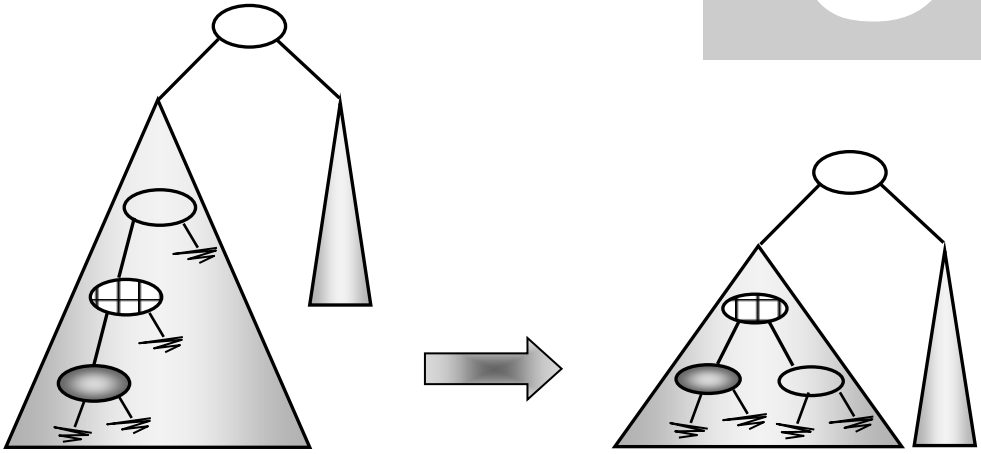
Edição não comercial do livro Estruturas de Dados com Jogos © Roberto Ferrari, Marcela Xavier Ribeiro, Rafael Loosli Dias, Mauricio Falvo. Fornecida gratuitamente a estudantes em cursos e/ou disciplinas sob responsabilidade dos autores. Para uso acadêmico. Não repasse a terceiros sem a autorização dos autores.

Capítulo

9



# Árvores Balanceadas

## Seus Objetivos neste Capítulo

- Entender o conceito de Balanceamento, e sua importância para a eficiência das Árvores Binárias de Busca;
- Desenvolver habilidade para elaborar algoritmos sobre Árvores Binárias de Busca Balanceadas, e para adaptar a lógica do Balanceamento a novas situações, se necessário.

### 9.1 Conceito de Balanceamento

A excelente performance de uma Árvore Binária de Busca só é atingida se os Nós estiverem uniformemente distribuídos ao longo de toda a Árvore. A Árvore não pode crescer para apenas um dos lados - Esquerda ou Direita. É preciso crescer equilibradamente, para ambos os lados: para cada Nó, as alturas das Subárvores Esquerda e Direita precisam ser iguais, ou pelo menos parecidas.

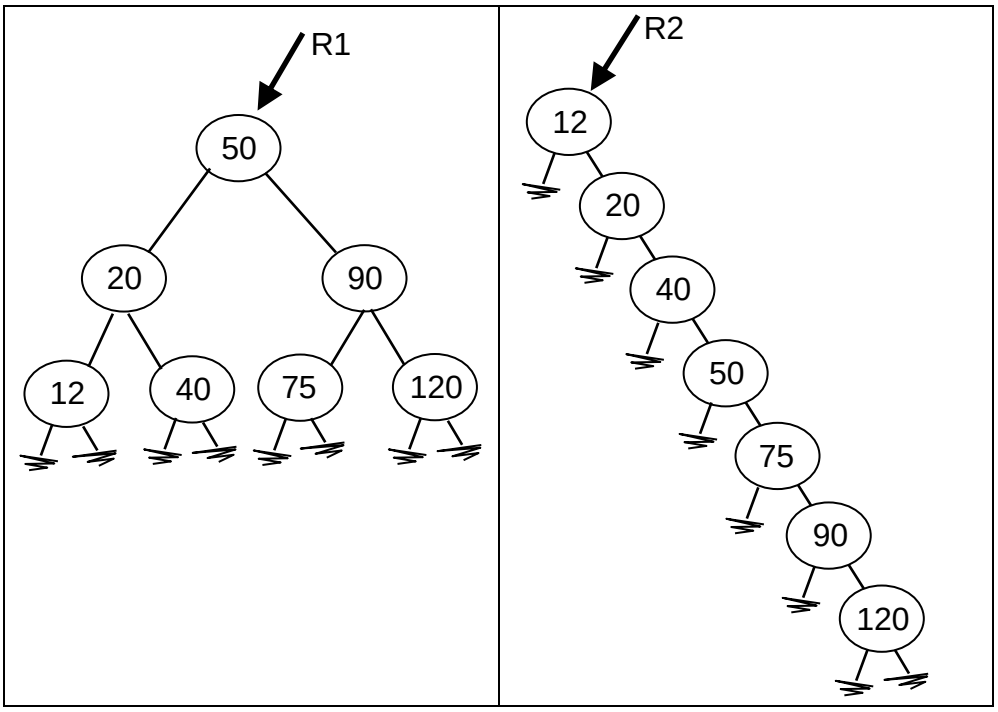
Os algoritmos para inserção e eliminação de Nós em uma ABB que elaboramos no Capítulo 8 não garantem que haja equilíbrio entre as alturas das Subárvores. Assim, o equilíbrio e a performance podem se degradar a cada operação.

#### Exercício 9.1 Inserir Sequencia de Valores

Aplique o algoritmo Insere desenvolvido no Capítulo 8, e insira em uma ABB de Raiz R1, inicialmente vazia, os seguintes valores, na Sequencia (A): 50, 20, 40, 12, 90, 75, 120. Em seguida, em uma

segunda Árvore de Raiz R2, também inicialmente vazia, insira os mesmos valores, mas na Sequencia (B): 12, 20, 40, 50, 75, 90, 120.

O Quadro 9.1 mostra como ficariam as Árvores R1 e R2, dada a utilização do algoritmo Insere que desenvolvemos no Capítulo 8, para a inserção das sequencias de valores (A) e (B), do Exercício 9.1. Foram inseridos os mesmos valores em R1 e em R2, mas em R1 os valores foram inseridos na Sequencia (A), e em R2 foram inseridos na Sequencia (B).




**Quadro 9.1 Valores Inseridos em Sequencias Diferentes**

As Árvores R1 e R2 do Quadro 9.1 ilustram uma deficiência dos algoritmos de inserção e eliminação em uma ABB que elaboramos no Capítulo 8: dependendo da ordem de inserção dos elementos, as Árvores podem ficar equilibradas, como R1 no Quadro 9.1a, ou desequilibradas, como R2 no Quadro 9.1b. Por Árvore "equilibrada" entendemos uma Árvore em que os tamanhos de suas Subárvores Esquerda e Direita são iguais, ou compatíveis.

Refletindo sobre a eficiência das Árvores Binárias de Busca no Capítulo 8, chegamos à conclusão de que se uma ABB *uniformemente distribuída* tiver 20 Níveis, ela terá cerca de 1 milhão de elementos, e poderemos saber se um elemento X está ou não nessa Árvore visitando, no máximo, 20 Nós. A conclusão traz como ressalva que esta performance é obtida em "uma ABB uniformemente distribuída", como R1, no Quadro 9.1a.

A Árvore R2, no Quadro 9.1b, não é uniformemente distribuída. R2 é uma árvore desequilibrada, ou ainda desbalanceada, pois a Subárvore Direita é muito maior do que a Subárvore Esquerda. Logo, devido a esse desequilíbrio, em uma Árvore como R2 não teríamos a mesma eficiência que obtemos em Árvores Balanceadas, como R1. Se uma Árvore desbalanceada como R2 tiver 1 milhão de elementos, no

pior caso teremos que visitar 1 milhão de Nós para ter certeza de que um valor X está na Árvore.

Visitar no máximo 20 Nós ou no máximo 1 milhão de Nós: que diferença de performance!

### Árvores Binárias de Busca Balanceadas

Uma Árvore Binária de Busca está Balanceada se para cada Nó as alturas de suas Subárvores diferem de, no máximo, 1. Se chamarmos a altura da Subárvore Direita de uma Árvore R de Hd, e a altura da Subárvore Esquerda de R de He, podemos dizer que R está balanceada se He = Hd, ou se Hd = He+1, ou ainda se Hd = He-1. Esses valores precisam ser válidos para cada Nó da Árvore R. Em qualquer outra circunstância, a Árvore não estará Balanceada.

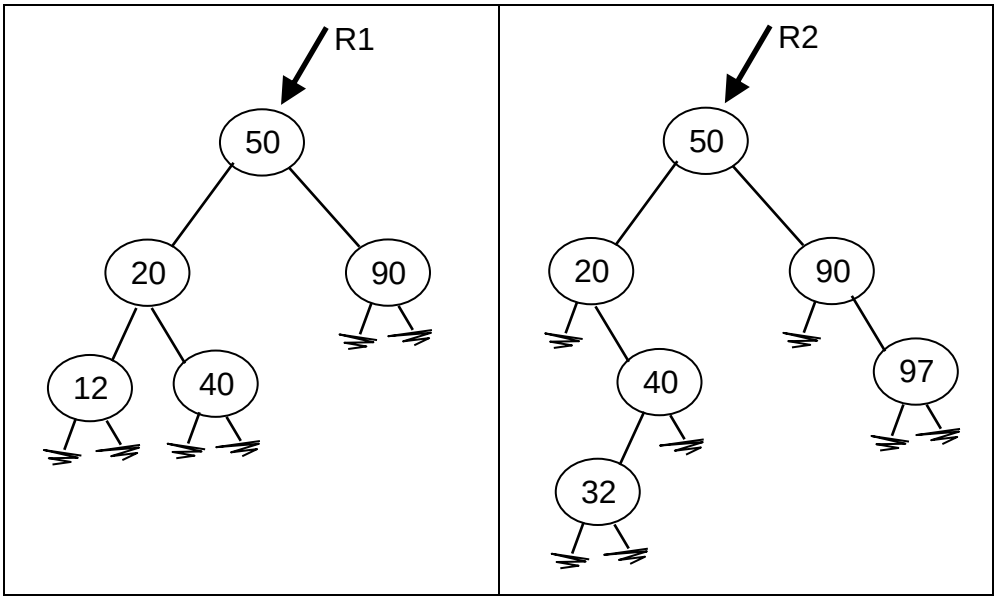
**Definição: Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB**

Uma Árvore Binária de Busca é dita Balanceada se e somente se, para cada Nó da Árvore, as alturas de suas Subárvores diferem de, no máximo, 1.

**Quadro 9.2 Definição de Árvore Binária de Busca Balanceada**

### Exercício 9.2 As Árvores Estão Balanceadas?

Analise as Árvores do Quadro 9.3 e verifique se estão Balanceadas, de acordo com a definição do Quadro 9.2.




**Quadro 9.3 Estão Balanceadas?**

A Árvore R1 está Balanceada, pois para cada Nó da Árvore, as alturas de suas Subárvores diferem de, no máximo, 1. Mas a Árvore R2 não está Balanceada. Você saberia explicar porque? Você saberia indicar em qual Nó de R2 o desbalanceamento fica evidente?

Ao analisarmos em R2 o Nó que contém o valor 50, vemos que a altura de sua Subárvore Direita - Hd é 2, a altura da Subárvore Esquerda - He é 3; assim, o critério de balanceamento não é quebrado. Hd e Hd diferem em, no máximo, 1 em todos os Nós de R2

exceto o Nó que contém o valor 20. Para este Nó, Hd =2 e He=0. A diferença entre Hd e He para esse Nó difere em 2 e, assim, o critério de balanceamento é quebrado. Se o critério é quebrado em um dos Nós da Árvore, então a Árvore como um todo não está balanceada.

### Como Manter uma Árvore Balanceada?

Se utilizarmos os algoritmos para inserção e eliminação que elaboramos no Capítulo 8, a Árvore Binária de Busca iria perder gradativamente seu equilíbrio e sua performance. Em algum momento poderíamos promover uma reorganização geral de todos os valores que fazem parte da Árvore, para torná-la novamente Balanceada. A boa performance seria mantida apenas por algum tempo: com a execução de operações para inserir e eliminar valores, a performance iria diminuir gradativamente, até que uma nova reorganização geral dos elementos fosse executada.

Uma estratégia melhor seria não permitir o desbalanceamento da Árvore, em nenhum momento. Desta forma, a boa performance seria garantida durante todo o tempo, e não apenas logo após uma reorganização geral. Para manter a Árvore constantemente Balanceada, precisamos alterar os algoritmos de inserção e eliminação. Os novos algoritmos deverão (a) monitorar o Balanceamento da Árvore e, quando necessário, (b) desencadear ações de Rebalanceamento.

**Estratégia para Manter uma ABB Balanceada**:

Alterar os algoritmos de inserção e eliminação de modo a:

a) Monitorar o Balanceamento da Árvore; e
b) Desencadear ações de rebalanceamento, sempre que necessário.

**Quadro 9.4 Estratégia para Manter uma ABB Balanceada**

Esta estratégia de manter a Árvore sempre balanceada foi proposta por Adelson-Velskii e Landis (1962), dando origem ao termo "Árvore AVL" (AVL são as iniciais de Adelson-Velskii e Landis). Posteriormente as Árvores AVL foram tratadas em livros como os de Langsam, Augenstein e Tenembaum (1996) e Drozdek (2002), e em materiais didáticos como os de Devadas e outros (2009), Leser (2011), Buricea (links [1], [2] e [3]), e Camargo.

Para monitorar o Balanceamento vamos manter, para cada Nó, o Fator de Balanceamento (termo adotado por Drozdek, 2002), ou Bal, definido como o valor da Altura da Subárvore Direita (Hd) menos o valor da Altura da Subárvore Esquerda (He). Pela definição de Árvores Balanceadas do Quadro 9.2, o Fator de Balanceamento poderá assumir os valores: -1, 0 e 1. Com outros valores, a Árvore estará desbalanceada.

**Fator de Balanceamento: Bal = Hd - He**

Altura da Subárvore Direita menos a altura da Subárvore Esquerda.

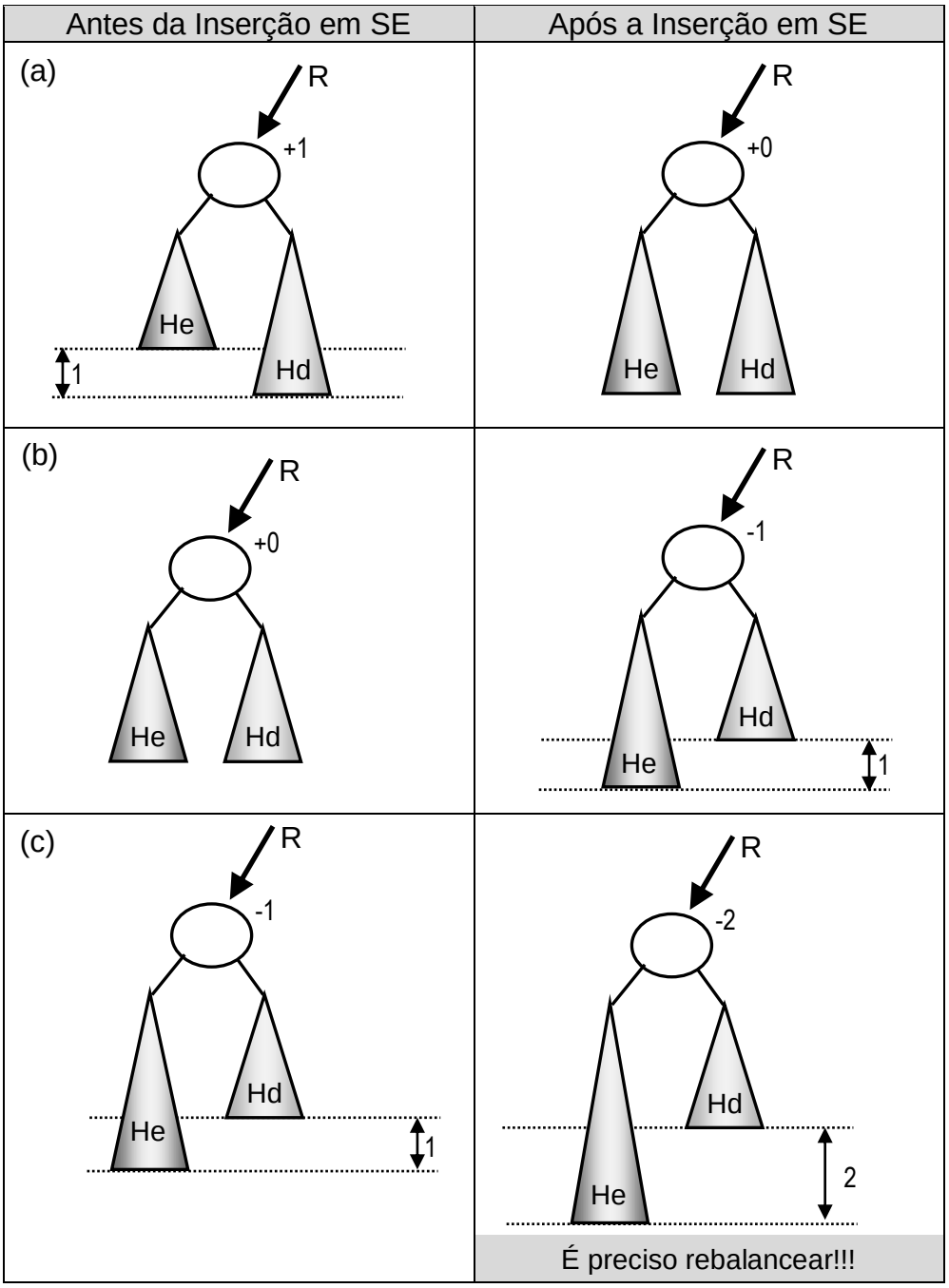
**Quadro 9.5 Definição: Fator de Balanceamento**

**Exercício 9.3 Calcular o Fator de Balanceamento**

Calcule o Fator de Balanceamento para cada Nó das Árvores R1 e R2 do Quadro 9.3.

## 9.2 Inserir Elementos em uma ABB Balanceada

Seja uma Árvore R com Subárvore Esquerda SE e Subárvore Direita SD, com alturas He e Hd, respectivamente. Se um novo elemento é inserido em SE, causando um aumento na altura He, três casos podem ocorrer, conforme ilustra o Quadro 9.6.



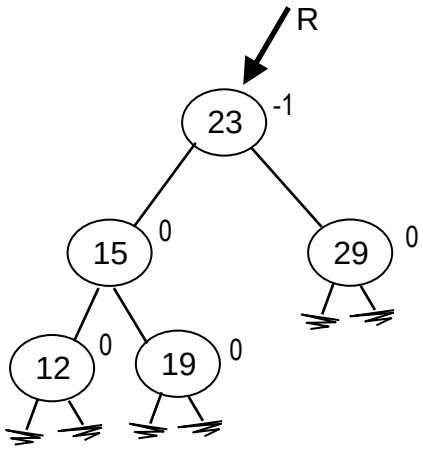

**Quadro 9.6 Monitorando o Balanceamento na Inserção, com Aumento da Altura He**

Se antes da inserção He era menor que Hd em 1, o Fator de Balanceamento de R era +1. Após a inserção, com o aumento da altura He, o Fator de Balanceamento passará a ser 0, pois He passará a ser igual a Hd. O critério de balanceamento não será quebrado nesse caso (Quadro 9.6a).

Se antes da inserção as alturas das Subárvores Esquerda e Direita eram iguais, o Fator de Balanceamento era 0. Após a inserção com aumento da altura He, o Fator de Balanceamento de R passará a ser -1, pois Hd será menor que He em 1, mas o critério de balanceamento não será quebrado (Quadro 9.6b).

Se antes da inserção He era maior que Hd em 1, o balanceamento era -1. Após a inserção com aumento da altura He, He será maior que Hd em 2. O critério de balanceamento, nesse caso, é violado, ou seja, a inserção de um elemento está causando desbalanceamento, e a Árvore precisará ser ajustada (Quadro 9.6c).

