



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

FACULTAD DE FÍSICA

CORRESPONDENCIA CLÁSICO - CUÁNTICA EN EL MODELO DE LIPKIN - MESHKOV - GLICK

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
Licenciado en Física

PRESENTA:
Carlos Alberto González Rodríguez

Director de tesis:
Dr. Sergio Adrián Lerma Hernández

2015

Índice general

Resumen	4
Introducción	5
1. Marco teórico	7
1.1. Hamiltoniano clásico	7
1.1.1. Espacio fase	8
1.2. Ley de Weyl	9
1.3. Mecánica Cuántica	10
1.3.1. Esfera de Bloch	10
1.4. Representación de Husimi	12
1.5. Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick	13
1.6. Cruzamientos evitados y Transición de fase cuántica	16
1.7. Efecto Túnel	18
2. Desarrollo clásico	20
2.1. Rango de Energía para distintos γ_x y γ_y	20
2.1.1. Caso $\gamma_x = \gamma_y$	21
2.1.2. Caso general (Dependencia de ϕ)	24
2.2. Trayectorias	32
2.2.1. Rango $\epsilon \in [-1, 1]$	33
2.2.2. Rango $\epsilon \in [\epsilon'_{min}, -1]$	34
2.2.3. Rango $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon'_{min}]$	35
2.3. Densidad de Estados	38

3. Desarrollo cuántico	42
3.1. Eigenvalores y Eigenvectores	42
3.2. Densidad de Energías	44
3.3. Representación de Husimi	48
3.4. Cruzamientos Evitados	52
3.4.1. Detalle de los cruzamientos	53
3.4.2. Husimi en cruzamientos evitados	54
Conclusiones	58
A. Generalidades	59
B. Ejemplo de diagonalización	65
C. Densidad de estados	69
D. Trayectorias y densidades de estado	72
E. Condiciones de cruzamientos para paridad negativa	75
F. Representación de Husimi	77
Bibliografía	85

Resumen

Utilizando el modelo de Lipkin se hace la comparación entre las trayectorias clásicas con los contornos de las representaciones de Husimi y las densidades clásicas con las densidades cuánticas. Se ubican los cruzamientos evitados y las transiciones de fase cuántica en estados excitados y posteriormente se estudia lo que ocurre antes, después y en el cruzamiento evitado mediante la representación de Husimi.

Introducción

El modelo de Lipkin fue propuesto inicialmente para la física nuclear por Lipkin-Meshkov- Glick (LMG) en 1965, el modelo se propuso para “el estudio de la validación de varias técnicas y formalismos desarrollados para tratar sistemas de muchos cuerpos”, pero en la actualidad el sistema se usa no solo en la física nuclear. Desde el punto de vista experimental se ha usado para describir sistemas de átomos en cavidades [1], sistemas de qubits superconductores [2] así como en un condensado de Bose- Einstein dentro de una cavidad óptica [3]. Este trabajo es enteramente teórico y no se adentra en estos aspectos, pero muestra que el modelo de LMG tanto teórico [4] como experimental es de actualidad.

En esta tesis se explora la comparación clásico- cuántica para el modelo de LMG. Se comparan las trayectorias clásicas con la representación de Husimi cuántica y la densidad de energía cuántica con la densidad de estado clásica, enfocándose en los cruzamientos evitados. Para el tratamiento clásico se hace la equivalencia a coordenadas esféricas, es decir, se mapean los observables del modelo a un vector de magnitud J constante (lo que representa una esfera de radio J llamada esfera de Bloch) y se estudia la dinámica de dicho vector. Para ello, primero se determina el rango de energías permitido para los distintos valores de los parámetros del modelo, dichos valores definen lo que se llama “espacio de parámetros”, el cual se clasifica de acuerdo al rango de energías y al tipo de trayectorias. Adicionalmente, y dado que el sistema es integrable, se construyen, para las distintas regiones en el espacio de parámetros, las trayectorias permitidas en el rango de energías calculado, utilizando la esfera de Bloch para visualizarlas (las cuales, se comparan con el caso cuántico). Con las trayectorias se calcula la aproximación clásica a la densidad de estados, la llamada ley de Weyl.

Para el tratamiento cuántico se construye la representación matricial del hamiltoniano y se diagonaliza para las diferentes regiones del espacio de parámetros. Los espectros de energías obtenidos se comparan con los resultados clásicos en dos aspectos, por un lado la energía mínima y máxima se compara con el rango clásico y por otro lado la densidad de energía se compara con la ley de Weyl; obteniéndose una correspondencia cuántica- clásica muy evidente. También se calculan las distribuciones de Husimi, para los estados propios del hamiltoniano y éstas se comparan con las trayectorias clásicas correspondientes, observándose una correlación muy clara.

Se hablará de las transiciones de fase cuántica de estados excitados (ESQPT: Excited State Quantum Phase Transition [5] por sus siglas en inglés), los cruzamientos evitados y el efecto de tunelamiento. Con lo que respecta a las ESQPT, éstas se identifican por un comportamiento singular de la densidad de energías, y se localizan las distintas ESQPT en el espacio de parámetros. Se identifica una región en el espacio de parámetros en la cual se presentan cruzamientos evitados en un cierto rango de energías y se usa la representación de Husimi para estudiar este fenómeno: se estudian las consecuencias de estos cruzamientos en la representación de Husimi antes y después del cruzamiento evitado, y el fenómeno de tunelamiento.

Capítulo 1

Marco teórico

Este capítulo habla de las herramientas matemáticas para el desarrollo clásico y cuántico. Se plantea el modelo de LMG y se define qué son los cruzamientos evitados y las ESQPT. Para el desarrollo clásico se da una descripción general de las ecuaciones de Hamilton, se describe el espacio fase (útil para la correlación Clásico - Cuántica) y la ley de Weyl (necesaria para la comparación con la densidad de energías cuánticas). Para el desarrollo cuántico de manera general se habla de los operadores y se describe la representación de Husimi (necesaria para la comparación con las trayectorias clásicas). Dentro del planteamiento del modelo de LMG se plantea la esfera de Bloch (para el uso del modelo en el desarrollo clásico).

1.1. Hamiltoniano clásico

La mecánica clásica tiene sus orígenes en Issac Newton (1642-1727), con la formulación de la ley de gravitación universal además de las contribuciones de Joseph Luois Lagrange (1736-1813) y de William Rowan Hamilton (1805-1865), entre otros. La mecánica clásica busca proporcionar una descripción precisa y consistente de la dinámica de partículas y sistemas de partículas, esto es, un conjunto de leyes físicas que describan el movimiento de los cuerpos. Para esto, se necesitan conceptos fundamentales tales como distancia, tiempo y la combinación de ellas (velocidad y aceleración). El tercer concepto fundamental es la masa [6].

Los métodos de Hamilton proporcionan gran parte del lenguaje con el cual se

construye la Mecánica Estadística y la Mecánica Cuántica. La formulación de Hamilton describe el movimiento mediante ecuaciones de movimiento de primer orden [7]. Supongamos una partícula de masa m con n grados de libertad. El estado de la partícula en el instante de tiempo t se determina con las variables

$$\begin{aligned} q(t) &:= (q_1(t), \dots, q_n(t)) \text{ posición.} \\ p(t) &:= (p_1(t), \dots, p_n(t)) \text{ momento.} \end{aligned}$$

Se eligen como variables de posición las coordenadas cartesianas de la partícula en el espacio tridimensional ($n = 3$) y como momentos los productos de la masa por la velocidad de la partícula. El estado $(q(t), p(t))$ de la partícula se representa por un punto en el espacio de estados. La partícula tiene energía cinética y potencial $V(q, t)$ y la suma de estas cantidades forma el hamiltoniano del sistema:

$$H(q, p, t) := \frac{1}{2m} (p_1^2 + \dots + p_n^2) + V(q, t).$$

El hamiltoniano permite determinar la manera como el estado del sistema cambia al transcurrir del tiempo, ya que la dinámica se rige por las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i(t) = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dichas ecuaciones generan en el espacio fase una trayectoria [8].

1.1.1. Espacio fase

Una interpretación geométrica de las ecuaciones de Hamilton es obtenida considerando un conjunto de valores de las variables dinámicas p_i (momentos conjugados) y q_i (coordenadas generalizadas) $i = 1, 2, \dots, n$, como las coordenadas de los puntos P en un espacio de $2n$ -dimensiones llamado *espacio fase*. Para un sistema con un solo grado de libertad donde $n = 1$, el espacio fase puede ser representado por un plano, como se muestra en la fig. 1.1, donde P_0 representa un punto en el espacio fase correspondiente a los valores de p_0, q_0 en el tiempo $t = 0$ [9, 10].

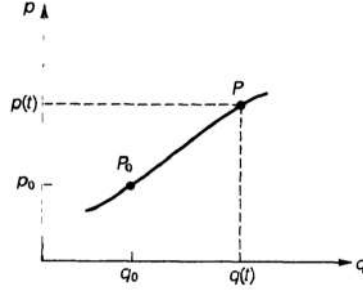


Figura 1.1: Espacio fase para un sistema con un solo grado de libertad, $n = 1$

1.2. Ley de Weyl

La herramienta para hacer la relación entre las densidades de estados clásica y la densidad de energía cuántica es la ley de Weyl. “La ley de Weyl es en su versión más simple, describe el crecimiento asintótico de los eigenvalores del laplaciano en los dominios acotados con las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann” [11]. La ley de Weyl mide la densidad para ciertos valores (de una distribución), en donde se conoce el valor de la función en los límites (condición de contorno de Dirichlet) y la derivada normal de la función (condición de contorno de Neumann).

$$\begin{aligned} \psi(a) = \psi(b) = 0 & \text{ Dirichlet} \\ \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=b} = 0 & \text{ Neumann} \end{aligned}$$

esto para que la ecuación resulte, en el interior de la región limitada, una solución única [12, 13].

La densidad del nivel promedio semiclásico conocida como Ley de Weyl, (también como distribución de Thomas-Fermi) para sistemas de hamiltonianos con n grados de libertad se expresa

$$\bar{\varrho}_{SC}(E) = \frac{1}{h^n} \int d^n p d^n q \delta(E - H(p, q)), \quad (1.1)$$

la cual estima el número de niveles de energía en el intervalo $[E, E + \Delta E]$, y se puede interpretar como el número de celdas de Planck (h^n) contenida en el volumen accesible del espacio fase [14], donde h es la constante de Planck.

Uno de los elementos a mencionar de la ley de Weyl es la función delta de Dirac δ , la cual no es una función en el sentido convencional, sino que está definida como una distribución. Esto significa que $\delta(x)$ no viene definido por su valor en cada punto, sino que solamente por los valores de la integral [15],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(x - t) dt = f(x).$$

Algunas propiedades a utilizar en el desarrollo son

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

y
$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|},$$

donde x_i son ceros simples de f , es decir, $f(x_i) = 0$ para todo i .

1.3. Mecánica Cuántica

A finales del siglo *XIX* y comienzo del *XX* la física fue testigo de una crisis. Una serie de resultados experimentales requerían conceptos totalmente incompatibles con la física clásica. Era necesario el desarrollo de conceptos nuevos, llevando a la creación de la teoría cuántica [16]. A partir de la teoría electromagnética, propuesta por James Clerk Maxwell en el siglo *XIX*, la luz se ha interpretado como una combinación de campos eléctricos y magnéticos que se propagan en forma ondulatoria a través del espacio. Por otro lado, a principios del siglo *XX*, gracias a las ideas de Max Planck y Albert Einstein, se entendió que la luz está compuesta de diminutos e indivisibles paquetes (o corpúsculos) de energía que actualmente son llamados fotones. Los aspectos ondulatorios y corpusculares de la luz fueron combinados por Paul Adrien Maurice Dirac mediante su propuesta de la cuantización del campo electromagnético. Los nuevos conceptos, “las propiedades de partículas presentes en la radiación”, “las propiedades de onda de la materia”, y “la cuantización de la física” emergieron. La “mecánica cuántica” es la descripción del comportamiento de la materia a escala atómica.

1.3.1. Esfera de Bloch

El concepto matemático de un álgebra de espín, con espín total J es una herramienta para describir diferentes sistemas físicos. Cualquier observable dentro de un

sistema de espín J , puede ser expresado por los tres operadores de espín \hat{J}_x , \hat{J}_y , \hat{J}_z y el operador identidad. Los $2J + 1$ eigenestados de uno de los operadores de espín conforman un conjunto base de las $2J + 1$ dimensiones del espacio de Hilbert. Resulta conveniente tener una representación esférica de los estados físicos de un sistema cuántico. La *esfera de Bloch extendida* es una representación idónea. Para definir la esfera de Bloch extendida se inicia introduciendo el operador de rotación. Si se rotan los ejes (x, y, z) por un ángulo ϕ alrededor del eje z Fig. 1.2, los correspondientes operadores de espín serán transformados a la Ec. 1.2

$$\hat{J}_z = \hat{J}_z,$$

$$\hat{J}_n := \hat{J}_x \sin \phi - \hat{J}_y \cos \phi,$$

$$\hat{J}_k := \hat{J}_x \cos \phi + \hat{J}_y \sin \phi. \quad (1.2)$$

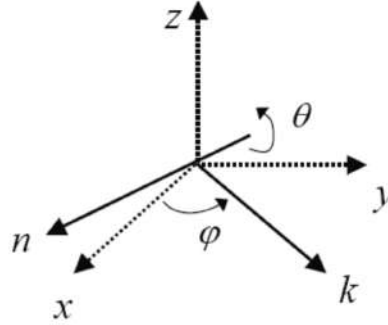


Figura 1.2: Rotación alrededor del eje z por un ángulo ϕ

La rotación por un ángulo θ alrededor de un nuevo eje n es dado por

$$\hat{R}_{\theta\phi} = e^{-i\theta\hat{J}_n},$$

al sustituir el valor de \hat{J}_n es

$$\hat{R}_{\theta\phi} = e^{-i\theta(\hat{J}_x \sin \phi - \hat{J}_y \cos \phi)}.$$

Los operadores de subida y bajada, respectivamente, son

$$\begin{aligned}\hat{J}_+ &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \\ \hat{J}_- &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y.\end{aligned}$$

Al sustituir estos operadores en $\hat{R}_{\theta\phi}$ se obtienen

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\theta\phi} &= e^{-i\theta\left[\frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)\sin\phi - \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-)\cos\phi\right]} \\ &= e^{\frac{\theta}{2}[-i\hat{J}_+\sin\phi - i\hat{J}_-\sin\phi + \hat{J}_+\cos\phi - \hat{J}_-\cos\phi]} \\ &= e^{\frac{\theta}{2}[\hat{J}_+e^{-i\phi} - \hat{J}_-e^{i\phi}]}.\end{aligned}$$

Un estado coherente de espín es matemáticamente construido por la rotación de un estado base $|J, -J\rangle$ Fig. 1.3, el cual es análogo a la construcción matemática de un estado coherente a través del desplazamiento del estado del vacío

$$|\theta, \phi\rangle = \hat{R}_{\theta\phi}|J, -J\rangle$$

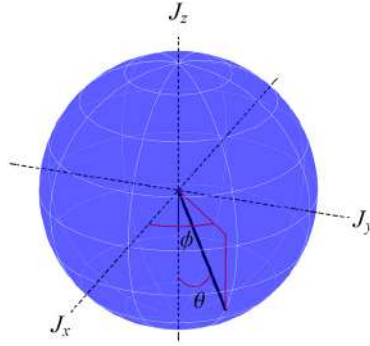


Figura 1.3: Esfera de Bloch

Un estado que puede ser creado por la rotación arbitraria de un estado base $|J, -J\rangle$ en una esfera de Bloch extendida es llamado un estado coherente de espín o estado de Bloch.

1.4. Representación de Husimi

Los estados de mecánica cuántica son naturalmente descritos en términos de distribución de probabilidades, pero debido al principio de incertidumbre, la representación del espacio fase tiene interpretaciones que son diferentes de sus contrapartes

clásicas. Una de las representaciones del espacio fase cuántico mas usada es la representación de Husimi. La distribución de Husimi $Q(x, p, t)$ permite el estudio del límite entre mecánica cuántica y mecánica clásica [17] y se entiende como una distribución de probabilidad que puede ser definida en términos de estados coherentes $|X\rangle$ con el operador de densidad (matriz de densidad) $\hat{\rho}$ [18]. La frase “estados coherentes” fue propuesta por Glauber en 1963 en el contexto de la óptica cuántica. Estos estados son superposición de estados de Fock del campo electromagnético cuantificado que, hasta un factor complejo, no se modifican por la acción de los operadores de aniquilación de fotones [19]. El operador de densidad describe la distribución de probabilidad de los estados accesibles del sistema. Este operador es visto como la superposición de estados acoplados.

$$\hat{\rho} = |E_k\rangle\langle E_k|$$

La función de Husimi queda

$$Q_{E_k}(X) = \langle X|\hat{\rho}|X\rangle = |\langle X|E_k\rangle|^2$$

Debido a que nuestro interés es con el modelo de LMG (cuasi espín), se hace la construcción del estado coherente de espín (también conocido como estado coherente de Bloch), definido como

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{(1 + |\alpha|^2)^J} \sum_{m=-J}^J \left(\frac{2J}{J+m} \right)^{1/2} \alpha^{J+m} |J, m\rangle \quad (1.3)$$

1.5. Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick

El modelo de Lipkin fue propuesto inicialmente para la física nuclear por (Lipkin, Meshkov, Glick) en 1965 [20–22]. El interés en el modelo LMG incrementó recientemente, al establecerse que describe un sistema de la mecánica cuántica, con propiedades clásicas.

Esto debido a la validez de aproximación campo medio (mean-field, en el idioma Inglés) [Gilmore 1954], conforme $N \rightarrow \infty$ (donde N es el número de núcleos). Se puede investigar el comportamiento de un sistema entre la región cuántica y la clásica, donde N^{-1} juega el rol de la constante de Planck [23]. Desde el punto de vista

experimental se puede mencionar *Circuit QED scheme for realization of the Lipkin-Meshkov- Glick model* [2] el cual es un artículo que muestra como el modelo LMG puede ser alcanzado por extender el experimento en el que participan una colección de qubits (partícula de espín 1/2 que se considera como el sistema) superconductores idénticamente acoplados a un modo de una cavidad. También se puede mencionar *Interaction-Induced Lipkin- Meshkov- Glick model in a Bose-Einstein condensate inside an optical cavity*, [3]; en este artículo se presenta un esquema factible experimental para simular un modelo LMG generalizado en un condensado de Bose-Einstein de dispersión acoplada con una cavidad óptica ultrafina. En general, un buen modelo teórico debe predecir las distintas propiedades observables del sistema de muchas partículas. Un método para construir modelos solubles (se puede encontrar una base completa de eigenestados para el hamiltoniano) es incorporar alguna simetría en el sistema la cual reduce el tamaño de la matriz del hamiltoniano al ser diagonalizado. Las simetrías pueden ser introducidas dentro del hamiltoniano escribiendo un término como el operador de creación y aniquilación; los productos bilineales de esos operadores pueden ser considerados como generadores de grupos de Lie. Los conmutadores de dos productos bilineales entre un operador de creación y uno aniquilación es una combinación lineal de tal producto bilineal. Por lo tanto, el conjunto de todos los productos bilineales posibles formados de un conjunto finito de esos operadores, constituyen el álgebra de Lie [20]. El álgebra de Lie más simple es el álgebra del momento angular. Hay maneras de construir productos bilineales de operadores de creación y aniquilación, las cuales satisfacen las reglas de conmutación del momento angular. Tales operadores son llamados cuasi-espín (quasi-spin, por el idioma Inglés) por la forma parecida al momento angular. El modelo puede ser descrito en términos de cuasi-espín.

La forma original del hamiltoniano de LMG es

$$H = \frac{1}{2}\epsilon_0 \sum_{p,\sigma} \sigma a_{p,\sigma}^\dagger a_{p,\sigma} + \frac{V}{2} \sum_{p,p',\sigma} a_{p,\sigma}^\dagger a_{p',\sigma}^\dagger a_{p',-\sigma} a_{p,-\sigma} + \frac{1}{2}W \sum_{p,p',\sigma} a_{p,\sigma}^\dagger a_{p',-\sigma}^\dagger a_{p',\sigma} a_{p,-\sigma}, \quad (1.4)$$

donde $a_{p,\sigma}^\dagger$ y $a_{p,\sigma}$ son operadores de creación y aniquilación de los fermiones, p varía de la unidad a N ; V y W son parámetros de interacción. El término proporcional a V dispersa un par de partículas en el mismo nivel a otro de los niveles. El término

proporcional a W dispersa una partícula arriba mientras otra es dispersada abajo. $\sigma = \pm 1$, y $\epsilon_0 > 0$. **El modelo consiste en N fermiones idénticos ocupando dos niveles de energía.** Los dos niveles son N -veces degenerados y separados por una energía ϵ_0 . La menor energía está etiquetada por $\sigma = -$ y la energía superior por $\sigma = +$. Podemos considerar este modelo como tener justo dos niveles activos, uno con energías $\frac{\epsilon_0}{2}$ arriba del nivel de Fermi y el otro con energía $\frac{\epsilon_0}{2}$ abajo [24]. Puesto que cada partícula puede estar en el nivel “+” o “-”, la dimensión del espacio de Hilbert con N partículas es 2^N . Se introducen operadores de pseudo - espín

$$\hat{S}_+ = \sum_p a_{p+}^\dagger a_{p-} \quad \hat{S}_- = \sum_p a_{p-}^\dagger a_{p+} \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2} \sum_{p,\sigma} \sigma a_{p,\sigma}^\dagger a_{p,\sigma}. \quad (1.5)$$

En el apéndice A se demuestra por qué se pueden introducir estos operadores; que satisfacen la relación de conmutación para los componentes de momento SU(2) [Apéndice A]. Así, el hamiltoniano puede reescribirse de la siguiente manera

$$\hat{H} = \epsilon_0 \hat{S}_z + \frac{V}{2} (\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2) + \frac{W}{2} (\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+). \quad (1.6)$$

La matriz del hamiltoniano se divide en sub matrices, cada una asociada con un valor diferente de S de dimensión $2S + 1$. El operador \hat{S}_z es justo la mitad de la diferencia entre el número de partículas en el nivel superior y el número de partículas en el nivel inferior.

