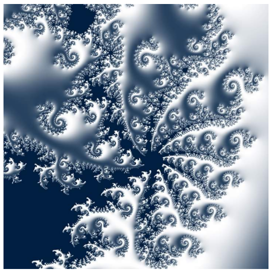
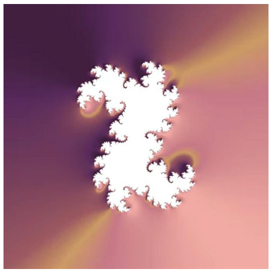
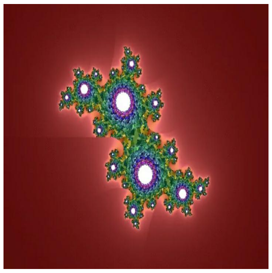
Fractales

Anely Flores Suárez

17 de junio de 2020

La palabra “fractal” proviene del latín fractus, que significa “fragmentado”, “fracturado”, o simplemente “roto” o “quebrado”, muy apropiado para objetos cuya dimensión es fraccionaria. El término fue acuñado por Benoît Mandelbrot en 1977 aparecido en su libro The Fractal Geometry of Nature. Al estudio de los objetos fractales se le conoce, generalmente, como geometría fractal.



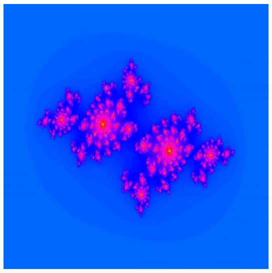
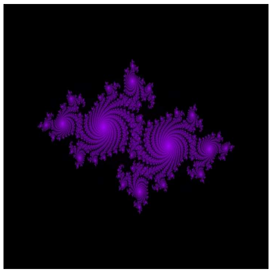



1. ¿Qué es un Fractal?

Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de autosimilitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si es entera no es un entero normal. El hecho que goce de autosimilitud significa que el objeto fractal no depende del observador para ser en sí, es decir, si tomamos algunos tipos de fractales podemos comprobar que al hacer un aumento doble el dibujo es exactamente igual al inicial, si hacemos un aumento 1000 comprobaremos la misma característica, así pues si hacemos un aumento n, el dibujo resulta igual luego las partes se parecen al todo.

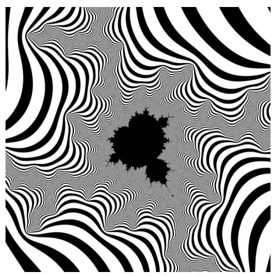
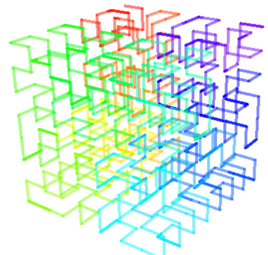
Un conjunto u objeto es considerado fractal cuando su tamaño se hace arbitrariamente mayor a medida que la escala del instrumento de medida disminuye.

Hay muchos objetos ordinarios que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales, aunque no los reconozcamos. Las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales naturales aunque finitos ergo no ideales; no así como los fractales matemáticos que gozan de infinidad y son ideales.

2. Propiedades de los fractales

- Dimensión no entera.-La dimensión de un fractal no es un número entero sino un número generalmente irracional.
- Estructura compleja a cualquier escala.-Los fractales muestran estructuras muy complejas independientemente de la escala a la cual lo observemos.
- Infinitud.-Se consideran infinitos ya que a medida que aumentamos la precisión del instrumento de medición observamos que el fractal aumenta en longitud o perímetro.
- Autosimilitud en algunos casos.-Existen fractales plenamente autosimilares de manera que el todo está formado por pequeños fragmentos parecidos al todo.

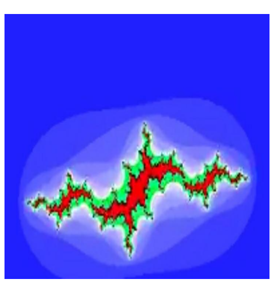
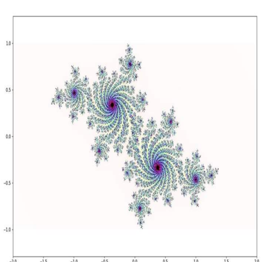
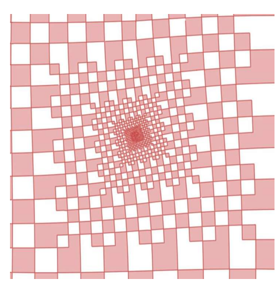



3. ¿Cómo se construye un fractal?

