Universidad de La Laguna

Complejidad Computacional

Tema 1: Modelos de computación

Definiciones

- Teoría de la computación
  - Modelos matemáticos
    - Formalizar el concepto de cómputo
    - Clasificar problemas
  - Límites para solucionar problemas mediante algoritmos.
    - Funciones computables o calculables
  - No se consideran detalles de implementación

Definiciones

- Tipos de funciones

$$f: N^n \rightarrow N^m$$

  - Función total
    - Definidas para cualquier valor del dominio
  - Función parcial
    - Definidas en X $\subseteq$ N
- Recursión
  - Método para definir una función especificando cada uno de sus valores en término de valores previamente definidos y, posiblemente, utilizando otras funciones ya definidas

Funciones recursivas

- Problema:

$$f: N^n \rightarrow N$$

  - Dominio y rango: números naturales
- Función recursiva:
  - Una base: funciones iniciales
  - Reglas de construcción recursiva
    - Determinar otros valores a partir de valores conocidos
  - La función sólo toma aquellos valores que resultan de aplicar, un número finito de veces, las reglas de construcción recursiva

Funciones recursivas básicas

- A partir de este conjunto de funciones se construyen funciones computables más complejas
  - Función Nula o Cero

$$z: N \rightarrow N$$
$$x \in N \rightarrow z(x) = 0 \in N$$

  - Función Sucesor o Siguiente

$$s: N \rightarrow N$$
$$x \in N \rightarrow s(x) = x + 1 \in N$$

  - Función Proyección

$$P_i{}^n: N^n \rightarrow N$$
$$(x_1, \cdots x_n) \in N^n \rightarrow P_i{}^n(x_1, \cdots x_n) = x_i, n \geq 1, 1 \leq i \leq n$$

    - Función Indentidad: $P_1{}^1$

Operaciones

- Combinación:

$$h = f\ x\ g\colon\ N^n \ \rightarrow N^{m+k}$$

  - Se define a partir de:

$$f\colon\ N^n \ \rightarrow N^m$$

$$g\colon\ N^n \ \rightarrow N^k$$

  - como:

$$h\colon\ N^n \ \rightarrow N^{m+k}$$

$$X = (x_1, \cdots, x_n) \in \ N^n \ \rightarrow h(X) = (f(X), g(X))$$

Operaciones

- Composición:

$$h = f \circ (g_1, \dots, g_m) \colon N^n \to N$$

  - Se define a partir de:

$$f \colon N^m \to N$$

    y una familia de funciones $g_i, \; i = 1, \dots, m$

$$g_i \colon N^n \to N$$

  - como:

$$h \colon N^n \to N$$

$$X = (x_1, \cdots, x_n) \in N^n \to h(X) = f(g_1(X), \dots, g_m(X))$$

  - También se puede definir para funciones con rango N^k

Operaciones

- Recursión primitiva:
  - Se define a partir de:

$$g\colon N^n \to N$$
$$h\colon N^{n+2} \to N$$

  - como:

$$f\colon N^{n+1} \to N$$
$$Sea\ X = (x_1, \cdots, x_n) \in N^n$$
$$f(X,0) = g(X)$$
$$f(X,S(y)) = h(X,y,f(X,y))$$

    - Se denominan ecuación límite y ecuaciones de recursión
  - También se puede definir recursión sin parámetros

Funciones primitivas recursivas

- El conjunto de funciones primitivas recursivas se define según las siguientes reglas:
  1. Las funciones básicas son funciones recursivas primitivas
  2. Las funciones obtenidas a partir de funciones recursivas primitivas mediante composición y recursión, son funciones recursivas primitivas
  3. Éstas son todas las funciones recursivas primitivas

Predicados recursivos primitivos

- Predicado: relación sobre n números naturales

$$P(x_1, \dots, x_n) \subseteq N^n$$

- Función característica de un predicado:

$$fp(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & si\ P(x_1, \dots, x_n)\ es\ verdadero \\ 0 & si\ P(x_1, \dots, x_n)\ es\ falso \end{cases}$$

- Un predicado se dice predicado recursivo primitivo $\Leftrightarrow$ su función característica es primitiva recursiva

- Predicados disjuntos
  - Función definida por casos

FRP sobre cadenas

- Se pueden definir funciones recursivas primitivas sobre cadenas de caracteres

$$f : (\Sigma^*)^n \rightarrow \Sigma^*$$

- Es una función recursiva primitiva si:
  - Es una función base para cadenas, definidas sobre Σ^*
  - Se puede generar a partir de las funciones iniciales sobre Σ aplicando las funciones constructoras

Funciones computables

- Una función es computable:
  - Es posible encontrar la solución por medio de un algoritmo
  - Se puede limitar el cálculo por adelantado
  - Se puede determinar que el cálculo terminará

- Existen funciones computables, que no son primitivas recursivas
  - Funciones parcialmente recursivas

Funciones μ-recursivas

- Funciones parcialmente recursivas:

$$f\colon N^n \to N^m$$

  - Conjunto de funciones que pueden obtenerse de las funciones básicas, a partir de un número finito de operaciones de composición, recursividad primitiva y minimización

  - Operación de minimización:

$$f(x) = \mu y[g(x,y) = 0]$$
$$t.q. \forall z < y, \qquad g(x,y) \;\; definido$$

    - Mínimo *y* tal que se cumpla la condición, y para todos los valores *z* < *y*, *g(x,y)* está definido