Partiendo de 1.6, donde

$$\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \text{ con } |\bar{S}| = S,$$

y considerando

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \quad \text{y} \quad \hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y,$$

los cocientes quedan de la siguiente manera

$$\hat{S}_+^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + i(\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x) \quad \text{y} \quad \hat{S}_-^2 = \hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2 - i(\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2 = 2(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2) \\
&\hat{S}_+ \hat{S}_- = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + i(-\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x) \\
&\hat{S}_- \hat{S}_+ = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + i(\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x) \\
&\Rightarrow \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = 2(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2),
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. 1.6, se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \epsilon_0 \hat{S}_z + V(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2) + W(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2) \\
\hat{H} &= \epsilon_0 \hat{S}_z + (W + V)\hat{S}_x^2 + (W - V)\hat{S}_y^2.
\end{aligned}$$

Definiendo las variables

$$\gamma_x = \left(\frac{2J-1}{\epsilon_0}\right)(W + V) \quad \text{y} \quad \gamma_y = \left(\frac{2J-1}{\epsilon_0}\right)(W - V),$$

y factorizando ϵ_0 , el hamiltoniano se reescribe como

$$\hat{H} = \epsilon_0 \left[\hat{S}_z + \left(\frac{W+V}{\epsilon_0}\right) \hat{S}_x^2 + \left(\frac{W-V}{\epsilon_0}\right) \hat{S}_y^2 \right],$$

por lo que al sustituir γ_x y γ_y , se tiene finalmente

$$\hat{H} = \epsilon_0 \left[\hat{S}_z + \left(\frac{\gamma_x}{2J-1}\right) \hat{S}_x^2 + \left(\frac{\gamma_y}{2J-1}\right) \hat{S}_y^2 \right] \quad (1.7)$$

1.6. Cruzamientos evitados y Transición de fase cuántica

Los cruzamientos evitados son los cambios en los rasgos que tienen dos energías (no degeneradas) subsecuentes. El primero en estudiar los cruzamientos evitados fue Hund [25], aunque solo estableció conjeturas en general, que los cruzamientos de energía no ocurren. En 1929 von Neumann y Wigner [26] postularon el siguiente teorema: *La matriz simétrica real (respectivamente la matriz hermitiana) con un eigenvalor múltiple forma una variedad algebraica real de codimensión 2 (respectivamente 3) en el espacio para todas las matrices simétricas reales (respectivamente todas las matrices hermitianas).* Esto implica la “Regla de No- Cruzamiento” la cual afirma que “en general” una familia de parámetros de matrices de simetría real (o

familia de dos- parámetros de matrices hermitianas) no contiene matrices con eigenvalores múltiples. “General” significa que si el hamiltoniano admite simetrías en el espacio de Hilbert subyacente ha de ser descompuesto en los subespacios invariantes [27].

Para la transición de fase cuántica se considera un hamiltoniano, $H(g)$ (Fig. 1.4), cuyos grados de libertad residen en una rejilla (“lattice”, por el idioma ingles), y los cuales varían como función de un acoplamiento sin dimensiones g , siguiendo la evolución de la energía del estado base de $H(g)$ como una función de g . Para el caso del “lattice” finito, esta energía del estado base generalmente será una función analítica de g [28].

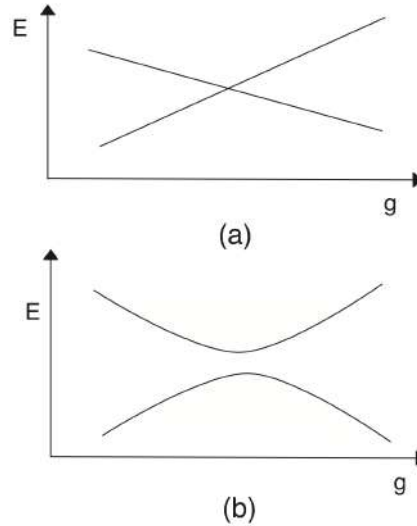


Figura 1.4: Eigenvalor menor, E , de un hamiltoniano $H(g)$ en una “lattice” finita, como función de algunos acoplamientos g sin dimensión. Para el caso donde $H(g) = H_0 + gH_1$, donde H_0 y H_1 conmutan y son independientes de g , puede ser un nivel- cruzamiento real, como en (a). Más generalizado, sin embargo, hay un “nivel- cruzamiento evitado”, como en (b).

A diferencia de la transición de fase termodinámica; la transición de fase cuántica (Quantum Phase Transition (QPT) por sus siglas en inglés), ocurre debido a perturbaciones del sistema cuántico, así como a temperatura cero y son debidas a ciertos parámetros (como lo son los de interacción para el caso del modelo de LMG).

La transición de fase cuántica en estados excitados (Excited State Quantum Phase Transition ESQPT) es similar a la QPT pero afectando a los estados excitados. El estudio de estas transiciones es de actualidad y de interés en sistemas como materia condensada, óptica cuántica, gases cuánticos ultrafríos [29], física nuclear y relación de caos [30], entre otros. Se pueden distinguir dos tipos de ESQPTs: una de primer orden si en el límite termodinámico existe un cruce de dos niveles a la energía crítica $E = E_c$, mientras que la ESQPT es continua si el número de niveles que interaccionan es localmente grande en $E = E_c$ (Fig. 1.5), pero sin que se produzca un cruce real [31].

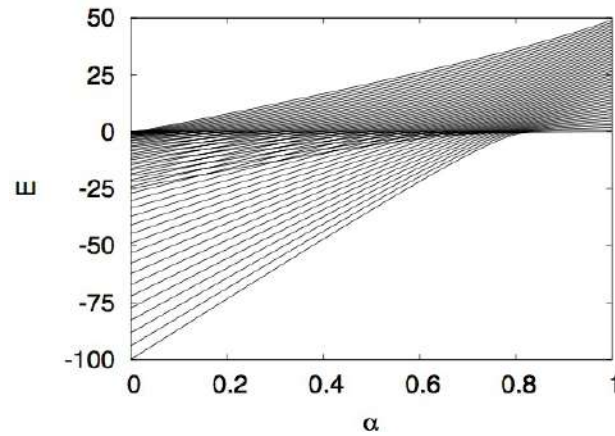


Figura 1.5: Niveles de energía para un hamiltoniano en función del parámetro α para $N=50$ (número de partículas) donde se ve la parte mas sombreada es donde ocurre la ESQPT y ahí mismo ocurre los cruzamientos evitados

1.7. Efecto Túnel

El efecto túnel o tunelamiento ocurre solo en el campo de la mecánica cuántica. Para explicar este efecto se observa lo siguiente: Se toma la situación en la que una partícula golpea una barrera de potencial; esto es en el caso clásico como si una masa intentara traspasar una montaña. Lo que se observa es que la partícula tiene cierta probabilidad (no grande pero tampoco cero) de pasar a través de la barrera y salir por el otro lado (lo que en mecánica clásica es imposible) [32]. La partícula no tiene la energía para ir por encima de la barrera, pero puede atravesar la, por así decirlo.

Existe una relación entre la probabilidad de que pase la barrera y el ancho de la barrera, es decir, entre mas amplia es la barrera menor la probabilidad de que pase (Fig. 1.6). Este fenómeno se puede observar en una partícula alfa, en donde a pesar de que tenga una pequeña energía cinética, es capaz de escapar de un núcleo cuya pared de potencial es 20 veces mas alto.

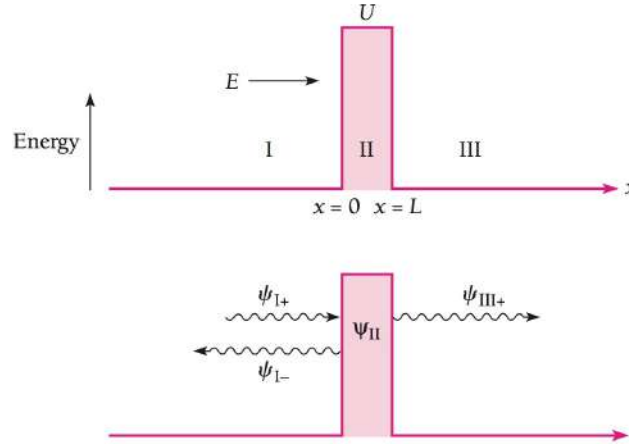


Figura 1.6: Cuando una partícula con energía $E < U$ se aproxima a una barrera de potencial, según la mecánica clásica la partícula debe reflejarse. En mecánica cuántica la onda ψ una parte es reflejada y otra transmitida, lo cual significa que la partícula tiene una pequeña posibilidad de penetrar la barrera

Las trayectorias en mecánica clásica se niegan a tomar direcciones principalmente por dos razones, por un lado esta las barreras de potencial que en mecánica cuántica al poder traspasar dichas barreras se le llama tunelamiento de barrera, por otro lado existen restricciones tales como acción o momento angular, lo que da lugar en mecánica cuántica al tunelamiento dinámico. En otras palabras, incluso en ausencia de barreras de potencial, la dinámica puede negar a transportar las trayectorias de una región a otra. En este trabajo el tipo de tunelamiento que ocurre en las trayectorias es de tipo dinámico. Es por eso que el término mas exacto es “procesos clásicamente prohibidos”. Desde el punto de vista clásico cuando se encuentran dos trayectorias separadas por una separatriz, están prohibidas entre ellas, pero en mecánica cuántica al existir energías con una diferencia tan pequeña ocurre un tunelamiento del dinámico y lo que se observa es un cruzamiento evitado [33].

Capítulo 2

Desarrollo clásico

En este capítulo se determinará el rango de energías para los distintos γ_x y γ_y , también se observará las trayectorias clásicas del modelo, en la representación ortográfica¹ y la densidad de estados (ley de Weyl), con el fin de comparar estos resultados con los respectivos resultados cuánticos. Para ello, se pasa el hamiltoniano del modelo a variables clásicas $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z \Rightarrow \vec{J} = (S_x, S_y, S_z)$.

2.1. Rango de Energía para distintos γ_x y γ_y

Consideremos el hamiltoniano de la Ec. 1.7 obtenida en la sección 1.5 (los operadores promovidos a variables clásicas)

$$H = \epsilon_0 \left[S_z + \left(\frac{\gamma_x}{2J-1} \right) S_x^2 + \left(\frac{\gamma_y}{2J-1} \right) S_y^2 \right]. \quad (2.1)$$

Si consideramos coordenadas esféricas

$$S_x = J \sin \theta \cos \phi,$$

$$S_y = J \sin \theta \sin \phi,$$

$$S_z = -J \cos \theta,$$

¹ Una representación ortográfica es un sistema de representación gráfica que consiste en representar elementos geométricos en un plano, mediante proyección ortogonal

lo que define a una esfera de radio J , el objetivo es estudiar la dinámica de dicho vector \vec{J} , donde θ y S_z son variables canónicas ($\{\theta, S_z\} = 1$) donde $\{ , \}$ representa al paréntesis de Poisson. A continuación se introducen las variables ϕ y $z = \frac{S_z}{J}$ (este cociente no se va a infinito a pesar de que $S_z \rightarrow \infty$ y $J \rightarrow \infty$) que permiten estudiar el límite termodinámico (donde $z \in [-1, 1]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$). Para poner las ecuaciones en función de ϕ y z , se usa la identidad $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ y $z = -\cos \phi$, entonces

$$\begin{aligned} S_x &= J\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \cos \phi = J\sqrt{1 - \frac{S_z^2}{J^2}} \cos \phi \\ S_x &= J\sqrt{1 - z^2} \cos \phi \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S_y &= J\sqrt{1 - \frac{S_z^2}{J^2}} \sin \phi \\ &= J\sqrt{1 - z^2} \sin \phi \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en 2.1

$$\begin{aligned} H &= \epsilon_0 \left(S_z + \frac{\gamma_x J^2}{2J-1} (1 - z^2) \cos^2 \phi + \frac{\gamma_y J^2}{2J-1} (1 - z^2) \sin^2 \phi \right) \\ &= \epsilon_0 \left(zJ + \frac{(1 - z^2)}{2J-1} J^2 (\gamma_x \cos^2 \phi + \gamma_y \sin^2 \phi) \right). \end{aligned}$$

Definiendo $h(z, \phi) = \frac{H}{\epsilon_0 J}$ se tiene la *energía en función de z y ϕ , con respecto a sólo dos parámetros* (γ_x y γ_y)

$$h(z, \phi) = z + \frac{J}{2J-1} (1 - z^2) [\gamma_x \cos^2 \phi + \gamma_y \sin^2 \phi]. \quad (2.2)$$

2.1.1. Caso $\gamma_x = \gamma_y$

Para buscar el rango posible de la Ec. 2.2, se buscan los valores máximos y mínimos. Se estudia primero el caso $\gamma_x = \gamma_y$ por simplicidad (ya que en este caso la dependencia en ϕ desaparece). Los resultados que se obtienen al estudiar el caso simple, permiten observar con claridad el comportamiento para el caso general de la Ec. 2.2, es decir cuando la dependencia de ϕ no desaparece. Entonces la Ec. 2.2 queda

$$h(z, \phi) = z + \frac{J}{2J-1} (1 - z^2) \gamma_x.$$

Para el límite termodinámico, usando $J \rightarrow \infty$, se usa la regla de L'Hopital,

$$h(z) = z + \frac{1}{2}(1 - z^2)\gamma_x. \quad (2.3)$$

así, la Ec. 2.3 describe la energía para el caso $\gamma_x = \gamma_y$. Algunos valores de la Ec. 2.3 son

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{\gamma_x}{2} \\ h(-1) &= -1 \\ h(1) &= 1 \end{aligned}$$

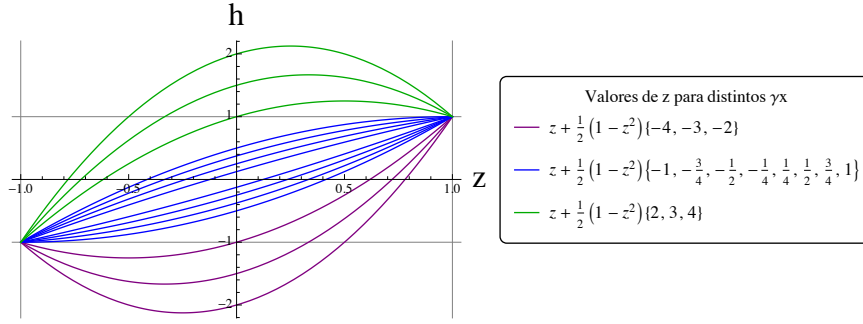


Figura 2.1: Gráfica de la Ec. 2.3 para valores de γ_x en función de z . Las líneas moradas corresponden a los valores de $\gamma_x = -4, -3$ y -2 empezando de abajo hacia arriba respectivamente. Las líneas azules corresponden a los valores de $\gamma_x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$ hasta 1 empezando de abajo hacia arriba, respectivamente. De manera similar las líneas verdes con los valores 2, 3 y 4.

En la Fig. 2.1 se observa que entre mayor sea el valor de γ_x mayor el valor del máximo de la energía y entre menor sea el valor de γ_x , menor el valor del mínimo de la energía. Se observa a partir de la ec. 2.3 que la energía obedece a una parábola de la forma $h(z) = \left(-\frac{\gamma_x}{2}\right)z^2 + z + \frac{1}{2}$. Para valores de γ_x mayores que -1 el mínimo de la energía se encuentra fuera del rango físico permitido, por lo tanto el valor mínimo de la energía es $h_{min} = -1$. De manera análoga para valores de γ_x menores que 1, el valor máximo de la energía corresponde a $h_{max} = 1$ debido a que el máximo se encuentra fuera del rango físico permitido. Esto se puede resumir de la siguiente manera:

1. Para $\gamma_x < -1$ el mínimo de la energía (h_{min}) disminuye conforme disminuye γ_x .
2. Para $-1 < \gamma_x < 0$ el valor físico permitido es $h_{min} = -1$.
3. Para $0 < \gamma_x < 1$ el valor físico permitido es $h_{max} = 1$.
4. Para $\gamma_x > 1$ el valor máximo de la energía (h_{max}) crece conforme γ_x va creciendo.

Para encontrar los máximos y mínimos, en los casos que dependen de γ_x se deriva la Ec. 2.3 y se iguala a cero, i.e. $\frac{\partial h}{\partial z} = 1 + \frac{1}{2}(-2z)\gamma_x = 0$, lo que conduce a

$$z_{min} = \left(\frac{1}{\gamma_x} \right) \quad (2.4)$$

Evalutando la Ec. 2.3 en $z_{min} = \frac{1}{\gamma_x}$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\gamma_x}\right) &= \frac{1}{\gamma_x} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma_x} \right)^2 \right) \gamma_x \\ &= \frac{1}{\gamma_x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma_x^2} \right) \gamma_x \\ &= \frac{1}{\gamma_x} + \frac{\gamma_x}{2} - \frac{1}{2\gamma_x}, \end{aligned}$$

por consiguiente $h_{min} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_x} + \gamma_x \right)$. De manera resumida

$$h_{min} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x} \right) & \text{para } \gamma_x < -1 \\ -1 & \text{para } \gamma_x \geq -1 \end{cases}$$

$$h_{max} = \begin{cases} 1 & \text{para } \gamma_x \leq 1 \\ \frac{1}{2} \left(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x} \right) & \text{para } \gamma_x > 1 \end{cases}$$

Por lo que se puede construir la siguiente gráfica.

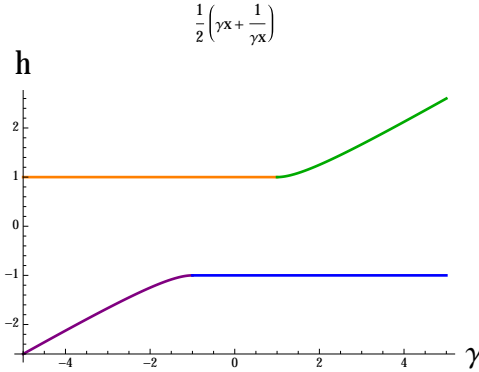


Figura 2.2: Los valores mínimos y máximos de h , dependen de $\gamma = \gamma_x = \gamma_y$. Es decir, para un dado γ_x ó γ_y menor que -1 el valor máximo de h es 1 y el valor mínimo depende de γ_x ó γ_y ; para un γ_x ó γ_y entre ± 1 el valor máximo de h es 1 y el valor mínimo es 1; para un γ_x ó γ_y mayor que 1 el valor máximo de h depende de γ_x ó γ_y y el valor mínimo es -1 .

2.1.2. Caso general (Dependencia de ϕ)

Para conocer la energía en el caso general, lo cual permitirá clasificar el espacio de parámetros y el tipo de trayectorias, se parte de la Ec. 2.2 (en el límite termodinámico)

$$h(z, \phi) = z + \frac{1}{2} (1 - z^2) A(\phi). \quad (2.5)$$

Se introdujo la función $A(\phi) = \gamma_x \cos^2 \phi + \gamma_y \sin^2 \phi$, ya que el rango de la energía puede ser descrito al observar el rango de $A(\phi)$, la cual puede reescribirse como

$$A(\phi) = \gamma_x + \sin^2 \phi (\gamma_y - \gamma_x). \quad (2.6)$$

Por ejemplo, al considerar los valores de $\gamma_x = -3$ con $\gamma_y = -5$ y $\gamma_x = -5$ con $\gamma_y = -3$, se obtiene la gráfica 2.3

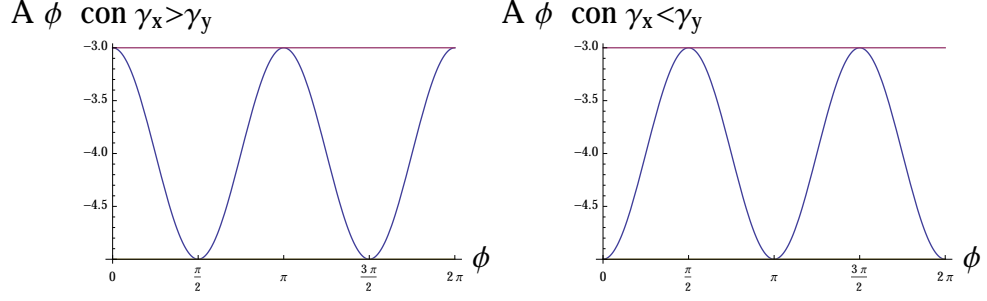


Figura 2.3: Gráfica de la función 2.6. Se tomaron los valores de $\gamma_x = -3$ con $\gamma_y = -5$ y $\gamma_x = -5$ con $\gamma_y = -3$, respectivamente. Para la primera gráfica se observa que el rango de $A(\phi)$ es $[\gamma_y, \gamma_x]$ mientras que en la segunda gráfica el rango de $A(\phi)$ es $[\gamma_x, \gamma_y]$.

En la Fig. 2.3 se observa que el rango de $A(\phi)$ está dado por el mínimo valor entre γ_x y γ_y , y el valor máximo que tome ya sea γ_x ó γ_y , $A(\phi) \in [\min(\gamma_x, \gamma_y), \max(\gamma_x, \gamma_y)]$; es decir, la energía como función de z es similar a la encontrada en la Fig. 2.1, con $A(\phi)$ ocupando el lugar de γ_x en el caso $\gamma_x = \gamma_y$.

Ahora estudiaremos el comportamiento de $h(z, A(\phi))$ como función de $A(\phi)$. Por simplicidad se estudia el caso $\gamma_x > \gamma_y$. Esto ayudará a clasificar el espacio de parámetros y a su vez las diferentes regiones de las trayectorias. Se estudiarán los siguientes casos

A) $\gamma_x, \gamma_y < -1$.

B) $|\gamma_x| < 1, \gamma_y < -1$.

C) $|\gamma_x| < 1, |\gamma_y| < 1$.

D) $\gamma_x > 1, \gamma_y < -1$.

Para el caso **A)** consideremos $\gamma_x = -3$ con $\gamma_y = -5$. Al graficar la Ec. 2.5 se obtiene la Fig. 2.4

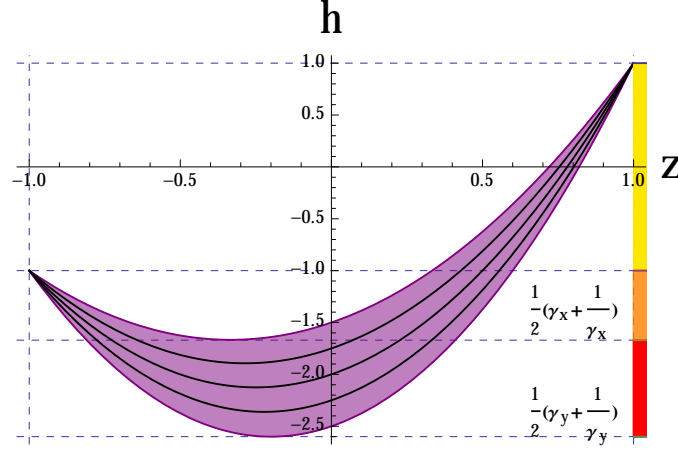


Figura 2.4: Se observa la región “color morado” limitada por un continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con $\gamma_x = -3$ y $\gamma_y = -5$. También se observan los rangos de energía, el de color rojo comprendido entre el mínimo de la parábola $h(z, \gamma_y)$ y el mínimo de la parábola $h(z, \gamma_x)$, el de color naranja del mínimo de la parábola antes mencionada y $h = -1$ y $h = 1$ color amarillo.