Normalmente un fractal se construye mediante una fórmula o función que se va iterando un número arbitrario de veces. Aunque otra forma de lograrlo es mediante la aplicación de técnicas de recursividad. Con estos dos métodos es como solemos conseguir la autosimilitud de los fractales, ya que aplicamos la misma función a diferentes niveles.

Tan importante es la elección de la formula como la elección del método de coloreado de los resultados. En relación a esto, existen multitud de técnicas de coloreado como pueden ser:

1. Coloreado mediante el algoritmo de tiempo de escape.
2. Coloreado por convergencia a soluciones de una ecuación.
3. Cualquier otro que puedas imaginar.

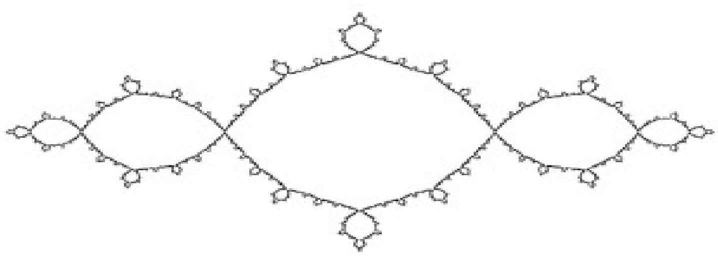
4. Fractales naturales

Existen multitud de fractales naturales en las cosas más insignificantes, y que pasamos por alto cada día. Estos fractales no son infinitos (porque fuera del elegante universo de las matemáticas ese concepto es difícil), pero si son autosimilares a muchos niveles. Claros ejemplos de estos fractales son:

Hoja Corales Romanesco

5. Algunos Fractales

- **Conjunto de Julia**. Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función.



Una familia muy importante de conjuntos de Julia se obtiene a partir de funciones cuadráticas simples,como por ejemplo:

$$F_c(z) = z^2 + c$$

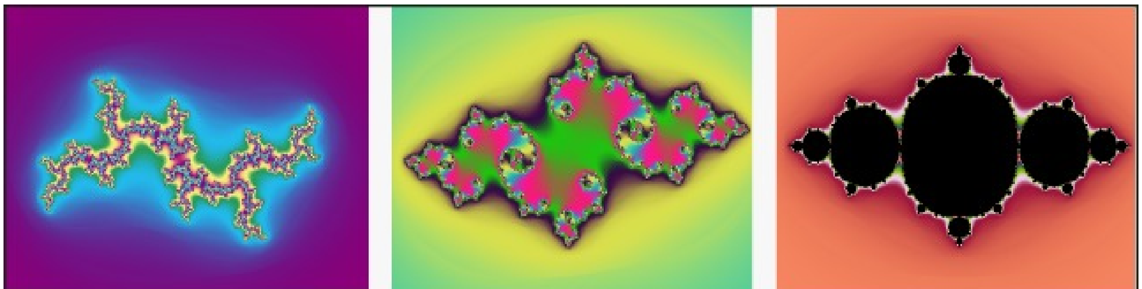
donde c es un número complejo. El conjunto de Julia que se obtiene a partir de esta función se denota J_c. El proceso para obtener este conjunto de Julia de es el siguiente:

Se elige un número complejo cualquiera z y se va construyendo una sucesión de números de la siguiente manera:

$$z_0 = z$$
$$z_1 = F(z_0) = z_0^2 + c$$
$$z_2 = F(z_1) = z_1^2 + c$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n + 1 = F(z_n) = z_n^2 + c$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que z pertenece al conjunto de Julia de parámetro c, denotado por J_c; de lo contrario, si la sucesión tiende al infinito, z queda excluido de éste.

Es fácil deducir que obtener un conjunto de Julia resulta muy laborioso, pues el proceso anterior habría que repetirlo para cualquier número complejo z, e ir decidiendo en cada caso si dicho número pertenece o no al conjunto J_c. Debido a la infinidad de cálculos que se necesitaban para obtener la gráfica correspondiente, se tuvo que esperar hasta los años ochenta para poder representar estos conjuntos. Gracias a la invención del ordenador por fin pudieron ser observados en una pantalla, aunque el señor Julia no llegase a verlos.