Observe ainda nas situações do Quadro 9.6 a altura total da Árvore. No Quadro 9.6a, antes da inserção de um novo valor em He, a altura da Árvore R era Hd + 1 (altura da Subárvore Direita mais 1 nível, em função do Nó apontado por R). Após a inserção do novo valor, a altura total da Árvore continua sendo Hd + 1. No Quadro 9.6b, na situação inicial a altura é Hd + 1, e na situação final a altura é Hd + 2. No Quadro 9.6c a altura inicial era Hd + 2, e a altura final é Hd + 3. Nos casos 9.6b e 9.6c a inserção de um novo valor em SE fez crescer He e fez crescer também a Árvore como um todo. Na situação do Quadro 9.6a a inserção de um novo valor em SE fez crescer He, mas a altura da Árvore como um todo permaneceu a mesma.




**Quadro 9.7 Monitorando o Balanceamento na Inserção, com Aumento da Altura He**

**Exercício 9.4 Causaria Desbalanceamento?**

Considerando como situação inicial a Árvore do Quadro 9.7, verifique:

a) A inserção do valor 25 causaria desbalanceamento?

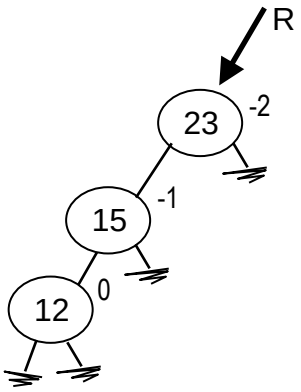
b) A inserção do valor 40 causaria desbalanceamento? Considere a Árvore exatamente como mostra o Quadro 9.7, sem a chave 25.
c) A inserção do valor 9 causaria desbalanceamento ? Considere a Árvore exatamente como mostra o Quadro 9.7 (sem 25 e 40).
d) A inserção do valor 13 causaria desbalanceamento ? Considere a Árvore como mostra o Quadro 9.7 (sem 9, 25 e 40).
e) A inserção do valor 17 causaria desbalanceamento? Considere a Árvore como mostra o Quadro 9.7 (sem 9, 13, 25 e 40).
f) A inserção do valor 21 causaria desbalanceamento? Considere a Árvore como mostra o Quadro 9.7 (sem 9, 13, 17, 25 e 40).

A inserção dos valores 25 ou 40 não causariam desbalanceamento, pois eles seriam inseridos logo abaixo do Nó que contém o valor 29. Na verdade a Árvore ficaria até mais equilibrada com a inserção de 25 ou 40. Já a inserção dos valores 9, 13, 17 ou 21 causaria sim desbalanceamento, pois ele seriam inseridos logo abaixo dos Nós de valor 12 ou 19, aumentando o tamanho da Subárvore Esquerda de R. Como a Subárvore Esquerda de R já era maior do que a Subárvore Direita, com a inserção de 9, 13, 17 ou 21 o critério de balanceamento seria violado.

A inserção dos valores 9, 13, 17 ou 21 exemplifica a situação genérica do Quadro 9.6c em que a Subárvore Esquerda já é maior, e cresce ainda mais, causando desbalanceamento. Conforme nossa estratégia para manter a Árvore balanceada (Quadro 9.4), ao detectar que a inserção de um novo valor causou desbalanceamento, precisamos ajustar a Árvore para que volte a ser balanceada. Chamamos a esse processo de rebalanceamento.

**Exercício 9.5 Como Rebalancear?**

No Quadro 9.8 o valor 12 acabou de ser inserido, e causou desbalanceamento. Como esta Árvore pode ser rebalanceada? Não se esqueça de que é preciso respeitar o critério de balanceamento (a diferença das alturas pode ser de, no máximo, 1) e também o critério que define uma Árvore Binária de Busca (valores da Subárvore Esquerda devem ser menores, valores da Subárvore Direita devem ser maiores, para cada Nó da Árvore).

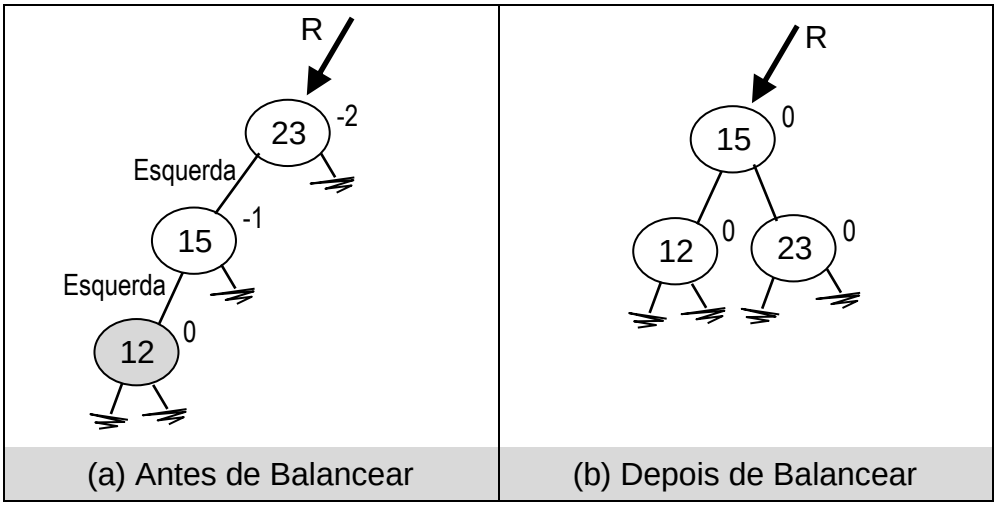



**Quadro 9.8 Inserção do Valor 12 Causou Desbalanceamento**

**Casos de Rebalanceamento: Caso 1 - Rotação Simples EE**

O Exercício 9.5 é um exemplo do caso de rebalanceamento Rotação Simples EE, ou ainda, Rotação Simples do tipo Esquerda - Esquerda. Esta forma de denominar os casos de rebalanceamento - adotada neste livro - é compatível com a adotada no material didático de Camargo.

O Quadro 9.9 mostra a situação inicial (Quadro 9.9a): o Nó que contém o valor 12 acabou de ser inserido, e causou o desbalanceamento. O nome Rotação Simples Esquerda - Esquerda reflete a situação de que, a partir do Nó em que foi detectado o desbalanceamento (Nó apontado por R), em direção ao Nó que causou o desbalanceamento, temos que seguir para a (Subárvore) Esquerda e depois outra vez para a (Subárvore) Esquerda.




(a) Antes de Balancear | (b) Depois de Balancear

**Quadro 9.9 Insere em ABBB: Caso 1 - Rotação Simples EE - Exemplo com Apenas Três Valores**

O Quadro 9.9b mostra a situação final da Árvore, após ter sido rebalanceada. Você consegue achar uma outra configuração para uma Árvore com esses mesmos três valores, que respeite o critério de uma ABB e também o critério de balanceamento? Tente achar uma outra configuração, que não a do Quadro 9.9b.

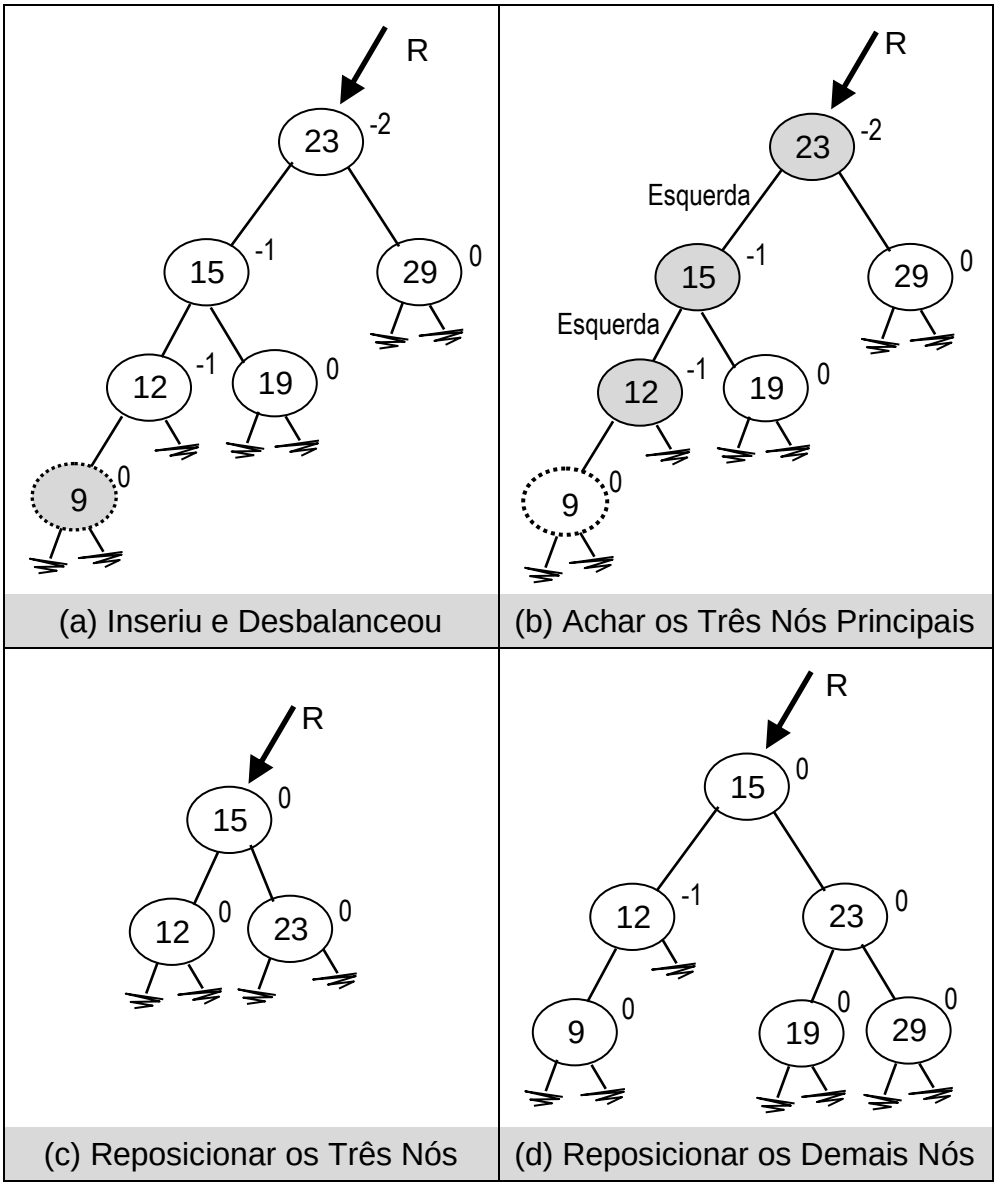
Não há uma outra configuração que atenda ambos os critérios. A situação do Quadro 9.9b é a única solução. A lógica de balanceamento neste exemplo com apenas três valores é bastante intuitiva. Lembre-se desse exemplo com apenas três valores se estiver em dúvida quanto ao Caso 1 – Rotação Simples EE.

**Exemplo com Mais de Três Valores**

Temos um segundo exemplo da Rotação simples Esquerda - Esquerda no Quadro 9.10. O valor 9 acabou de ser inserido, causando desbalanceamento. No Quadro 9.10a a altura da Subárvore Esquerda de R é 3 (3 níveis) e a altura da Subárvore Direita de R é 1 (1 nível). A diferença entre a altura das Subárvores é 2, o que viola o critério de balanceamento.

Para rebalancear a Árvore, o primeiro passo é identificar os três Nós principais. O primeiro destes Nós é aquele em que foi detectado o desbalanceamento, ou seja, o Nó apontado por R. Neste Nó apontado por R a diferença entre as alturas de suas subárvores é 2, o que viola o critério de balanceamento.

Para identificar os outros dois Nós principais para o rebalanceamento, caminhamos em direção ao Nó que causou o desbalanceamento (ou seja, o Nó que acabou de ser inserido) e encontramos os Nós com valores 15 e 12 (Quadro 9.10b). Como caminhamos para a Esquerda e outra vez para a Esquerda, fica caracterizado o Caso 1 - Rotação Simples EE.




**Quadro 9.10 Insere em ABBB: Caso 1 - Rotação Simples EE**

Note que os valores dos três Nós principais são exatamente os mesmos valores, e nas mesmas posições do Exercício 9.5, que apresentava uma Árvore com apenas esses três valores. A lógica do rebalanceamento desses três Nós principais será a mesma lógica aplicada no Exercício 9.5, resultando na situação do Quadro

9.10c. Após identificar os três Nós principais, pense em uma Árvore com apenas 3 valores. A solução será bastante intuitiva.

Para posicionar os demais valores da Árvore – 9, 19 e 29, é preciso seguir o critério que define uma Arvore Binária de Busca: valores menores vão para a Subárvore Esquerda, valores maiores vão para a Subárvore Direita. Considerando que os valores 12, 15 e 23 já estão posicionados segundo mostra o Quadro 9.10c, em qual lugar deve ser posicionada a chave 9, de modo a respeitar o critério que define uma Árvore Binária de Busca? A única posição possível para a chave 9 é à esquerda da chave 12, pois 9 é menor do que 12. Se o 9 ficasse à direita do 12, quebraria o critério. Se o 9 ficasse abaixo do 23 (seja a esquerda ou a direita), estaria à direita do 15, o que também quebraria o critério.

Seguindo o mesmo raciocínio que utilizamos para posicionar a chave 9, qual o único lugar no qual podemos posicionar os valores 19 e 29, sem quebrar a definição de Árvore Binária de Busca? A única solução possível é posicionar o 19 à esquerda do 23, e o 29 à direita do 23, como mostra o Quadro 9.10d. Não há outra solução que não quebre o critério que define uma ABB.

## Para Rebalancear uma Árvore Manualmente

**Passo 1: Identificar os Três Nós Principais.** O primeiro destes três é o Nó em que foi detectado o desbalanceamento (diferença de altura das subárvores é maior que 1). Selecione os outros dois Nós caminhando em direção ao Nó que causou o desbalanceamento (o Nó que foi inserido).

**Passo 2: Reposicionar os Três Nós Principais.** Considere uma Árvore com apenas estes três nós e os reposicione na única configuração possível que respeite ambos os critérios: ABB e Balanceamento.

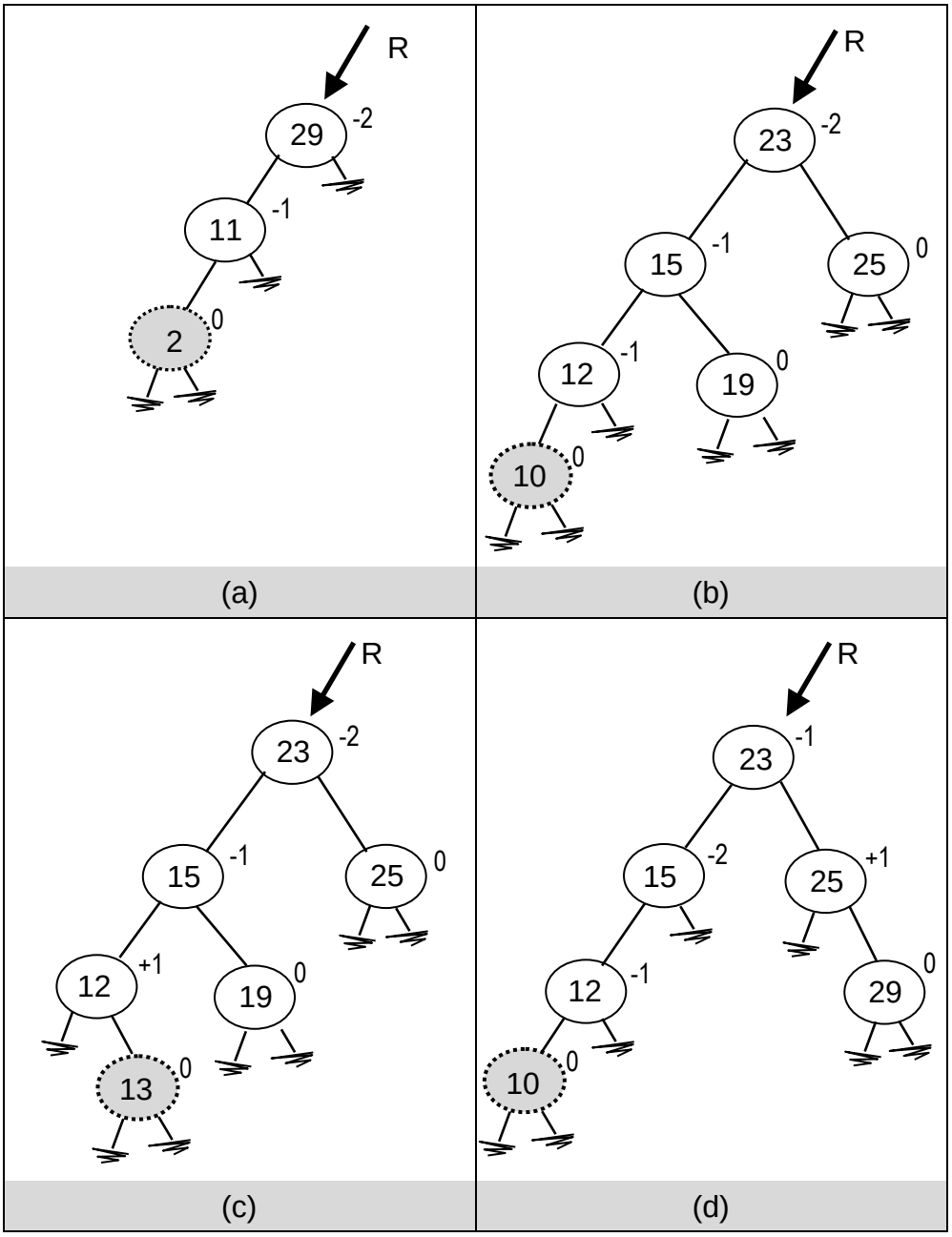
**Passo 3: Reposicione os demais valores, respeitando o critério que define uma ABB.** Posicione os demais valores abaixo dos três Nós principais. Só há um local possível para cada valor ou subárvore a ser reposicionada.

**Passo 4: Atualize o Fator de Balanceamento de Cada Nó.** Conforme definido no Quadro 9.5, Bal = Hd - He; ou seja, o Fator de Balanceamento de um Nó R é a altura da Subárvore Direita de R menos altura da Subárvore Esquerda de R.

**Quadro 9.11 Passos para Rebalancear uma Árvore**

**Exercício 9.6 Rebalanceamento Manual - EE**

Nas situações do Quadro 9.12 um novo valor acabou de ser inserido e causou desbalanceamento. O valor inserido foi posicionado em um Nó com fundo cinza. Em cada exemplo, faça o rebalanceamento pelo Caso 1: Rotação Simples EE. Desenhe a Árvore resultante, respeitando o critério que define uma ABB e o critério de Balanceamento. Siga o roteiro do Quadro 9.11.