En la Fig. 2.4 se observan la región definida por el continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$ con $\phi = [0, 2\pi]$ y los diferentes rangos de energía que éstas definen. Este caso como $\gamma_x, \gamma_y < -1$, $A(\phi)$ será menor que -1 , por tanto las parábolas son del tipo morado de la Fig. 2.1, las parábolas que limitan esta región son $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) = h(z, \gamma_y)$ y $h(z, A(\phi = 0, \pi)) = h(z, \gamma_x)$ para la inferior y superior, respectivamente. El rango de energía para este caso ($\gamma_x, \gamma_y < -1$) va del mínimo de la energía que puede tomar la función $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y})$ hasta $h = 1$. Se divide en tres rangos de energía, el primero (color rojo) va del mínimo de la energía que puede tomar la función $h(z, \gamma_y)$ al valor mínimo de la energía de $h(z, \gamma_x)$; el segundo (color naranja) va del ultimo valor mínimo mencionado a $h = -1$; y por ultimo la región entre $h = -1$ y $h = 1$ (color amarillo).

De igual forma para el caso **B)** con $\gamma_x = \frac{1}{2}$ con $\gamma_y = -5$ se grafica la Ec. 2.5 y se obtiene la Fig. 2.5

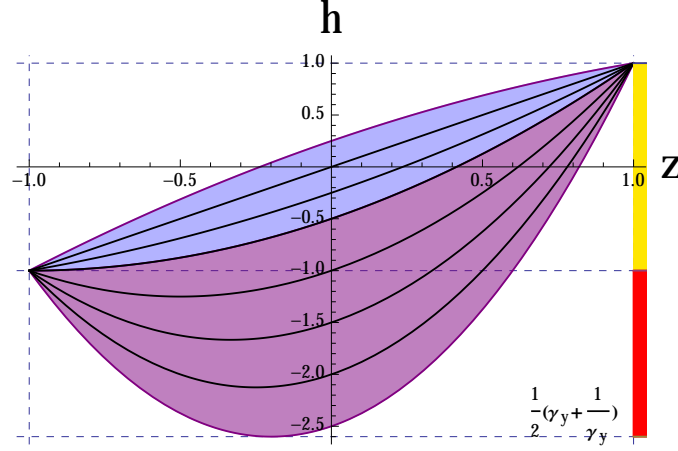


Figura 2.5: Se observa una región (color morada) junto con la de color azul un continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con ($\gamma_x = \frac{1}{2}$ y $\gamma_y = -5$) así como también los rangos de energía; el de color rojo comprendido entre el mínimo de la parábola $h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$ y el color amarillo de $h = -1$ a $h = 1$.

En todos los casos se observará una región definida por el continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$ con $\phi \in [0, 2\pi]$, por consiguiente también se debe observar los rangos de energía que dichas parábolas definen. En la Fig. 2.5 se observa que las parábolas son de dos tipos: en primer lugar como $|\gamma_x| < 1$ corresponde $|A(\phi)| < 1$ y en segundo lugar como $\gamma_y < -1$ corresponde $A(\phi) < -1$, con parábolas de tipo azul y morado de la Fig. 2.1 respectivamente. La región de tipo morado esta limitada por $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) = h(z, \gamma_y = -5)$ y $h(z, A(\phi) = -1)$, mientras que la región de tipo azul esta limitada por la parábola anterior y $h(z, A(\phi = 0)) \rightarrow h(z, \gamma_x = 0.5)$. A diferencia del **A**), en este caso solo hay dos rangos de energía, el de color rojo que va del valor mínimo de la energía que puede tomar $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y})$ hasta $h = -1$ y el de color amarillo que va de $h = -1$ al valor máximo que puede tomar $h(z, A(\phi = 0)) \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x})$.

Para el caso **C**) se propone $\gamma_x = \frac{1}{2}$ con $\gamma_y = -\frac{1}{2}$. Se grafica la Ec. 2.3 y se obtiene la Fig. 2.6, como $|\gamma_x| < 1$ y $|\gamma_y| < 1$ corresponde a $|A(\phi)| < 1$, por consiguiente las parábolas son de tipo azul de la Fig. 2.1, donde dicha región esta limitada por $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) = h(z, \gamma_y = -0.5)$ y $h(z, A(\phi = 0)) = h(z, \gamma_x = 0.5)$. Se observa

un solo rango de energía (color amarillo) que va de $h = -1$ a $h = 1$.

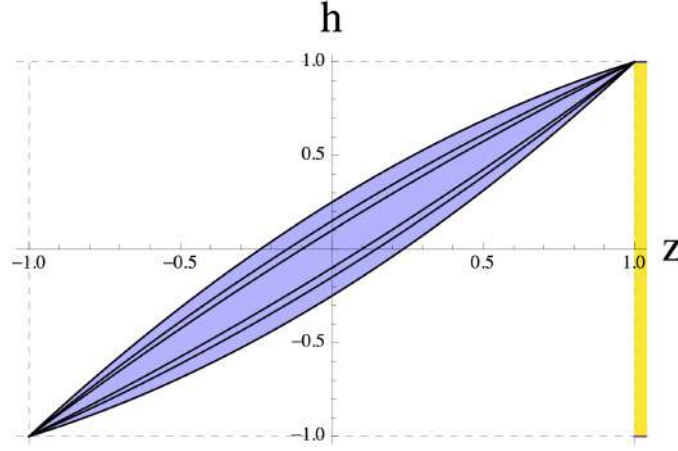


Figura 2.6: Se observa un continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con $\gamma_x = \frac{1}{2}$ y $\gamma_y = -\frac{1}{2}$ (región azul). También se observa un solo rango de energía (color amarillo) que va de $h = -1$ a $h = 1$.

Para el caso **D)** se propone $\gamma_x = 5$ y $\gamma_y = -5$. Se grafica la Ec. 2.3 y se obtiene la Fig. 2.7, como $\gamma_x > 1$ y $\gamma_y < -1$, que $A(\phi)$ puede tomar los valores mayor que 1 y menor que -1 , por lo tanto las parábolas son de los tipos, morado, azul y verde de la Fig. 2.1. La de tipo morado están limitadas por las parábolas $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) = h(z, \gamma_y)$ y $h(z, A(\phi) = -1)$, la de tipo azul por la parábola anterior y $h(z, A(\phi) = 1)$ y la de tipo verde por la parábola anterior y $h(z, A(\phi = 0)) = h(z, \gamma_x)$. Para este caso corresponden 3 rangos de energía, el primero (de color rojo) que va del mínimo valor que puede tomar $h(z, \gamma_y) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y} \right)$ hasta $h = -1$, el segundo (color amarillo) va de la energía anterior a $h = 1$ y por ultimo (color cian) que va de la ultima energía mencionada hasta el máximo valor que puede tomar $h(z, \gamma_x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x} \right)$, con lo que se concluye que el rango de energía va de $\frac{1}{2} \left(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y} \right)$ a $\frac{1}{2} \left(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x} \right)$.

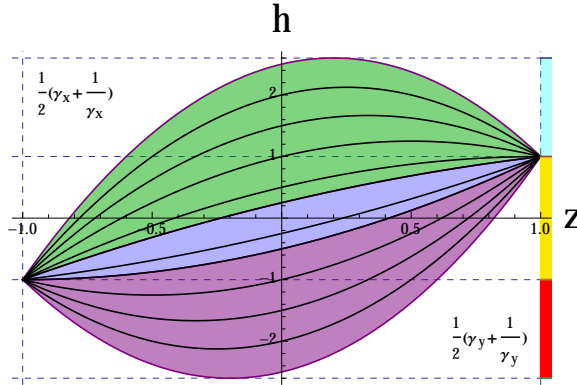


Figura 2.7: El continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con $\gamma_x = 5$ y $\gamma_y = -5$ describe la región con los colores morado, azul y verde. El rango de energía está dividido en tres, el rojo que va del mínimo valor de $h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$, el color amarillo que va de $h = -1$ a $h = 1$, y el de color cian que va de $h = 1$ al valor máximo que puede tomar $h(z, \gamma_x)$.

Se puede clasificar el espacio de parámetros con los resultados observados en los casos **A**, **B**, **C** y **D**, es decir, de acuerdo a los distintos comportamientos de h obteniéndose la fig. 2.8.

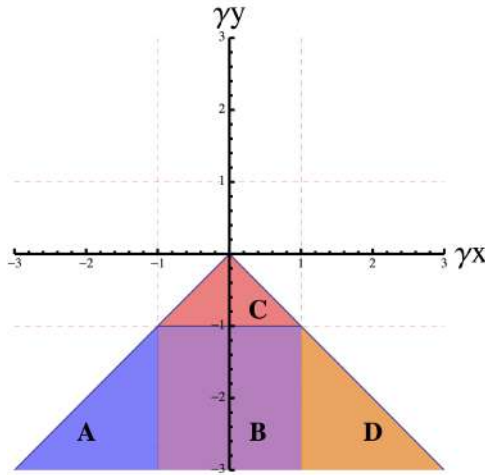


Figura 2.8: Espacio de parámetros en base a los casos **A**, **B**, **C** y **D**

El comportamiento en el resto del espacio de parámetros puede obtenerse considerando lo siguiente, se elige un punto cualquiera, por ejemplo $\gamma_x = -1.2$ y $\gamma_y = -2.5$

(el cual se encuentra en el caso **A** de la Fig. 2.8), se trazan dos líneas transversales que corten al centro de los eje, obteniendo la gráfica 2.9, en donde el punto elegido corresponde al círculo

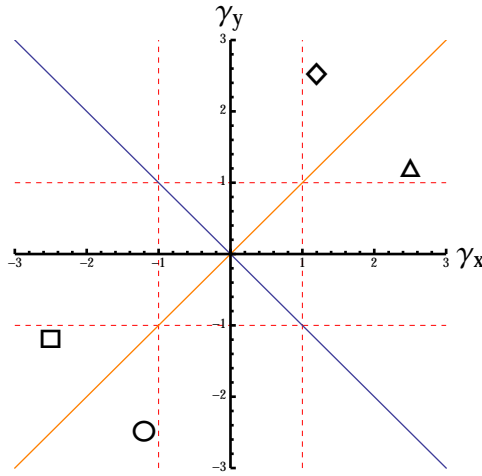


Figura 2.9: Espacio de parámetros de γ_x y γ_y para los diferentes casos de la energía (h). Debido a la dependencia que tiene h_{min} y h_{max} con γ_x y γ_y se tomó el caso $\gamma_y < \gamma_x$ (el punto de la gráfica). Los puntos cuadro, rombo y triángulo son simétricos con respecto a las transversales azul y naranja.

Lo que se observa en la gráfica 2.9 es que el cuadro se obtiene de una reflexión del círculo con respecto a la línea naranja, el triángulo con respecto a la línea azul y el rombo se obtiene de una reflexión del triángulo con respecto a la línea naranja. Cabe resaltar que por debajo de esta diagonal naranja se encuentra $\gamma_x > \gamma_y$ y por arriba se tiene $\gamma_x < \gamma_y$. Los puntos son, círculo $\gamma_x = -1.2$ y $\gamma_y = -2.5$, cuadrado $\gamma_x = -2.5$ y $\gamma_y = -1.2$, triángulo $\gamma_x = 2.5$ y $\gamma_y = 1.2$ y por último, rombo $\gamma_x = 1.2$ y $\gamma_y = 2.5$. Al utilizar estos valores en la Ec. 2.5 se obtiene la Fig. 2.10

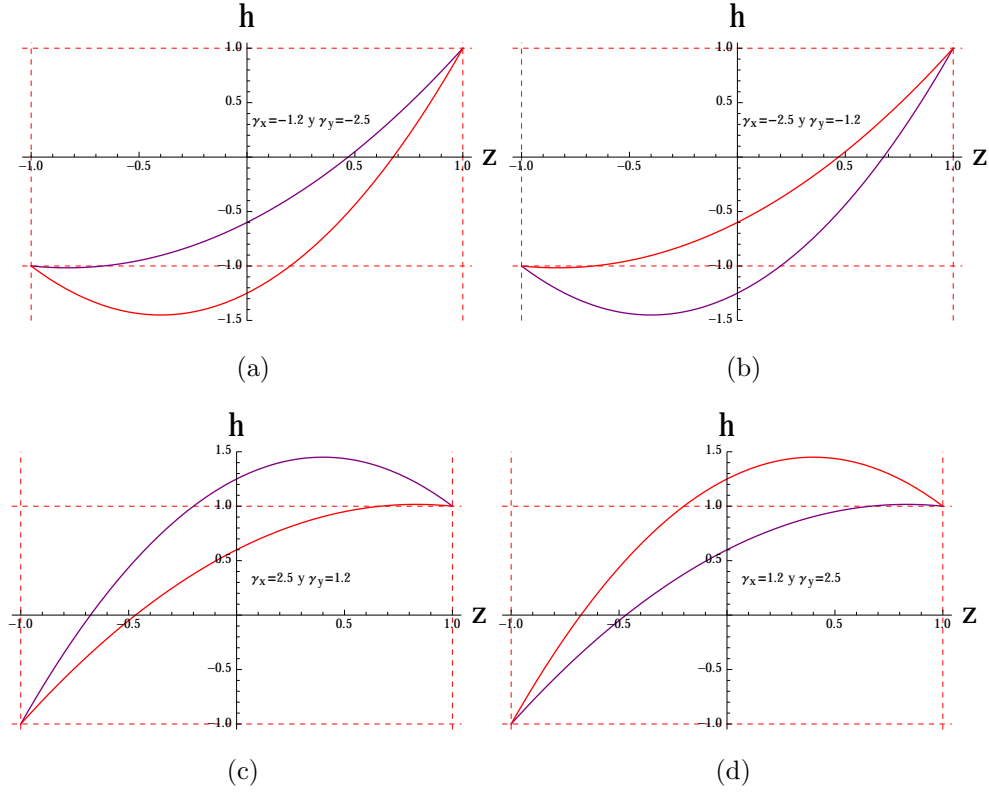


Figura 2.10: Gráficas de la Ec. 2.5 para los puntos de la Fig. 2.9, círculo (a), cuadrado (b), triángulo (c) y rombo (d). Se observa cierta simetría, lo que permite que los casos A, B, C y D generalicen el espacio de parámetros.

Lo que se observa en la gráfica 2.10 es que al elegir (a) (un punto dentro de los casos A, B, C y D) se tiene una simetría con (b) en donde se intercambian los valores del mínimo que puede tomar $h(z, A(\phi = \frac{\pi}{2})) = h(z, \gamma_y) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y} \right)$ y el mínimo que puede tomar $h(z, A(\phi = 0)) = h(z, \gamma_x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\gamma_x + \frac{1}{\gamma_x} \right)$. Una simetría con (c) en donde los valores de h cambian de signo, donde el mínimo de $h(z, \gamma_y)$ pasa a ser el máximo de $h(z, \gamma_x)$ y el mínimo de $h(z, \gamma_x)$ pasa a ser el máximo de $h(z, \gamma_y)$ y por ultimo comparte una simetría con (d) debido a que este último comparte simetría con (c) donde los valores también cambian de signo pero, el mínimo de $h(z, \gamma_y)$ pasa a ser el máximo de $h(z, \gamma_y)$ y el mínimo de $h(z, \gamma_x)$ pasa a ser el máximo de $h(z, \gamma_x)$, permitiendo con esto obtener el comportamiento en todo punto del espacio de parámetros con los casos A, B, C y D.

2.2. Trayectorias

A continuación se construyen las trayectorias para los distintos rangos de energía identificados en la sección anterior, usando la representación ortográfica. Dicha representación es una proyección en perspectiva plana, donde las líneas de latitud se proyectan como círculos concéntricos, con el polo sur en el centro, el ecuador un círculo de radio 1 y el polo norte un círculo de radio 2. Para graficar se utilizan las ecuaciones siguientes

$$u = (1 + z(\epsilon, A(\phi))) \cos \phi$$

$$v = (1 + z(\epsilon, A(\phi))) \sin \phi \quad (2.7)$$

donde ϵ es la energía $\frac{E}{J}$ de las trayectorias. Se busca resolver la ecuación cuadrática

$$h(z, A(\phi)) = z + \frac{1}{2}(1 - z^2)A(\phi) = \epsilon \quad (2.8)$$

resolviendo para z

$$z(\epsilon, A(\phi)) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - A(\phi)(2\epsilon - A(\phi))}}{A(\phi)}. \quad (2.9)$$

A continuación se estudia para el caso $\gamma_x = -3$, $\gamma_y = -5$, en el rango $[\epsilon_{min}, 1]$, con $\epsilon_{min} = \frac{1}{2}\left(\gamma_y + \frac{1}{\gamma_y}\right)$, que corresponde al caso **A** de la Fig. 2.8,

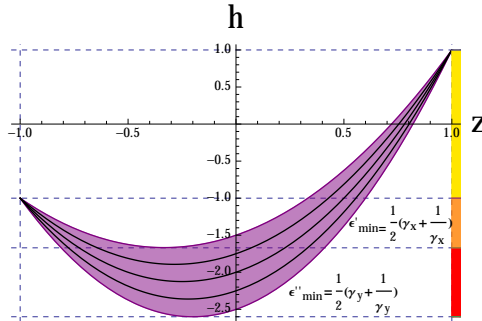


Figura 2.11: Gráfica de la función 2.5 con $\gamma_x = -3$, $\gamma_y = -5$ y $\phi = [0, 2\pi]$. La primera línea (de abajo hacia arriba) corresponde a A'' y la última a A' .

En los diferentes rangos de energía las intersecciones (soluciones) se pueden resumir de la siguiente manera

- $\epsilon \in [-1, 1]$ se tiene 1 solución y para cualquier valor de $\phi [0, 2\pi]$.
- $\epsilon \in [\epsilon'_{min}, -1]$ se tiene 2 soluciones y para cualquier valor de ϕ .
- $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon'_{min}]$ se tiene 2 soluciones y para valores restringidos de ϕ .

2.2.1. Rango $\epsilon \in [-1, 1]$

Para este caso se observa que con cada parábola solo se tiene una solución y para cualquier valor de ϕ . Usando $z(\phi, \epsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - A(\phi)(2\epsilon - A(\phi))}}{A(\phi)}$ se obtiene para diferentes ϵ en este rango la Fig. 2.12, donde se observa que la trayectoria externa es un círculo de radio 2 que corresponde $\epsilon = 1$ y la trayectoria interna corresponde $\epsilon = -1$. Esta ultima ya no es un círculo con radio $(1 + z)$ constante debido a que la intersección de la recta $h = \epsilon$ con la región de las parábolas se incrementa.

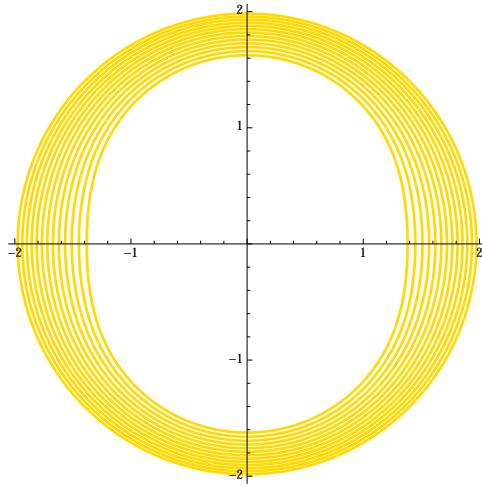


Figura 2.12: Trayectorias para el caso con 1 raíz y sin dependencia en $A(\phi)$.

2.2.2. Rango $\epsilon \in [\epsilon'_{min}, -1]$

El siguiente caso es el rango $\epsilon \in [\epsilon'_{min}, -1]$ en el cual se tiene para cada parábola dos soluciones y para cualquier valor de ϕ por tanto, al usar la Ec. 2.9 se obtienen pares de trayectorias con el mismo valor de ϵ como se muestra en las figuras 2.13 y 2.14, en donde al observar el rango en la Fig. 2.11 se esperan dos pares de trayectorias que limitan el continuo de trayectorias, un par para el caso $\epsilon < \approx -1$ y el segundo cerca de $\epsilon > \approx \epsilon'_{min}$. Estas trayectorias son: **(a)** ($\epsilon < \approx -1$) : una parecida a la última del caso anterior y la segunda muy pequeña cerca de $z \approx -1$ (se puede entender que es muy pequeña debido a que la región de las parábolas es pequeña). En **(b)** se muestra el caso $\epsilon > \approx \epsilon'_{min}$, ahora se tiene una trayectoria exterior en forma de 8 y una más pequeña en un rango a z menor (esto debido a la región de parábolas en ϵ'_{min}). El conjunto de pares de trayectorias para distintos ϵ en el rango se muestran en el panel **(c)**

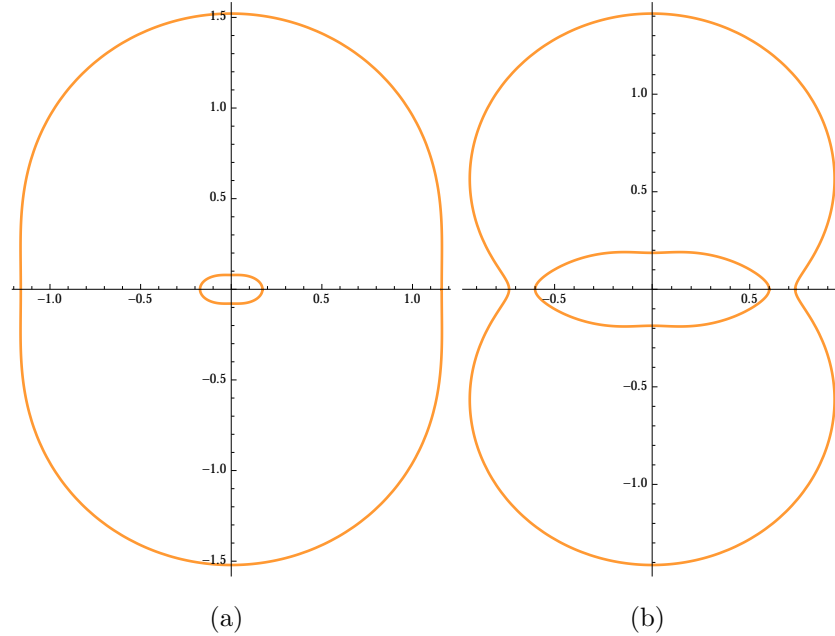


Figura 2.13: Trayectorias para el caso con 2 raíces y sin restricción en ϕ . El panel **(a)** muestra los contornos para $\epsilon < \approx -1$ y el panel **(b)** muestra los contornos para $\epsilon > \approx \epsilon'_{min}$

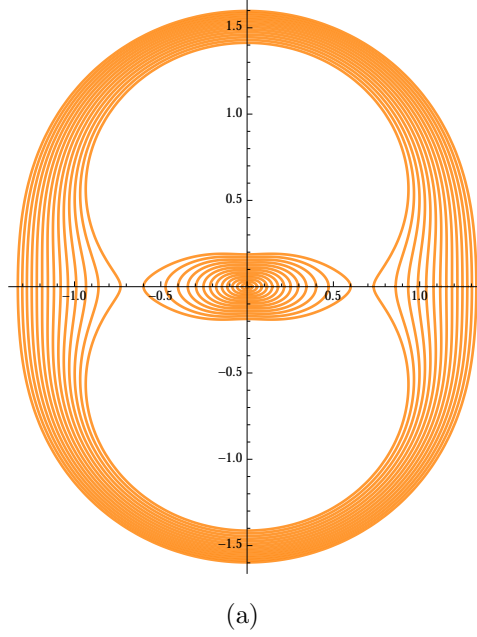


Figura 2.14: Trayectorias para el caso con 2 raíces y sin restricción en ϕ . Aquí muestra el continuo de trayectorias limitadas por **(a)** y **(b)** de la figura anterior.