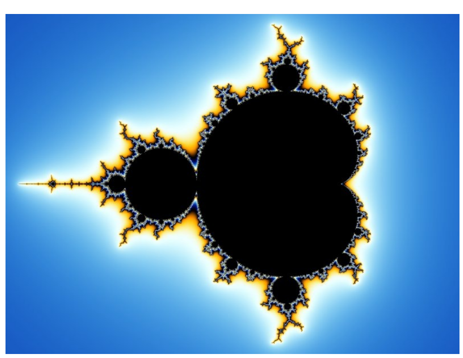
Conjunto de Julia para c = 0 + 0.8i | Conjunto de Julia para c = -0.8 - 0.25i | Conjunto de Julia para c = -0.8 +0i

- **Conjunto de Mandelbrot**. Mandelbrot modifica el proceso iterativo de Julia haciendo variable el punto c y fijando el punto $z_0 = 0$. El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos c para los cuales la sucesión de puntos obtenida por el método iterativo

$$\begin{gathered} z_0 = 0 \\ z_1 = F(z_0) = z_0^2 + c \\ z_2 = F(z_1) = z_1^2 + c \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n + 1 = F(z_n) = z_n^2 + c \end{gathered}$$

no tiende a infinito, es decir, **está acotada**.

Si asignamos el color negro a los puntos c que dan lugares a sucesiones acotadas y otros colores a los demás puntos, según lo rápido que tiendan al infinito, la representación obtenida para el conjunto de Mandelbrot es:



- **Curvas de Peano**. Una curva de Peano, nombre en honor al matemático italiano Giuseppe Peano, es un tipo de curva continua que recubre"todo el plano (específicamente, la curva es un conjunto denso del plano). Este tipo de curvas se obtienen mediante una sucesión de curvas continuas sin intersecciones que convergen a una curva límite. La curva límite de, o curva de Peano, de hecho es un objeto fractal interesante, ya que aunque su dimensión topológica es 1 su dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch es 2.

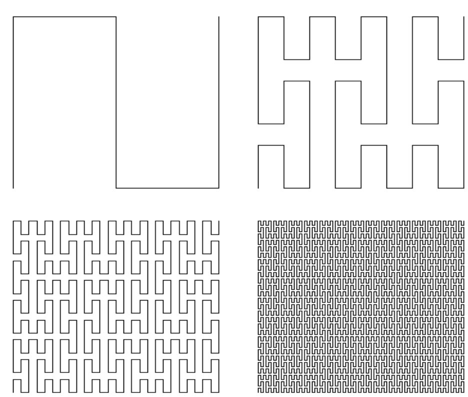
  Técnicamente la curva de Peano es el límite de una sucesión de curvas con las siguientes propiedades:

  1. Cada una de las curvas es continua y la sucesión converge uniformemente.
  2. Cada función es inyectiva, y es homeomorfa a un intervalo.

  Esas dos propiedades implican que la curva límite satisfará las siguientes condiciones:

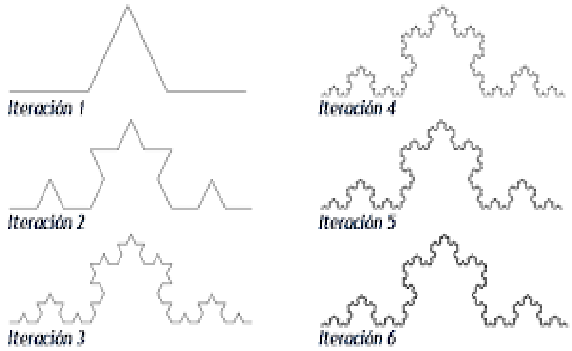
  - Será una curva continua.
  - La curva de Peano es equipotente a la región [0; 1]x[0; 1]; sin embargo la dimensión de la curva peaniana es 1 y del cuadrado es 2.

  La construcción puede generalizarse a cualquier dimensión n y pueden construirse curvas (con dimensión topológica 1) pero cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch iguala la del espacio. Esto último implica que la clausura topológica en el espacio euclídeo de dicha curva tiene un volumen n-dimensional diferente de cero.



