Cálculo I (Grupo 119) • Parcial 1 • 18 de octubre de 2018

Apellidos: ______________________________ Nombre: ___________________________________

1. [2 puntos] Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$x^2 - 3 \leq x\,|x-1|.$$

Solución: Primero rompemos el problema en casos, dependiendo del valor absoluto:

1. **Caso 1:** $x \geq 1$: Para estos x's, $|x-1| = x-1$, y la desigualdad queda como

$$x^2 - 3 \leq x(x-1), \qquad x^2 - 3 \leq x^2 - x, \qquad -3 \leq -x, \quad x \leq 3.$$

   Como nos habíamos limitado a x's con $x \geq 1$, esto nos da los puntos $1 \leq x \leq 3$.

2. **Caso 2.** $x \leq 1$: Para estos x's, $|x-1| = 1-x$, y la desigualdad queda como

$$x^2 - 3 \leq x(1-x), \quad x^2 - 3 \leq x - x^2, \quad 2x^2 - x - 3 \leq 0,$$

   así que tenemos que buscar los $x \leq 1$ tal que $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

   Para ello vemos cuando la parábola $2x^2 - x - 3$ se hace negativa:

$$2x^2 - x - 3 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}, \quad x = 3, x = -2.$$

   Comprobando, vemos que $2x^2 - x - 3 \leq 0$ enel intervalo $[-2, 3]$. Como en este caso, sólo nos estábamos preocupando de los puntos $x \leq 1$, este apartado nos da los x's en el intervalo $[-2, 1]$.

La solución es entonces la unión de ambos conjuntos, lo que da el intervalo $[-2, 3]$.

2. [2 puntos] Decide razonadamente la existencia del siguiente límite (y, en su caso, calcula su valor):

$$\lim a_n \qquad \text{con} \qquad a_n = \left(\frac{4n^2+4}{4n^2+1}\right)^{n^2+2n}.$$

Solución: Primero identificamos que

$$\frac{4n^2+4}{4n^2+1} = 1 + \frac{3}{4n^2+1} = 1 + \frac{1}{\frac{4n^2+1}{3}},$$

así que el término de la sucesión cuyo límite se pide tiene el aspecto

$$\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{3}}\right)^{n^2+2n} = \left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{3}}\right)^{\frac{4n^2+1}{3}\cdot\frac{3(n^2+2n)}{4n^2+1}}.$$

Ahora observamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3} = \infty$, así que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+1}{3}}\right)^{\frac{4n^2+1}{3}} = e,$$

y por otra parte,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n^2+2n)}{4n^2+1} = \frac{3}{4},$$

así que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4}{4n^2+1}\right)^{n^2+2n} = e^{3/4}.$$

3. [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Dada la sucesión definida de forma recurrente como

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestra que $0 < a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Primero demostramos que $a_n > 0$ para todo n usando inducción:

- $a_1 = \frac{1}{2} > 0$;
- suponemos que $a_n > 0$, y vemos que en ese caso,

  $$\frac{1+a_n}{2} > \frac{1}{2},$$

  y

  $$\sqrt{\frac{1+a_n}{2}} > \sqrt{\frac{1}{2}},$$

  donde usamos que la raíz cuadrada es creciente. Por inducción se sigue que $a_n > 0$ para todo n.

Ahora demostramos que $a_{n+1} < 1$ para todo n usando otra vez inducción:

- $a_1 = \frac{1}{2} < 1$;
- suponemos que $a_n < 1$, y observamos que

  $$\frac{1+a_n}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$

  y

  $$\sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < \sqrt{1} = 1.$$

  Por inducción, $a_n < 1$ para todo n.

(b) Demuestra que a_n es una sucesión monótona (creciente o decreciente).

Solución: Mirando a_n para n pequeños vemos que de ser algo, a_n debería ser creciente, pero tenemos que demostrarlo. Para ello, volvemos a usar inducción:

- Sea $\mathcal{P}(n)$ la afirmación $a_n \leq a_{n+1}$. Claramente $\mathcal{P}(1)$ es verdad, ya que $a_1 = 1/2$, $a_2 = \sqrt{3}/4$.
- Asumo ahora que $\mathcal{P}(n)$ es cierta; quiero ver que $\mathcal{P}(n+1)$ también lo es:

  $$a_{n+2} = \sqrt{\frac{1+a_{n+1}}{2}} \geq \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} = a_{n+1},$$

  donde en la desigualdad hemos usado la hipótesis de inducción.

Por inducción se sigue que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, y la sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

(c) Demuestra razonadamente que a_n tiene límite y calcúlalo.

Solución: La sucesión $\{a_n\}$ es acotada (por (a)), y creciente (por (b)); por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tiene límite.

Para calcularlo, lo llamamos L, y observamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L,$$

así que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+L}{2}}.$$

Despejamos L, y obtenemos la ecuación $2L^2 - L - 1 = 0$, que tiene como soluciones $L = 1$, $L = -1/2$. Pero como $a_n \geq 0$ para todo n, su límite L también debe ser no negativo. Por ello la posibilidad $L = -1/2$ queda eliminada, y el resultado es $L = 1$.

4. [3 = 1 + 1 + 1 puntos] Considera la función $f(x) = (1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-2x+x^2}}$.

(a) Calcula su dominio.

Solución: El término bajo la raíz se puede escribir como

$$\frac{1+x}{1-2x+x^2} = frac1 + x(x-1)^2,$$

que es no negativo siempre que $1 + x \geq 0$. Eso haría pensar que el dominio de la función es $x \geq -1$, pero hay que quitar de ese conjunto aquellos punto donde el denominador de la fracción se anula, esto es $x = 1$. Por lo tanto el dominio es el conjunto $(-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(b) Calcula el límite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solución: Como

$$\frac{1+x}{1-2x+x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2},$$

tenemos que

$$f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)^2}}, = (1-x)\frac{\sqrt{1+x}}{|1-x|} = \sqrt{1+x} \cdot \frac{1-x}{|1-x|}.$$

Para estudiar el límite, uso límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{1+x} \cdot \frac{1-x}{|1-x|} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{1+x} \cdot \frac{1-x}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{1+x} \cdot (-1) = -\sqrt{2},$$

pero

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x} \cdot \frac{1-x}{|1-x|} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x} \cdot \frac{1-x}{(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x} \cdot 1 = \sqrt{2}.$$

Como ambos límites difieren, el límite original no existe.

(c) ¿Es posible definir $f(1)$ para que f sea continua en $a = 1$?

Solución: En el apartado (b) hemos visto que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe, así que no podemos definir $f(1)$ para que f sea continua en $x = 1$.