2.2.3. Rango $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon'_{min}]$

En la Fig. 2.11 se observa que los cruces (soluciones) de las rectas $h = \epsilon$ con las parábolas ocurre únicamente para un cierto rango de $A(\phi)$, por lo que en este caso el rango de ϕ estará igualmente limitado. Para que $h(z, A(\phi)) = \epsilon$ tenga una solución real, de la fig. 2.11 se observa que $A(\phi) = [\gamma_y, A_{max}]$, donde A_{max} es el valor de A que define una parábola con valor máximo en $h = \epsilon$, es decir, $\frac{1}{2} \left(A(\phi)_{max} + \frac{1}{A(\phi)_{max}} \right) = \epsilon$ resolviendo se obtiene $A_{max} = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}$. Habiendo identificado el rango de A , $A(\phi) \in [\gamma_y, \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}]$, se puede encontrar el rango de ϕ correspondiente. Para ello se grafica la Ec. 2.6, obteniendo la Fig. 2.15 en donde se observa que el rango $A(\phi) \in [\gamma_y, A(\phi)_{max}]$ define un par de intervalos alrededor de $\phi = \frac{\pi}{2}$ y $\phi = \frac{3\pi}{2}$,

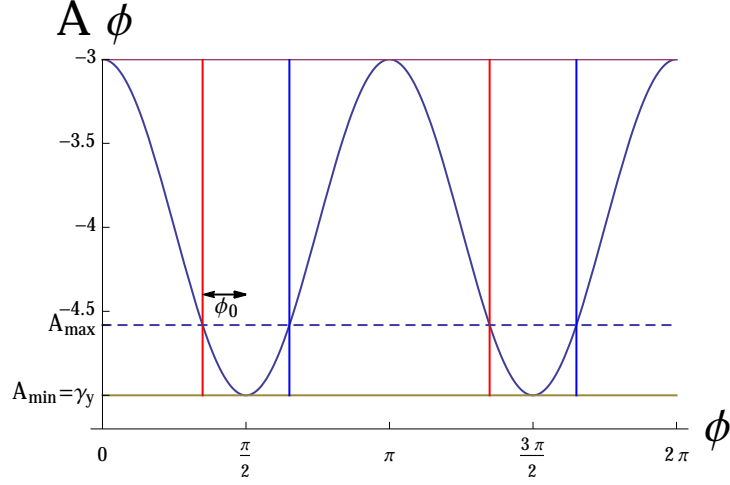


Figura 2.15: Gráfica de la función 2.6. Se tomó los valores de $\gamma_x = -3$, $\gamma_y = -5$. La línea roja es el valor de ϕ_i . La línea punteada muestra que para un rango $[\gamma_y, \gamma_x]$ el valor de ϕ está restringido.

donde ϕ_0 es la distancia entre $\frac{\pi}{2}$ y el valor mínimo que puede tomar $\phi \rightarrow \phi_i$ (línea roja). Para conocer ϕ_i se iguala la ecuación resuelta anteriormente y la Ec. 2.6

$$\begin{aligned} \gamma_x + \sin^2 \phi (\gamma_y - \gamma_x) &= \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} \\ \Rightarrow \sin \phi_i &= \sqrt{\frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} - \gamma_x}{\gamma_y - \gamma_x}} \\ \phi_i &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} - \gamma_x}{\gamma_y - \gamma_x}} \end{aligned}$$

Para el caso $\gamma_x, \gamma_y < -1$, $\sqrt{\frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} - \gamma_x}{\gamma_y - \gamma_x}}$ proporciona un valor imaginario, por lo que se concluye que

$$\phi_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 1} - \gamma_x}{\gamma_y - \gamma_x}}$$

$$\text{es decir } \phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi_i.$$

Conociendo lo anterior y usando la Ec. 2.9 se obtienen las trayectorias para este rango de energías. Debido a que se tiene dos soluciones se esperan dos conjuntos de trayectorias, que van desde muy pequeñas ($\epsilon \approx \epsilon_{\min}$) hasta otras con formas parecidas a las dos ultimas trayectorias del rango anterior $\epsilon \in [\epsilon'_{\min}, -1]$, Fig. 2.16

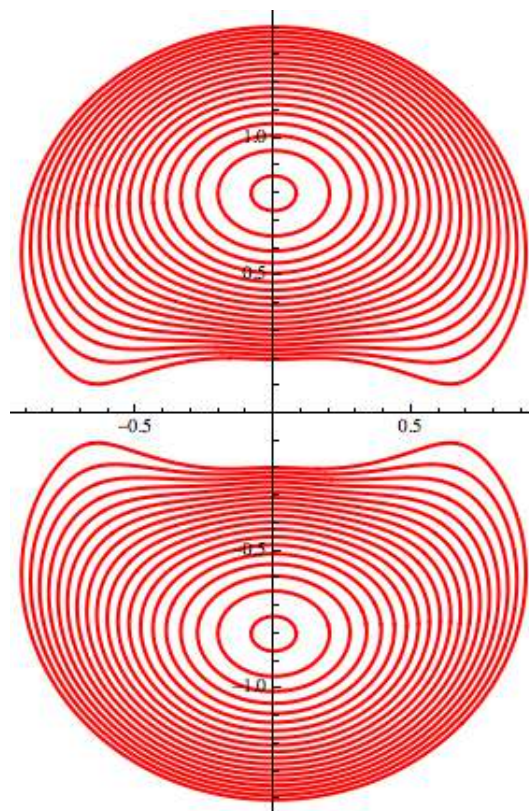


Figura 2.16: Trayectorias en representación polar del caso con 2 raíces y restricciones en ϕ .

El conjunto de las figuras 2.16, 2.13 y 2.12 forman la Fig. 2.17 en donde las líneas punteadas forman la separatriz. Tomando estas trayectorias sobre una superficie forman la Fig. 2.18, donde se observa el incremento de las energías que va de las trayectorias color rojo (mínimos globales), luego se observa una línea punteada, la cual es la separatriz, en la parte donde se encuentran las trayectorias naranjas internas y externas y las trayectorias color rojo se encuentra el punto silla. Posteriormente conforme se incrementa la energía nos encontramos con las trayectorias de color naranja, en donde se encuentra un máximo local. Después, observamos la línea punteada que divide estas trayectorias con las de color amarillo en donde se encuentra el máximo global.

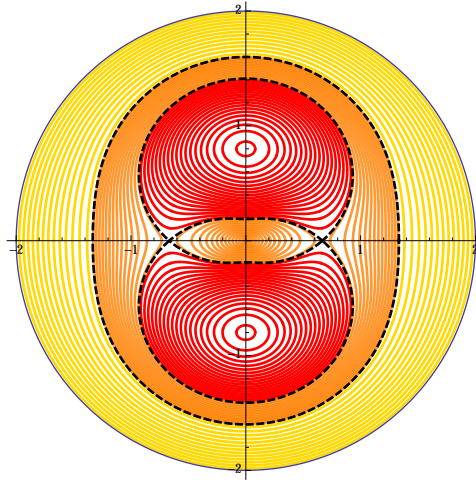


Figura 2.17: Figuras 2.16, 2.13 y 2.12

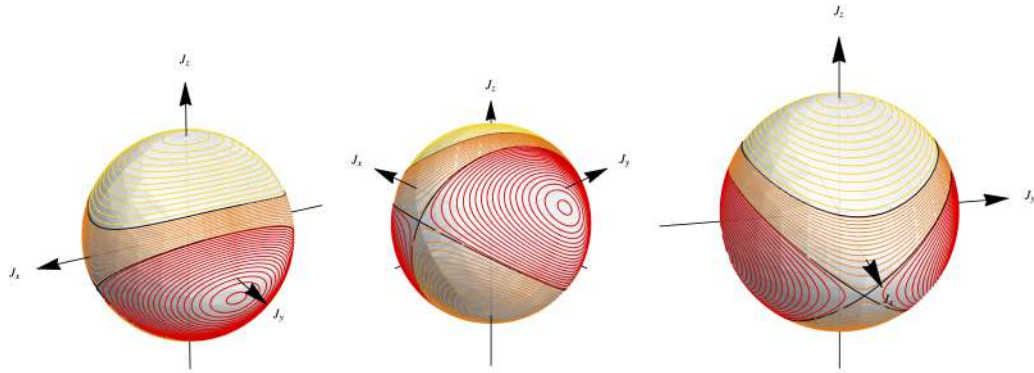


Figura 2.18: Se puede observar el incremento de la energía que va de las trayectorias de color rojo (mínimos globales), posteriormente las trayectorias de color naranja (máximo local), hasta las trayectorias de color amarillo (máximo global).

2.3. Densidad de Estados

Para la densidad de estados se usa la ley de Weyl que se planteó en la subsección 1.2

$$\bar{\varrho}_{SC}(E) = \frac{1}{h^n} \int d^n p d^n q \delta(E - H(p, q)),$$

donde n son los grados de libertad. Se considerará $\hbar = 1$. En este caso se usan las variables canónicas ϕ, J_z

$$\bar{\varrho}_{SC} = \frac{1}{2\pi} \int d\phi dJ_z \delta(E - H(\phi, J_z)),$$

para el caso $n = 1$.

Desarrollando $J_z = zJ$ e incluyendo los valores $\epsilon_0 J$ se obtiene

$$\bar{\varrho}_{SC}(E) = \frac{J}{2\pi} \int d\phi dz \delta \left[\epsilon_0 J \left(\frac{E}{\epsilon_0 J} - \frac{H(\phi, J_z)}{\epsilon_0 J} \right) \right].$$

Haciendo el cambio de variable

$$\epsilon = \frac{E}{\epsilon_0 J} \text{ y } h = \frac{H(\phi, J_z)}{\epsilon_0 J},$$

ahora se obtiene

$$\bar{\varrho}_{SC}(E) = \frac{J}{2\pi} \int d\phi dz \delta [\epsilon_0 J (\epsilon - h(z, \phi))]$$

donde $\delta(f(z))$. Usando la propiedad

$$\begin{aligned} \delta(ax) &= \frac{\delta(x)}{|a|} \\ \Rightarrow \frac{J}{2\pi} \int d\phi dz \delta [\epsilon_0 J (\epsilon - h(z, \phi))] &= \frac{J}{2\pi} \int \frac{d\phi dz \delta[(\epsilon - h(z, \phi))]}{|\epsilon_0 J|} \\ \bar{\varrho}_{SC}(E) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d\phi dz \delta[(\epsilon - h(z, \phi))], \end{aligned}$$

y considerando $\delta(f(z)) = \sum_{i=1}^{N^0} \text{de raices} \frac{\delta(z-z_i)}{|f'(z_i)|}$, entonces

$$\bar{\varrho}_{SC}(E) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d\phi dz \left(\frac{\delta(z-z_+)}{|-1+z_+A|} + \frac{\delta(z-z_-)}{|-1+z_-A|} \right),$$

donde z_+ y z_- son las soluciones o cruces con z . Retomando la Ec. 2.9 se tiene

$$z_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-A(2\epsilon-A)}}{A},$$

por lo que sustituyendo

$$\begin{aligned} |-1+z_+A| &= |-1+1+\sqrt{1-A(2\epsilon-A)}| \\ &= \sqrt{1-A(2\epsilon-A)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |-1+z_-A| &= |-1+\sqrt{1-A(2\epsilon-A)}| \\ &= \sqrt{1-A(2\epsilon-A)} \end{aligned}$$

entonces

$$\bar{\rho}_{SC}(E) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d\phi dz \left(\frac{\delta(z-z_+) + \delta(z-z_-)}{\sqrt{1-A(2\epsilon-A)}} \right),$$

por consiguiente se obtiene

$$\bar{\rho}_{SC}(E) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-A(2\epsilon-A)}} \int_{-1}^1 dz (\delta(z-z_+) + \delta(z-z_-)) \quad (2.10)$$

donde el término $\int_{-1}^1 dz (\delta(z-z_+) + \delta(z-z_-))$ puede tomar los valores dependiendo de la Fig. 2.11. Es decir, en el primer caso donde se tienen las dos soluciones (2 raíces) tomará el valor de 2. Para el siguiente caso donde también se tiene dos raíces, tomará el valor de 2. Pero para el último caso, solo tiene una raíz, por lo que el término tomara el valor de 1. Graficando 2.10 para el rango de energías de cada caso, con la única distinción que para el primer caso se multiplica por 2 debido a que hay dos intersecciones se obtiene la Fig. 2.19,

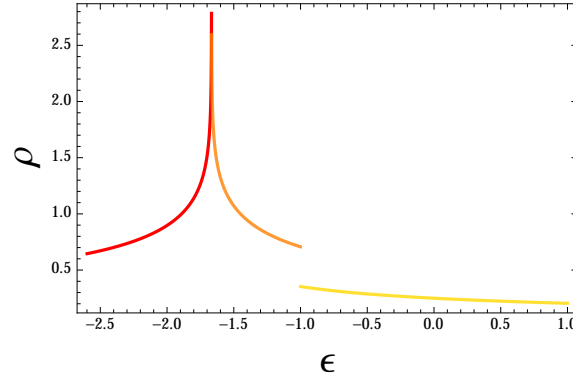


Figura 2.19: En el eje de las abscisas se encuentra la energía ϵ y en el eje de las ordenadas la densidad, ρ .

donde se observa la correlación con las trayectorias. En el primer caso, se ve un incremento de la densidad como va incrementando la energía (trayectorias rojas). Posteriormente la densidad llega a una singularidad y decae (punto silla de las trayectorias). Como va incrementando la energía la densidad va cayendo hasta tener una discontinuidad (trayectorias naranjas). Por último, como va aumentando la energía, la densidad va decayendo de manera suave (trayectorias amarillas). La Fig.

2.19 se comparará con la densidad de energías para el caso cuántico. En el anexo **D** se presentan las trayectorias y densidades de estados para los casos **B** y **D** de la clasificación del espacio de parámetros.

Capítulo 3

Desarrollo cuántico

En este capítulo se va a desarrollar el espectro de energía del modelo y se compara con los límites del caso clásico, posteriormente la densidad de energía que de igual manera se compara con lo obtenido con la ley de Weyl y por ultimo se construye la representación de Husimi y se correlaciona con las trayectorias.

3.1. Eigenvalores y Eigenvectores

Para conocer la densidad de energía y la representación de Husimi es necesario conocer los eigenvalores y eigenvectores del hamiltoniano modelo de LMG. Para ello se utiliza la notación de Dirac y la representación matricial (apartado A). Al diagonalizar se utilizan las propiedades del momento angular orbital (apartado A).

$$\hat{H} = \epsilon \hat{S}_z + \frac{V}{2}(\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2) + \frac{W}{2}(\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+). \quad (3.1)$$

Una base para el espacio de estados es $|J \ m\rangle$ con $m = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$, de dimensión $2J + 1$. Los operadores que aparecen en el hamiltoniano cumplen con ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z|J\ m\rangle &= m|J\ m\rangle, \\
\hat{S}_+|J\ m\rangle &= \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}|J\ m+1\rangle, \\
\hat{S}_-|J\ m\rangle &= \sqrt{J(J+1) - m(m-1)}|J\ m-1\rangle.
\end{aligned}$$

Los elementos de matriz en esta base son:

$$\begin{aligned}
\langle J\ m'|\hat{S}_z|J\ m\rangle &= \langle J\ m'|m|J\ m\rangle \\
&= m\langle J\ m'|J\ m\rangle \\
&= m\delta_{m'm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle J\ m'|\hat{S}_+^2|J\ m\rangle &= \langle J\ m'|\hat{S}_+\hat{S}_+|J\ m\rangle \\
&= \langle J\ m'|\hat{S}_+(\sqrt{J(J+1) - m(m+1)})|J\ m+1\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\langle J\ m'|\hat{S}_+|J\ m+1\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\sqrt{J(J+1) - (m+1)(m+2)}\delta_{m'm+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Jm'|\hat{S}_+\hat{S}_-|J\ m\rangle &= \langle Jm'|\hat{S}_+\sqrt{J(J+1) - m(m-1)}|J\ m-1\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m-1)}\sqrt{J(J+1) - m(m-1)}\langle Jm'|J\ m\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m-1)}\sqrt{J(J+1) - m(m-1)}\delta_{m'm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Jm'|\hat{S}_-\hat{S}_+|J\ m\rangle &= \langle Jm'|\hat{S}_-\sqrt{J(J+1) - m(m+1)}|J\ m+1\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\langle Jm'|J\ m\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\delta_{m'm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Jm'|\hat{S}_-^2|Jm\rangle &= \langle Jm'|\hat{S}_-\sqrt{J(J+1)-m(m-1)}|Jm-1\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1)-m(m-1)}\sqrt{J(J+1)-(m-1)(m-2)}\langle Jm'|Jm-2\rangle \\
&= \sqrt{J(J+1)-m(m-1)}\sqrt{J(J+1)-(m-1)(m-2)}\delta_{m'm-2}
\end{aligned}$$

Un ejemplo de diagonalización se presenta en el Anexo B. Para agilizar las operaciones se utilizó el software Mathematica.

3.2. Densidad de Energías

En mecánica cuántica la densidad de energía se representa por la separación entre los niveles de energía

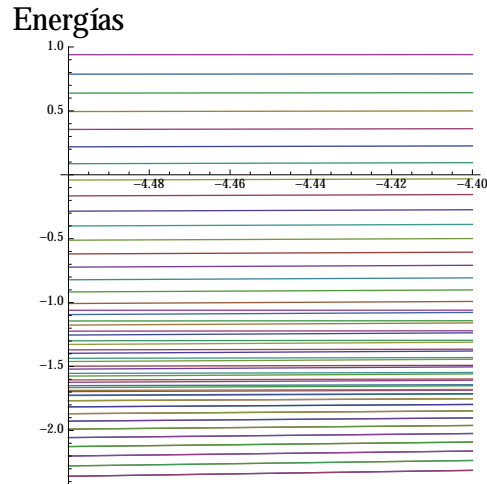


Figura 3.1: Ejemplo de energías, en donde se observa que la separación entre ellas difiere, lo que da lugar a distintas densidades.

En la Fig. 3.1 se observa que la separación entre las energías es diferente. Mas adelante se verá con claridad que se tienen cruzamientos evitados. Para observar la densidad de energía en las regiones **A**, **B** y **D** del espacio de parámetros, se elige $\gamma_y \in [-5, 5]$ y se fija $\gamma_x = -3$. El hamiltoniano se expresa en función de γ_y y γ_x , para ello se manipula las expresiones propuestas en 1.5

$$\gamma_x = \left(\frac{2J-1}{\epsilon}\right) (W + V) \quad \text{y} \quad \gamma_x = \left(\frac{2J-1}{\epsilon}\right) (W - V),$$

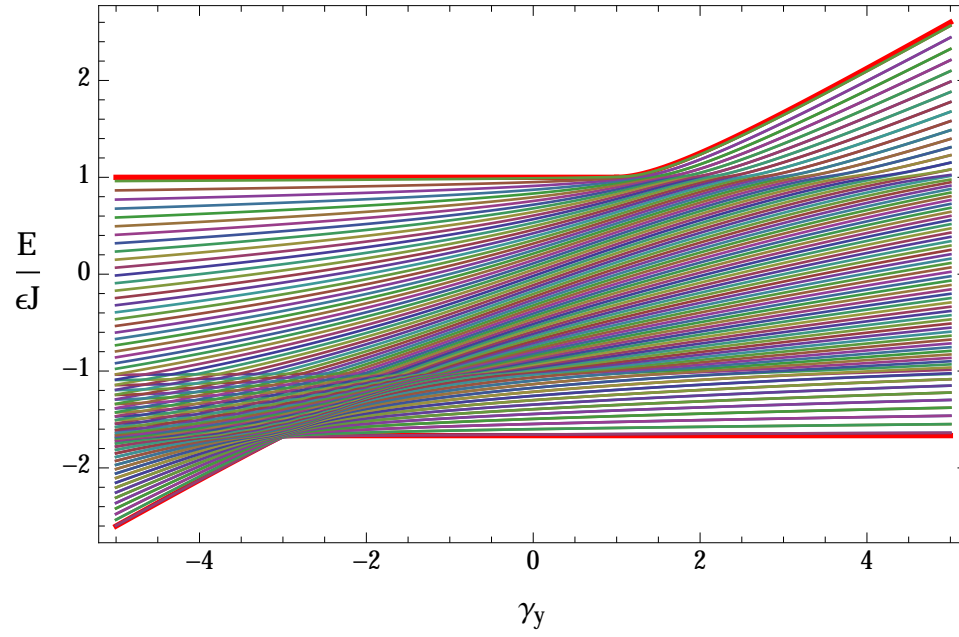
al combinar ambas ecuaciones se obtiene V en términos de γ_x y γ_y

$$V = \frac{\epsilon(\gamma_x - \gamma_y)}{2(2J - 1)}, \quad (3.2)$$

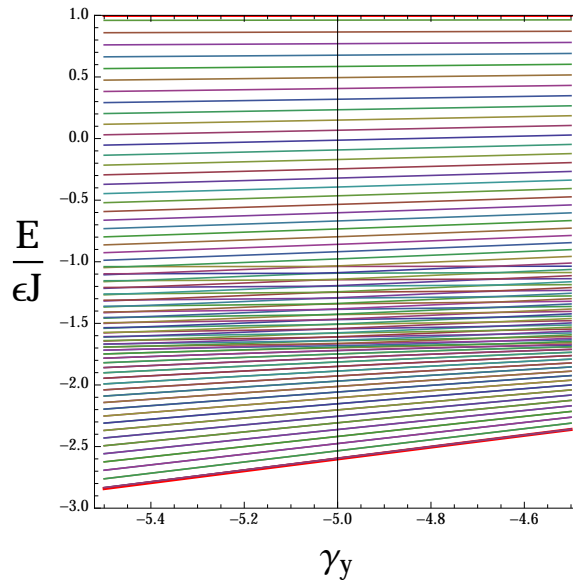
y de manera similar para W

$$W = \frac{\epsilon(\gamma_x + \gamma_y)}{2(2J - 1)}. \quad (3.3)$$

Usando las expresiones (3.2), (3.3) y diagonalizando la Ec. 3.1, con $\epsilon = 1$, y $J = 50$ (entre mayor el valor de J es más cercano al resultado clásico), se obtiene la Fig. 3.2 (para otros valores de γ_x se puede consultar el Anexo C). Lo primero que se observa es la correlación entre los limites de la energía clásico (líneas rojas) y los límites del espectro cuántico. También se observa que en un corte transversal el comportamiento es similar al clásico, en lo referente a la densidad de energía. Por ejemplo, si se toma en el eje de las abscisas el valor de -5 y se sube verticalmente, se puede ver que la densidad de energías va incrementándose hasta encontrarse con una intensidad máxima y es aquí que en el caso clásico se observa la singularidad. Posteriormente se observa una densidad donde a simple vista parecieran cruzarse, pero no es así (cruzamientos evitados), al finalizar esta sección la densidad de energía disminuye abruptamente, lo mismo ocurre en el caso clásico Fig. 2.19