**Quadro 9.12 Exemplos do Caso 1 - Rotação Simples EE**

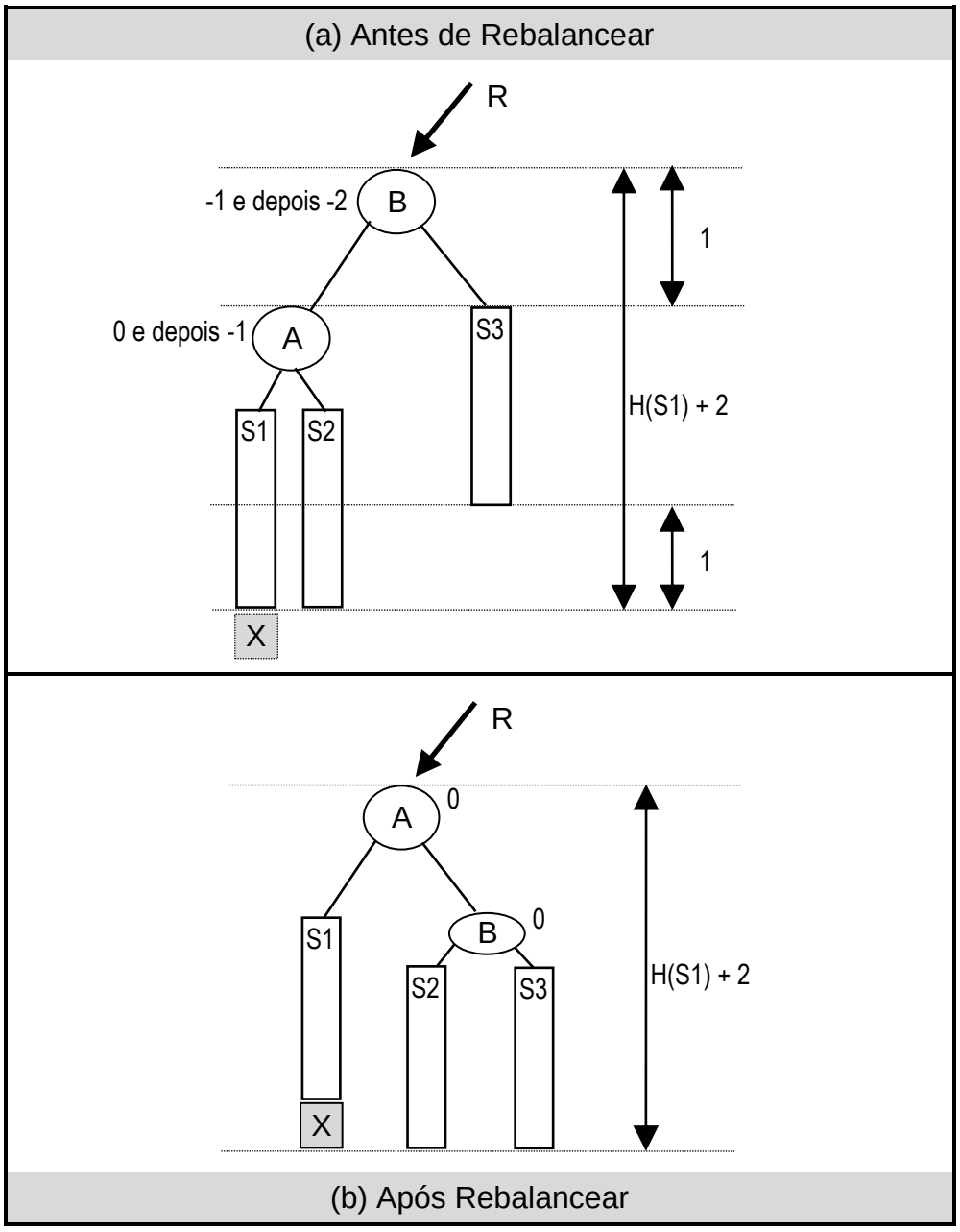
**Generalização do Caso 1: Rotação Simples EE - Insere**

O Quadro 9.13 apresenta um diagrama genérico do rebalanceamento pelo Caso 1: Rotação Simples EE, do algoritmo que insere um novo valor na Árvore. Este estilo de diagrama é uma adaptação do estilo adotado por Knuth (1998), p. 461, e também por Camargo, p. 3-4.

Note no Quadro 9.13a que um novo valor X acabou de ser inserido, causando desbalanceamento. O *Fator de Balanceamento* do Nó que contém o valor 'A' antes da inserção de X era 0 (zero), pois a altura das Subárvores Esquerda e Direita eram iguais. Após a inserção de X o Fator de Balanceamento do Nó que contém 'A' passou a ser -1, pois He passou a ser maior que Hd em 1. Mas

mesmo com a inserção de X, o Nó que contém 'A' continua balanceado.

O Fator de Balanceamento do Nó que contém o valor 'B' era -1 antes da inserção de X. Com a inserção de X, passou a ser -2. Ou seja, a Subárvore Esquerda do Nó que contém 'B' já era maior que a Subárvore Direita; com a inserção de X em S1, passou a ser ainda maior, violando o critério de balanceamento. Será preciso rebalancear a Árvore.




**Quadro 9.13 Generalização do Caso 1 - Rotação Simples EE - estilo de diagrama adaptado de Knuth (1998) e Camargo**

O rebalanceamento no diagrama do Quadro 9.13 generaliza o rebalanceamento dos exemplos numéricos dos Quadros 9.9 e 9.10, e também dos quatro casos do Exercício 9.6. Procure identificar a equivalência entre os exemplos numéricos e o

diagrama genérico do Quadro 9.13.

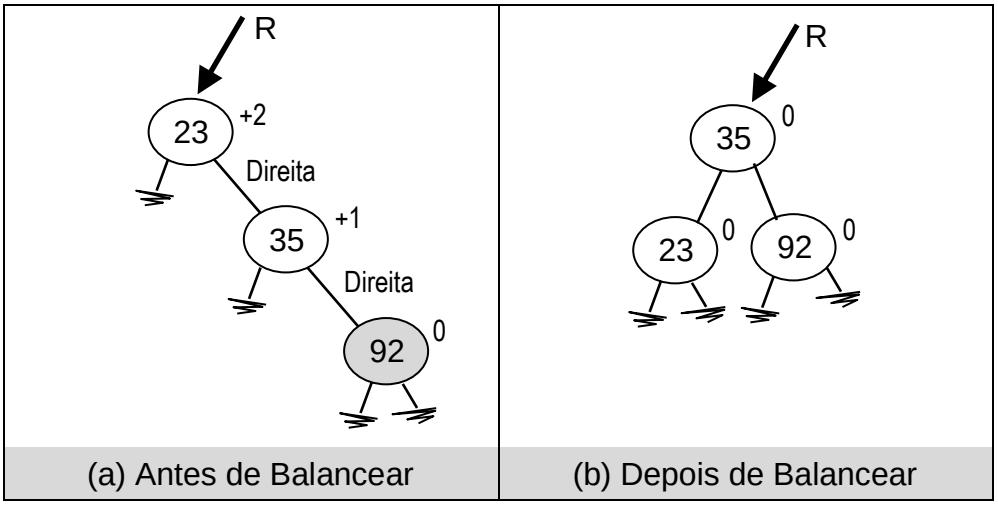
O quadro 9.14 mostra um trecho de algoritmo que implementa o rebalanceamento pelo Caso 1: Rotação Simples EE. É um trecho do algoritmo que insere um valor X em uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB.

```
Variavel Filho do tipo NodePtr;       // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Esq

/* movimentando as Subárvores e os ponteiros */
Filho = R→Esq;              // Filho aponta para o Nó que contém o valor 'A' - Quadro 9.13
R→Esq = Filho→Dir;     // R→Esq passa a apontar para S2 - Quadro 9.13
Filho→Dir = R;            // Filho→Dir passa a apontar o Nó que contém 'B' - Quadro 9.13

/* ajustando os balanceamentos */
R→Bal = 0;                              // atualizando o Fator de Balanceamento de R
Filho→Bal = 0;                          // atualizando o Fator de Balanceamento de Filho

/* mudando a Raiz da árvore*/
R = Filho;                    // o Nó que contém 'A'  passará a ser a Raiz - Quadro 9.13

/* atualizando a variável MudouAltura */
MudouAltura = Falso;      // após inserir X e rebalancear, a altura da Árvore continua sendo
                          // a mesma: H(S1) + 2.
```

**Quadro 9.14 Insere em ABBB - Caso 1: Rotação Simples EE**

O algoritmo do Quadro 9.14 providencia a movimentação das Subárvores e dos ponteiros, partindo da situação do Quadro 9.13a e levando à situação do Quadro 9.13b. Em seguida, o algoritmo ajusta os balanceamentos, muda a raiz da Árvore, e atualiza uma variável chamada MudouAltura.

Note que a altura da Subárvore S1 é igual a altura da Subárvore S2, e também igual a altura da Subárvore S3. Ou seja, H(S1) = H(S2) = H(S3). Antes da inserção de X a altura total da Árvore era H(S1) + 2. Após a inserção de X e o rebalanceamento, a altura da Árvore continua sendo H(S1) + 2 (veja no Quadro 9.13b). Por isso, no algoritmo do Quadro 9.14 a variável MudouAltura recebeu o valor Falso.

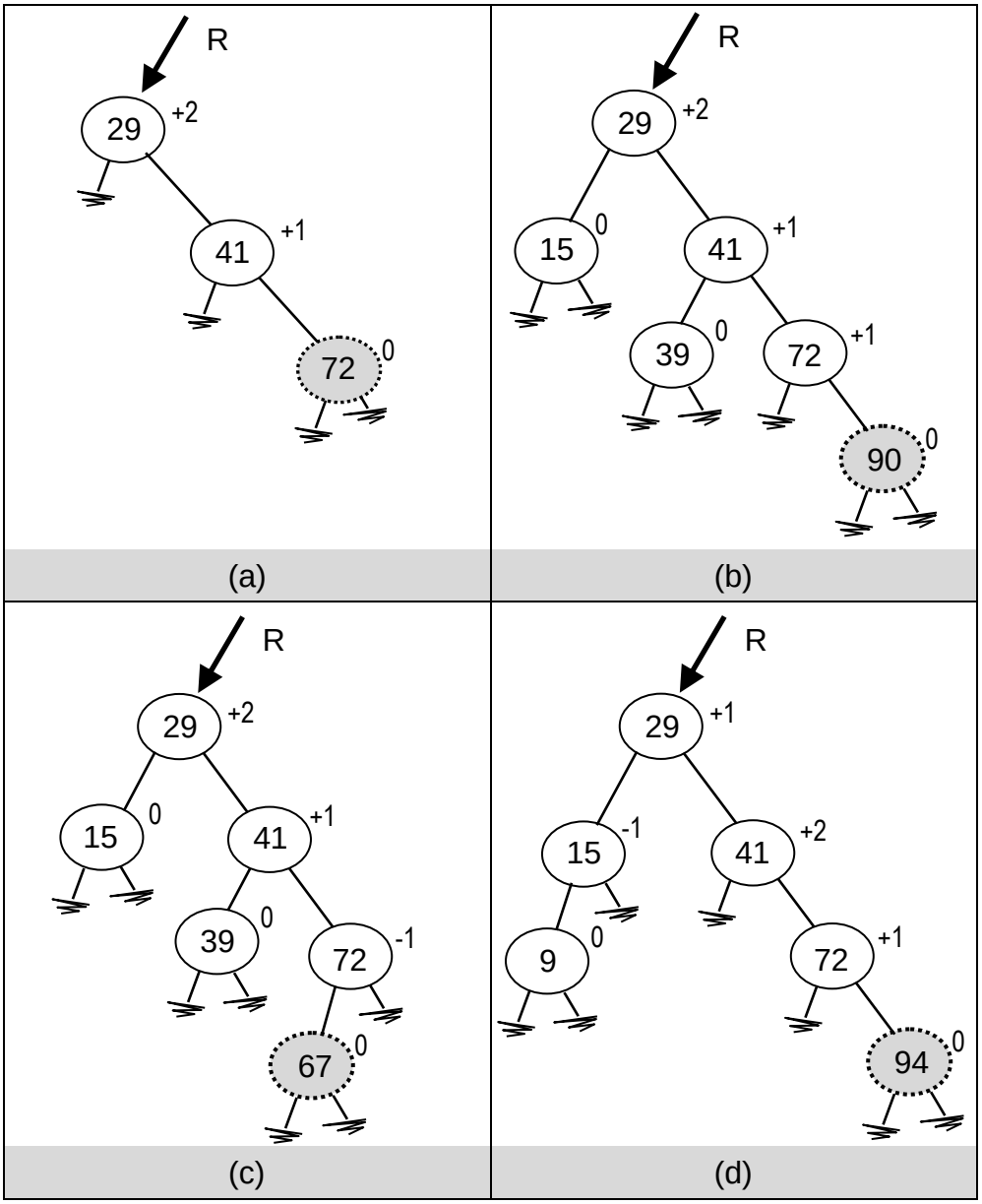



(a) Antes de Balancear | (b) Depois de Balancear

**Quadro 9.15 Insere em ABBB: Caso 2 - Rotação Simples DD - Exemplo com Apenas Três Valores**

**Casos de Rebalanceamento: Caso 2 - Rotação Simples DD**

O Caso 2 - Rotação Simples Direita - Direita (DD) é um caso de rebalanceamento absolutamente simétrico à Rotação Simples Esquerda - Esquerda (EE). O Quadro 9.15 apresenta um exemplo do caso de rebalanceamento Rotação Simples DD. O Quadro 9.15 mostra a situação inicial (Quadro 9.15a): o Nó que contém o valor 92 acabou de ser inserido, e causou o desbalanceamento. O Quadro 9.15b mostra a situação final da Árvore, após ter sido rebalanceada. Não há uma outra configuração possível, que atenda os critérios que definem uma ABBB.




**Quadro 9.16 Exemplos do Caso 2 - Rotação Simples DD**

.

**Exercício 9.7 Rebalanceamento - Caso 2: Rotação Simples DD**

Nas situações do Quadro 9.16, um novo valor acabou de ser inserido, e causou desbalanceamento. O valor inserido está posicionado em um Nó destacado com fundo cinza. Em cada caso,

faça o rebalanceamento pelo Caso 2 - Rotação Simples DD. Desenhe a Árvore resultante, respeitando o critério que define uma ABB e também o critério de Balanceamento. Siga o roteiro do Quadro 9.11.

**Exercício 9.8 Diagrama - Caso 2: Rotação Simples DD**

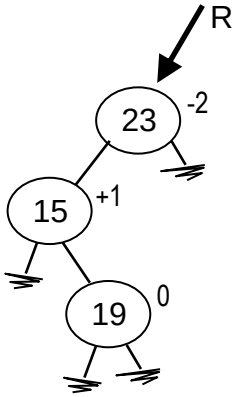
Generalizamos a Rotação Simples EE através do diagrama do Quadro 9.13. Desenvolva um diagrama genérico (simétrico ao do Quadro 9.13) para o Caso 2: Rotação Simples DD.

**Exercício 9.9 Algoritmo - Caso 2: Rotação Simples DD**

Generalizamos a Rotação Simples EE através do diagrama do Quadro 9.13 e então desenvolvemos o trecho de algoritmo do Quadro 9.14. Desenvolva um trecho de algoritmo que implemente o Caso 2: Rotação Simples DD. O trecho de algoritmo resultante deve ser análogo ao trecho de algoritmo do Quadro 9.14.

**Exercício 9.10 Como Rebalancear?**

No Quadro 9.17 o valor 19 acabou de ser inserido, e causou desbalanceamento. Como esta Árvore pode ser rebalanceada? Desenhe a nova Árvore, respeitando o critério de balanceamento (Quadro 9.4) e também o critério que define uma Árvore Binária de Busca (Quadro 8.4).




**Quadro 9.17 Inserção do Valor 19 Causou Desbalanceamento**

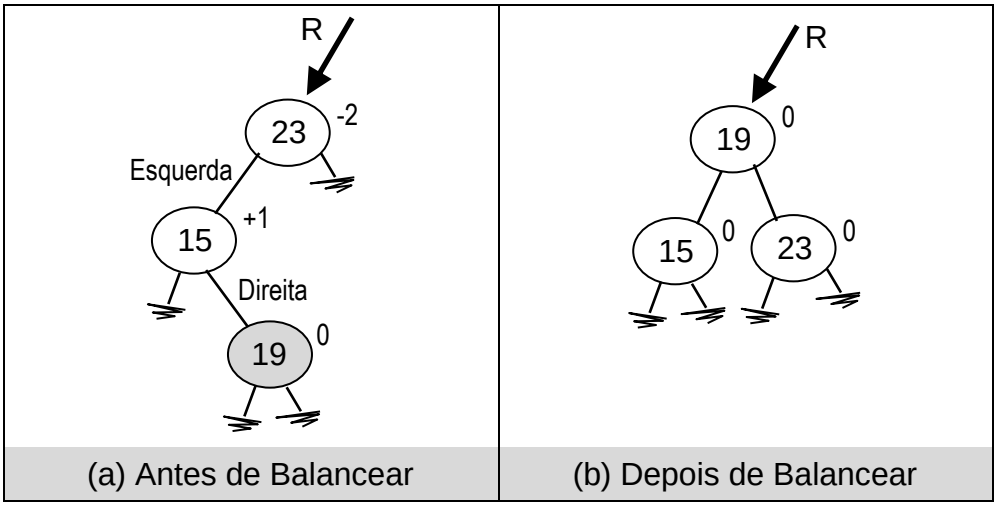
**Casos de Rebalanceamento: Caso 3 - Rotação Dupla ED**

O Exercício 9.10 é um exemplo do caso de rebalanceamento Rotação Dupla ED, ou ainda, Rotação Dupla do tipo Esquerda - Direita (nomenclatura de Camargo). O Quadro 9.18 mostra a situação inicial (Quadro 9.18a): o Nó que contém o valor 19 acabou de ser inserido, e causou o desbalanceamento da Árvore. O nome Rotação Dupla Esquerda - Direita reflete a situação em que, a partir do Nó em que foi detectado o desbalanceamento (Nó apontado por R), em direção ao Nó que causou o desbalanceamento, temos que seguir para a (Subárvore) Esquerda e depois para a (Subárvore) Direita

O Quadro 9.18b mostra a situação final da Árvore, após ter sido rebalanceada. Você consegue achar uma outra configuração

para uma Árvore com esses mesmos três valores, que respeite o critério de uma ABB e também o critério de balanceamento? Tente achar uma outra configuração, que não a do Quadro 9.18b.

Não há uma outra configuração que atenda ambos os critérios. A situação do Quadro 9.18b é a única solução. A lógica de balanceamento neste exemplo com apenas três valores na Árvore é bastante intuitiva. Lembre-se desse exemplo com apenas três valores na Árvore se estiver em dúvida quanto ao Caso 3 – Rotação Dupla ED.




