programar lo que necesité sino adentrarme a optimizar y sacar el máximo provecho de Mathematica.

Apéndice A: Entropías

Usando las definiciones de la sección III A, la matriz de densidad del sistema para un eigenestado del Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\Psi^\alpha\rangle\langle\Psi^\alpha| \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N b_n^\alpha b_m^\alpha |N, n\rangle\langle N, m| \\ &= \sum_{n,m} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n'_1=0}^{N_1} b_n^\alpha b_m^\alpha P^{1/2}(n_1, n) P^{1/2}(n'_1, m) \times \\ &\quad \times |N_1, n_1, N_2, n - n_1\rangle\langle N_1, n'_1, N_2, m - n'_1|,\end{aligned}$$

por lo que la matriz de densidad reducida $\hat{\rho}_1 = Tr_2(\hat{\rho})$ queda:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{n,m} \sum_{n_1, n'_1} b_n^\alpha b_m^\alpha P^{1/2}(n_1, n) P^{1/2}(n'_1, m) \times \\ &\quad \times \langle N_2, l | N_1, n_1, N_2, n - n_1 \rangle \langle N_1, n'_1, N_2, m - n'_1 | N_2, l \rangle \\ &= \sum_l \sum_{n,m} b_n^\alpha b_m^\alpha P^{1/2}(n - l, n) P^{1/2}(m - l, m) \times \\ &\quad \times |N_1, n - l\rangle\langle N_1, m - l|,\end{aligned}$$

por lo tanto, sus elementos de matriz $\langle N_1, i | \hat{\rho}_1 | N_1, j \rangle = \rho_{i,j}^1$ son:

$$\rho_{i,j}^1 = \sum_{n=0}^{N_2} b_{i+n}^\alpha b_{j+n}^\alpha P^{1/2}(i, i+n) P^{1/2}(j, j+n).$$

Con esto se construyó como un arreglo la matriz de densidad reducida y se calcula la entropía lineal.

Apéndice B: Relación entre el FOTOC y la varianza de \hat{G}

El FOTOC está definido como:

$$F(t) = \langle \hat{W}(t)^\dagger V^\dagger W(t) V \rangle, \quad (B1)$$

donde $\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{W} e^{-i\hat{H}t}$ y $\hat{V} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$ es el estado inicial a estudiar. En la referencia [1] se detalla que la elección de $\hat{W} = e^{i\delta\phi\hat{G}}$ y expandiendo su valor esperado respecto a $|\Psi_0\rangle$ hasta segundo orden se obtiene:

$$\Psi_0|\hat{W}|\Psi_0\rangle \approx 1 + i\delta\phi\langle\hat{G}(t)\rangle - \frac{\delta\phi^2}{2}\langle\hat{G}(t)^2\rangle,$$

y de la expresión anterior, se demuestra la relación entre el FOTOC y la varianza de $\hat{G}(t)$ dada por:

$$\frac{1 - F(t)}{(\delta\phi)^2} \approx \langle\hat{G}^2(t)\rangle - \langle\hat{G}(t)\rangle^2 \equiv \sigma_G^2(t). \quad (B2)$$

Debido a la ecuación B2, es que se hace referencia al FOTOC calculando la varianza de $\hat{G}(t)$. Un aspecto igual de importante es determinar qué observables y bajo qué parámetros será posible observar este comportamiento

Apéndice C: Varianzas y valores esperados

Como se vio en el apéndice B, el FOTOC está directamente relacionado con la varianza del operador en cuestión, en nuestro caso vamos a analizar a los operadores \hat{J}_z y \hat{J}_x . Para cualquiera de estos dos operadores se tiene que su varianza en función del tiempo respecto a un estado $|\psi\rangle$ está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{J_i}^2 &= \langle\hat{J}_i^2(t)\rangle_\psi - \langle J_i(t)\rangle_\psi^2 \\ &= \langle\psi(t)|\hat{J}_i^2(t)|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|J_i(t)|\psi(t)\rangle^2.\end{aligned}$$

Ahora, estos valores esperados serán calculados asignando la dependencia temporal a los operadores. Primero se intentó primero evolucionando en el tiempo a los estados, pero se encontró que era más rápido asignársela a los operadores posiblemente al hecho de saltarse la diagonalización en primer caso mencionado porque para el segundo caso se utilizan las funciones prediseñadas de Mathematica) dada por $\hat{J}_z(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{J}_z e^{-i\hat{H}t}$. A partir de esta expresión se toman los valores esperados respecto a los estados coherentes de Bloch.

1. Tomando el estado coherente como estado inicial

Usando las definiciones de la sección IV se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle\hat{J}_z(t)\rangle_z &= \langle z | e^{i\hat{H}t} \hat{J}_z e^{-i\hat{H}t} | z \rangle \\ &= \left(A \sum_{n=0}^N B^*(N, n, z) \langle N, n | \right) \hat{J}_z(t) \times \\ &\quad \times \left(A \sum_{m=0}^N B(N, m, z) | N, m \rangle \right) \\ &= A^2 \sum_{n,m} B^*(N, n, z) B(N, m, z) \langle N, n | \hat{J}_z(t) | N, m \rangle.\end{aligned}$$

-
- [1] Unifying scrambling, thermalization and entanglement through measurement of fidelity out-of-time-order correlators in the Dicke model, A.M. Rey et al., *Nature Communications* 10,1581 (2019), <https://doi.org/10.1038/s41467-019-09436-y>.
 - [2] Using Mathematica for Quantum Mechanics, a student's manual. Dr. Roman Schmied. University of Basel, Switzerland. Feb 2019. pp 20-22. <https://arxiv.org/abs/1403.7050>.
 - [3] Positive quantum Lyapunov exponents in experimental systems with a regular classical limit, Saúl Pilatowsky-Cameo et al., *Phys. Rev. E* 101, 010202(R).
 - [4] Transiciones de fase y enredamiento en sistemas cuánticos de dos niveles, Osvaldo Jiménez Farías, Tesis de Licenciatura UNAM, 2007.
 - [5] Entangled systems, new directions in Quantum Physics, Jürgen Audretsch, Wiley-VCH, 2007.
 - [6] Fenómenos críticos en sistemas átomo-campo, Miguel Angel Bastarrachea Magnani, Tesis de Doctorado UNAM, 2016.
 - [7] Caos en sistemas átomo-campo, Jorge Chávez Carlos, Tesis de Doctorado UNAM, 2018.
 - [8] Classical and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick model, Octavio Castaños, Ramón López-Peña, Jorge G. Hirsch, *Physical Review B* 74, 104118 (2006), <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.104118>.
 - [9] Phase transitions and accidental degeneracy in nonlinear spin systems, Octavio Castaños, Ramón López-Peña, Jorge G. Hirsch, *Physical Review B* 72, 012406 (2005), <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.104118>.
 - [10] Entanglement entropy in the Lipkin-Meshkov-Glick model, José I. Latorre, Román Orús, Enrique Rico, Julien Vidal, *Physical Review A* 71, 064101 (2005), <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.012406>.
 - [11] Untangling entanglement and chaos, Meenu Kumari and Shohini Ghose, *Physical Review A* 99, 042311 (2019), <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.042311>.