Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2017-18

Primer examen parcial, octubre de 2017

(Turno de mañana)

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _________________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo. Justifique todas sus respuestas.
- Algunos límites útiles:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0\,.$$
- Un límite de funciones útil:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\, x}{x} = 1$$
- Teorema. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales monótona y acotada. Entonces $\{a_n\}$ tiene límite.

---

1. [2 puntos] Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1\,.$$

Solución: Hay varias formas de resolver este problema. Aquí indicamos dos.

Primera forma:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1}\right|^2 \leq 1^2 = 1,$$

ya que para números **positivos**, $a \leq b$ si y solo si $a^2 \leq b^2$. Como $|x|^2 = x^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, estudiamos

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2 \leq 1, \Longleftrightarrow (2x+1)^2 \leq (x-1)^2,$$

donde la desigualdad no cambia de sentido porque hemos multiplicado por $(x-1)^2$ en ambos lados, y $(x-1)^2 \geq 0$. Desarrollando , queda

$$4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 - 2x + 1, \Longleftrightarrow 3x^2 + 6x \leq 0, \Longleftrightarrow 3x(x+2) \leq 0.$$

$3x(x+2)$ se anula en $x = 0$, y $x = -2$. Dividiendo $\mathbb{R}$ en $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$, vemos que $3x(x+2) \leq 0$ en $(-2, 0)$. Los puntos -2 y 0 anulan $3x(x+2)$, por lo que al necesitar $3x(x+2) \leq 0$, hay que incluirlos en la solución. Así que el conjunto pedido es el intervalo cerrado $[-2, 0]$.

Segunda forma: Para tratar la desigualdad

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1,$$

dividimos la recta real en trozos dependiendo de dónde sea $\dfrac{2x+1}{x-1}$ positivo o negativo.
$2x+1$ se anula en $x = -1/2$, y $x - 1$ lo hace en $x = 1$. Por lo tanto dividimos la recta real en los intervalos $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 1)$, y $(1, \infty)$, y en cada uno de ellos estudiamos dónde $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1$.

- En $(-\infty, -1/2)$, $|2x+1| = -(2x+1)$, y $|x-1| = -(x-1)$, con lo que la desigualdad queda

  $$\frac{-2x-1}{-x+1} \leq 1 \Longleftrightarrow -2x - 1 \leq 1 - x \Longleftrightarrow -2 \leq x$$

  donde para alcanzar la segunda desigualdad, hemos usado que $-x+1 \geq 0$ en $(-\infty, -1/2)$ (si no, la desigualdad hubiera cambiado de dirección). Esta parte nos da los puntos $[-2, -1/2)$.

- En $(-1/2, 1)$, $|2x+1| = 2x+1$, y $|x-1| = -(x-1)$, con lo que la desigualdad queda

  $$\frac{2x+1}{-x+1} \leq 1 \Longleftrightarrow 2x + 1 \leq 1 - x \Longleftrightarrow 3x \leq 0,$$

  donde, una vez más, para alcanzar la segunda desigualdad, hemos usado que $-x+1 \geq 0$ en $(-\infty, -1/2)$ (si no, la desigualdad hubiera cambiado de dirección). Esta parte nos da los puntos $[-1/2, 0]$.

- En $(1, \infty)$, $|2x+1| = 2x+1$, y $|x-1| = x-1$, con lo que la desigualdad queda

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq 1 \Longleftrightarrow 2x+1 \leq x-1, \Longleftrightarrow x \leq -2,$$

  que no es cumplido por ninguno de los puntos en $(1, \infty)$.

Juntando los conjuntos obtenidos en cada caso, obtenemos que la desigualdad se cumple en $[-2, 0]$.