(a) Antes de Balancear | (b) Depois de Balancear

**Quadro 9.18 Insere em ABBB: Caso 3 - Rotação Dupla ED - Exemplo com Apenas Três Valores**

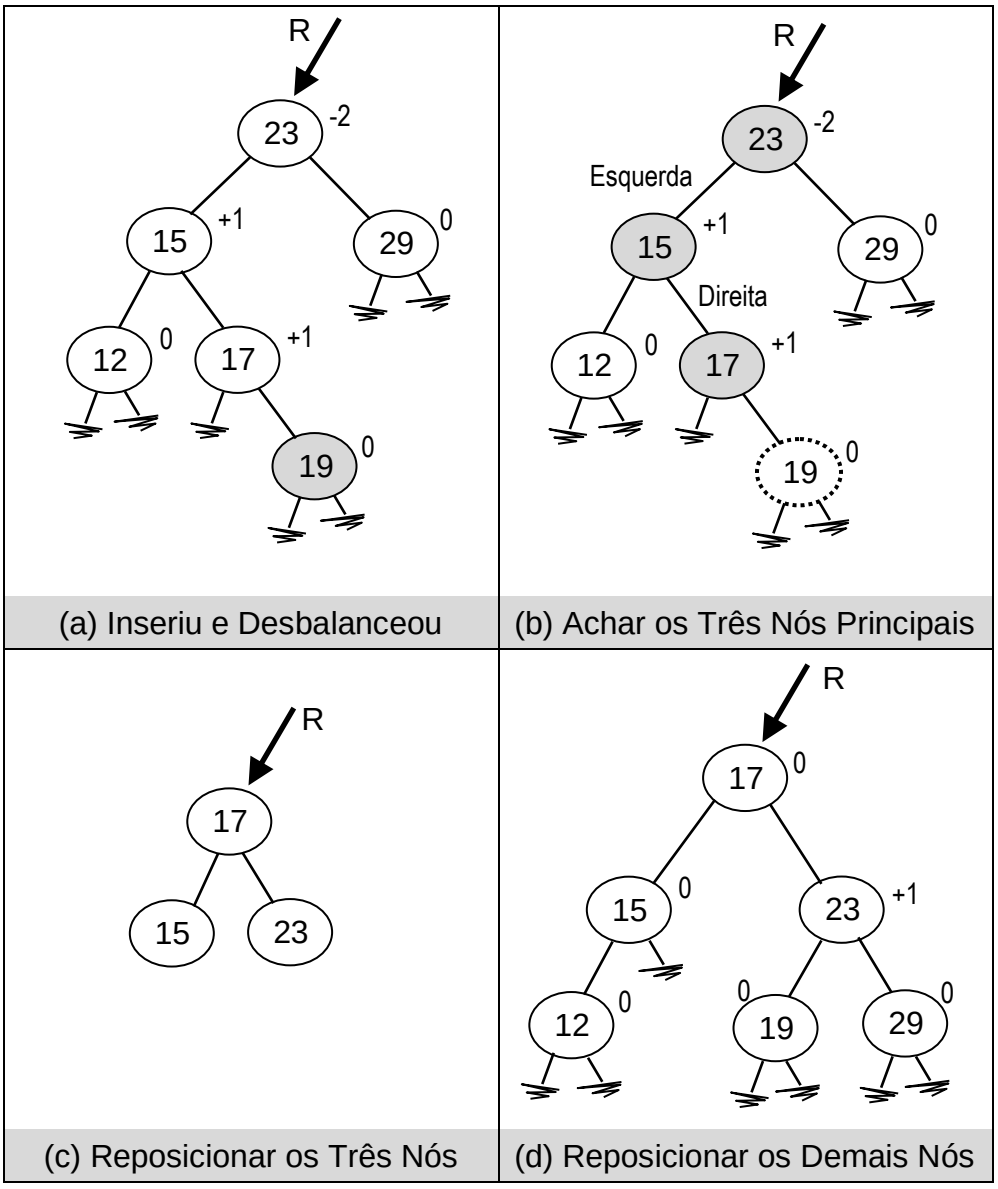
**Exemplo com Mais Que Três Valores - Caso ED**

Temos um segundo exemplo da Rotação Dupla Esquerda - Direita no Quadro 9.19. Note no Quadro 9.19a que valor 19 acabou de ser inserido, causando desbalanceamento, pois a altura da Subárvore Esquerda de R é 3 (3 níveis) e a altura da Subárvore Direita de R é 1 (1 nível). A diferença entre a altura das Subárvores é 2, o que viola o critério de balanceamento.

Para rebalancear a Árvore, o primeiro passo é identificar os três Nós principais. O primeiro destes Nós é aquele em que foi detectado o desbalanceamento, ou seja, o Nó apontado por R. Para identificar os outros dois Nós principais para o rebalanceamento, caminhamos em direção ao Nó que causou o desbalanceamento (ou seja, o Nó que acabou de ser inserido) e encontramos os Nós com valores 15 e 17 (Quadro 9.19b). Como caminhamos para a Esquerda e depois para a Direita, fica caracterizado o Caso 3 - Rotação Dupla ED.

Note que os valores dos três Nós principais são exatamente os mesmos valores, e nas mesmas posições do Exercício 9.10, que apresentava uma Árvore com apenas três valores. A lógica do rebalanceamento desses três Nós principais será a mesma lógica aplicada no Exercício 9.10, resultando na situação do Quadro 9.19c. Após identificar os três Nós principais, pense em uma Árvore com apenas 3 valores. A solução será bastante intuitiva.

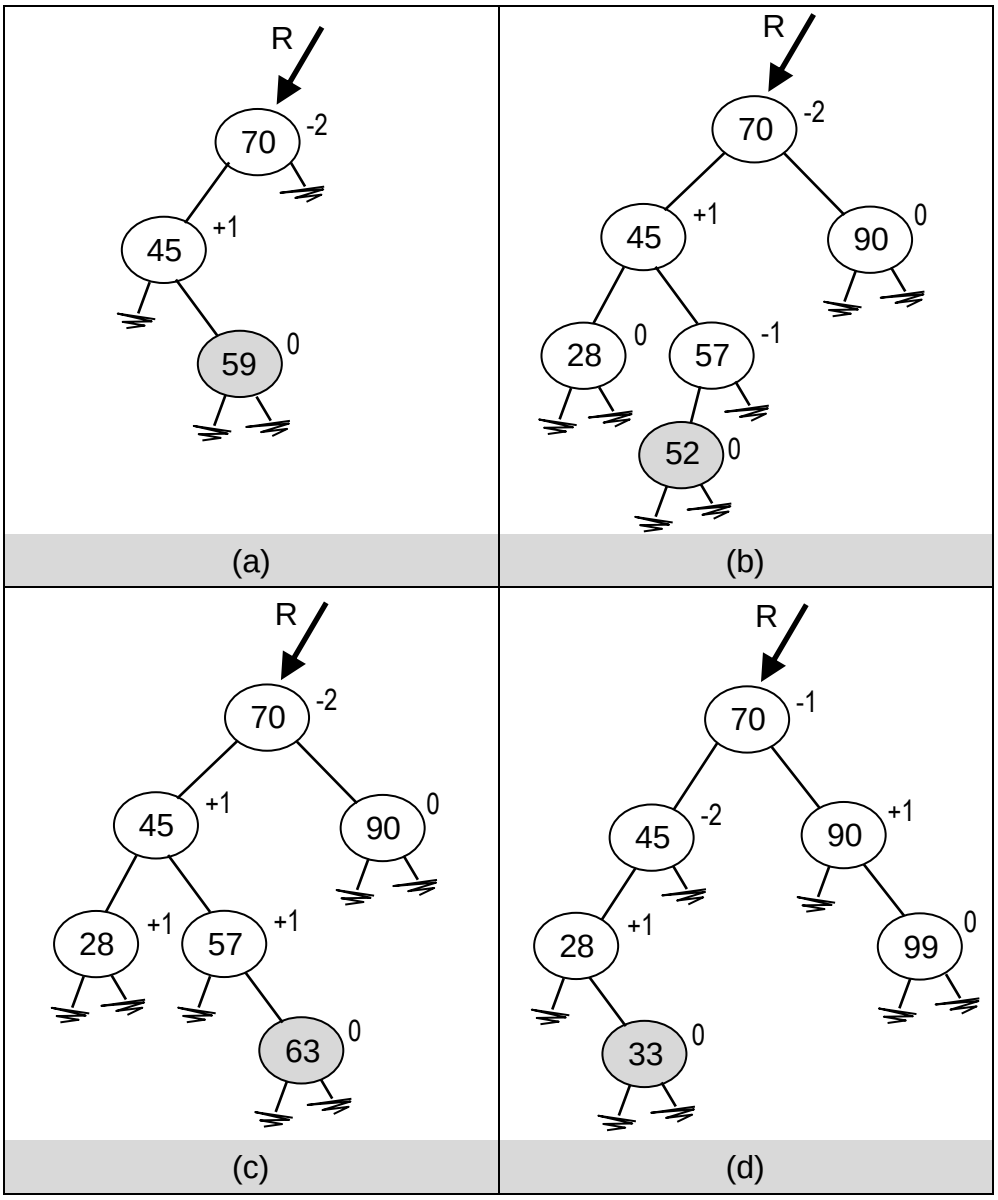
Para posicionar os demais valores da Árvore (12, 19 e 29) é preciso seguir o critério que define uma Arvore Binária de Busca: valores menores vão para a Subárvore Esquerda, valores maiores vão para a Subárvore Direita. Considerando que os valores 15, 17 e 23 já estão posicionados (Quadro 9.19c), em qual lugar deve ser posicionada a chave 12, de modo a respeitar o critério que define uma Árvore Binária de Busca? A única posição possível para a chave 12 (sem deslocamento dos valores já posicionados) é à esquerda da chave 15, pois 12 é menor do que 15. Seguindo o mesmo raciocínio, posicionamos o 19 à direita do 15, e o 29 à direita do 23, como mostra o Quadro 9.19d. Não há outra posição possível, sem deslocamento dos três valores principais já posicionados, que não quebre o critério que define uma ABB.




**Quadro 9.19 Insere em ABBB: Caso 3 - Rotação Dupla ED**

**Exercício 9.11 Rebalanceamento Manual - ED**

No Quadro 9.20, um novo valor (destaque em cinza) foi inserido, e causou desbalanceamento. Em cada caso, faça o rebalanceamento pelo Caso 3: Rotação Dupla ED. Desenhe a Árvore resultante, respeitando o critério que define uma ABB e também o critério de Balanceamento. Siga o roteiro do Quadro 9.11.



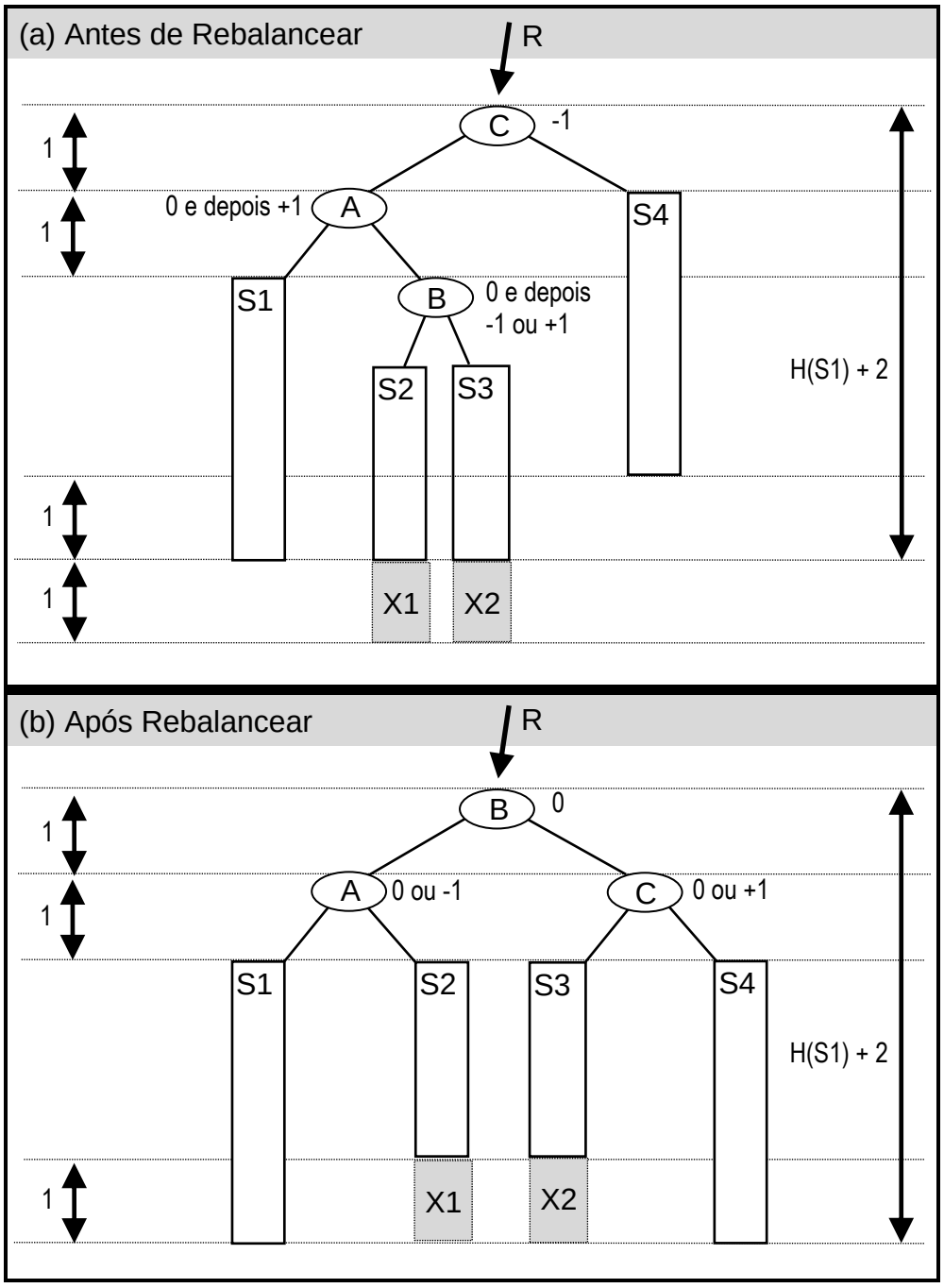

**Quadro 9.20 Exemplos do Caso 3 - Rotação Dupla ED**

**Generalização do Caso 3: Rotação Dupla ED - Insere**

O Quadro 9.21 apresenta um diagrama genérico do rebalanceamento pelo Caso 3: Rotação Dupla ED, do algoritmo que insere um novo valor na Árvore. Um novo valor X1 ou um novo valor X2 (ou um ou outro; nunca ambos) acabou de ser inserido, causando desbalanceamento.

O *Fator de Balanceamento* do Nó que contém o valor 'B' antes da inserção de X era 0 (zero), pois a altura das Subárvores Esquerda e Direita eram iguais. Após a inserção de X1 o *Fator de*

*Balanceamento* do Nó que contém 'B' passou a ser -1. Se ao invés de X1, houve a inserção de X2, o *Fator de Balanceamento* do Nó que contém 'B' passou a ser +1.




**Quadro 9.21 Generalização do Caso 3 - Rotação Dupla ED - estilo de diagrama adaptado de Knuth (1998) e Camargo**

O *Fator de Balanceamento* do Nó que contém o valor 'A' antes da inserção de X1 ou X2 era 0 (zero), e passou a ser +1 após a inserção de X1 ou X2. Considerando apenas o Nó que contém o valor 'A' e o Nó que contém o valor 'B', a Árvore continua balanceada.

O *Fator de Balanceamento* do Nó que contém o valor 'C' antes da inserção de X1 ou X2 era -1. Após a inserção de X1 ou

X2, o *Fator de Balanceamento* passou a ser -2, quebrando o critério de balanceamento. Ou seja, a Subárvore Esquerda do Nó que contém 'C' já era maior que a Subárvore Direita; com a inserção de X1 ou X2, a Subárvore Esquerda passou a ser ainda maior, violando o critério. Será preciso rebalancear a Árvore.

O rebalanceamento ilustrado no diagrama do Quadro 9.21 generaliza os exemplos numéricos dos Quadros 9.18 e 9.19, e também os quatro casos do Exercício 9.11. Procure identificar a equivalência entre os exemplos numéricos e o diagrama genérico do Quadro 9.21.

O Quadro 9.22 mostra o trecho de algoritmo que implementa o rebalanceamento pelo Caso 3: Rotação Dupla ED. É um trecho do algoritmo que insere um valor X em uma Árvore Binária de Busca Balanceada. O algoritmo providencia a movimentação das Subárvores e dos ponteiros, partindo da situação do Quadro 9.21a e levando à situação do Quadro 9.21b. Em seguida, o algoritmo ajusta os balanceamentos, muda a raiz da Árvore, e atualiza uma variável chamada MudouAltura.

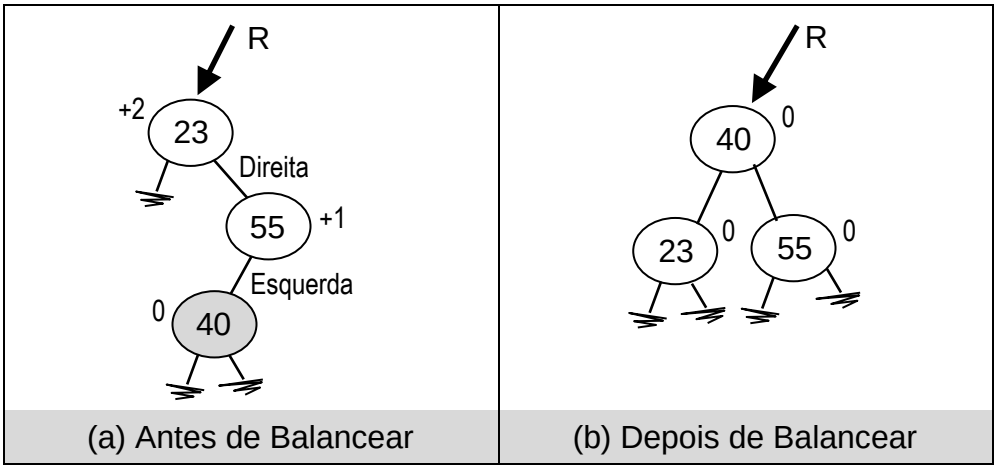
```
variavel Filho do tipo NodePtr;      // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Esq
variavel Neto do tipo NodePtr;       // Neto é ponteiro auxiliar, que apontará Filho→Dir

/* posicionando os ponteiros Filho e Neto */
Filho = R→Esq;              // Filho aponta para o Nó que contém o valor 'A' - Quadro 2.21
Neto = Filho→Dir;           // Filho aponta para o Nó que contém o valor 'B' - Quadro 2.21

/* movimentando a Subárvore S2 */
Filho→Dir = Neto→Esq;  // Filho→Dir passa a apontar para S2 - Quadro 2.21
Neto→Esq = Filho;           // Neto→Esq passa a apontar Nó que contém 'A', Quadro 2.21

/* movimentando a Subárvore S3 */
R→Esq = Neto→Dir;       // R→Esq  passa a apontar para S3 - Quadro 2.21
Neto→Dir = R;               // Neto→Dir passa a apontar o Nó que contém 'C'

/* ajustando os balanceamentos */
Caso Neto→Bal for
   -1 :   { R→Bal = 1;              // inseriu X1. Exemplo numérico no Quadro 9.20b.
            Filho→Bal =  0;
            Neto→Bal = 0; }
   +1 :   { R→Bal = O;              // inseriu X2. Exemplo numérico no Quadro 9.19 e...
            Filho→Bal =  -1;        // ... no Quadro 9.20c
            Neto→Bal = 0; }
    0 :   { R→Bal = 0;              //  inseriu o Nó apontado por Neto, que contém...
            Filho→Bal = 0;          // ... o valor  'B',  no Quadro 9.21. Exemplo numérico...
            Neto→Bal = 0; }         // ... no Quadro 9.18

/* mudando a Raiz da árvore*/
R = Neto;                   // o Nó que contém 'B'  passará a ser a Raiz - Quadro 2.21

/* atualizando a variável MudouAltura */
MudouAltura = Falso;            // após inserir X1 ou X2 e rebalancear...
                                // ... a altura da Árvore continua a mesma: H(S1) + 2.
```

**Quadro 9.22 Insere em ABBB - Algoritmo do Caso 3: Rotação Dupla ED**

Note que a altura da Subárvore S1 é igual a altura da Subárvore S4; a altura da Subárvore S2 é igual a altura da Subárvore S3; e S1 e S4 são maiores que S2 e S3 em 1. Ou seja, H(S1) = H(S4); H(S2) = H(S3); H(S1) = H(S2) + 1. Antes da inserção de X1 ou X2 a altura total da Árvore era H(S1) + 2. Após a inserção de X1 ou X2 e o rebalanceamento, a altura da Árvore continua sendo H(S1) + 2 (veja no Quadro 9.21b). Por isso, no algoritmo do Quadro 9.22 a variável MudouAltura recebeu o valor Falso.

**Casos de Rebalanceamento: Caso 4 - Rotação Dupla DE**

O Caso 4 - Rotação Dupla Direita - Esquerda (DE) é um caso de rebalanceamento absolutamente simétrico à Rotação Dupla Esquerda - Direita (ED). O Quadro 9.23 apresenta um exemplo do caso de rebalanceamento Rotação Dupla DE. O Quadro 9.23 mostra a situação inicial (Quadro 9.23a): o Nó que contém o valor 40 acabou de ser inserido, e causou o desbalanceamento. O Quadro 9.23b mostra a situação final da Árvore, após ter sido rebalanceada. Não há uma outra configuração possível, que atenda os critérios que definem uma ABBB.