(a)



(b)

Figura 3.2: Densidad de energía con $\gamma_x = -3$, $\epsilon = 1$ y $J = 50$, para (a) $\gamma_y \in [-5, 5]$ y para (b) $\gamma_y \in [-5.5, -4.5]$

A continuación se calcula la densidad de energía y se compara con la densidad

de estados clásica. Para ellos se usan los eigenvalores ordenados ($E_{k+1} \geq E_k$) para el caso $\gamma_y = -5$ y $\gamma_x = -3$ (región **B** de la Fig. 2.8), con $J = 200$ (se eligió un J mayor para observar con mayor claridad la relación con el caso clásico). Se divide el espectro de energías en paridad positiva $m =$ de $-J$ hasta J en pasos de 2 (E^+) y para energías de paridad negativa $m =$ de $-J + 1$ hasta J en pasos de 2 (E^-) y se crea una lista dada por los elementos mostrados en la Ec. 3.4, en donde el término de la izquierda proporciona la energía promedio normalizada y el término de la derecha la densidad de energía, en donde el número 2 da cuenta de los estados con paridad negativa (E^-). Al graficar se obtiene la Fig. 3.3, en donde las líneas continuas corresponden al caso clásico (Fig. 2.19) y los puntos al caso cuántico. Es clara la relación. En el rango de color naranja corresponde a energías donde ocurre el cruzamiento evitado.

$$\left(\frac{E_k^+ + E_{k+1}^+}{2J}, \frac{2}{E_{k+1}^+ - E_k^+} \right) \quad (3.4)$$

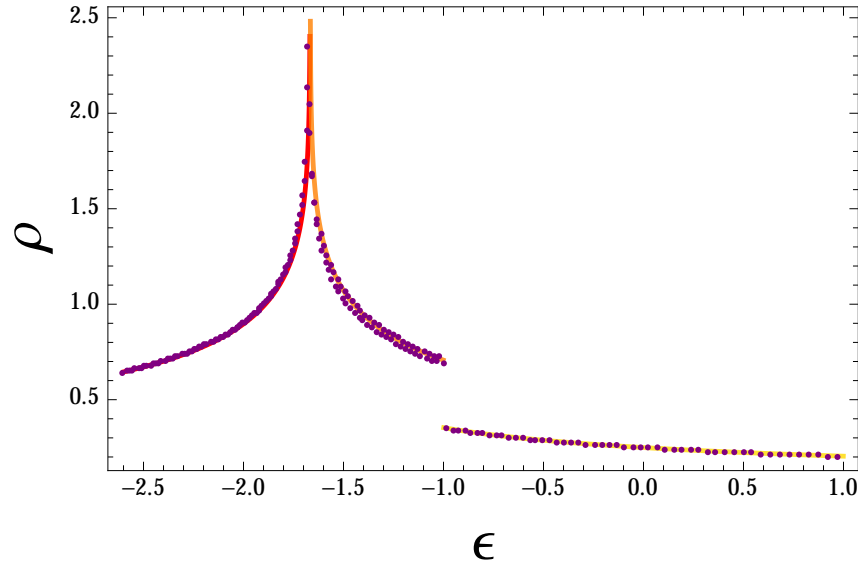


Figura 3.3: Las líneas continuas corresponden al caso clásico y los puntos al cuántico.

3.3. Representación de Husimi

Partiendo de lo definido en la sección 1.4

$$Q_{E_k}(\alpha) = |\langle \alpha | E_k \rangle|^2 \quad (3.5)$$

y el estado coherente de espín-j (Bloch)

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^J} \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{1/2} \alpha^{J+m} |J, m\rangle$$

donde $\alpha = \tan(\theta/2)e^{-i\phi}$.

Debido a que $|\alpha\rangle$ es una rotación del estado base $|\alpha\rangle = \hat{R}_{\theta\phi}|J, -J\rangle$, los estados propios de la energía pueden escribirse como

$$\begin{aligned} |E_k\rangle &= C_{-J}^k |J, -J\rangle + C_{-J+1}^k |J, -J+1\rangle \dots \\ &= \sum_{m=-J}^k C_m^k |J, m\rangle \end{aligned}$$

donde los coeficientes C_m^k se obtienen de diagonalizar numéricamente la matriz hamiltoniana. Se tiene entonces

$$\langle \alpha | E_k \rangle = \sum_{m=-J}^k C_m^k \langle \alpha | J, m \rangle,$$

donde

$$\langle \alpha | J, m \rangle = \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^J} \binom{2J}{J+m}^{1/2} (\alpha^*)^{J+m} \langle J, m | J, m \rangle.$$

Entonces

$$\langle \alpha | E_k \rangle = \sum_{m=-J}^J C_m^k \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^J} \binom{2J}{J+m}^{1/2} (\alpha^*)^{J+m}. \quad (3.6)$$

Para graficar la función de Husimi se usan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} u &= \left(1 + \frac{J_z}{J}\right) \cos(\phi) \\ v &= \left(1 + \frac{J_z}{J}\right) \sin(\phi) \end{aligned}$$

Como $J_z = -J \cos \theta$, entonces

$$u = (1 - \cos \theta) \cos \phi$$

y

$$v = (1 - \cos \theta) \sin \phi. \quad (3.7)$$

Para tener $\theta = \theta(u, v)$ y $\phi = \phi(u, v)$ se hace $u^2 + v^2$

$$u^2 + v^2 = (1 - \cos \theta)^2 \Rightarrow \cos \theta = 1 - \sqrt{u^2 + v^2}$$

por lo que

$$\theta = \cos^{-1} (1 - \sqrt{u^2 + v^2})$$

De manera similar para ϕ se usa $\frac{v}{u}$

$$\frac{v}{u} = \tan \phi \Rightarrow \phi = \tan^{-1} \frac{v}{u}$$

Para la representación de Husimi, como se ve en la Ec. 3.6 y por ende en la Ec. 3.3, es necesario fijar un valor de k . Para facilitar su elección se utilizan los eigenvalores ordenados como se utilizó para la densidad de energías y se obtiene la Fig. 3.4, en donde se observan 3 comportamientos principales de las energías. El primero comprendido entre las primeras $k = 20$ energías aproximadamente en donde el valor de las energías con paridad positiva y paridad negativa son iguales, mientras que el segundo entre el estado $k = 20$ hasta la energía número $k = 37$ en donde el valor mayor y el valor menor va cambiando entre la energía de paridad negativa con la de paridad positiva. Por último, entre el último número mencionado hasta la energía número $k = 51$ en donde se observa que el valor de las energías de paridad negativa es siempre mayor que el valor de las energías con paridad positiva.

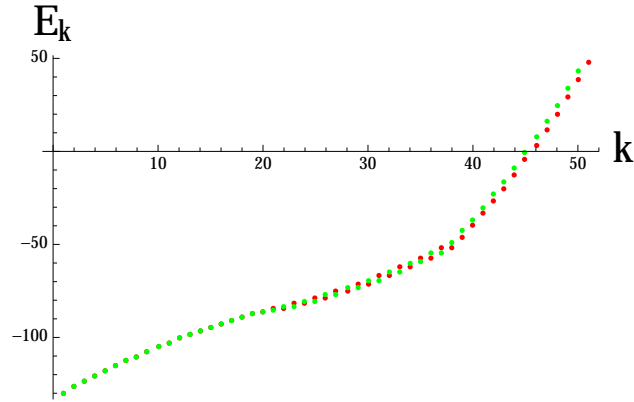


Figura 3.4: Energías de paridad positiva (puntos rojos) y energías con paridad negativa (puntos verdes) ordenados.

A continuación se grafica la representación de Husimi en 3D utilizando la Ec. 3.3 junto con las expresiones para ϕ y θ , donde $u, v \in [-2, 2]$, como se vio en el caso clásico. También se grafica el contorno que se compara con la trayectoria clásica correspondiente a cada caso, dando como resultado los pares de gráficas (a) y (b) (respectivamente). En ellas se observa la clara relación entre el contorno cuántico y la trayectoria clásica

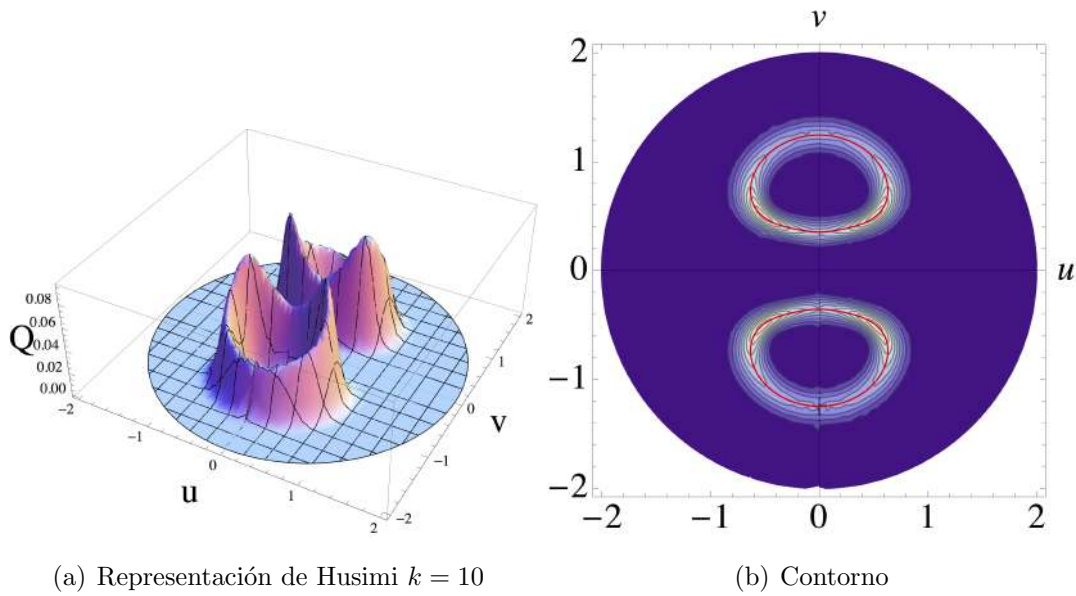


Figura 3.5:

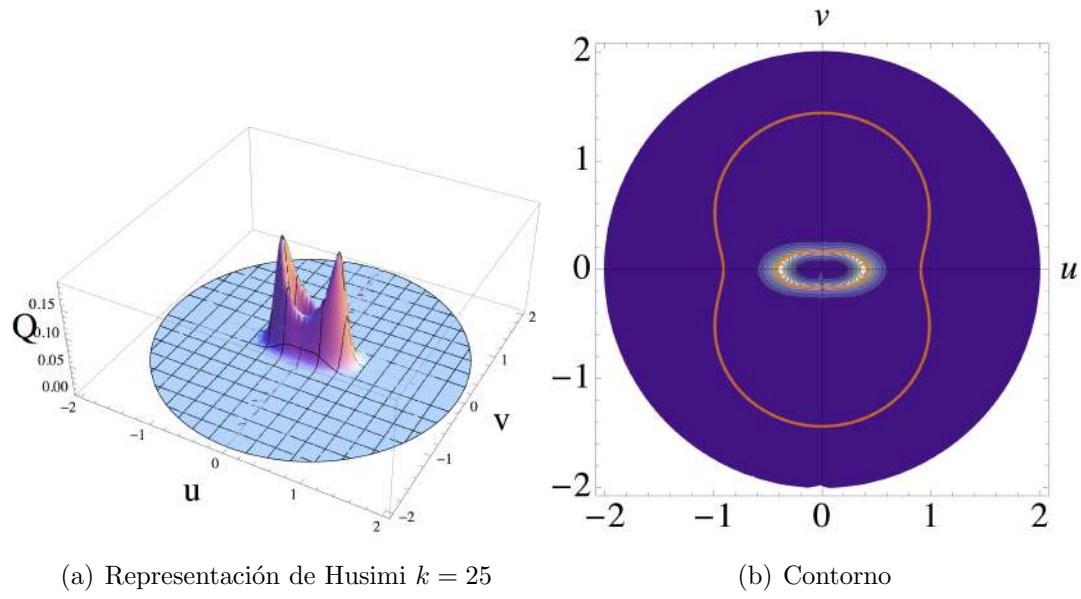


Figura 3.6:

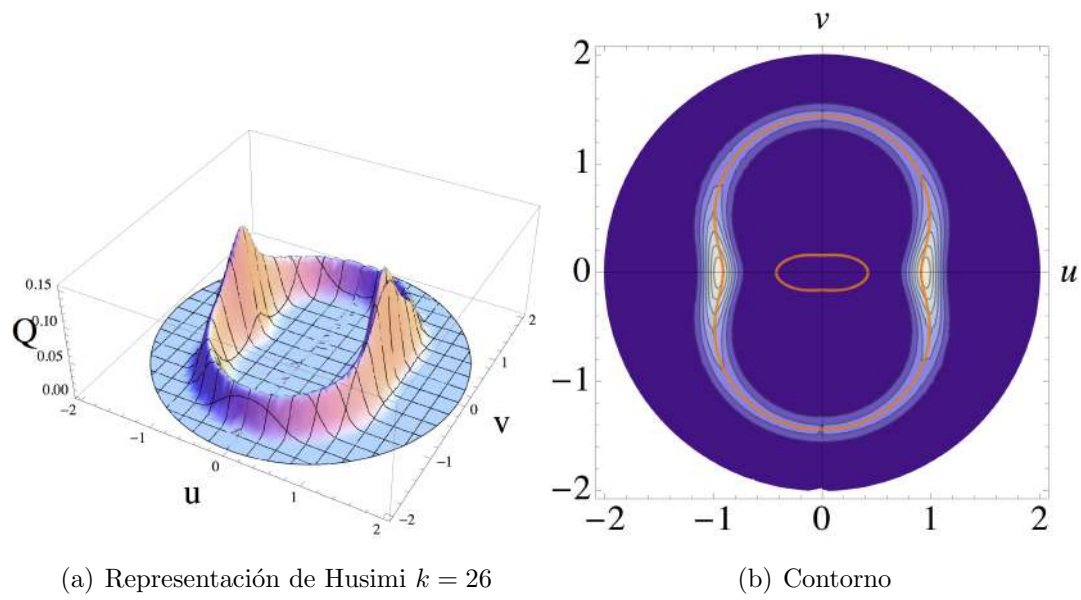


Figura 3.7:

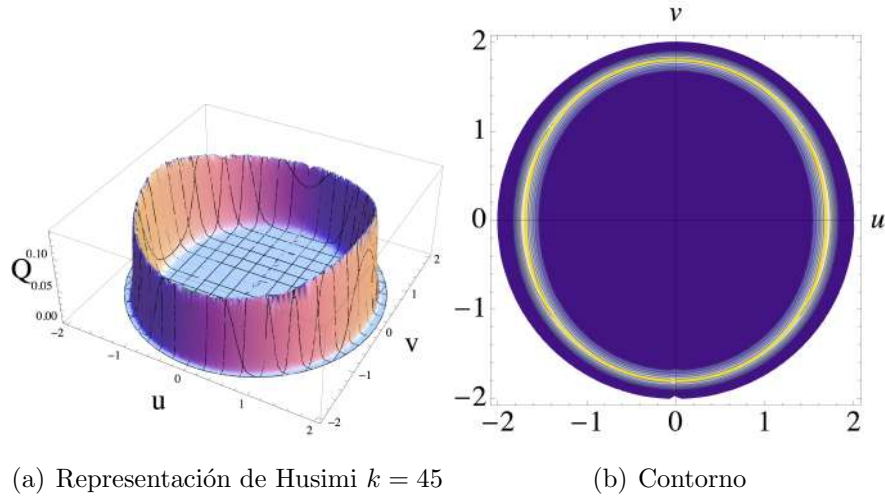


Figura 3.8:

Por completeness e ilustración en el Apéndice F se presentan para los casos

$$\gamma_y = -0.8 \quad y \quad \gamma_x = -0.5 \quad (\text{Región A})$$

$$\gamma_y = -5 \quad y \quad \gamma_x = 3 \quad (\text{Región D})$$

$$\gamma_y = -5 \quad y \quad \gamma_x = -0.5 \quad (\text{Región C})$$

3.4. Cruzamientos Evitados

En [34] se propone que una condición para tener cruzamientos entre estados de paridad distinta es

$$\gamma_x \gamma_y = \left(\frac{2J-1}{2J+1-2N} \right)^2, \quad (3.8)$$

con $N = 1, 2, 3, \dots, J$, y N es igual al número de estados de paridad distinta degenerados

$$\begin{aligned}
N = 1 & : E_1^+ = E_1^- \\
N = 2 & : E_1^+ = E_1^-, E_2^+ = E_2^- \\
N = 3 & : E_1^+ = E_1^-, E_2^+ = E_2^-, E_3^+ = E_3^- \\
& \dots
\end{aligned}$$

En la misma referencia [34] también se propone una condición (necesaria) para tener cruzamientos evitados entre estados de la misma paridad

$$\gamma_x \gamma_y = \left(\frac{2J - 1}{2J + 1 - (2N + 1)} \right)^2, \quad (3.9)$$

3.4.1. Detalle de los cruzamientos

Para ver el comportamiento de las energías en valores de γ_x y γ_y que satisfacen las relaciones 3.8 y 3.9 se elige $J = 200$, $\gamma_y = -5$, $N = 136$ y un γ_x para cada condición. Se grafica la Ec. 3.10

$$\left(\frac{E_k^+ + E_{k+1}^+}{2J}, E_{k+1}^+ - E_k^+ \right), \quad (3.10)$$

donde el primer término de la ecuación se refiere a la energía promedio normalizada y el segundo término a la diferencia de energía de estados consecutivos para paridad positiva. Lo que se obtiene es la Fig. 3.9, en donde se muestra para valores de γ_x y γ_y que satisfacen la relación (a) (3.8), (b) (3.9) y para acoplamientos que no satisfacen estas relaciones (c). Se puede observar que la diferencia reside entre la energía -1 (línea naranja) y la energía ϵ'_{min} (línea roja), en donde para el caso (a) se observa que la diferencia es constante, para el caso (b) se observan diferencias de energía muy pequeña, lo que da lugar a los cruzamientos evitados y por lo tanto al efecto de tunelamiento dinámico y por último para el caso (c) se observan diferencias más grandes que en los casos anteriores. Algo similar ocurre con paridad negativa y se

muestra en el Anexo E.

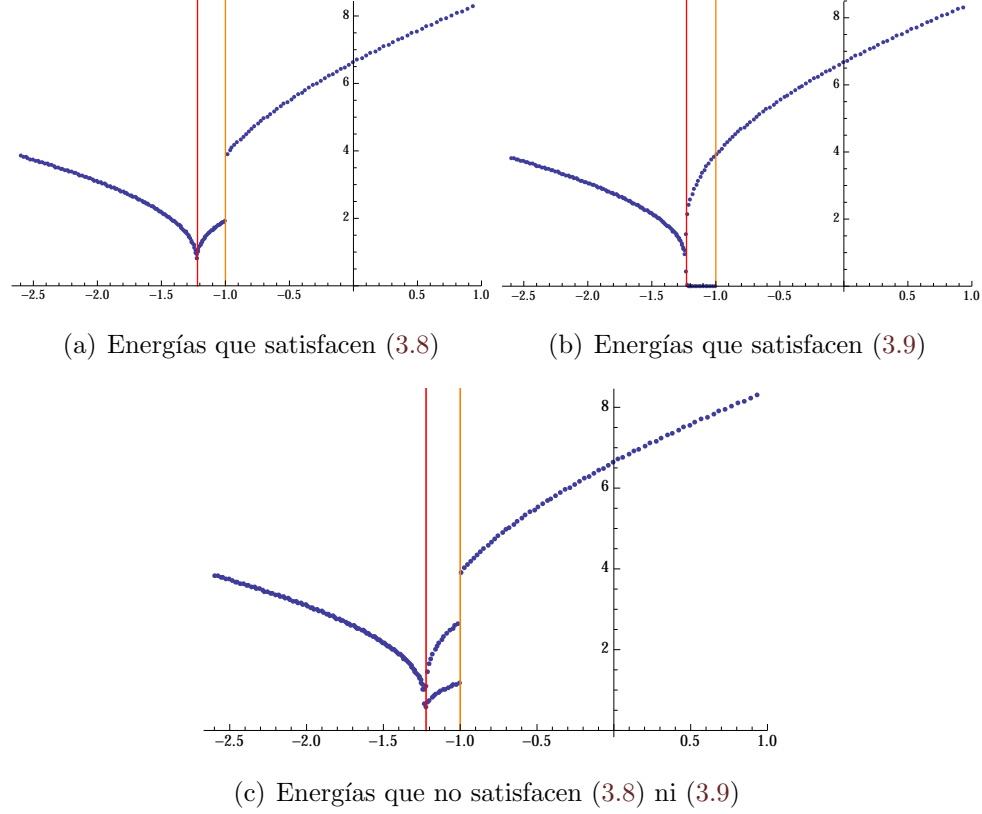


Figura 3.9: Se muestra las energías que satisfacen 3.8 (a), 3.9 (b) y que no satisfacen las condiciones anteriores (c)

3.4.2. Husimi en cruzamientos evitados

Los cruzamientos evitados se observan para ciertos valores de γ_x y γ_y Fig. 3.9 (b). Se puede fijar un valor de $\gamma_y = -5$ y utilizar la relación 3.9 para encontrar los valores de γ_x donde se presentan los cruzamientos evitados. Lo anterior descrito se puede encontrar tomando $\epsilon = 1$, $J = 200$ y $N = 134$ a 138 (136 ± 2 para ver el comportamiento) y se grafican las relaciones 3.8 (líneas rojas) y 3.9 (líneas verdes) obteniéndose la Fig. 3.10, en donde la línea azul es el valor de γ_y y la línea naranja es el valor de γ_x que se obtiene de la relación 3.9 con $N = 136$ ($\gamma_x = -1.94337$)