2. [2 puntos] Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-4}\right)^{2n+3}.$$

Solución: El límite es una indeterminación del tipo 1^{∞}, así que intentamos reescribirlo de alguna forma que involucre al número e. Para ello, escribimos

$$\frac{n-1}{n-4}=1+\left(\frac{n-1}{n-4}-1\right)=1+\left(\frac{n-1-(n-4)}{n-4}\right)=1+\left(\frac{3}{n-4}\right)=1+\frac{1}{\left(\frac{n-4}{3}\right)}$$

La sucesión se puede escribir entonces como

$$\left[1+\frac{1}{\left(\frac{n-4}{3}\right)}\right]^{2n+3}=\left[1+\frac{1}{\left(\frac{n-4}{3}\right)}\right]^{\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{3}{n-4}\right)(2n+3)}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{3}\right)=\infty$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{n-4}{3}\right)}\right]^{\left(\frac{n-4}{3}\right)}=e,$$

y el límite del exponente $\left(\frac{3}{n-4}\right)(2n+3)$ es

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n-4}\right)(2n+3)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+9}{n-4}=6,$$

por lo que el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-4}\right)^{2n+3}=e^{6}$$

3. $[3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Dada la sucesión definida de forma recurrente como

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + 2), \quad n \geq 1.$$

Demuestre que:
(a) $a_n \leq 4$ para todo $n \geq 1$.

Solución: Lo hacemos por inducción. Sea $\mathcal{P}(n)$ la afirmación $a_n \leq 4$.

- $\mathcal{P}(1)$ es verdad porque $a_1 = 1 \leq 4$;
- suponemos ahora que $\mathcal{P}(n)$ fuera verdad, y queremos usarlo para ver que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdad. Entonces
$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + 2) \leq \frac{2}{3}(4 + 2) = \frac{12}{3} = 4,$$
donde hemos usado la hipótesis de inducción en la desigualdad; por lo tanto vemos que $a_{n+1} \leq 4$, que es lo que queríamos ver.

Por el principio de inducción, $a_n \leq 4$ para todo $n \geq 1$.

(b) Demuestre que a_n es una sucesión monótona creciente.

Solución: Para ver esto, tenemos que ver si $a_{n+1} - a_n \geq 0$ para todo n. Pero

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}(a_n + 2) - a_n = \frac{4}{3} - \frac{a_n}{3} \geq 0,$$

porque $a_n \leq 4$ por la primera parte del problema.

(c) Demuestre razonadamente que a_n tiene límite y calcúlelo.

Solución: a_n tiene límite por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, al ser una sucesión monótona creciente y acotada superiormente.
Para calcular el límite, suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, y tomamos el límite a ambos lados de la ecuación $a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + 2)$, lo que da

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}(a_n + 2) = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} (a_n + 2) = \frac{2}{3}(L + 2).$$

Resolviendo esta ecuación, queda $L = 4$.

4. [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Se define la función

$$g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 3, \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x(2x+1)}, & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ -x + 1, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar razonadamente que la función g es contínua en todo punto $x \neq 3$ and $x \neq 0$.

Solución:

- En el intervalo $(3, \infty)$ f es igual a la función constante $2e$, y las funciones constantes son continuas en todos los puntos de su dominio.
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ f es igual a la función $-x + 1$, que al ser un polinomio es continua en todos los puntos de su dominio.
- En el intervalo $(0, 3)$ hay que trabajar un poco más. Primero de todo, $x^2 + x^4 \geq 0$, por lo que la función $\sqrt{x^2 + x^4}$ es continua en $(0, 3)$. El denominador puede ofrecer problemas si se anula. Pero esto ocurre en los puntos $x = 0$ y $x = -1/2$, que se hallan fuera del intervalo en que estamos trabajando, $(0, 3)$. Por lo tanto la función es cociente de dos funciones continuas en todo $(0, 3)$, con el denominador no anulándose, y esto la hace continua.

(b) Estudiar la continuidad de la función en el punto $x = 0$.

Solución: Al estar la función definida de forma diferente a la izquierda y a la derecha de $a = 0$, usamos límites laterales para calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x + 1) = -0 + 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2(1 + x^2)}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{(2x+1)} = 1.$$

Al coincidir ambos límites laterales, se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
Por otra parte, $f(0) = 1$. Como el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$ coincide con $f(0)$, f es continua en $a = 0$.

(c) Estudiar la continuidad de la función en el punto $x = 3$.

Solución: Otra vez, la función se define de forma diferente a un lado y a otro del punto en cuestión (en este caso $a = 3$), por lo que el $\lim_{x\to 3} f(x)$ lo calculamos usando límites laterales.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2(1 + x^2)}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{(2x+1)} = \frac{\sqrt{10}}{7}.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2e.$$

Como ambos límites laterales son diferentes, $\lim_{x\to 3} f(x)$ no puede existir, y por tanto la función ya no puede ser continua en $a = 3$.