(a) Antes de Balancear | (b) Depois de Balancear

**Quadro 9.23 Insere em ABBB: Caso 4 - Rotação Dupla DE - Exemplo com Apenas Três Valores**

**Exercício 9.12 Rebalanceamento - Caso 4: Rotação Dupla DE**

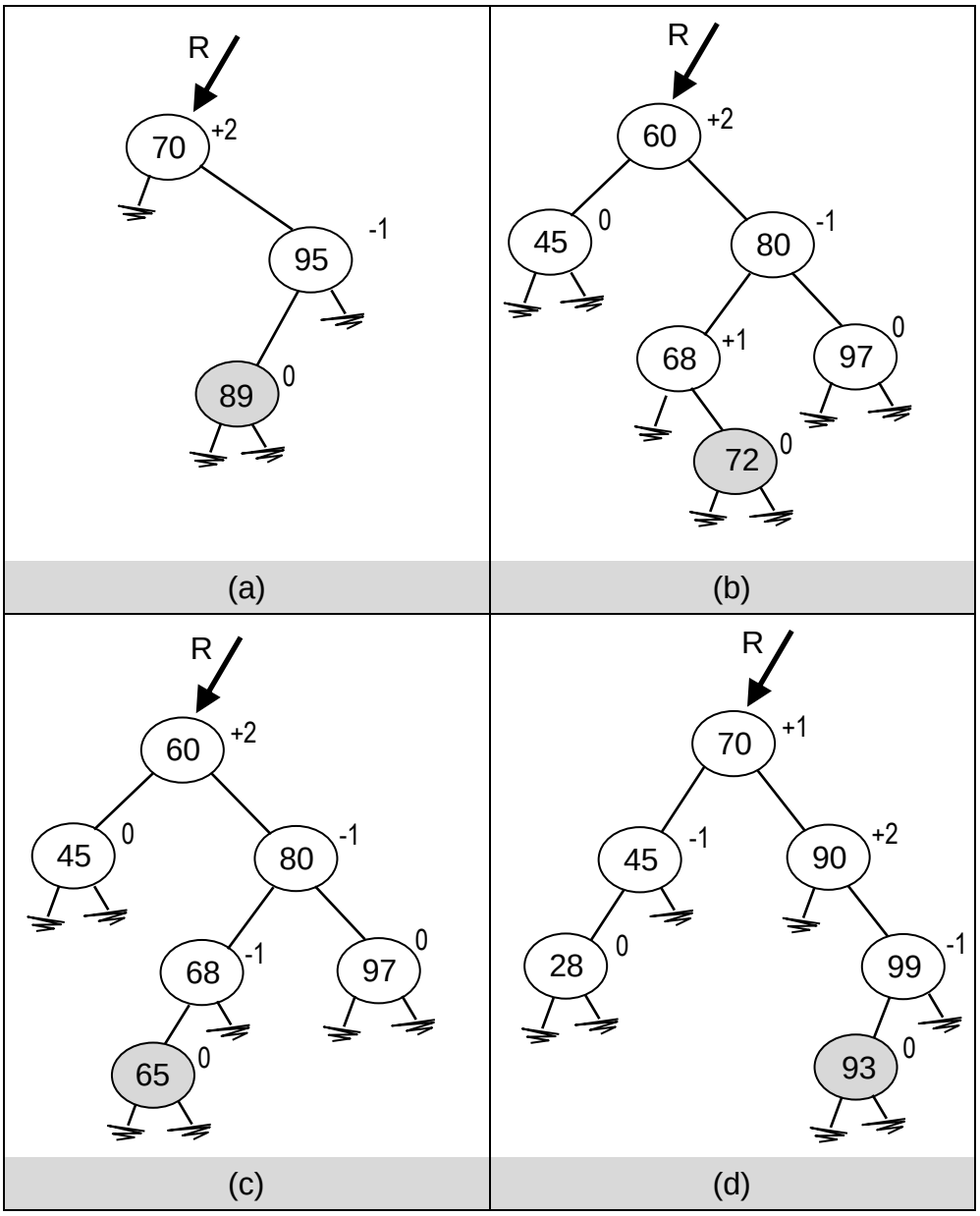
Nas situações do Quadro 9.24, um novo valor acabou de ser inserido, e causou desbalanceamento. O valor inserido está posicionado em um Nó destacado com fundo cinza. Em cada caso, faça o rebalanceamento pelo Caso 4 - Rotação Dupla DE. Desenhe a Árvore resultante, respeitando o critério que define uma ABB e também o critério de Balanceamento. Siga o roteiro do Quadro 9.11.

**Exercício 9.13 Diagrama - Caso 4: Rotação Dupla DE - Diagrama**

Generalizamos a Rotação Dupla ED através do diagrama do Quadro 9.21. Desenvolva um diagrama genérico (simétrico ao do Quadro 9.21) para o Caso 4: Rotação Dupla DE.

**Exercício 9.14 Algoritmo - Caso 4: Rotação Dupla DE**

Generalizamos a Rotação Dupla ED através do diagrama do Quadro 9.21 e então desenvolvemos o trecho de algoritmo do Quadro 9.22. Desenvolva um trecho de algoritmo que implemente o Caso 4: Rotação Dupla DE. O trecho de algoritmo resultante deve ser análogo ao trecho de algoritmo do Quadro 9.22.




**Quadro 9.24 Exemplos do Caso 4 - Rotação Dupla DE**

**Exercício 9.15 Algoritmo Insere - ABB Balanceada - ABBB**

No Capítulo 8 elaboramos um algoritmo que insere um novo valor em uma Árvore Binária de Busca - ABB (Quadro 8.20). Adapte este algoritmo, fazendo-o monitorar o balanceamento da Árvore, e desencadear ações de rebalanceamento, sempre que necessárias, de modo a manter a Árvore sempre balanceada. Para monitorar o balanceamento, tome como ponto de partida o diagrama do Quadro

9.6, e faça um diagrama análogo para a inserção de um valor X na Subárvore Direita de R. Como ações de rebalanceamento, considere os Casos 1, 2, 3 e 4 estudados anteriormente.

```
Insere (parâmetro por referência R tipo ABBB, parâmetro X tipo Inteiro, parâmetro por
referência Ok tipo Boolean, parâmetro por referência MudouAltura tipo Boolean) {
/* Insere o valor X na ABBB de Raiz R, como um Nó terminal (sem Filhos). Monitora o
balanceamento da Árvore e desencadeia ações de rebalanceamento, caso necessárias.
Ok retorna Verdadeiro se X foi inserido, e Falso caso contrário. MudouAltura retorna
Verdadeiro se a inserção de X aumentou a altura da Árvore, e Falso caso contrário */
Variáveis P, Filho, Neto do tipo NodePtr;      // NodePtr = Ponteiro para Nó;
Se (R == Null)
Então {  /* Caso 1 do Quadro 8.19 - Achou o lugar; insere! */
          P = NewNode; P→Info = X; P→Bal = 0; P→Dir = Null; P→Esq = Null;
          R = P; P = Null; Ok = Verdadeiro; MudouAltura = Verdadeiro;
        } // fim do Caso 1 do Quadro 8.19
Senão     Se (X == R→Info)
          Então   /* Caso 2 do Quadro 8.19: X já está na árvore; não insere! */
                  { Ok = Falso; MudouAltura = Falso; } // fim do Caso 2 do Quadro 8.19
          Senão { Se (R→Info > X)
                  Então   /* Caso 3 do Quadro 8.19: tenta inserir X na Sub Esq de R */
                          { Insere (R→Esq, X , Ok, MudouAltura);
                          // monitora balanceamento voltando de inserir na Sub Esq de R
                          Se MudouAltura     // Se a Subárvore esquerda cresceu..
                          Então Caso R→Bal for:
                                  +1: { R→Bal = 0; MudouAltura = Falso;} // Quadro 9.6a
                                   0: R→Bal= -1; // Quadro 9.6b.
                                      // MudouAltura continua Verdadeiro
                                  -1: /* Quadro 9.6c. É preciso rebalancear! */
                                      { Filho = R→Esq;
                                        Se (Filho→Bal ==  +1)
                                        Então RotDuplaEDInsere;        // Quadro 9.22
                                        Senão RotSimplesEEInsere; }  // Quadro 9.14
                          } // fim do Caso 3 do Quadro 8.19
                  Senão   /* Caso 4 do Quadro 8.19: tenta inserir X na Sub Dir de R */
                          { Insere(R→Dir, X, Ok, MudouAltura);
                            // monitora balanceamento voltando de inserir na Sub Dir de R
                          Se MudouAltura  // se a Subárvore Direita cresceu...
                          então Caso R→Bal for:
                                  -1: { R→Bal = 0; MudouAltura = Falso; };
                                   0: R→Bal=1; // MudouAltura continua Verdadeiro
                                  +1: { Filho = R→Dir;      // É preciso rebalancear!!
                                        Se (Filho→Bal = -1)
                                        Então RotDuplaDeInsere;   // Exercício 9.15
                                        Senão RotSimplesDDInsere;}  // Exercício 9.9
                           }; // fim do Caso 4 do Quadro 8.19;
} /* fim do algoritmo Insere em ABBB */
```

**Quadro 9.25 Algoritmo Conceitual - Insere em ABBB - Algoritmo Adaptado de Camargo, p. 6-8**

O Quadro 9.25 apresenta o algoritmo para a operação que insere um valor X em uma Árvore Binária de Busca Balanceada -

ABBB. O algoritmo do Quadro 9.25 foi elaborado tendo como base, em alguns aspectos,o algoritmo de Camargo, p. 6-8.

Para ajustar o algoritmo que insere um valor X em uma Árvore Binária de Busca não balanceada (Quadro 8.20), cada Nó da Árvore precisará armazenar o seu *Fator de Balanceamento*. Assim, além dos campos Info, Dir e Esq, cada Nó precisará ter também o campo Bal - *Fator de Balanceamento.*

O balanceamento de um Nó apontado por um ponteiro R precisa ser ajustado logo após a inserção de um novo valor em uma de suas Subárvores. No algoritmo do Quadro 9.25 este monitoramento é implementado logo após as chamadas recursivas que inserem um valor X nas Subárvores Esquerda ou Direita de R.

O Quadro 9.6 ilustra o monitoramento e o ajuste do balanceamento quando inserimos um novo valor na Árvore, aumentando a altura da Subárvore Esquerda de R. Assim, logo após retornar da chamada recursiva que insere o novo valor X na Subárvore Esquerda de R - destacada em negrito no Quadro 9.25, tratamos os Casos (a), (b) e (c) do Quadro 9.6 - trecho de algoritmo também destacado em negrito no Quadro 9.25. Compare esse trecho do algoritmo com os diagramas do Quadro 9.6.

Nos Casos (a) e (b), o *Fator de Balanceamento* de R é ajustado, mas a Árvore continua balanceada. No Caso (c), a Árvore precisa ser rebalanceada. Considerando que estamos retornando de uma inserção na Subárvore Esquerda, podem ser desencadeados os Casos de rebalanceamento EE (Esquerda - Esquerda) ou ED (Esquerda Direita), dependendo do *Fator de Balanceamento* do Filho Esquerdo de R. Se o *Fator de Balanceamento* do Filho Esquerdo de R for +1 (veja exemplo no Quadro 9.18) desencadeamos o Caso ED; caso contrário desencadeamos o Caso EE (veja exemplo no Quadro 9.15).

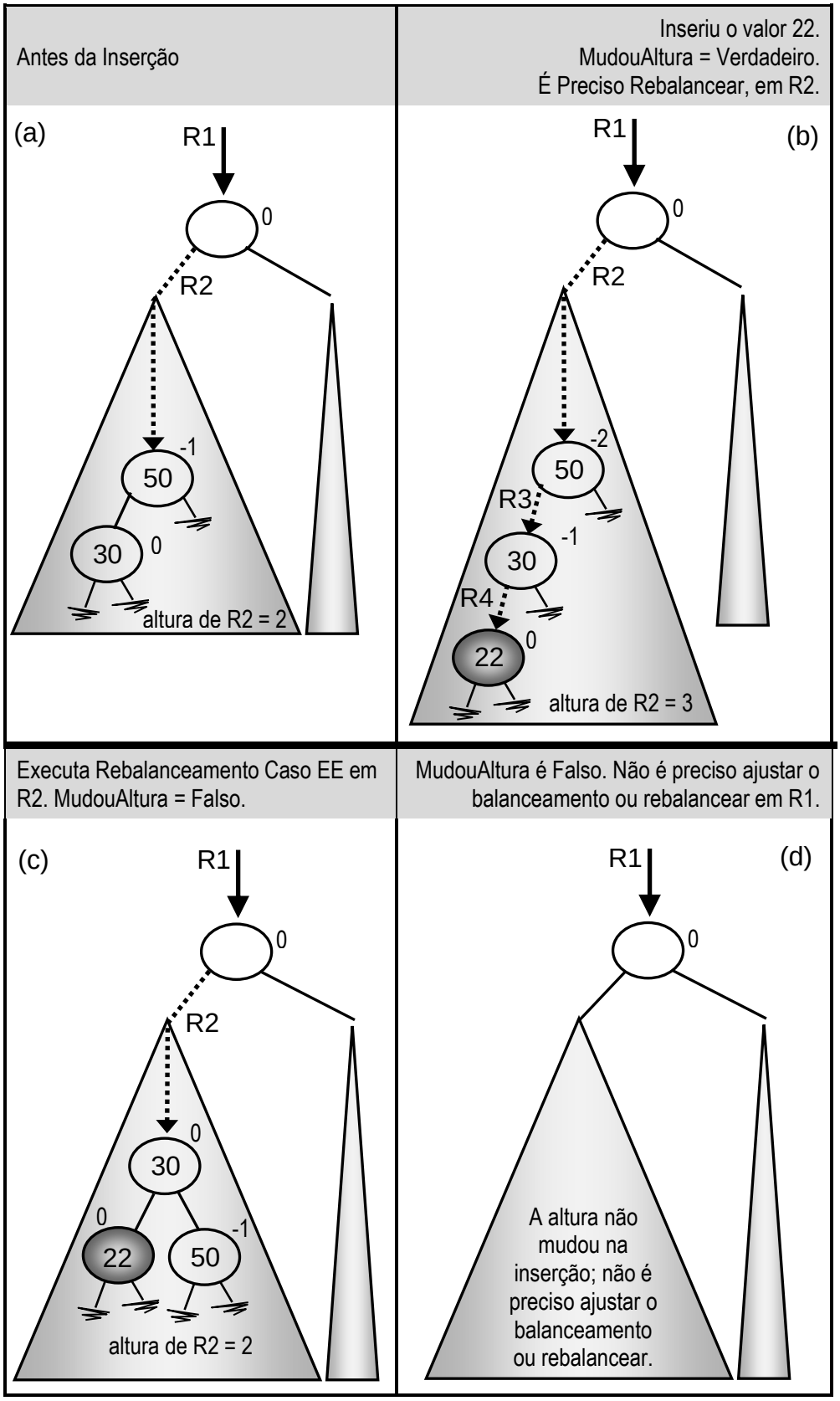
Analogamente, ao retornarmos de uma chamada recursiva para inserir um valor X na Subárvore Direita de R, podemos ajustar o Balanceamento de R, ou desencadear o rebalanceamento pelos Casos DE ou DD. Os algoritmos dos Casos EE e ED foram apresentados nos Quadros 9.14 e 9.22; os algoritmos dos Casos DD e DE são objeto dos Exercícios 9.9 e 9.15.

A variável MudouAltura recebe o valor Verdadeiro quando um novo Nó é inserido; e recebe o valor Falso quando detectamos que, dada a disposição dos demais Nós, a inserção do novo valor não alterou a altura da Árvore (veja o Quadro 9.6a).

MudouAltura também recebe o valor Falso nos processos de rebalanceamento. Relembre nos Quadros 9.13 e 9.14 que antes da inserção do novo valor X a altura da Árvore era H(S1) + 2, e após a inserção e o rebalanceamento pelo Caso EE, a altura da Árvore continuava sendo H(S1) + 2. Situação semelhante pode ser observada nos Quadros 9.21 e 9.22, referente ao Caso ED.

Uma vez que a variável MudouAltura receber o valor Falso, não será mais necessário ajustar o balanceamento, ou desencadear processos de rebalanceamento. Considere, por exemplo, a situação do Quadro 9.26. Antes da inserção do novo

valor 22 a altura de R2 - ou seja, a altura da Árvore R na segunda chamada recursiva - era 2 (Quadro 9.26a).




**Quadro 9.26 Insere em ABBB: Exemplo de Execução**

Em R4, ou seja, na quarta chamada recursiva, inserimos efetivamente o novo valor, 22, e com isso a variável MudouAltura recebe o valor Verdadeiro. Voltamos para R3 (terceira chamada recursiva) e ajustamos o *Fator de Balanceamento* de 0 (zero) para (-1). A variável MudouAltura continuou com o valor Verdadeiro pois a altura de R3 passou de 1 para 2. Mas não detectamos a necessidade de rebalancear em R3. Voltamos então para R2 (segunda chamada recursiva). Após a inserção, a altura de R2 passou a ser 3; e detectamos a necessidade de rebalancear (Quadro 2.26b).

Em R2 executamos o rebalanceamento, Caso EE (Rotação Simples Esquerda - Esquerda). Com a execução do rebalanceamento, a altura de R2 volta a ser 2. A altura de R2 antes da inserção era 2; após a inserção e o rebalanceamento, a altura de R2 voltou a ser 2; por isso a variável MudouAltura recebe o valor Falso (Quadro 2.26c).

Voltamos a R1 (primeira chamada recursiva) com a variável MudouAltura com o valor Falso. Isso significa que solicitamos a inserção de um novo valor na Subárvore Esquerda de R1, através de uma chamada recursiva. Após a execução desta chamada recursiva, o novo valor foi inserido mas a altura da Subárvore Esquerda continua a mesma. Logo, o balanceamento de R1 não precisa ser ajustado. Como já mencionamos anteriormente: uma vez que a variável MudouAltura receber o valor Falso, não será mais necessário ajustar o balanceamento, ou desencadear processos de rebalanceamento.