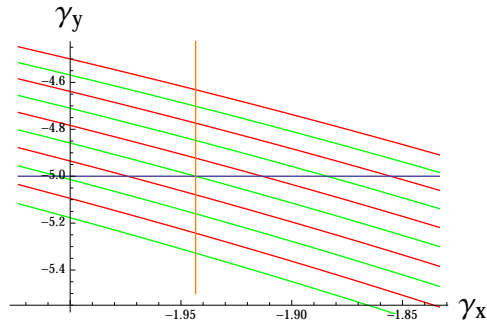
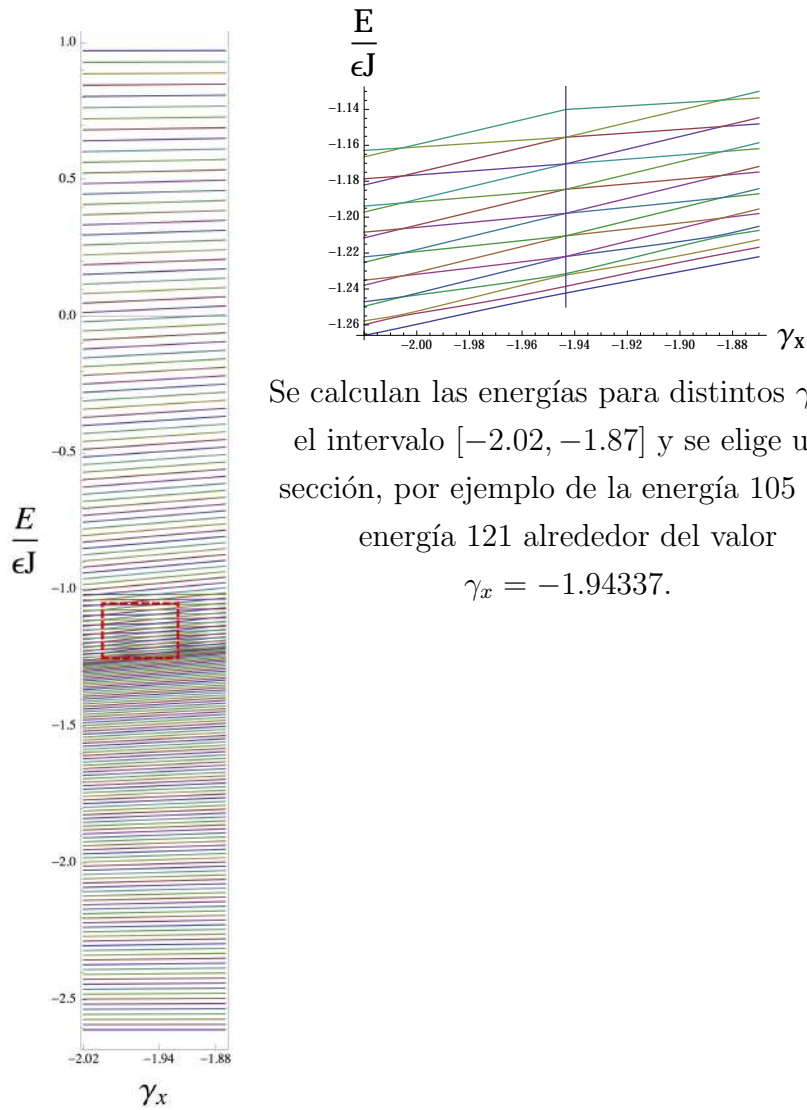


Figura 3.10: Relaciones 3.8 líneas rojas y 3.9 líneas verdes, donde va de $N = 134$ (línea inferior) a $N = 138$ (línea superior)



Se calculan las energías para distintos γ_x en el intervalo $[-2.02, -1.87]$ y se elige una sección, por ejemplo de la energía 105 a la energía 121 alrededor del valor $\gamma_x = -1.94337$.

Haciendo un acercamiento en el primer aparente cruzamiento (energía 107 y 108) se ve con mas claridad que realmente no se cruzan, y se observa una distinción de los colores de las líneas ya que pertenecen a energías distintas.

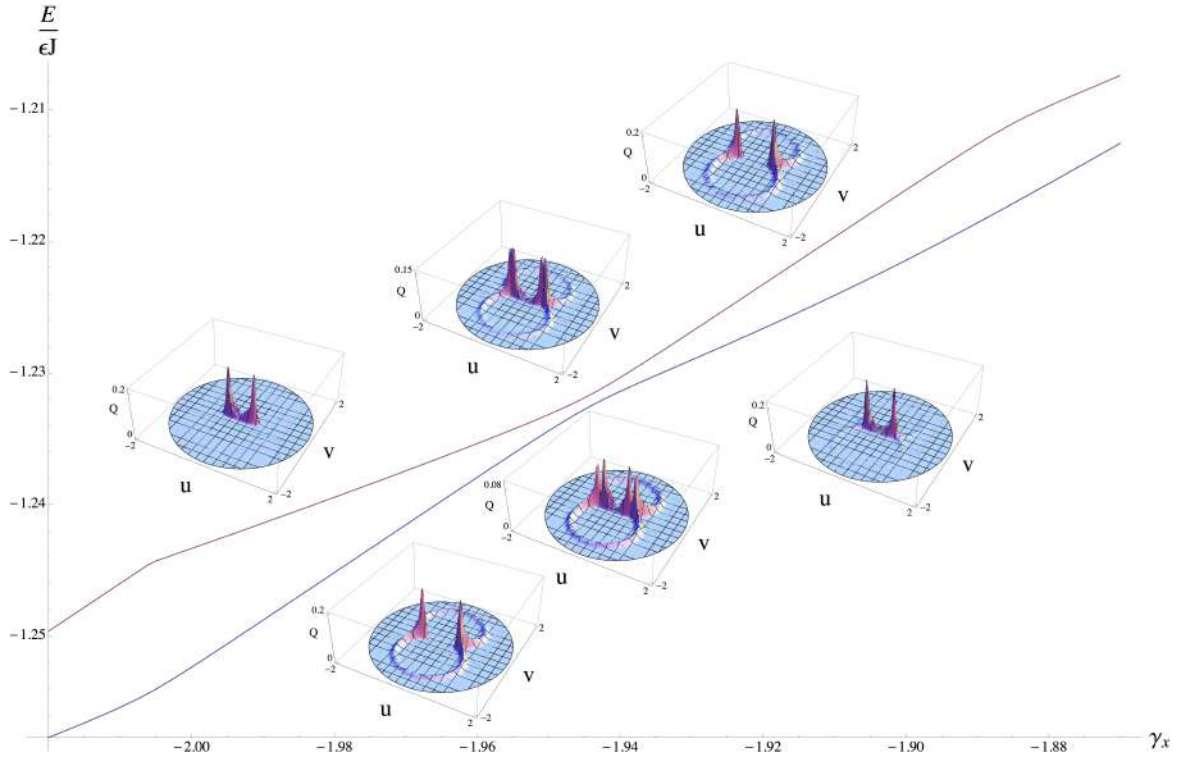


Figura 3.11: Representación de Husimi para distintos γ_x

Ahora se obtienen las representaciones de Husimi para los distintos estados involucrados en el cruzamiento evitado para un γ_x antes, en y después del cruzamiento evitado. Por ejemplo, se toma $\gamma_x = -1.96$, $\gamma_x = -1.94337$ y $\gamma_x = -1.92$, tanto para la energía 107 (línea azul) y 108 (línea morada) y se insertan en la Fig. 3.11 en donde se observa el intercambio de la representación de Husimi entre los valores antes y después del cruzamiento evitado. También se puede observar que justo en el cruzamiento evitado ocurre el tunelamiento dinámico. Además se grafican los contornos Fig. 3.12 para observar de otra manera el comportamiento.

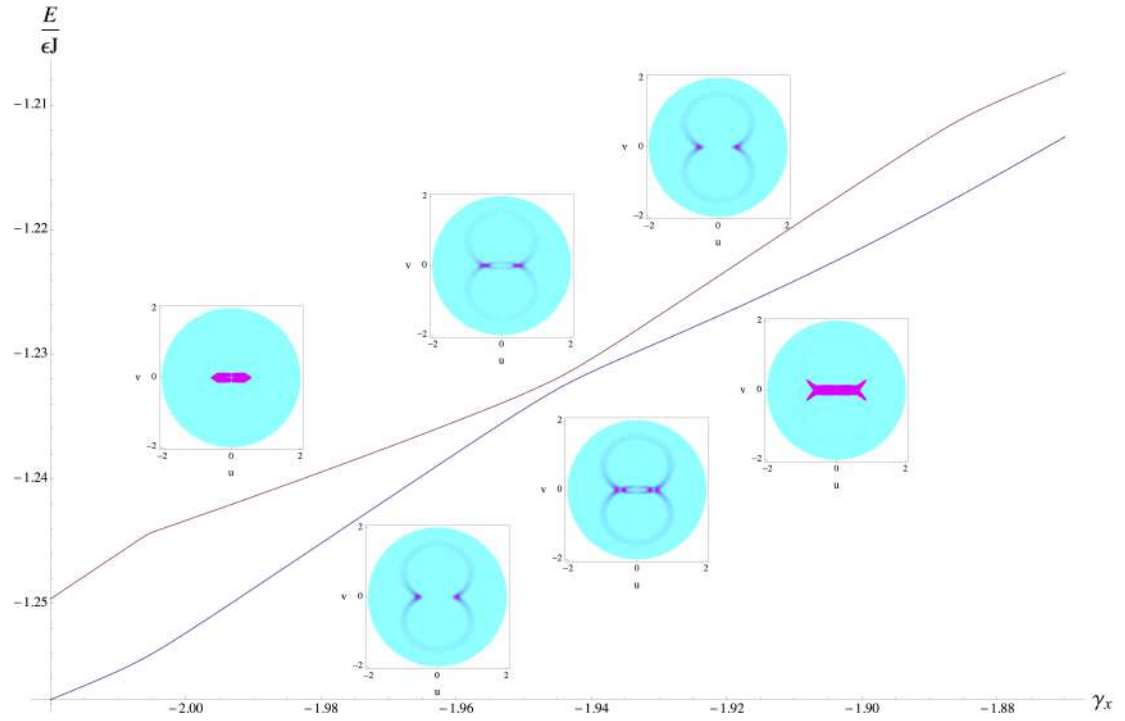


Figura 3.12: Contorno de las representaciones de Husimi para los valores de $\gamma_x = -1.96$, $\gamma_x = -1.94337$ y $\gamma_x = -1.92$ en las energías 107 (línea azul) y 108 (línea morada).

Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo giran en torno al estudio de una comparación clásico - cuántica para el modelo de LGM y a la revisión de lo que sucede antes, durante y después de un cruzamiento evitado. Para la primera parte se observó dicha comparación en dos aspectos. Por un lado las trayectorias y densidad de estados para el clásico, y la representación de Husimi y densidad de energías calculadas usando el espectro cuántico, en donde se concluye que existe una clara relación entre las trayectorias clásicas superpuestas en los contornos de las representaciones de Husimi cuánticas y de la misma manera la relación entre la densidad de estados clásica al utilizar la ley de Weyl con la densidad de energías calculada usando el espectro cuántico. Para la segunda parte, se proponen condiciones de cruzamiento evitado y se observa lo que ocurre con los estados involucrados en éste mediante la representación de Husimi. Se observa que las características de la función de Husimi antes del cruzamiento para dos energías subsecuentes, se intercambia después del cruzamiento evitado. Lo que sucede en el cruzamiento evitado es que las representaciones de Husimi son combinaciones lineales de funciones asociadas a dos trayectorias clásicas independientes con la misma energía, lo cual es imposible clásicamente. Este comportamiento da lugar a un tunelamiento del tipo dinámico.

Apéndice A

Generalidades

LMG

Se puede tomar

$$\begin{aligned} J_+ &= \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1} \\ \rightarrow J_+^2 &= \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1} \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1} \\ \rightarrow J_+^2 &= \sum_{p,p'} a_{p+1}^\dagger a_{p-1} a_{p'+1}^\dagger a_{p'-1} \end{aligned}$$

de igual manera para J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1} \\ J_-^2 &= \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1} \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1} \\ J_-^2 &= \sum_{p,p'} a_{p-1}^\dagger a_{p+1} a_{p'-1}^\dagger a_{p'+1} \end{aligned}$$

Entonces

$$J_-^2 + J_+^2 = \sum_{p,p'} a_{p+1}^\dagger a_{p-1} a_{p'+1}^\dagger a_{p'-1} + \sum_{p,p'} a_{p-1}^\dagger a_{p+1} a_{p'-1}^\dagger a_{p'+1}$$

que para el caso del hamiltoniano

$$\sum_{p,p',\sigma} a_{p,\sigma}^\dagger a_{p',\sigma}^\dagger a_{p',-\sigma} a_{p,-\sigma}$$

como $\sigma = \pm 1$

$$\sum_{p,p',\sigma} a_{p,\sigma}^\dagger a_{p',\sigma}^\dagger a_{p',-\sigma} a_{p,-\sigma} = \sum_{p,p'} a_{p+1}^\dagger a_{p-1} a_{p'+1}^\dagger a_{p'-1} + \sum_{p,p'} a_{p-1}^\dagger a_{p+1} a_{p'-1}^\dagger a_{p'+1}$$

Para el tercer termino del hamiltoniano es similar la operación.

Notación de Dirac y Representación matricial

Para facilitar las operaciones se utilizan notaciones abstractas, y en MC para los eigenvalores es la notación de Dirac, en dicha notación un estado es un vector que está en un espacio vectorial y se representa generalmente como

$$|n\rangle, |P\rangle \text{ llamados kets,}$$

en donde se puede tener también estados del tipo

$$|a, b\rangle \text{ Representan eigenestados simultáneos.}$$

Para la solución de eigenvalores se utiliza la representación matricial y la idea es estudiar las estructuras matriciales que están atrás de las operaciones de operadores como el de momento angular. si \hat{O} es un operador entonces

$$\langle U_i | \hat{O} | U_j \rangle = \langle U_i | \hat{O} U_j \rangle$$

Si \hat{O} fuera \hat{H} serian los valores esperados de la energía. Es decir, las matrices representan a operadores y los vectores columna representan a estados. En general, una ecuación de eigenvalores

$$\hat{A}\phi = a\phi$$

En notación matricial

$$\hat{A}_{in}\alpha_n = a\alpha_i$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \hat{A}_{in}\alpha_n - a\alpha_i &= \hat{A}_{in}\alpha_n - a\delta_{in}\alpha_n = 0 \\ &= (\hat{A}_{in} - a\delta_{in})\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} A_{11} - a & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} - a & A_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Existirá una solución diferente de la trivial cuando

$$\det \left(\hat{A}_{in} - a\delta_{in} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Esta es la mejor forma de encontrar eigenvalores y eigenvectores para el caso de matrices finitas, sumado a esto se utilizara el software Mathematica para agilizar las operaciones.

Momento angular orbital

Debido a que el modelo de Lipkin - Meshkov - Glick esta en función de operadores de pseudo- spin, se describen algunas propiedades en función del operador momento angular orbital. Escribiendo el momento angular orbital en símbolos de Levi- Civita

$$\hat{\vec{L}} = \hat{r}\hat{\mathbf{x}}\hat{\vec{p}} \rightarrow \hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{X}_j\hat{p}_k$$

se omite pero se sobre entiende que es una suma en ϵ_{ijk} . Estudiando los conmutadores entre los componentes de $\hat{\vec{L}}$ se encuentra que

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

Se propone

$$\hat{\vec{L}}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle \quad (\text{A.3})$$

Por cuestiones de dimensionalidad aparece \hbar^2 y \hbar . Los eigenestados $|l, m\rangle$ satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\langle l, m | l', m' \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

se introducen los operadores

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \quad (\text{A.4})$$

dado que $\vec{\hat{L}}$ es un operador vectorial, $\vec{\hat{L}}^2$ es invariante ante rotaciones, por lo tanto

$$[\vec{\hat{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para conocer las propiedades de los operadores de subida y bajada se parte de ver el comportamiento de

$$\vec{\hat{L}}^2 \hat{L}_\pm |l, m\rangle$$

usando la Ec. A.2

$$\hat{L}_\pm \vec{\hat{L}}^2 |l, m\rangle = \hbar l(l+1) \hat{L}_\pm |l, m\rangle$$

lo que significa que $\hat{L}_\pm |l, m\rangle$ es un eigenvector de $\vec{\hat{L}}^2$, con eigenvalor caracterizado por l . Por otra parte para ver como se comportan los operadores \hat{L}_+ y \hat{L}_- se desarrolla

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ |l, m\rangle = \left([\hat{L}_z, \hat{L}_+] + \hat{L}_+ \hat{L}_z \right) |l, m\rangle$$

donde

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_+] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x + i\hat{L}_y] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i[\hat{L}_z, \hat{L}_y] \\ &= i\hbar\epsilon_{kij}\hat{L}_j + i\left(i\hbar\epsilon_{kji}\hat{L}_i\right) \\ &= -i\hbar\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_x = \hbar\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) \\ &= \hbar\hat{L}_+ \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \hat{L}_+ |l, m\rangle &= \left(\hbar\hat{L}_+ + \hat{L}_+ \hat{L}_z\right) |l, m\rangle \\ &= \hbar\hat{L}_+ |l, m\rangle + \hat{L}_+ \hat{L}_z |l, m\rangle \\ &= \hbar\hat{L}_+ |l, m\rangle + \hat{L}_+ \hbar m |l, m\rangle \end{aligned}$$

$$= \hbar (m + 1) \hat{L}_+ |l, m\rangle$$

de manera análoga

$$\hat{L}_z \hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar (m + 1) \hat{L}_- |l, m\rangle$$

lo que significa que $\hat{L}_+ |l, m\rangle$ es un eigenestado de \hat{L}_z con el valor de m aumentado en una unidad y $\hat{L}_- |l, m\rangle$ es un eigenestado de \hat{L}_z con el valor de m disminuido en una unidad. Por lo tanto se puede suponer

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = C_+ (l, m) |l, m + 1\rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = C_- (l, m) |l, m - 1\rangle \quad (\text{A.7})$$

donde $C_+ (l, m)$ y $C_- (l, m)$ son constantes que suben y bajan respectivamente y son las que dan el carácter de operadores de subida y bajada. Para encontrar los valores de las constantes se prosigue de la siguiente manera

Parte A

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_+ (l, m) | \hat{L}_+ (l, m) \rangle &= \left(\langle l, m | \hat{L}_+^\dagger \right) \left(\hat{L}_+ |l, m\rangle \right) \\ &= \langle l, m | \hat{L}_- \hat{L}_+ |l, m\rangle \\ &= \langle l, m | \hat{L}^2 - \hbar \hat{L}_z - \hat{L}_z^2 |l, m\rangle \\ &= \langle l, m | \hat{L}^2 |l, m\rangle - \hbar \langle l, m | \hat{L}_z |l, m\rangle - \langle l, m | \hat{L}_z^2 |l, m\rangle \\ &= \hbar^2 l, (l + 1) - \hbar^2 m - \hbar^2 m^2 \\ &= \hbar^2 [l, (l + 1) - m (m + 1)] \end{aligned}$$

Parte B

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_+ (l, m) | \hat{L}_+ (l, m) \rangle &= \langle l, m + 1 | C_+^* C_+ |l, m + 1\rangle \\ &= |C_+|^2 \langle l, m + 1 | l, m + 1 \rangle \end{aligned}$$

Tomando los resultados de A y B

$$C_+ = \hbar \sqrt{l (l + 1) - m (m + 1)}$$

En donde de manera similar se hace para C_- y se puede concluir la Ec. A.8

$$\hat{L}_{\pm}|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle \quad (\text{A.8})$$

Grupo SU(2)

SU significa Special Unitari y representan matrices 2x2, complejas, donde determinante igual a 1. Las matrices de Pauli es un ejemplo de ellas; físicamente existen una correlación entre SU(2) y SU(3), es decir, son rotaciones y sirven para el estudio de rotaciones 3D que traducen rotaciones complejas a rotaciones físicas.

Apéndice B

Ejemplo de diagonalización

Se estudia como ejemplo el caso en que $J = 1$ i.e. $m = -J, 0, J$ o en otras palabras $m = 2J + 1$. Se puede escribir el Hamiltoniano para tener una guía de los posibles valores de la matriz.

$$\begin{aligned}\langle J \ m' | \hat{H} | J \ m \rangle &= A + (B + C) \\ \text{Donde } A &= \epsilon [\] \delta_{m'm} + \frac{\gamma}{2} ([\] \delta_{m'm}) \\ \text{Asi como } B &= \frac{\lambda}{2} [\] \delta_{m'm+2} \\ \text{Y } C &= \frac{\lambda}{2} [\] \delta_{m'm-2}\end{aligned}$$

Ya que la matriz toma la forma

$$\begin{array}{l} \langle J \ m' | \ | J \ m \rangle \ | 1 \ -1 \rangle \ | 1 \ 0 \rangle \ | 1 \ 1 \rangle \\ \langle 1 \ -1 | \quad \quad A \quad \quad 0 \quad \quad C \\ \langle 1 \ 0 | \quad \quad 0 \quad \quad A \quad \quad 0 \\ \langle 1 \ 1 \quad \quad B \quad \quad 0 \quad \quad A \end{array}$$

Así desarroyando A, B y C. Asi, desarrollando A, B y C.

$$\begin{aligned}\langle 1 \ -1 | \hat{H} | 1 \ -1 \rangle &= \epsilon(-1)\delta_{-1-1} + \frac{\gamma}{2}[2 - (-1)(-2)]\delta_{-1-1} + \frac{\gamma}{2}[2 - (-1)(-1+1)]\delta_{-1-1} \\ &= -\epsilon + \gamma \\ \langle 1 \ -1 | \hat{H} | 1 \ 1 \rangle &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{2-1(1-1)}\sqrt{2-(1-1)(1-2)}\delta_{-1-1} \\ &= \lambda \\ \langle 1 \ 0 | \hat{H} | 1 \ 0 \rangle &= \epsilon(0)\delta_{00} + \frac{\gamma}{2}[2 - 0(0-1)]\delta_{00} + \frac{\gamma}{2}[2 - 0(0+1)]\delta_{00}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 1 \ 1 | \hat{H} | 1 \ -1 \rangle &= \frac{\lambda}{2} [\sqrt{2 - (-1)[(-1) + 1]} \sqrt{2 - (-1 + 1)(-1 + 2)}] \delta_{11} \\
 &= 2\gamma \\
 &= \lambda \\
 \langle 1 \ 1 | \hat{H} | 1 \ 1 \rangle &= \epsilon(1)\delta_{11} + \frac{\gamma}{2}[2 - (1)(1 - 1)]\delta_{11} + \frac{\gamma}{2}[2 - (1)(1 + 1)]\delta_{11} \\
 &= \epsilon + \gamma
 \end{aligned}$$

La matriz queda de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} -\epsilon + \gamma & 0 & \lambda \\ 0 & 2\gamma & 0 \\ \lambda & 0 & \epsilon + \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Se espera de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b^\dagger & 0 & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b^\dagger & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Si $\epsilon = 1$, $\gamma = 1$, $\lambda = 1$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Ahora se busca los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente manera

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

quedando

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - \lambda(2 - \lambda)(2 - \lambda) + (-1)(2 - \lambda) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Se tiene entonces $\lambda_1 = 2$

$$-2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 2\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Así $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$; los cuales son los eigenvalores

Para los eigenvectores se sustituyen estos valores en la matriz. Para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}-2X_1 + 0X_2 + X_3 &= 0 \\ 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 &= 0 \\ X_1 + 0X_2 + 0X_3 &= 0\end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$V_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Normalizando

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

De igual manera se sustituyen los valores de $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ y el valor de $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$ y los resultados son

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

y

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Una manera de comprobar que estab correctos los eigenvectores es

$$D = P^\dagger A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

donde P es la matriz de los eigenvectores; debe resultar de esta operación los eigenvalores antes calculados.

