Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2019-20

Examen parcial, 21 Noviembre 2019

(Turno de tarde)

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo. Justifique todas sus respuestas.
- Algunos límites útiles:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} e, \qquad n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
- Teorema sobre la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas (o de Bolzano-Weierstrass débil): Sea a_n una sucesión de números reales monótona y acotada. Entonces a_n tiene límite finito.

---

1. [2, 5 puntos] Decídase razonadamente la existencia de los siguientes límites (y, en su caso, calcúlese su valor):

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n - 5^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} + n^6 e^{-2n} + (-1)^n \log(n!)}{(n+9)\log(1+n^4)}.$$

2. [2, 5 puntos] Estudiar el comportamiento de las siguientes series de términos no-negativos. Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin^7(n!-5^n)}{(n+7)\log(1+n^5)+\sqrt{9n^2+1}+6n^{\frac{5}{4}}} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

3. [2, 5 puntos]Estudiar el comportamiento de las siguientes series: decidir si son convergentes (absolutamente o solo condicionalmente) o si son divergentes (a infinito o bien oscilantes). Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right) \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=4}^{\infty}\left(\sqrt{3n+\frac{(-1)^n}{n}}-\sqrt{3n}\right)$$

4. [2, 5 puntos] La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ viene definida por las siguientes condiciones:

$$a_1 = 2\,, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{5} + 8\,, \quad n \geq 1\,.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $a_n \leq 12$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestre por inducción (o por otro método adecuado) que la sucesión (a_n) es creciente.

(c) Deduzca que (a_n) es una sucesión convergente y determine su límite razonadamente.