## 9.3 Remover Elementos de uma ABB Balanceada

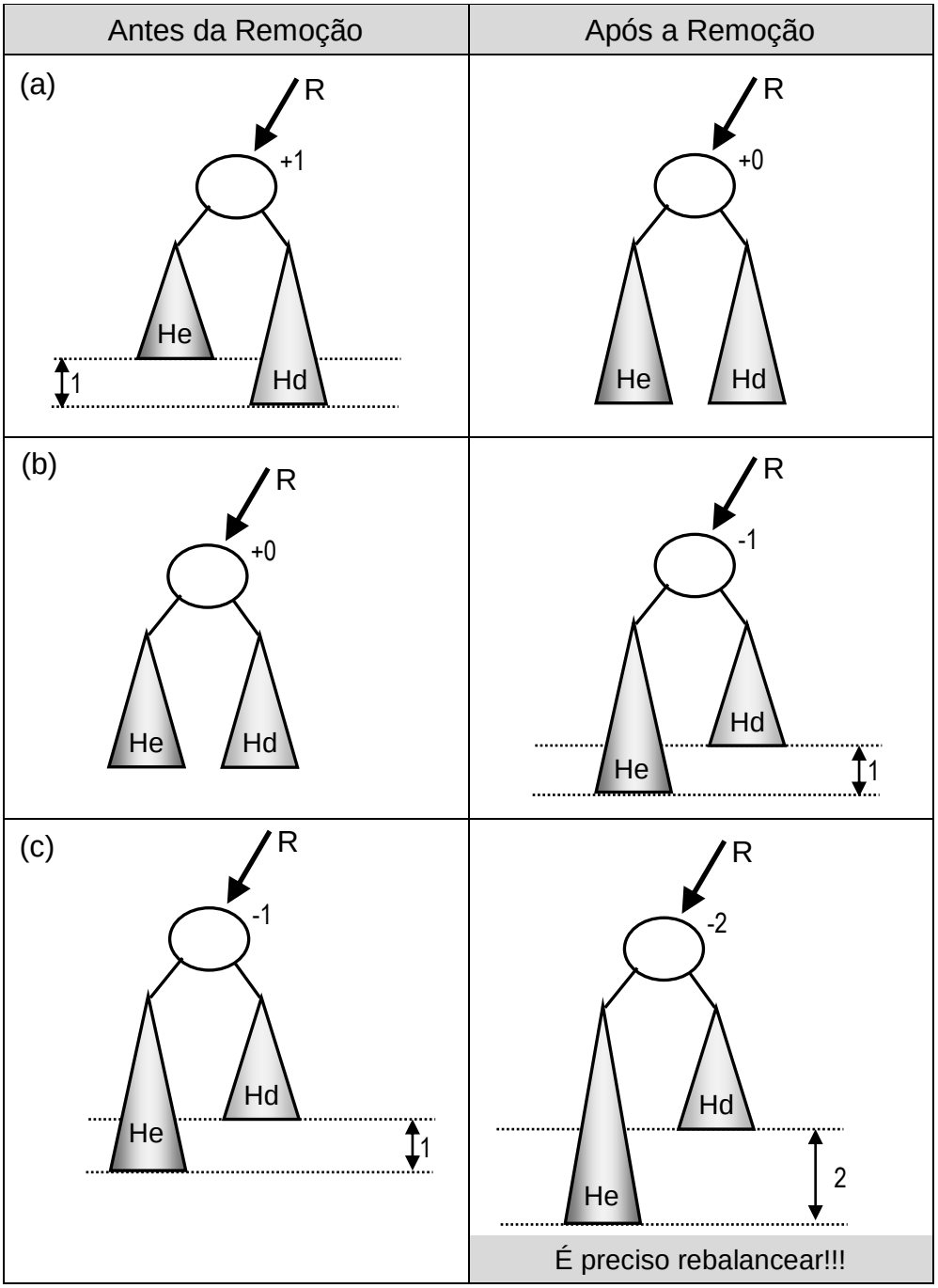
Os ajustes necessários no algoritmo que remove um valor X de uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB são análogos aos ajustes que realizamos no algoritmo Insere. Assim como fizemos no Quadro 9.6 para o algoritmo Insere, o Quadro 9.27 ilustra o ajuste do balanceamento de um Nó apontado por R após a remoção de um valor X, com diminuição da altura da Subárvore Direita.

Compare o Quadro 9.27 com o Quadro 9.6: os diagramas são idênticos, o que indica que a operação que remove um valor da Subárvore Direita tem implicações muito parecidas com as implicações da operação que insere um novo valor na Subárvore Esquerda.

No Quadro 9.27a, antes da remoção (lado esquerdo do diagrama), o Balanceamento de R tem valor +1. Isso significa que a Subárvore Direita de R era maior que a Subárvore Esquerda, em 1. A remoção de um valor da Subárvore Direita de R causou redução da altura Hd, que passou a ser igual a He. Após a remoção (lado direito do diagrama), o Balanceamento de R passou a ser zero.

No Quadro 9.26b, antes da remoção as alturas das Subárvores Hd e He eram iguais e o Balanceamento de R era zero. Após a remoção de um valor da Subárvore Direita de R, Hd passou a ser menor que He em 1 e o Balanceamento de R passou a ser -1.

A situação inicial do Quadro 9.26c mostra He maior que Hd (em 1) e, consequentemente, o Balanceamento de R tendo valor -1. Com a remoção de um valor da Subárvore Direita de R, Hd diminuiu e passou a ser menor que He em 2, o que quebra o critério de balanceamento. Assim, na situação do Quadro 9.26c, a operação de remoção implica na necessidade de rebalanceamento da Árvore.

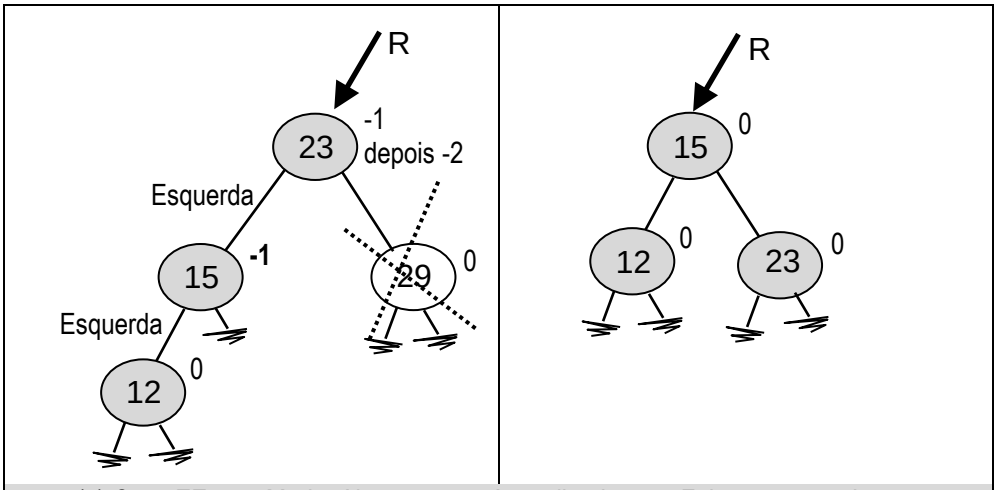



**Quadro 9.27 Monitorando o Balanceamento na Remoção, com Redução da Altura da Subárvore Direita**

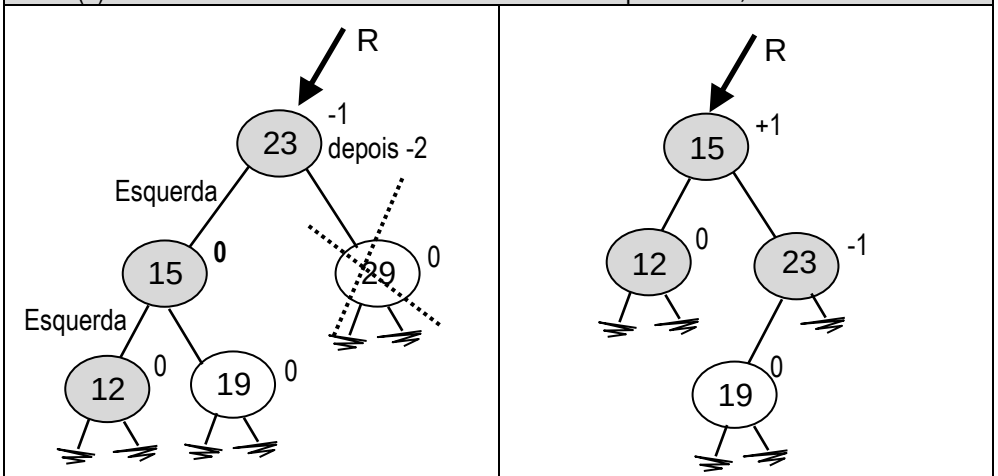
**Casos de Rebalanceamento**

A analogia entre inserir um valor na Subárvore Esquerda e eliminar um valor da Subárvore Direita é válida também nos casos de rebalanceamento. Note no Quadro 9.28a que a remoção do valor

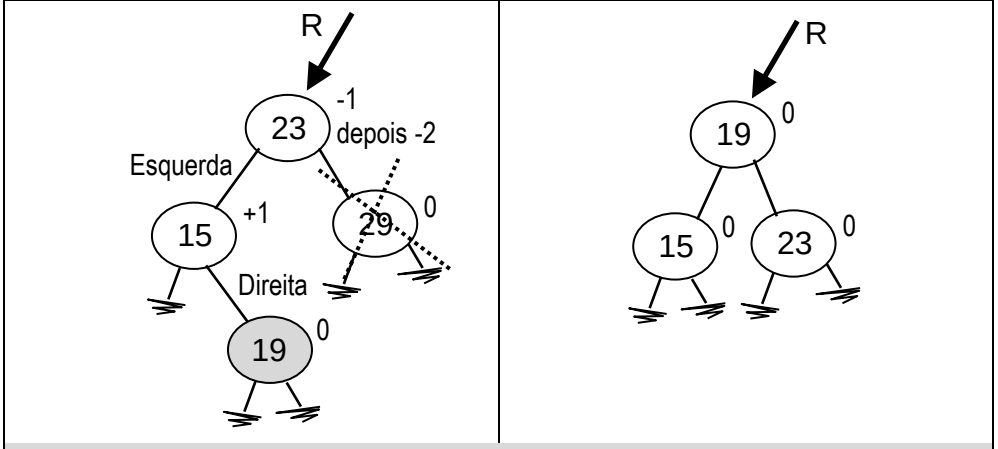
29 gera uma situação idêntica a do Quadro 9.9, que exemplifica o Caso de Rebalanceamento Rotação Simples do tipo EE do algoritmo Insere. Similarmente, no Quadro 9.28c a remoção do valor 29 gera uma situação idêntica a do Quadro 9.18, que exemplifica o Caso de Rebalanceamento Rotação Dupla do tipo ED do algoritmo Insere.




(a) Caso EE mas MudouAltura não será atualizada para Falso, como no Insere




(b) Caso EE mas Fatores de Balanceamento não serão atualizados para Zero, como no Insere




(c) Caso ED mas MudouAltura não será atualizada para Falso, como no Insere

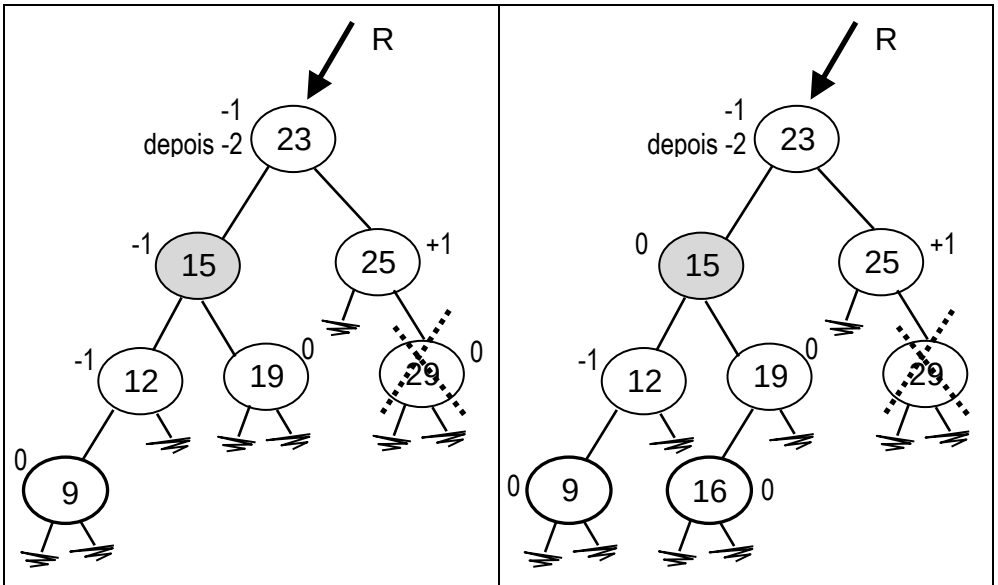
**Quadro 9.28 Remove de ABBB: Casos de Rebalanceamento Análogos aos do Insere, mas com Ajustes**

Contudo, o Quadro 9.28 mostra também que embora os casos de rebalanceamento sejam, em essência, os mesmos que estudamos no algoritmo Insere: EE, ED, DD e DE, alguns ajustes precisam ser realizados para sua aplicação na operação Remove. A movimentação das Subárvores e ponteiros é a mesma nos casos do Insere e do Remove, mas os ajustes nos valores do *Fator de Balanceamento* e no valor da variável MudouAltura precisam ser adaptados para a operação Remove. Por exemplo, no Quadro 9.28a, ao contrário do que ocorre no Caso EE do Insere, a variável MudouAltura precisa continuar com valor Verdadeiro, pois a altura mudou de 3 para 2 com a remoção e rebalanceamento. Essa diferença com relação à variável MudouAltura também ocorre no Caso ED (Quadro 9.28c).

No Quadro 9.28b, após o rebalanceamento o *Fator de Balanceamento* do Nó que contém o valor 15 é +1, e o do Nó que contém o valor 23 é -1. No Caso EE do Insere, o *Fator de Balanceamento* de todos os Nós movimentados passa a ser zero. Note que o *Balanceamento* do Filho Esquerdo de R no Quadro 9.28a é -1, e no Quadro 9.28b é zero. No Insere, no Caso EE o rebalanceamento do Filho Esquerdo de R sempre será -1.

**Exercício 9.16 Remove - ABBB: Rebalanceamento - Caso EE**

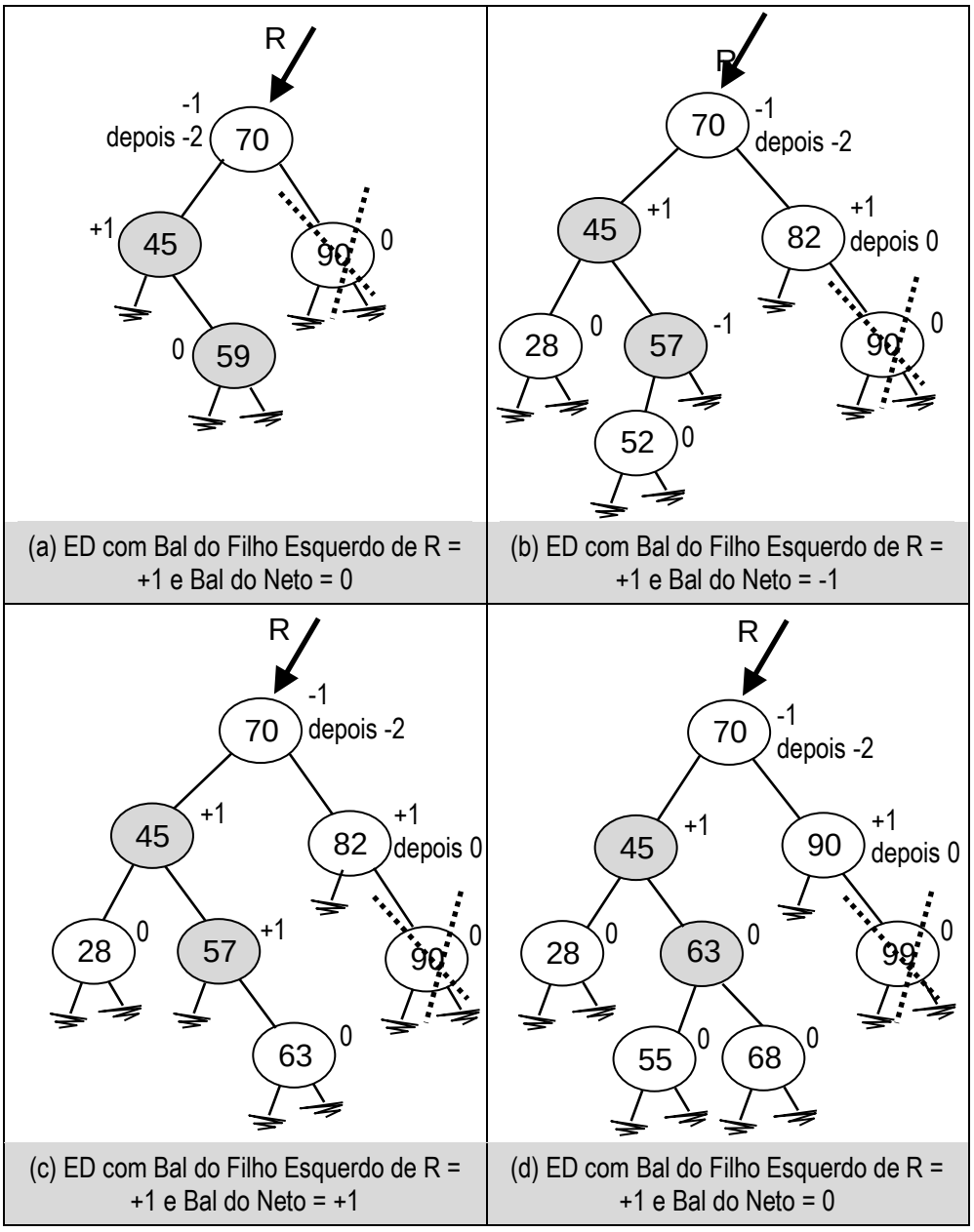
Aplique manualmente o Caso de Rebalanceamento EE do Remove nos exemplos numéricos do Quadro 9.29. A movimentação das Subárvores e ponteiros deve ser idêntica ao que ocorre no Caso EE do Insere. Mas os valores do Fator de Balanceamento e da variável MudouAltura devem ser ajustados. Aplique o Caso EE do Remove quando o Balanceamento do Filho Esquerdo de R for -1 ou zero.




**Quadro 9.29 Remove de ABBB: Exemplos do Caso 5 - Rotação Simples EE do Remove**

**Exercício 9.17 Remove de ABBB: Rebalanceamento Manual ED**

Aplique manualmente o Caso de Rebalanceamento ED do Remove nos exemplos numéricos do Quadro 9.30. A movimentação das Subárvores e ponteiros deve ser idêntica ao que ocorre no Caso ED do Insere. Mas os valores do Fator de Balanceamento e da variável MudouAltura devem ser ajustados. Aplique o Caso ED do Remove somente quando o Balanceamento do Filho Esquerdo de R for +1.




**Quadro 9.30 Remove de ABBB: Exenplos do Caso 7 - Rotação Dupla ED do Remove**

**Exercício 9.18 Generalização do Caso 5: Rotação Simples EE do Remove - Diagrama e Algoritmo**

Analogamente ao que fizemos para o algoritmo Insere nos Quadros 9.13 e 9.14, faça um diagrama generalizando a Rotação Simples

EE do Remove, e desenvolva um algoritmo que implemente esse caso de rebalanceamento.

**Exercício 9.19 Generalização do Caso 6: Rotação Simples DD do Remove - Diagrama e Algoritmo**

O Caso DD do Remove é simétrico ao Caso EE do Remove. Faça um diagrama generalizando a Rotação Simples DD do Remove, e desenvolva um algoritmo que implemente esse caso de rebalanceamento.

**Exercício 9.20 Generalização do Caso 7: Rotação Dupla ED do Remove - Diagrama e Algoritmo**

Analogamente ao que fizemos para o algoritmo Insere nos Quadros 9.21 e 9.22, Faça um diagrama generalizando a Rotação Dupla ED do Remove, e desenvolva um algoritmo que implemente esse caso de rebalanceamento.

**Exercício 9.21 Generalização do Caso 8: Rotação Dupla DE do Remove - Algoritmo**

O Caso DE do Remove é simétrico ao Caso ED do Remove. Desenvolva um algoritmo generalizando a Rotação Dupla DE do Remove.

**Exercício 9.22 Algoritmo Remove para uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB**

No Capítulo 8 elaboramos um algoritmo para remover um valor X de uma Árvore Binária de Busca - ABB (Exercício 8.11). Adapte este algoritmo, fazendo-o monitorar o balanceamento da Árvore, e desencadear ações de rebalanceamento, sempre que necessárias, de modo a manter a Árvore sempre balanceada. Para realizar o monitoramento do balanceamento, tome como ponto de partida o diagrama do Quadro 9.27. Como ações de rebalanceamento, considere os Casos EE, DD, ED e DE do Remove, objeto dos Exercícios 9.18, 9.19, 9.20 e 9.21.

```
Remove (parâmetro por referência R tipo ABBB, parâmetro X tipo Inteiro, parâmetro
por referência Ok tipo Boolean, parâmetro por referência MudouAltura tipo Boolean) {
/* Remove o valor X da ABBB de Raiz R. Monitora o balanceamento e dispara
processos de rebalanceamento, sempre que necessário, para manter a Árvore sempre
balanceada. Ok retorna Verdadeiro se X for encontrado e removido, e Falso caso
contrário. MudouAltura retorna Verdadeiro se na remoção de X a altura da Árvore
diminuiu, e Falso caso contrário. */
```

**Exercício 9.23 Implemente uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB em uma Linguagem de Programação**

Implemente uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB, como um Tipo Abstrato de Dados, com operações Cria, Vazia, Insere, Remove e Destrói. Implemente em uma linguagem de programação, como C++.