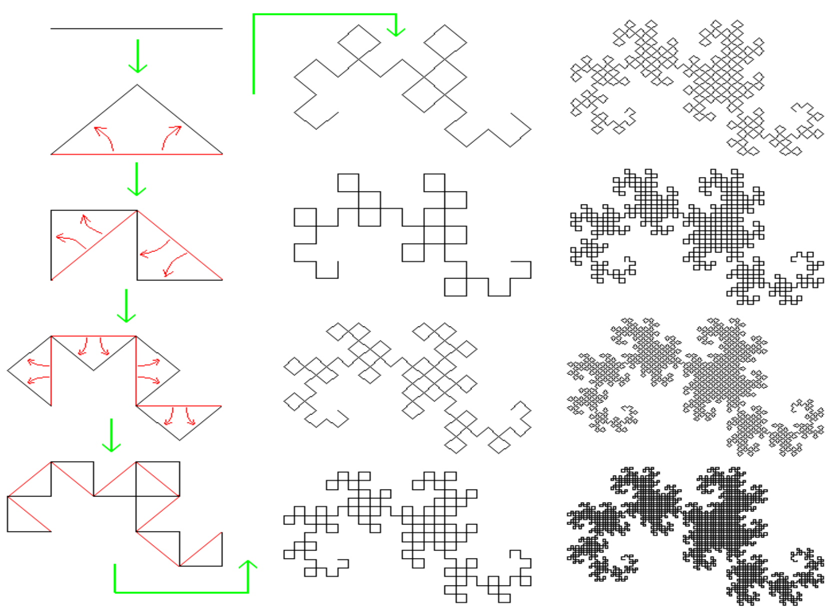
- **Curva de Koch**. Helge von Koch introdujo la curva que lleva su nombre en 1904 como un ejemplo de una curva que no tiene tangente en ningún punto. Para construir la curva de Koch se parte del segmento unidad [0,1] eliminando el intervalo abierto central de longitud 1/3 y sustituyéndolo por dos intervalos de longitud 1/3 cada uno de ellos y que forman con el intervalo eliminado un triángulo equilátero.

  Con esto habremos obtenido una curva K_1 formada por cuatro segmentos de longitud 1/3. Si repetimos este proceso sobre cada uno de los segmentos de K_1 obtendremos otra curva K_2 formada por 4^2 segmentos de longitud 3^{-2} cada uno de ellos, y así sucesivamente. En el paso n se tendrá una curva K_n formada por 4^n segmentos de longitud 3^{-n}. Esta sucesión de curvas converge uniformemente a una curva K llamada curva de Koch, cuya longitud es infinita($lim- > 4^n/3^n = \infty$).



- **Curva de Dragón**. La curva del dragón es un fractal que se construye siguiendo los siguientes pasos:

  1. A partir de un segmento, se construye el triángulo rectángulo e isósceles, como lo muestra las dos primeras figuras. Luego se borra el segmento inicial.
  2. Se repite varias veces el proceso de remplazar un segmento por otros dos para cada línea de la curva, alternando siempre la orientación de los triángulos.

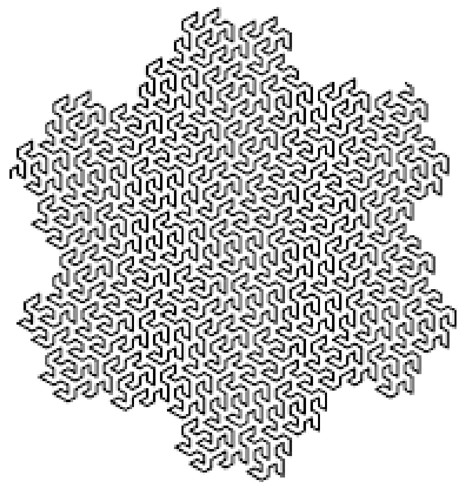


- **Curva de Gosper**. La curva de Gosper, nombrada así en honor a Bill Gosper, es una curva de Peano. Es un fractal similar en su construcción a la curva del dragón o a la de Hilbert.

  Esta figura, un tipo particular de Curva de Peano, es un ejemplo más de cómo fue naciendo la geometría fractal, a finales del siglo XIX y principios del XX.

1. No hay puntos de autocontacto.
2. Su dimensión topológica y real es idéntica: D(t)= D= 2.

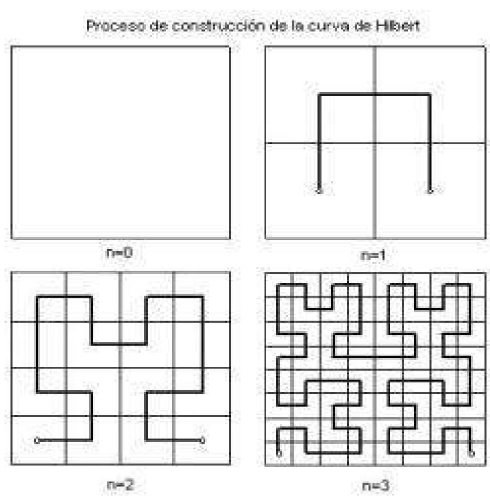
Estas figuras adquirieron el nombre de "terágonos", del griego "tera"(monstruo), porque se les consideraba figuras "monstruosas.[en] comparación con otros polígonos conocidos.