Apéndice C

Densidad de estados

Aquí se muestran los otros casos en donde se grafican las energías fijando el valor de γ_y y se va variando el valor de $\gamma_x = [-5, 5]$. Lo que se puede observar es que el comportamiento es similar al caso clásico, aquí se refleja como una densidad de energías. En la Fig. C.1 se muestra para el caso $\gamma_y = -0.5$, la Fig. C.2 corresponde a $\gamma_y = 0.5$ y siguiendo en función con el incremento de γ_y la Fig. C.3 muestra el caso $\gamma_y = 3$,

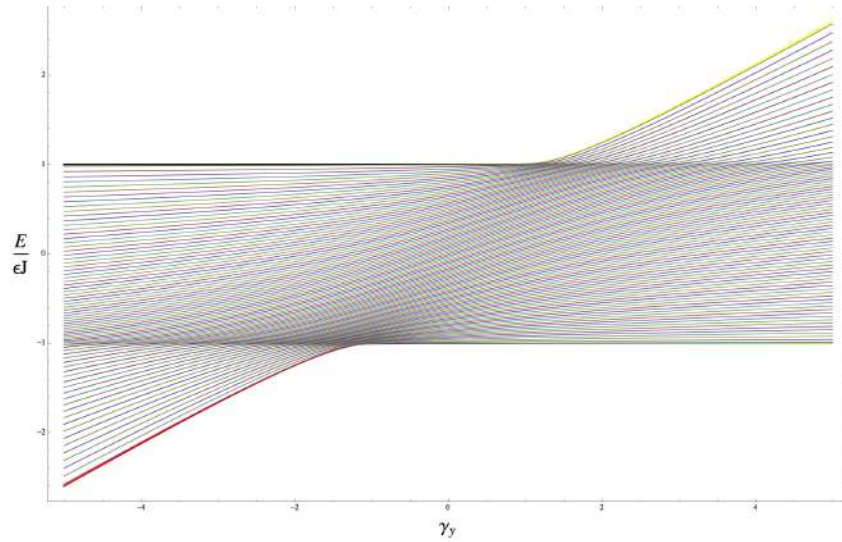


Figura C.1: Densidad de energía para $\gamma_x = [-5, 5]$ y $\gamma_y = -0.5$

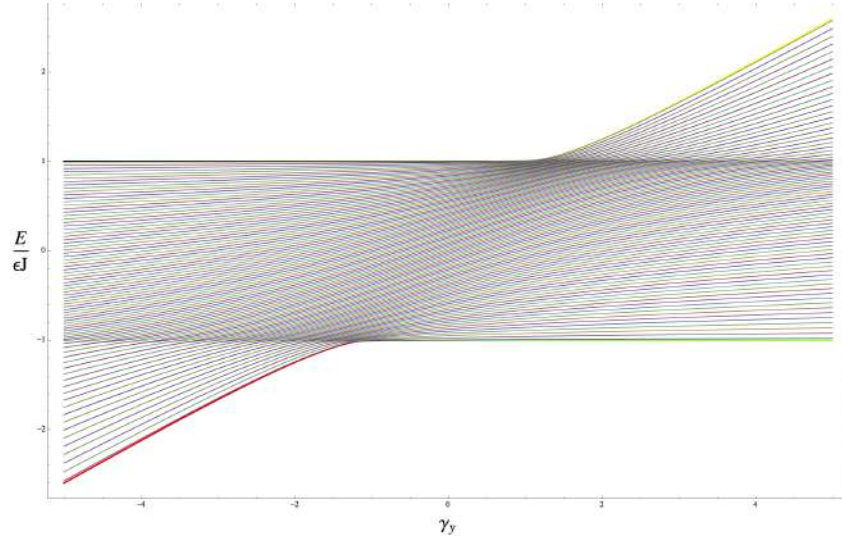


Figura C.2: Densidad de energía para $\gamma_x = [-5, 5]$ y $\gamma_y = 0.5$

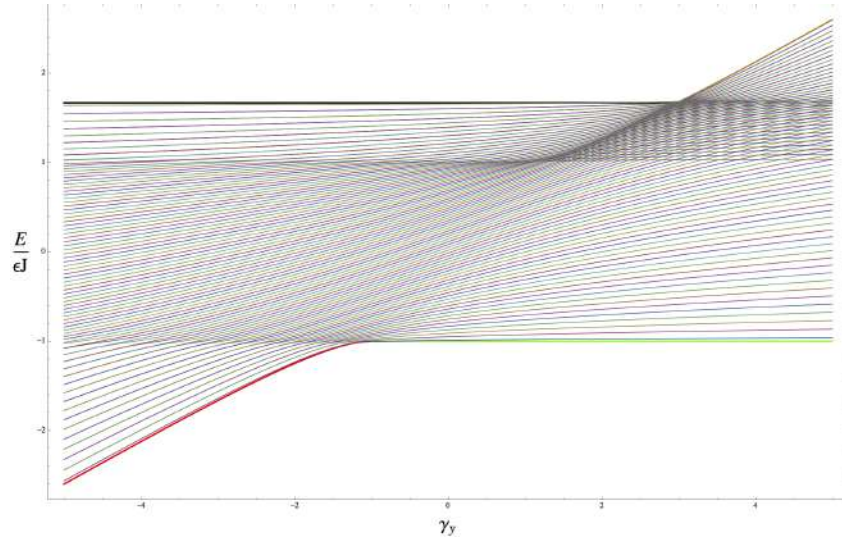


Figura C.3: Densidad de energía para $\gamma_x = [-5, 5]$ y $\gamma_y = 3$

Para el ultimo caso se estudia el comportamiento donde γ_y y γ_x varíe, con la condición de pasar por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, para ello se uso la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\frac{\gamma_x - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{\gamma_y - (0)}{1 - (0)}$$

$$\rightarrow \gamma_x + 1 = \gamma_y$$

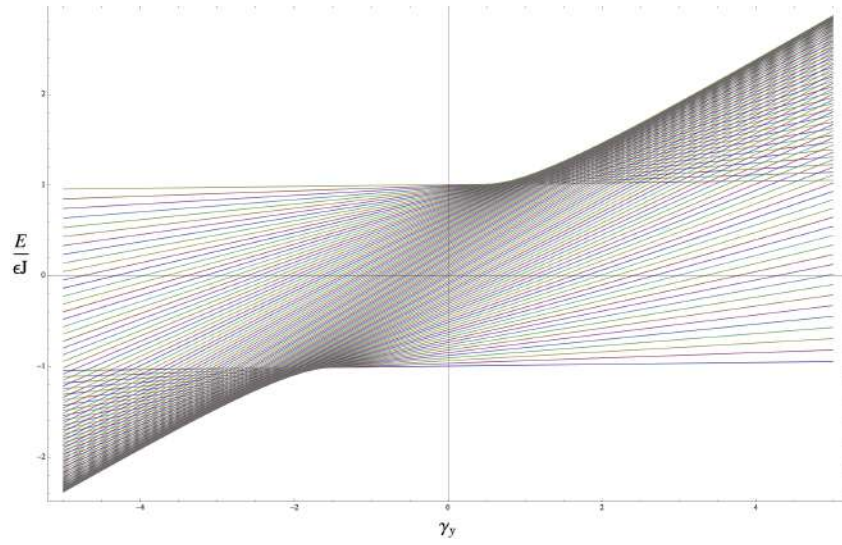


Figura C.4:

Apéndice D

Trayectorias y densidades de estado

En este anexo se presentan resumidas las trayectorias y densidad de estados para los casos **B** y **D** del espacio de parámetros. Primero se retoma la Fig. D.1 para tener continuidad, en donde como se mencionó se puede observar un continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con ($\gamma_x = \frac{1}{2}$ y $\gamma_y = -5$), así como también los rangos de energía, el de color rojo comprendido entre el mínimo de la parábola $h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$ y el color amarillo de $h = -1$ a $h = 1$, a este rango de energías le corresponde las trayectorias D.2 (a) y la densidad de estados D.2 (b).

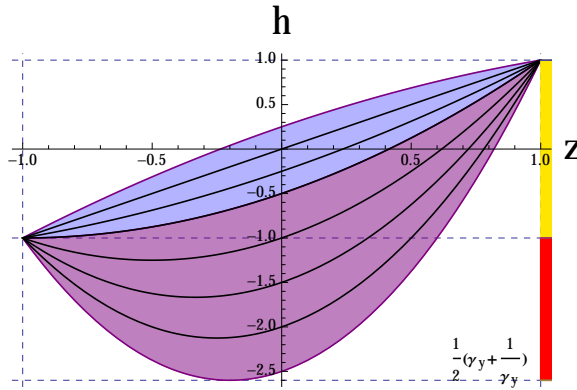
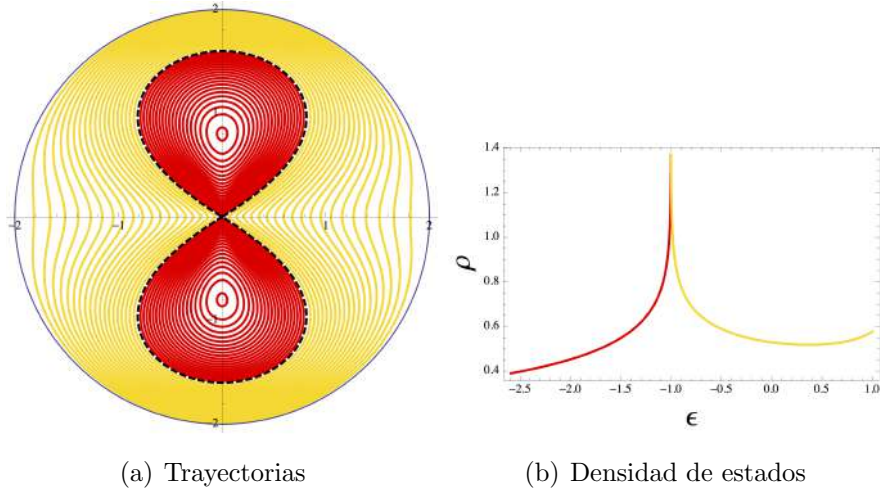


Figura D.1: Continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ y rangos de energía, rojo entre el mínimo de la parábola $h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$ y amarillo de $h = -1$ a $h = 1$.


 Figura D.2: Trayectorias y densidad de estados para el caso **B**.

De manera similar se tiene la Fig. D.3 en donde el continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ con $\gamma_x = 5$ y $\gamma_y = -5$ describe la región con los colores morado, azul y verde el rango de energías esta comprendido entre el rojo que va del mínimo valor de $h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$, el color amarillo que va de $h = -1$ a $h = 1$, y el de color cian que va de $h = 1$ al valor máximo que puede tomar $h(z, \gamma_x)$.

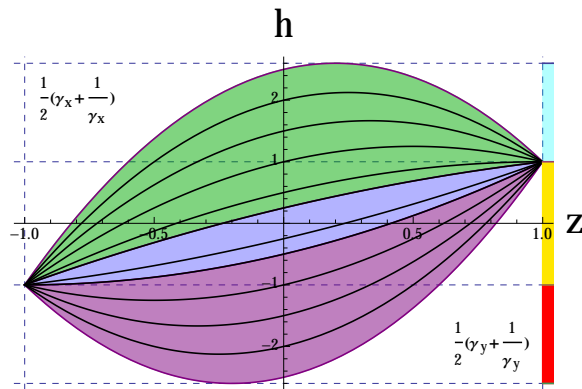


Figura D.3: El continuo de parábolas $h(z, A(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi]$ y rango de energía, rojo ($h(z, \gamma_y)$ a $h = -1$), amarillo ($h = -1$ a $h = 1$), y cian ($h = 1$ al valor máximo que puede tomar $h(z, \gamma_x)$).

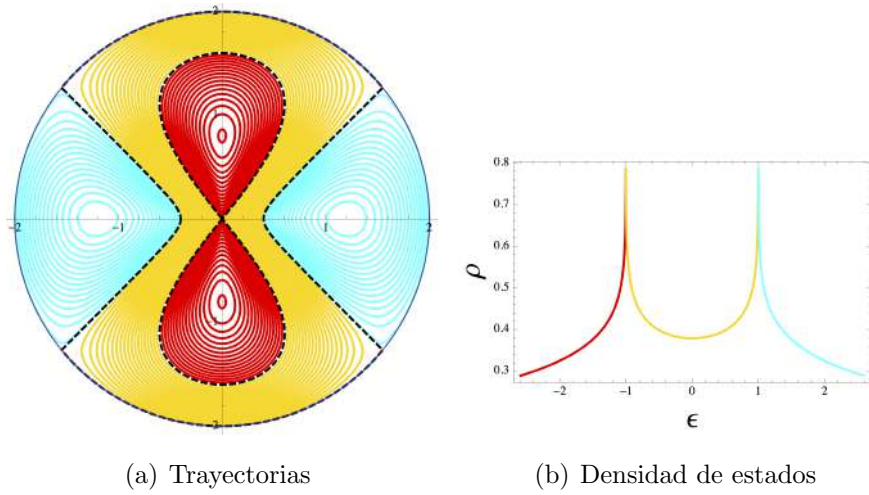


Figura D.4: Trayectorias y densidad de estados para el caso **D**.

Apéndice E

Condiciones de cruzamientos para paridad negativa

Los resultados para valores de γ_x y γ_y que satisfacen la relación 3.9 para paridad negativa se muestran en la Fig. E.1, para los valores que satisfacen la relación 3.8 se muestran en la Fig. E.2 y por último para los valores que no satisfacen las condiciones antes mencionadas se muestran en la Fig. E.3.

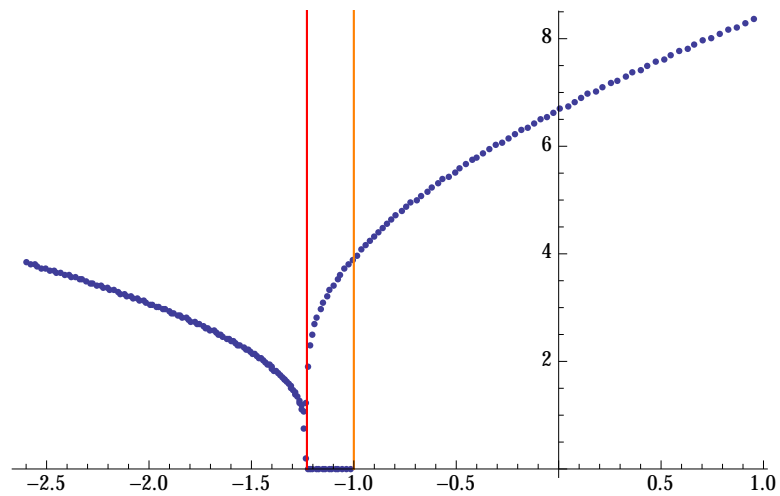


Figura E.1: Satisface 3.9

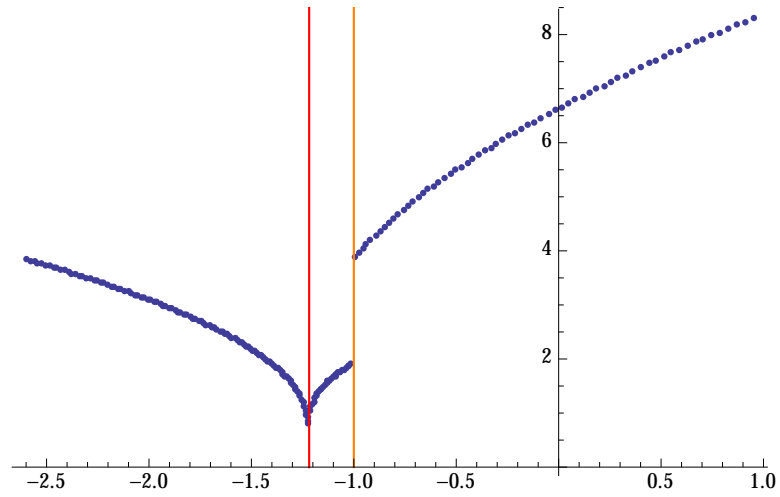


Figura E.2: 3.8

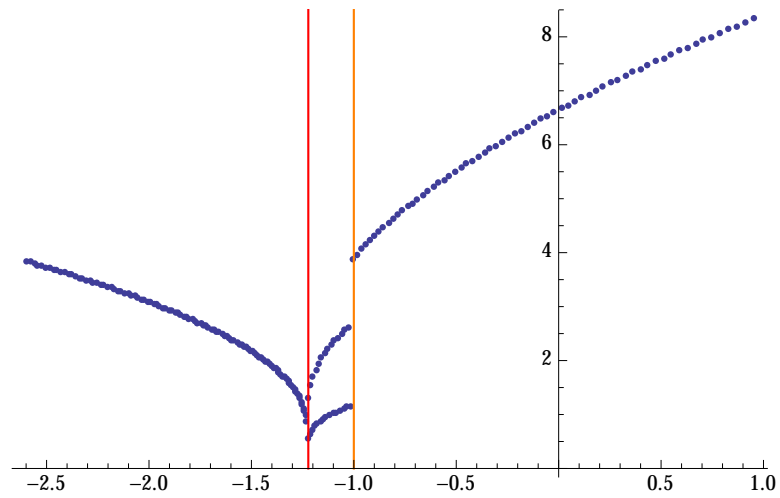


Figura E.3: No satisface 3.8 ni 3.9

Apéndice F

Representación de Husimi

Se presenta a continuación la representación de Husimi para el caso en que $\gamma_y = -0.8$ y $\gamma_x = -0.5$. Primero se muestra una gráfica para las distintas energías de paridad positiva y paridad negativa Fig, F.1, en donde se observa que para los primeros valores de k se presenta degeneración hasta el valor aproximadamente de $k = 5$, posteriormente se observa una pequeña separación de las energías hasta $k = 40$ donde se cambian los valores de la energía de paridad positiva con lo de paridad negativa y posteriormente solo una separación constante.

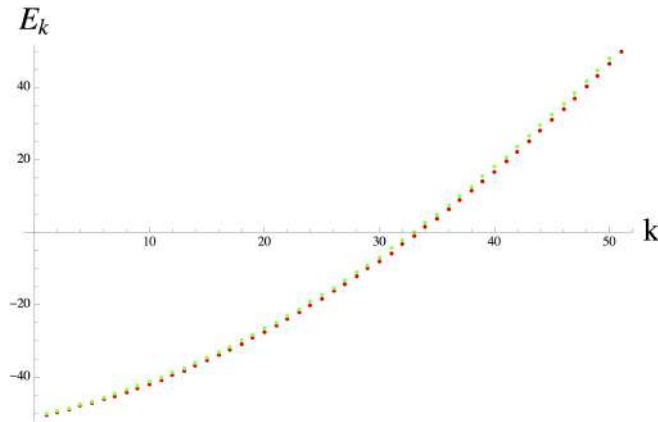


Figura F.1: Energías

Para el caso en que $k = 10, 20, 30$ y 50 , tanto para 3D y contorno (a) y (b) respectivamente se tiene