## Performance Depende de Balanceamento!

Para que uma Árvore Binária de Busca mantenha sua excelente performance durante todo o tempo, ela precisa estar balanceada durante todo o tempo. Para isto, os algoritmos para inserir e eliminar elementos precisam monitorar o balanceamento da Árvore, e desencadear operações de rebalanceamento sempre que necessário.

## Consulte nos Materiais Complementares

Vídeos Sobre Árvores Balanceadas

**http://edcomjogos.dc.ufscar.br**

## Exercícios de Fixação

**Exercício 9.24** Execute algum simulador de operações em uma Árvore Binária de Busca Balanceada, como por exemplo o Tree Explorer (link [4]). Execute operações para inserir e eliminar elementos.

## Referências e Leitura Adicional


Adelson-Velskii, G. M.; Landis, E. M.; An Algoritthm for the Organization of Information. Soviet Mathematics 3 (1962), 1259-1263 - conforme citado por Drozdek (2002), p. 232 e 268.

Camargo, H. A.; Apostila da Disciplina Estruturas de Dados. Departamento de Computação e Estatística - Universidade Federal de São Carlos, data desconhecida.

Drozdek, A.; Estruturas de Dados e Algoritmos em C++. São Paulo: Thomson, 2002.

Knuth, D.; The Art of Computer Programming Volume 3: Sorting and Searching, 2a edição. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998, p. 458-481.

Langsam, Y; Augenstein, M. J.; Tenenbaum, A. M.; Data Structures Using C and C++, 2nd ed. Upper Saddle River - New Jersey: Prentice Hall, 1996, p. 413-423.

# Links


[1] Buricea, M.; Height Balanced Trees. Lecture Notes. Universitatea Din Craeova. Disponível em http://software.ucv.ro/~mburicea/lab6ASD.pdf (consulta em novembro de 2013).

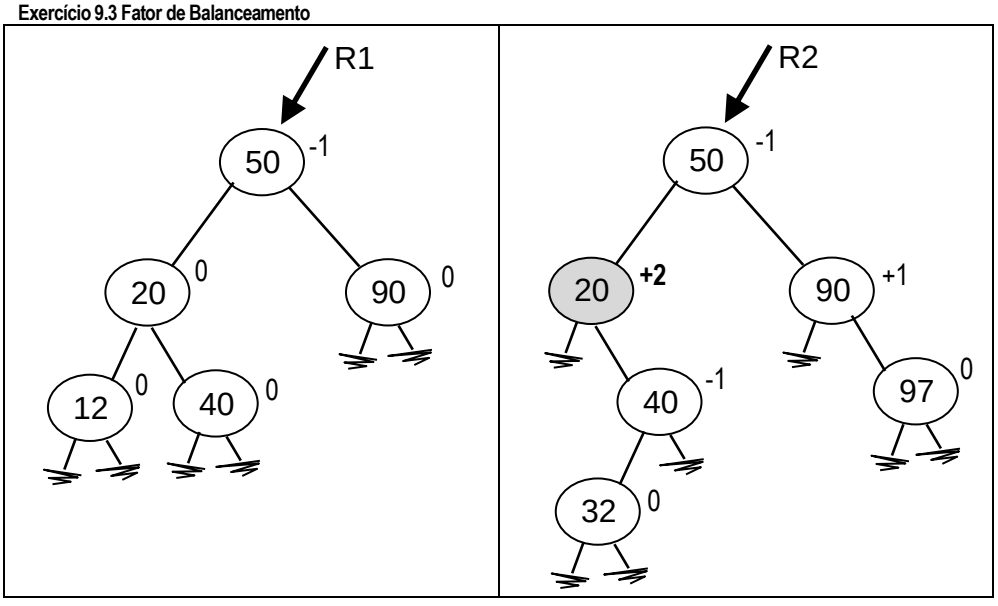
[2] Devadas, S.; Daskalakis, K.; Dzunic, Z.; Onak, K.; Schwendner, A; Singh, R.; Introduction to Algorithms. Llecture Notes . Massachussetts Institute of Technology, 2009. Disponível em http://courses.csail.mit.edu/6.006/fall09/lecture_notes/lecture04.pdf (consulta em novembro de 2013).

[3] Leser, U.; Algorithms and Data Structures - AVL: Balanced Search Trees. Lecture Notes. Humboldt Universitat, Zu Berlin, 2011. Disponível em http://www.informatik.hu-berlin.de/forschung/gebiete/wbi/teaching/archive/ss11/vl_algorithmen/15_avl_trees.pdf (consulta em novembro de 2013).

[4] Rocha, Vitor; Vervloet, Matheus; Franco, Alexandre; Andrade, César Abreu de; Tree Explorer. EDGames, 2013. http://edgames.dc.ufscar.br (consulta em setembro de 2013).

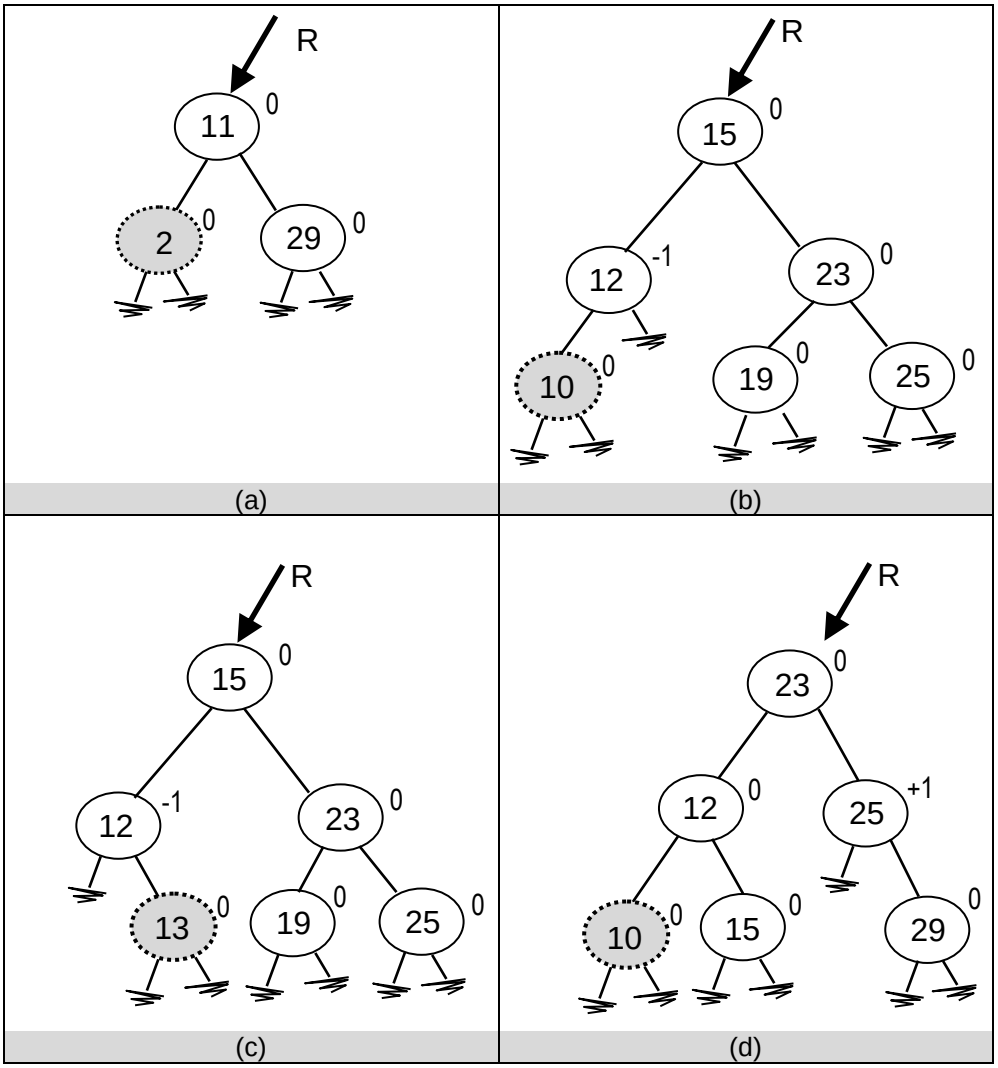

# Soluções para Alguns dos Exercícios

**Exercício 9.3 Fator de Balanceamento**




**Exercício 9.4 Causaria Desbalanceamento?**
A inserção de 25 e de 40 não causaria desbalanceamento. A inserção dos demais valores, causaria.

**Exercício 9.6 Rebalanceamento Manual**

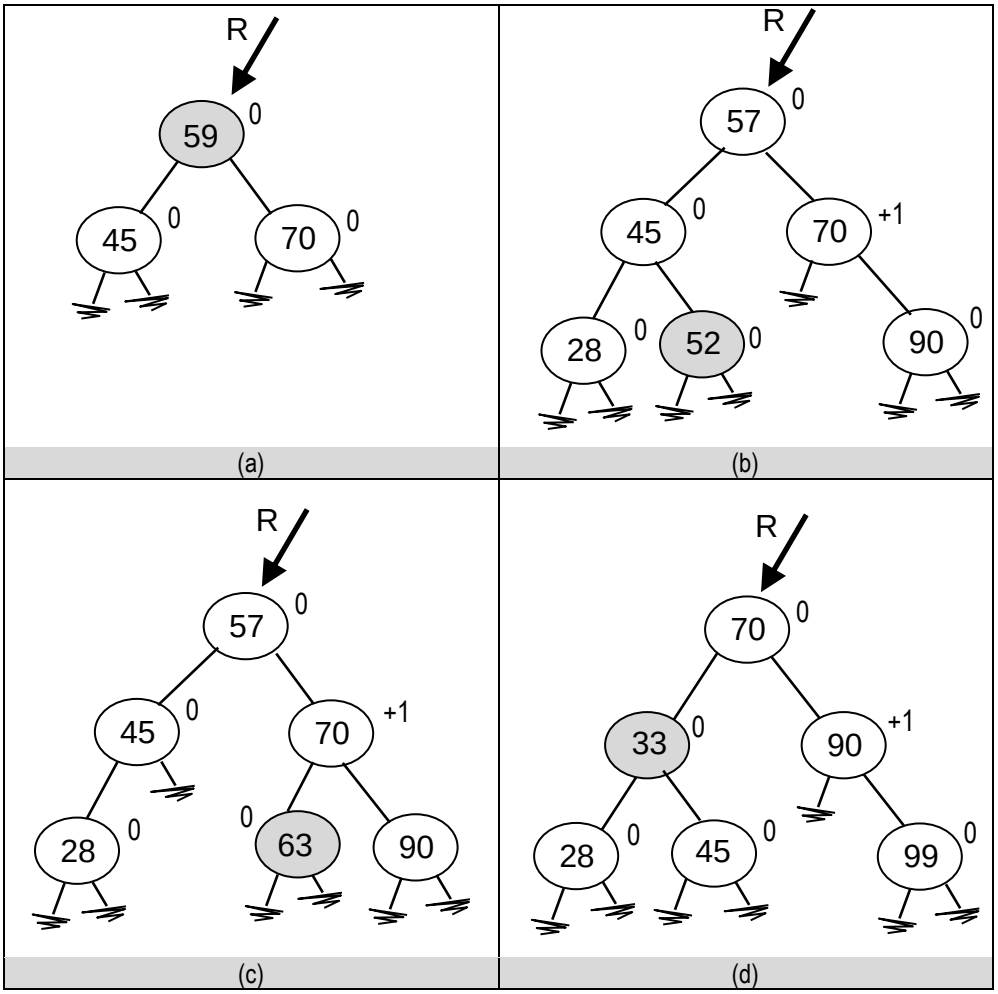



No Caso (d), note que o Nó em que o desbalanceamento foi detectado é o Nó que contém o valor 15, e não o Nó apontado por R.

**Exercício 9.9 Generalização do Caso 2 Rotação Simples DD do Insere - Algoritmo**

```
/* caso absolutamente simétrico ao Caso EE; o que era Esq passa a ser Dir e vice-versa */

variavel Filho do tipo NodePtr;          // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Dir

/* movimentando as Subárvores e os ponteiros */
Filho = R→Dir;
R→Dir = Filho→Esq;
Filho→Esq = R;

/* ajustando os balanceamentos */
R→BAL = 0;                               // atualizando o Fator de Balanceamento de R
Filho→Bal = 0;                                   // atualizando o Fator de Balanceamento de Filho

/* mudando a Raiz da árvore*/
R = Filho;

/* atualizando a variável MudouAltura */
MudouAltura = Falso;                     // após inserir X e rebalancear, a altura da Árvore...
                                                 // ... continua a mesma: H(S1) + 2.
```

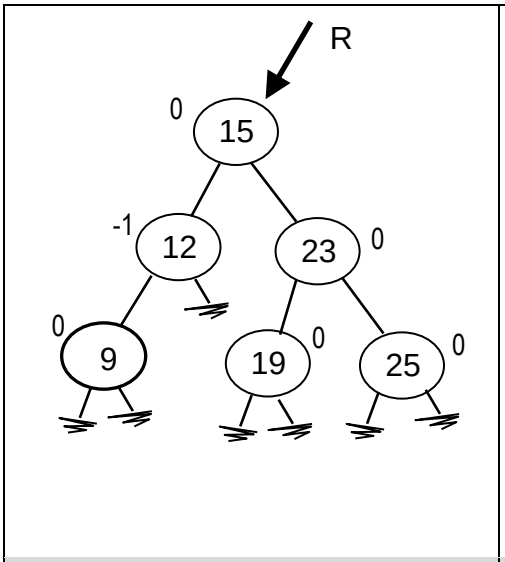
**Exercício 9.11 Rebalanceamento Manual - ED**



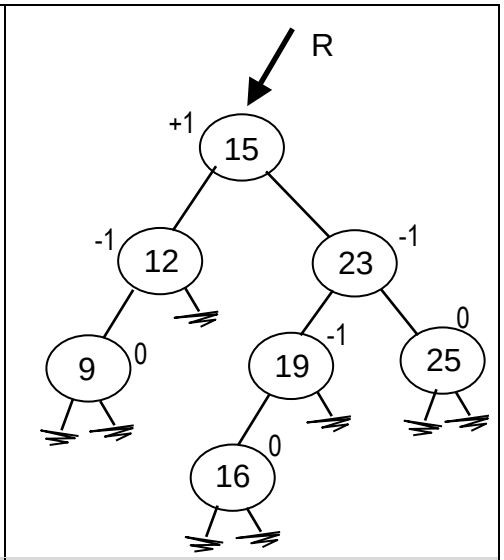

**Exercício 9.14 Generalização do Caso 4: Rotação Dupla DE - Insere - Algoritmo**

```
/* caso simétrico ao Caso ED; o que era Esq passa a ser Dir e vice-versa */

variavel Filho do tipo NodePtr;
variavel Neto do tipo NodePtr;

/* posicionando os ponteiros Filho e Neto */
Filho = R→Dir;
Neto = Filho→Esq;

/* movimentando a Subárvore S2 */
Filho→Esq = Neto→Dir;
Neto→Dir = Filho;

/* movimentando a Subárvore S3 */
R→Dir = Neto→Esq;
Neto→Esq = R;

/* ajustando os balanceamentos */
Caso Neto→Bal for
   -1 :     { R→Bal = 0;                        // inseriu X2.
              Filho→Bal =  1;
              Neto→Bal = 0; };
   +1 :     { R→Bal = -1;                       // inseriu X1.
              Filho→Bal =  0;
              Neto→Bal = 0; };
    0 :     { R→Bal = 0;       //  inseriu o Nó apontado por Neto; caso com apenas 3 valores
              Filho→Bal = 0;
              Neto→Bal = 0; };

/* mudando a Raiz da árvore*/
R = Neto;                  // o Nó que contém 'B'  passará a ser a Raiz - Quadro 2.21

/* atualizando a variável MudouAltura */
MudouAltura = Falso;    // após inserir X1 ou X2 e rebalancear a altura da Árvore continua a mesma: H(S1) + 2.
```

**Exercício 9.16 Remove de uma ABBB: Rebalanceamento Manual - Caso EE**

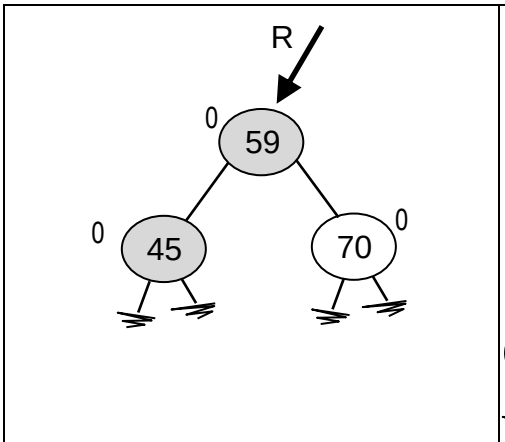



(a) EE com Bal do Filho Esquerdo de R = -1

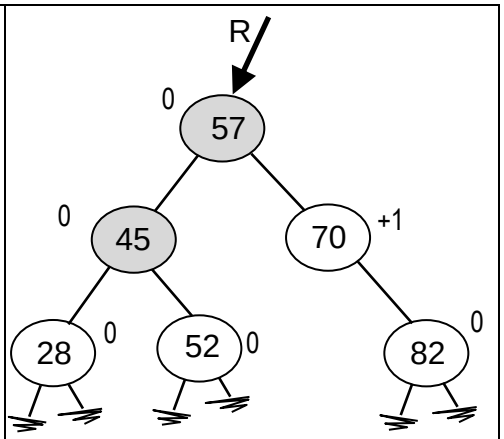



(b) EE com Bal do Filho Esquerdo de R = 0

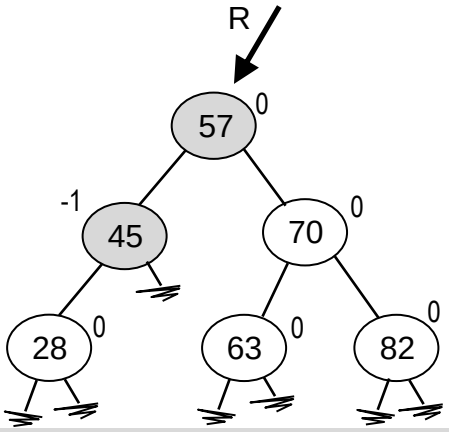
**Exercício 9.17 Remove de ABBB: Rebalanceamento Manual - Caso ED**



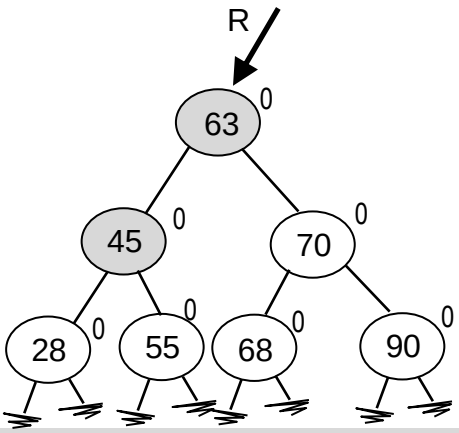

(a) ED com Bal do Filho Esquerdo de R = +1 e Bal do Neto = 0




(b) ED com Bal do Filho Esquerdo de R = +1 e Bal do Neto = -1




(c) ED com Bal do Filho Esquerdo de R = +1 e Bal do Neto = +1



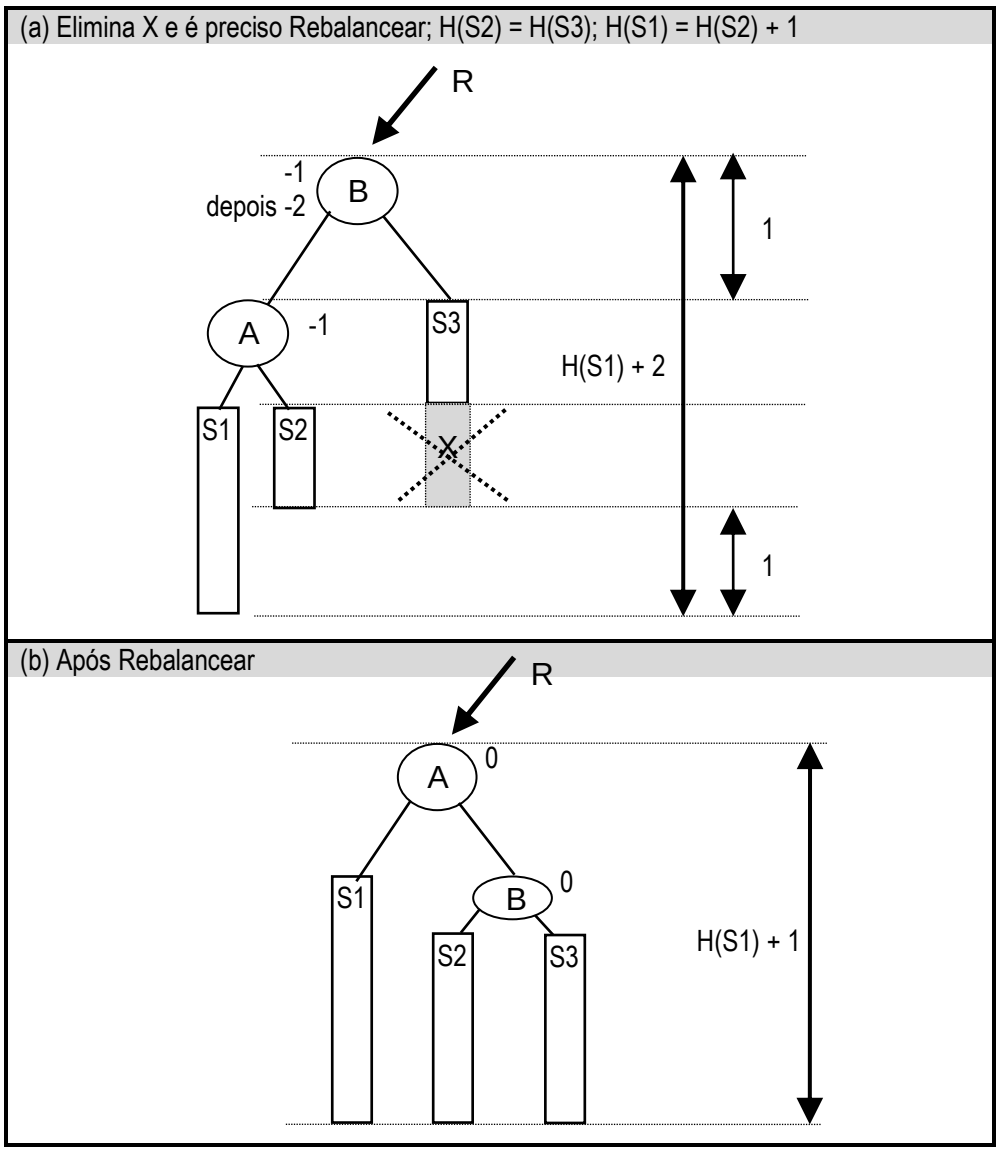

(d) ED com Bal do Filho Esquerdo de R = +1 e Bal do Neto = 0

**Exercício 9.18 Generalização do Caso 5: Rotação Simples EE do Remove - Diagrama e Algoritmo**
Dividimos o Caso EE do Remove em dois sub-casos, para mostrar algumas diferenças: Caso EE(a) - Quando Filho→Bal = -1; Caso EE(b) - Quando Filho→Bal = zero. Para exemplificar as diferenças, note que quando Bal do Filho é -1, a altura da Árvore muda; quando o Bal do Filho é zero a altura da Árvore não muda. Observe também os Balanceamentos.

**Caso EE (a) do Remove: Quando Filho→Bal = -1**

```
variavel Filho do tipo NodePtr;          // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Esq

/* movimentando as Subárvores e os ponteiros */
Filho = R→Esq;
Se (Filho→Bal == -1)
Então {      R→Esq = Filho→Dir;
             Filho→Dir = R;

        /* ajustando os balanceamentos */
        R→BAL = 0;       // atualizando o Fator de Balanceamento de R
        Filho→Bal = 0;  // atualizando o Fator de Balanceamento de Filho

        /* mudando a Raiz da árvore*/
        R = Filho;

        /* a variável MudouAltura continua Verdadeiro */
        MudouAltura = Verdadeiro;   }
```

**Caso EE (a) do Remove: Quando Filho→Bal = -1**

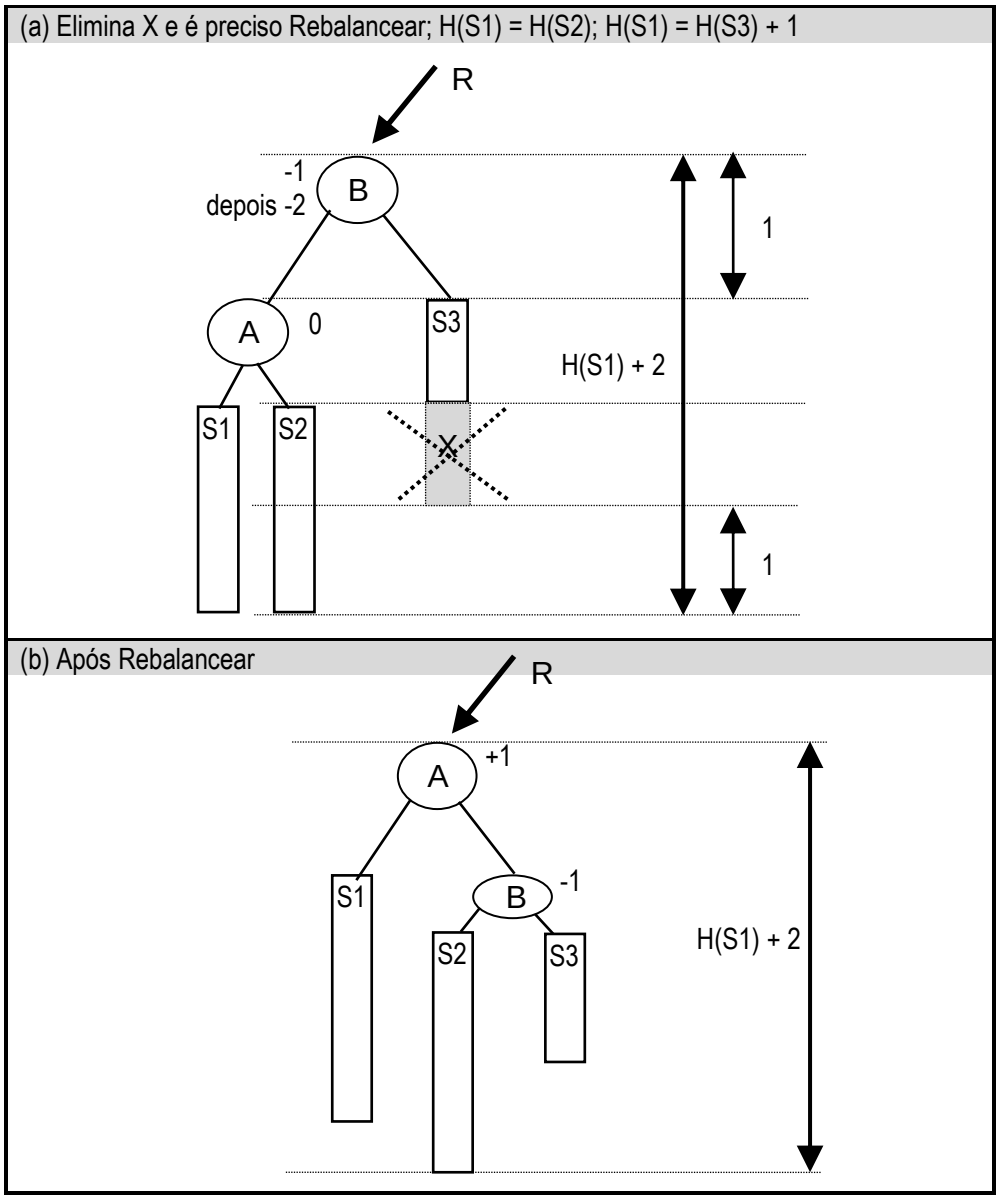



(*) estilo de diagramas adaptado de Knuth (1998) e Camargo.

**Caso EE (b) do Remove: Quando Filho→Bal = 0**

```
variavel Filho do tipo NodePtr;         // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Esq

/* movimentando as Subárvores e os ponteiros */
Filho = R→Esq;
Se (Filho→Bal == 0)
Então {       R→Esq = Filho→Dir;
              Filho→Dir = R;

        /* ajustando os balanceamentos */
        R→BAL = -1;       // atualizando o Fator de Balanceamento de R
        Filho→Bal = +1;  // atualizando o Fator de Balanceamento de Filho

        /* mudando a Raiz da árvore*/
        R = Filho;

        /* atualizando a variável MudouAltura */
        MudouAltura = Falso;      }
```

**Caso EE (b) do Remove: Quando Filho→Bal = 0**



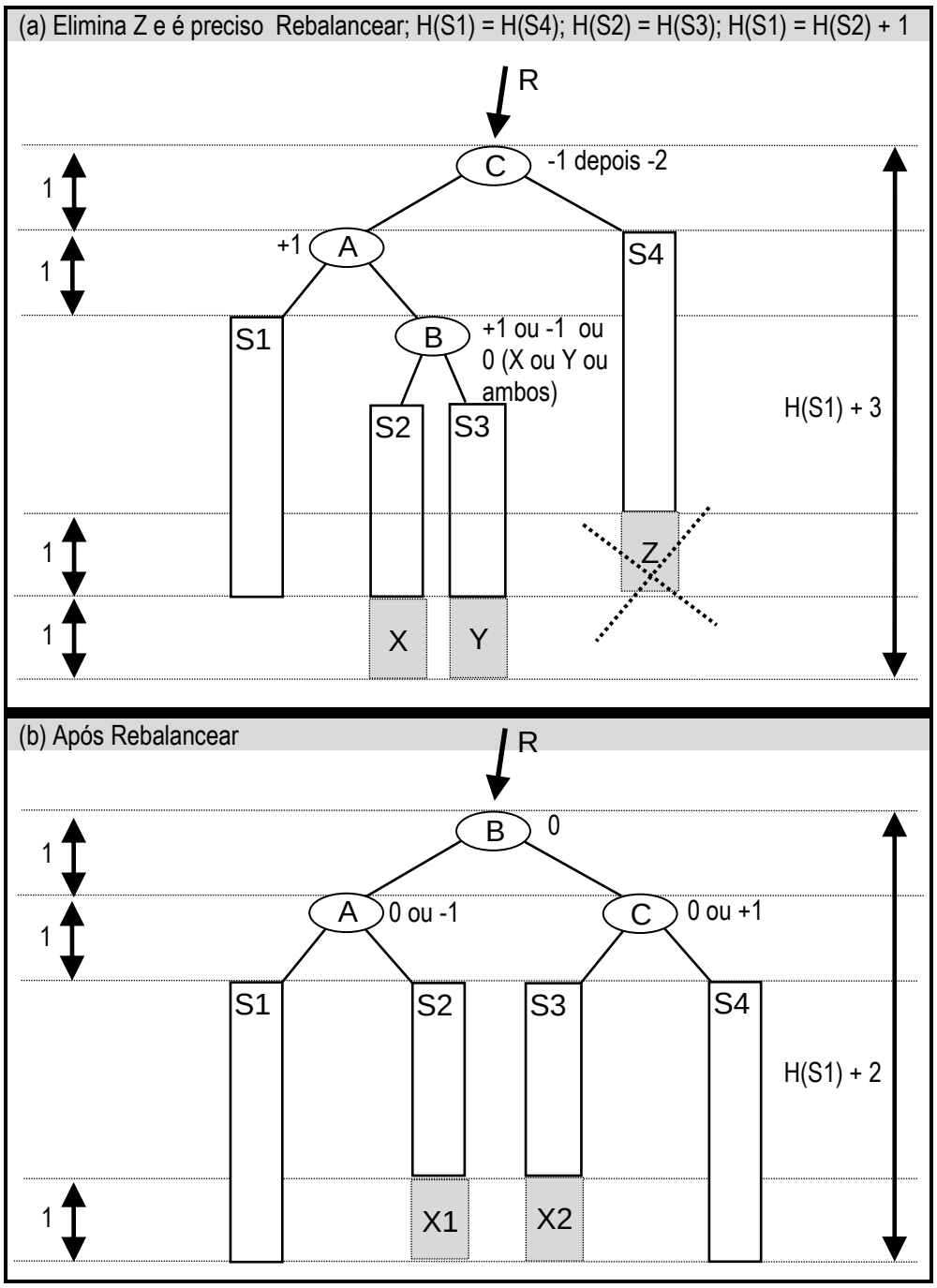

(*) estilo de diagramas adaptado de Knuth (1998) e Camargo.

**Exercício 9.20 Generalização do Caso 7: Rotação Dupla ED do Remove - Algoritmo**

```
variavel Filho do tipo NodePtr;         // Filho é ponteiro auxiliar, que apontará R→Esq
variavel Neto do tipo NodePtr;          // Neto é ponteiro auxiliar, que apontará Filho→Dir

Filho = R→Esq;          /* posicionando os ponteiros Filho e Neto */
Neto = Filho→Dir;
```

```
Filho→Dir = Neto→Esq;                /* movimentando a Subárvore S2 */
Neto→Esq = Filho;

R→Esq = Neto→Dir;    /* movimentando a Subárvore S3 */
Neto→Dir = R;

Caso Neto→Bal for                                    /* ajustando os balanceamentos */
   -1 :      { R→Bal = 1;
               Filho→Bal =  0;
               Neto→Bal = 0; };
   +1 :      { R→Bal = O;
               Filho→Bal =  -1;
               Neto→Bal = 0; };
    0 :      { R→Bal = 0;
               Bal (Filho) = 0;
               Neto→Bal = 0; };
R = Neto;    /* mudando a Raiz da árvore*/
MudouAltura = Verdadeiro; /* variável MudouAltura - continua Verdadeiro */
```

**Exercício 9.20 Generalização do Caso 7: Rotação Dupla ED do Remove - Diagrama**




(*) estilo de diagramas adaptado de Knuth (1998) e Camargo.

**Exercício 9.22 Algoritmo Remove para uma Árvore Binária de Busca Balanceada - ABBB**

/* Este algoritmo foi elaborado tendo como base, em alguns aspectos, o algoritmo de Camargo, p. 10-13 */

Remove (parâmetro por referência R do tipo ABBB, parâmetro X do tipo Inteiro, parâmetro por referência Ok do tipo Boolean, parâmetro por referência MudouAltura tipo Boolean) {

/* Remove o valor X da ABB de Raiz R. Monitora o balanceamento e dispara processos de rebalanceamento, sempre que necessário, para manter a Árvore sempre balanceada. Ok retorna Verdadeiro se X for encontrado e removido, e Falso caso contrário. MudouAltura retorna Verdadeiro se na remoção de X a altura da Árvore diminuiu, e Falso caso contrário */

variável Aux do tipo NodePtr; // NodePtr = Ponteiro para Nó;

```
Se (R == Null)
Então     // Caso 1: Árvore Vazia: não remove.
          { Ok = Falso;  MudouAltura = Falso; }
Senão     Se (R→Info > X)
          Então     // Caso 3: remove X da Subárvore Esq de R
```

```
                    { Remove (R→Esq, X , Ok, MudouAltura);

                    /* Monitora balanceamento após eliminar da Subárvore Esquerda */
                    Se MudouAltura
                    Então Caso R→Bal for:
                              -1: R→Bal = 0; // MudouAltura continua Verdadeiro
                               0: { R→Bal =  1; MudouAltura = Falso;};
                              1: { Filho = R→Dir;       // vai precisar balancear
                                   Se (Filho→Bal ==  -1)
                                   Então RotDuplaDE-Remove
                                   Senão RotSimplesDD-Remove; // casos Filho→Bal = 0 e +1
                                  }; // fim do Caso
                     } // fim do Caso 3
          Senão     Se (R→Info < X)
                    Então     // Caso 4: remove X da Subárv Dir de R
                              { Remove(R→Dir, X, Ok, MudouAltura);

                              /* Monitora balanceamento após eliminar da Subárv Direita */
                              Se MudouAltura
                              Então Caso R→Bal for:
                                        1: R→Bal = 0; // MudouAltura continua Verdadeiro
                                        0: { R→Bal = -1; MudouAltura = Falso;};
                                      -1: { Filho= R→Esq; // vai precisar balancear
                                            Se (Filho→Bal == 1)
                                            Então RotDuplaED-Remove
                                            Senão RotSimplesEE-Remove; // Filho→Bal=0 e -1
                                            }; // fim do Caso
                               } // fim do Caso 4
                    Senão
/* Caso 2: Encontrou X - Remove e Ajusta a Árvore. 3 casos: 0, 1 ou 2 Filhos */
{ Aux = R;

Se ((R→Esq == Null) E (R→Dir == Null ))
Então { DeleteNode(Aux); R=Null; Ok=Verdadeiro; MudouAltura=Verdadeiro; } // Zero Filhos
Senão Se ((R→Dir != Nul)I E (R→Esq != Null))
        Então {  /* 2 Filhos. Acha o Nó que contém o Maior Elemento da Subárvore Esquerda de R. O maior é o elemento
                    mais a direita da Subárvore.  Ele nunca terá o Filho Direito  */
                    Aux = R→Esq;
                    Enquanto (Aux→Dir != Null) Faça
                              Aux = Aux→Dir;

                    /* Substitui o valor de R→Info - que é o elemento que estarmos querendo  eliminar - pelo valor do
                       Maior da Subárvore Esquerda de R. A Árvore ficará com 2 elementos com o mesmo valor. */
                     R→Info = Aux→Info;   // Aux aponta para o Nó que contém o Maior

                    /* Remove o valor repetido da Subárvore Esquerda de R, através de  uma chamada recursiva.
                    Atenção aos parâmetros. Não estamos mais removendo X, mas sim R→Info, que etá repetido.
                    Não estamos mais removendo de R e sim de R→Esq. */
                    Remove(R→Esq, R→Info, Ok, MudouAltura);

                    /* Monitora balanceamento após eliminar da Subárvore Esquerda */
                    Se MudouAltura
                    Então Caso R→Bal for:
                              -1: R→Bal = 0; // MudouAltura continua Verdadeiro
                               0: { R→Bal =  1; MudouAltura = Falso;};
                              1: { Filho = R→Dir;       // vai precisar balancear
                                   Se (Filho→Bal ==  -1)
                                   Então RotDuplaDE-Remove
                                   Senão RotSimplesDD-Remove; // casos Filho→Bal = 0 e +1
                                  }; // fim do Caso
                    // Ok e MudouAltura só são ajustadas nos casos com 0 e 1 Filhos
                    } // fim - 2 Filhos

          Senão     {   // 1 Único Filho
                    Se (R→Esq == Null)
                    Então     R = R→Dir;          // "puxa" o Filho Direito; Filho esquerdo é nulo
                    Senão     R = R→Esq;          // "puxa" o Filho Esquerdo; Filho direito é nulo
                    DeleteNode (Aux);             // desaloca o Nó
                    Ok=Verdadeiro;
                    MudouAltura=Verdadeiro;
                    } // fim 1 único filho
} // fim Remove
```