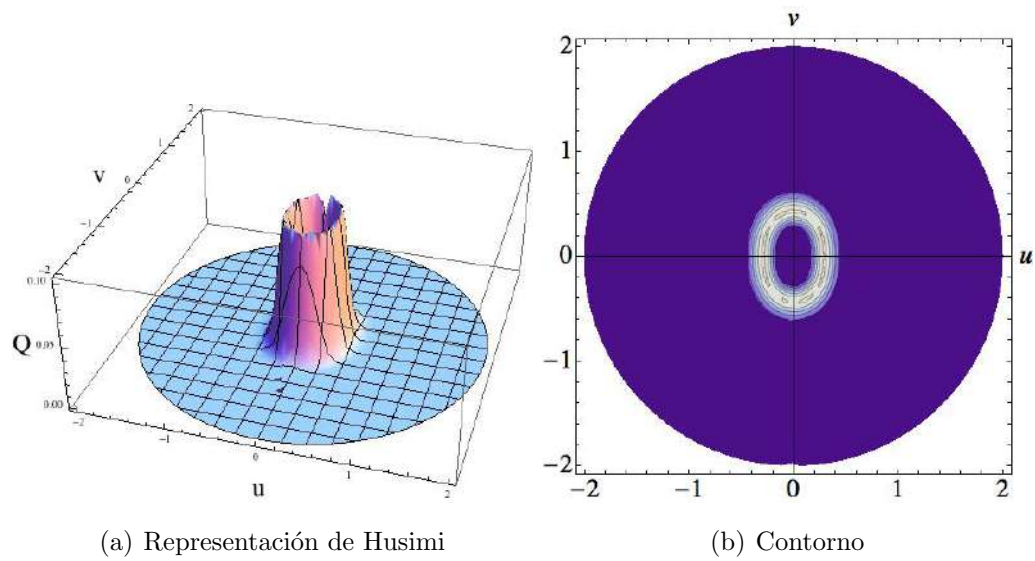


Figura F.2: Caso $k = 10$

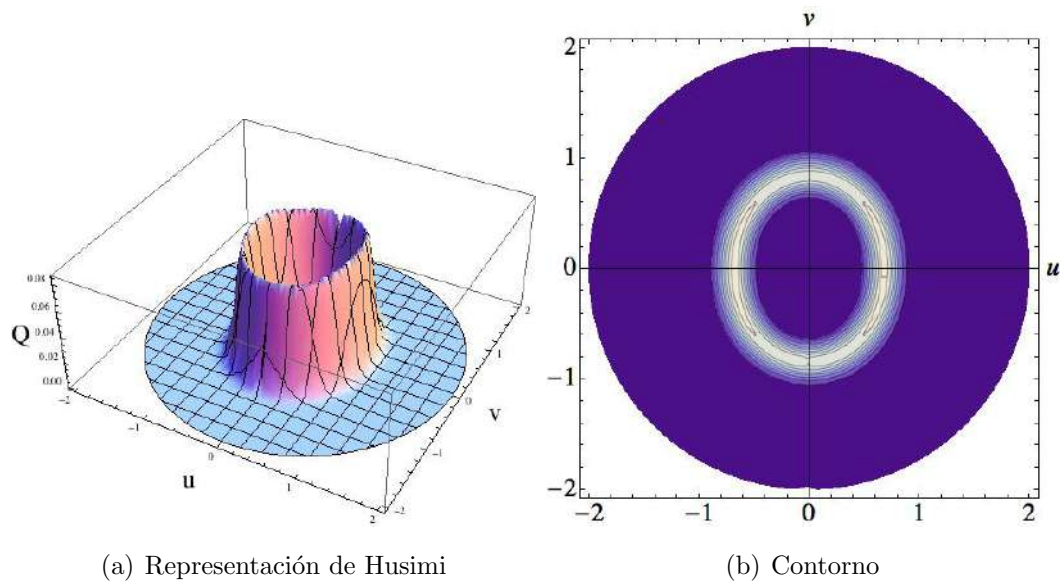
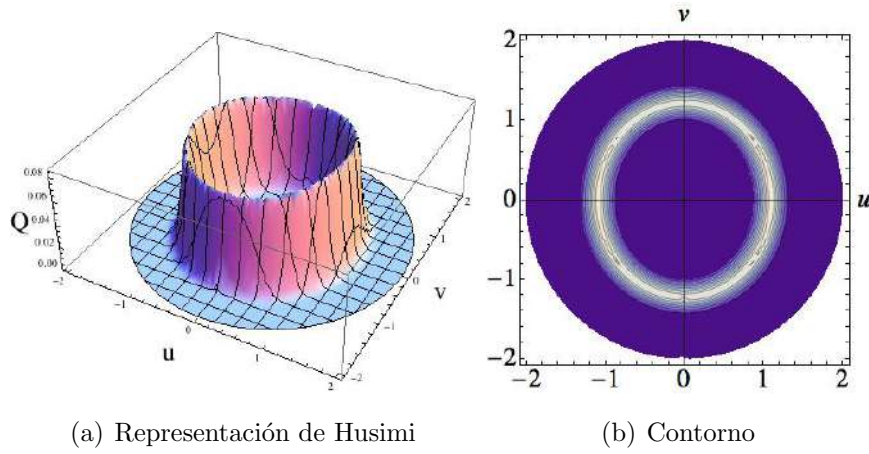
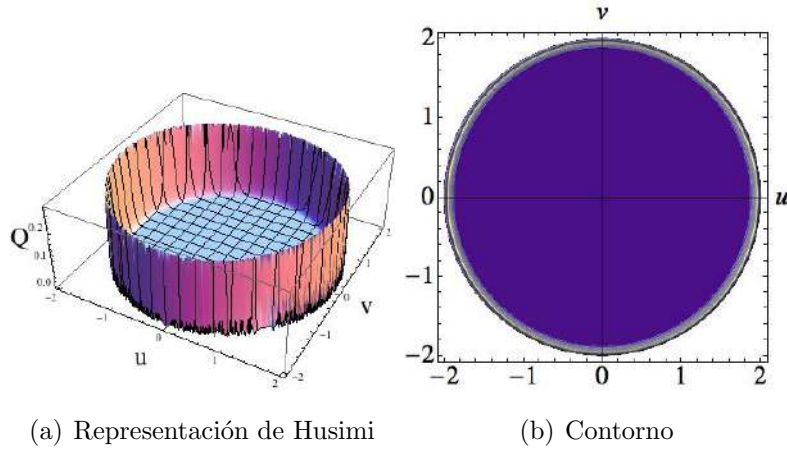


Figura F.3: Caso $k = 20$


 Figura F.4: Caso $k = 30$

 Figura F.5: Caso $k = 50$

Posteriormente se muestra la representación de Husimi para el caso en que $\gamma_y = -5$ y $\gamma_x = 3$. Que al igual que en el caso anterior, primero se muestra una gráfica para las distintas energías de paridad positiva y paridad negativa Fig. F.6. Para los primeros valores de k se observa degeneración hasta el valor aproximadamente de $k = 14$, posteriormente se observa una pequeña separación de las energías hasta $k = 46$ donde se cambian los valores de la energía de paridad positiva con lo de paridad negativa y posteriormente solo una separación constante.

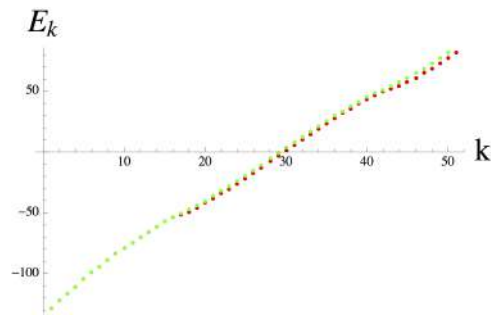


Figura F.6: Energías

Para el caso en que $k = 10, 20, 30$ y 50 se tiene

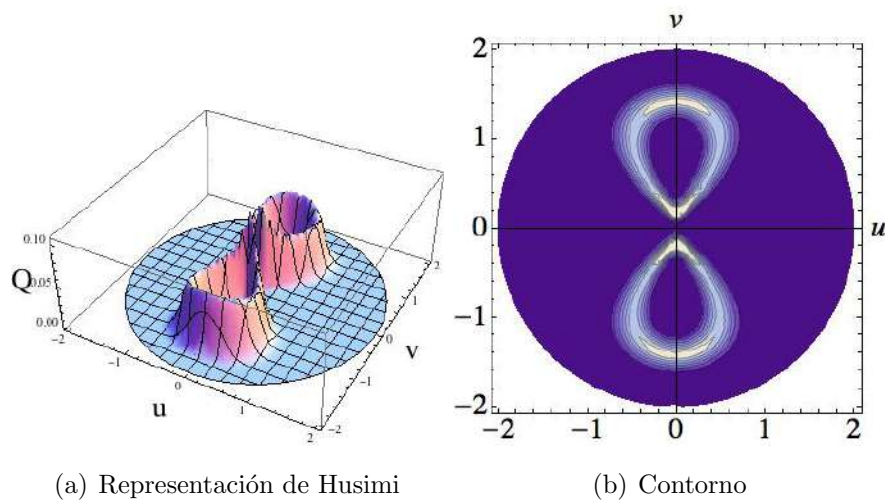


Figura F.7: Caso $k = 10$

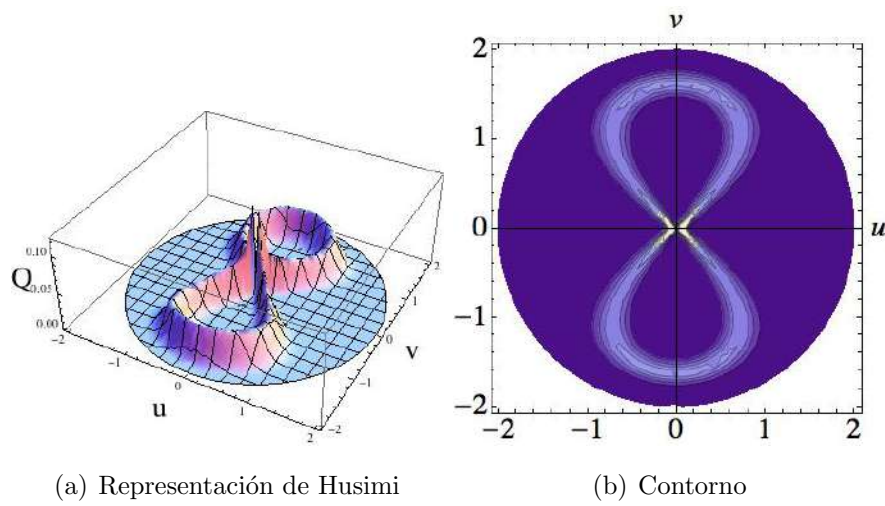


Figura F.8: Caso $k = 20$

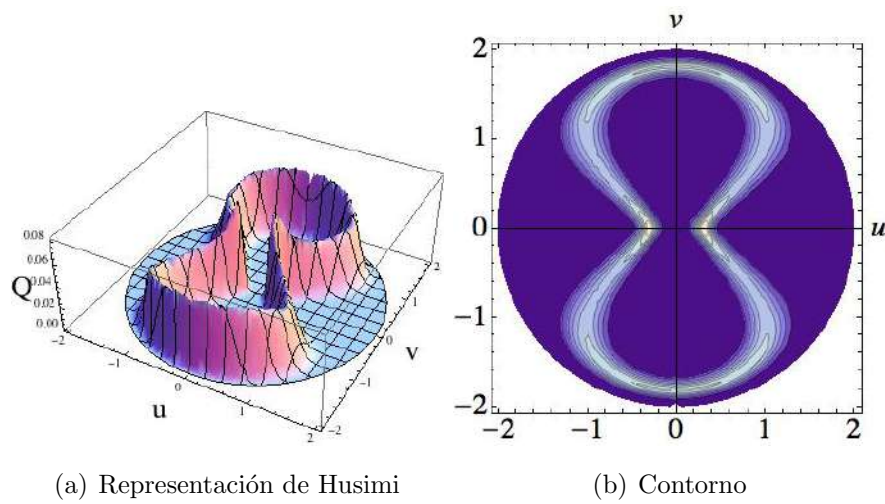


Figura F.9: Caso $k = 30$

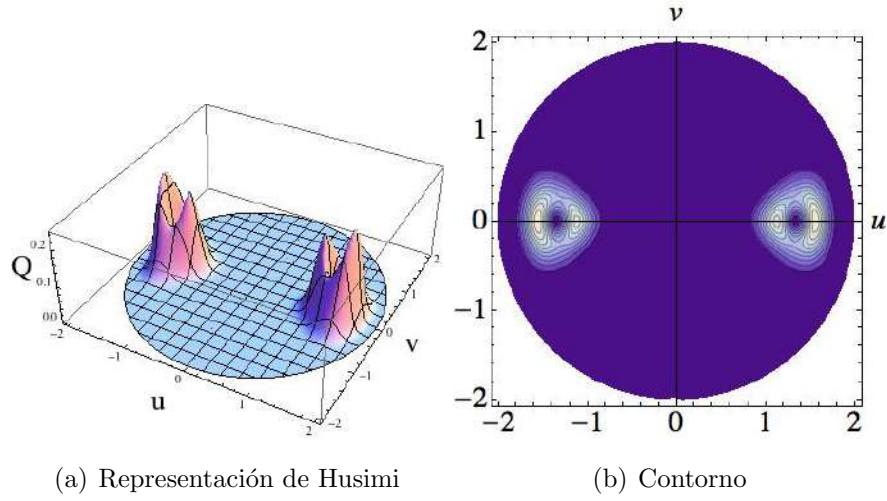


Figura F.10: Caso $k = 50$

Por ultimo el caso en que $\gamma_y = -5$ y $\gamma_x = -0.5$ y se grafican los mismos elementos que en los casos anteriores, obteniendo la Fig. F.11 donde se observa degeneración hasta el valor aproximadamente de $k = 22$ y las pequeñas separaciones hasta $k = 30$

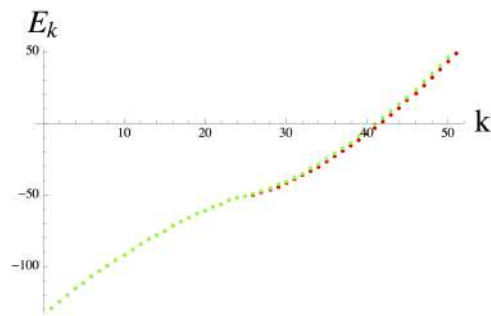


Figura F.11: Energías

De igual manera para los casos $k = 10, 20, 30$ y 50

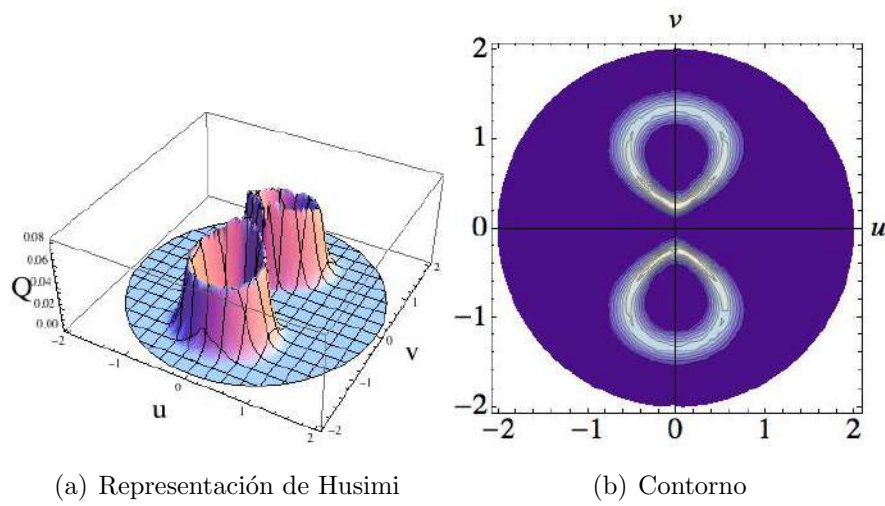


Figura F.12: Caso $k = 10$

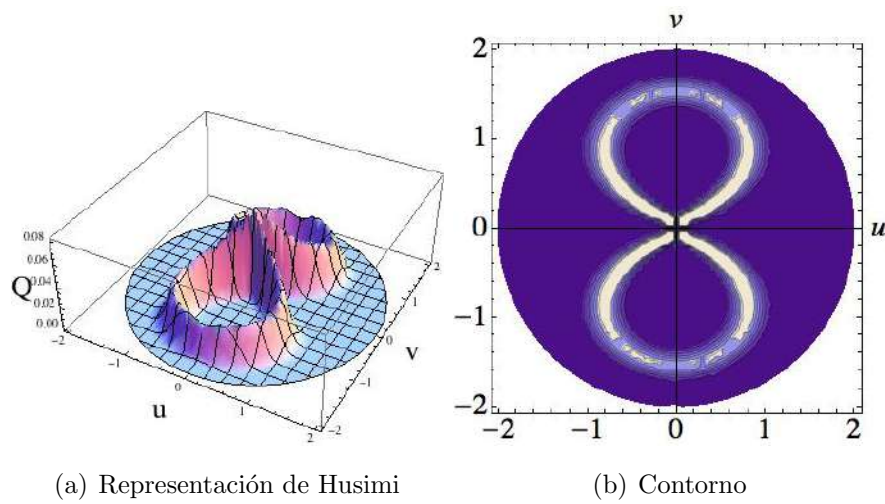


Figura F.13: Caso $k = 20$

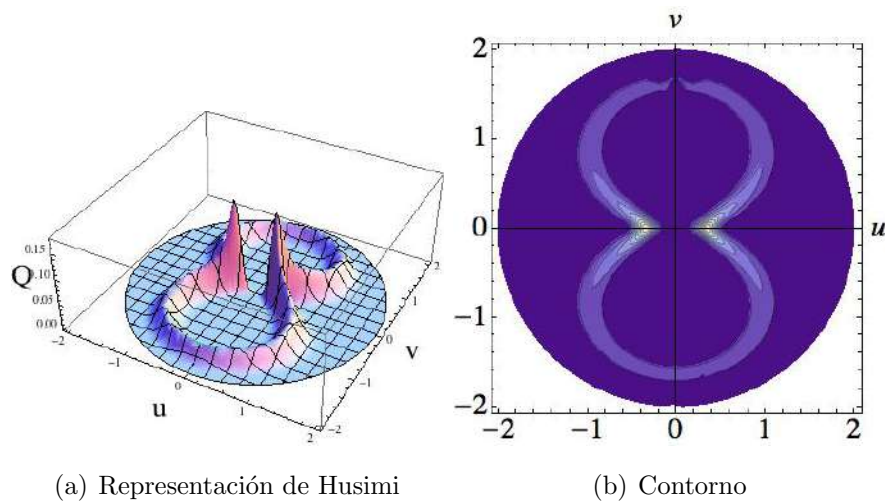


Figura F.14: Caso $k = 30$

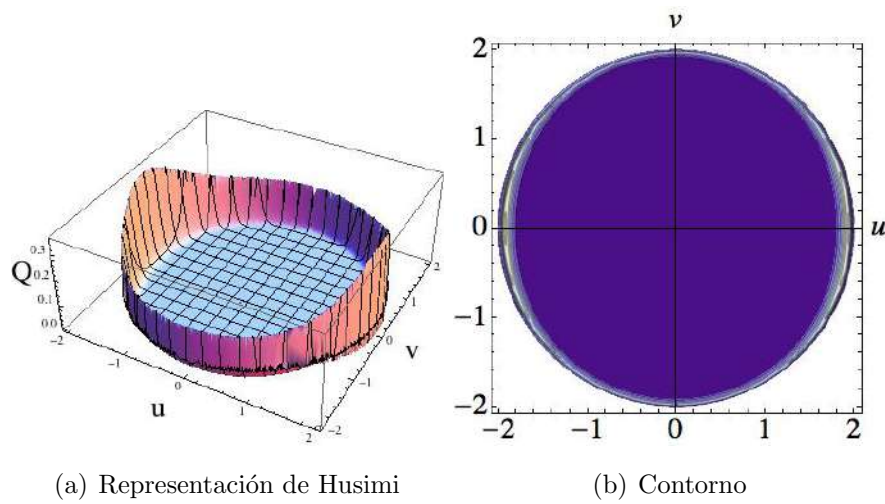


Figura F.15: Caso $k = 50$

Bibliografía

- [1] Lee, Tony E., Reiter, Florentin, and Moiseyev Nimrod. Entanglement and spin squeezing in non-hermitian phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 113:250401, Dec 2014.
- [2] J. Larson. Circuit QED scheme for the realization of the Lipkin-Meshkov-Glick model. *EPL (Europhysics Letters)*, 90:54001, June 2010.
- [3] Gang Chen, J. Q. Liang, and Suotang Jia. Interaction-induced lipkin-meshkov-glick model in a bose-einstein condensate inside an optical cavity. *Opt. Express*, 17(22):19682–19690, Oct 2009.
- [4] Engelhardt, G., Bastidas, V. M., Kopylov, W., and Brandes T. Excited-state quantum phase transitions and periodic dynamics. *Phys. Rev. A*, 91:013631, Jan 2015.
- [5] M.A. Caprio, P. Cejnar, and F. Iachello. Excited state quantum phase transitions in many-body systems. *Annals of Physics*, 323(5):1106 – 1135, 2008.
- [6] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of particles and systems*. Thomson.
- [7] H. Goldstein. *Mecánica Clásica*. Reverté, S. A., 2000.
- [8] Diógenes Campos. Matemática aplicada: Un puente entre el universo cuántico y el mundo clásico. pages 73 – 97.
- [9] Mario Cosenza. *Mecánica Clásica*. Universidad de Los Andes.

-
- [10] Felix Bloch. *Fundamentals of Statistical Mechanics*. Imperial College Press and World Scientific, 2000.
- [11] Wolfgang Arendt, Robin Nittka, Wolfgang Peter, and Frank Steiner. Weyl's law: Spectral properties of the laplacian in mathematics and physics. In *Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity*, pages 1–71. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2009.
- [12] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2005.
- [13] Juan Manuel R. Sanpedro. *Funciones especiales y transformadas integrales con aplicaciones a la mecánica cuántica y electrodinámica*. Casa abierta al tiempo, 2013.
- [14] F. Haake. *Quantum Signatures of Chaos*. Physics and astronomy online library. Springer, 2001.
- [15] Rodrigo Ferrer P., Herbert Massmann L., Victor Muñoz G., Jaime Roessler B., and José Rogan C. *Mecánica Cuántica I*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
- [16] S. Gasiorowicz. *Quantum physics*. Wiley, 1974.
- [17] M Veronez and M A M de Aguiar. Phase space flow in the husimi representation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(48):485304, 2013.
- [18] Toscano F., Kenfack A., Carvalho A. R. R., Rost J. M., and Ozorio de Almeida A. M. Husimi-wigner representation of chaotic eigenstates. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 464:1503–1524, June 2008.
- [19] Jean Pierre Gazeau. *Coherent State in Quantum Physics*. WILEY-VCH, 2007.
- [20] H.J. Lipkin, N. Meshkov, and A.J. Glick. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (i). exact solutions and perturbation theory. *Nuclear Physics*, 62(2):188 – 198, 1965.

-
- [21] N. Meshkov, A.J. Glick, and H.J. Lipkin. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (ii). linearization procedures. volume 62, pages 199 – 210, 1965.
- [22] A.J. Glick, H.J. Lipkin, and N. Meshkov. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (iii). diagram summations. volume 62, pages 211 – 224, 1965.
- [23] V.V. Ulyanov and O.B. Zaslavskii. New methods in the theory of quantum spin systems. *Physics Reports*, 216(4):179 – 251, 1992.
- [24] Shen Young Ho. *Approximation techniques for large finite quantum many-body systems*. PhD thesis, University of Toronto, 2009.
- [25] F. Hund. On the interpretation of molecular spectra. i. *Z. Phys*, 40, Febrero 1927.
- [26] J. von Neuman and E. Wigner. Über merkwürdige diskrete eigenwerte. über das verhalten von eigenwerten bei adiabatischen prozessen. *Zhurnal Physik*, 30:467–470, 1929.
- [27] W. H. Steeb, A. J. van Tonder, C. M. Villet, and S. J. M. Brits. Energy level crossings in quantum mechanics. *Foundations of Physics Letters*, 1:147–162, June 1988.
- [28] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, 1999.
- [29] P. Pérez Fernandez, J. M. Arias A. Relaño, P. Cejnar, J. Dukelsky, and J.E. Garcia Ramos. Excited-state phase transition and onset of chaos in quantum optical models. *Phys. Rev. E*, 83:046208, Apr 2011.
- [30] P. Pérez Fernandez, P. Cejnar, J. M. Arias, J Dukelsky, J. E. García Ramos, and A. Relaño. Quantum quench influenced by an excited-state phase transition. *Phys. Rev. A*, 83:033802, Mar 2011.
- [31] Pavel Cejnar, Stefan Heinze, and Michal Macek. Coulomb analogy for non-hermitian degeneracies near quantum phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 99:100601, Sep 2007.

-
- [32] A. Beiser. *Concepts of Modern Physics*. Physics series. McGraw-Hill, 2003.
- [33] S. Keshavamurthy and P. Schlagheck. *Dynamical Tunneling: Theory and Experiment*. CRC Press, 2011.
- [34] S. Lerma H. and J. Dukelsky. *Nuclear Physics B*, 870(2):421 – 443, Jan 2013.