- **Curva de Hilbert**. La curva de Hilbert (también conocida como la curva que recubre el plano de Hilbert) es una curva fractal continua que recubre el plano descrita inicialmente por el matemático alemán David Hilbert en 1891, como una variante de las curvas que recubren el plano descubiertas por Giuseppe Peano en 1890.

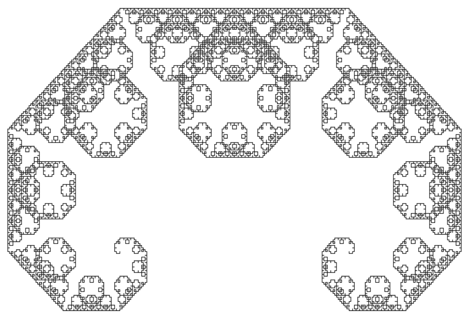
  Debido a que recubre el plano, su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es 2 (precisamente, su imagen es el cuadrado unitario, cuya dimensión es 2 en cualquier definición de dimensión; su gráfico es un conjunto compacto homeomórfico al intervalo cerrado de la unidad, con una dimensión de Hausdorff de 2).

  H_n es la n-ésima aproximación al límite de la curva. La distancia euclidiana de H_n es $2^n - \frac{1}{2^n}$, i.e., crece exponencialmente con n, a la vez que está siempre contenida en un cuadrado de área finita.



- **Curva de Lévy**. En matemática, la curva de Lévy C es un fractal autosimilar. Descrita por primera vez por Ernesto Cesàro en 1906 y G. Farber en 1910, hoy lleva el nombre del matemático francés Paul Pierre Lévy quien, en 1938, fue el primero en exhibir sus propiedades de autosimilaridad y proveer una construcción geométrica.
  Propiedades:

  1. La dimensión de Hausdorff de la curva es igual a 2 (contiene conjuntos abiertos).
  2. Su frontera tiene una dimensión estimada de 1.934007183Weisstein, Eric W.
  3. Es un teselado del plano.
  4. Es un caso particular de la curva de De Rham.



- **Alfombra de Sierpiński**. La alfombra de Sierpiński es un conjunto fractal descrito por primera vez por Wacław Sierpiński en 1916. Constituye una generalización en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Comparte con él muchas propiedades: ambos son un conjunto compacto, no numerable y de medida nula. Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es $\log(8)/\log(3) \approx 1,892789...$

  No debe confundirse con otras generalizaciones como el polvo de Cantor.

  Es universal para todo objeto compacto del plano. Así, cualquier curva dibujada en el plano con las autointersecciones que queramos, por más complicada que sea, será homeomorfa a un subconjunto de la alfombra de Sierpinski.
  Propiedades:

  1. El área de la alfombra es cero (en la Medida de Lebesgue).
  2. El interior de la alfombra esta vacío.

3. La Dimensión de Hausdorff de la alfombra es $\log(8)/\log(3) \approx 1,892789...$

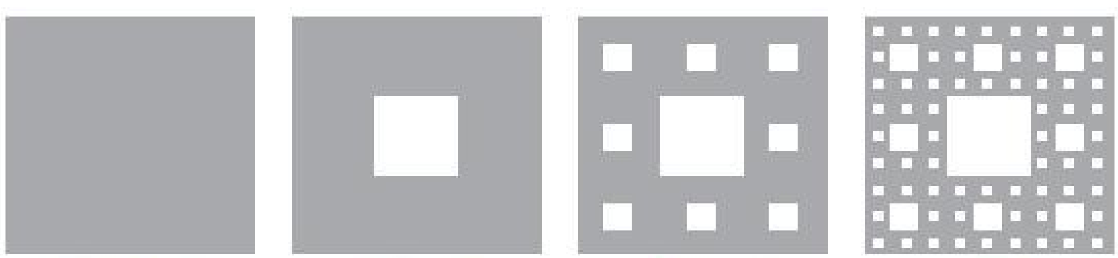
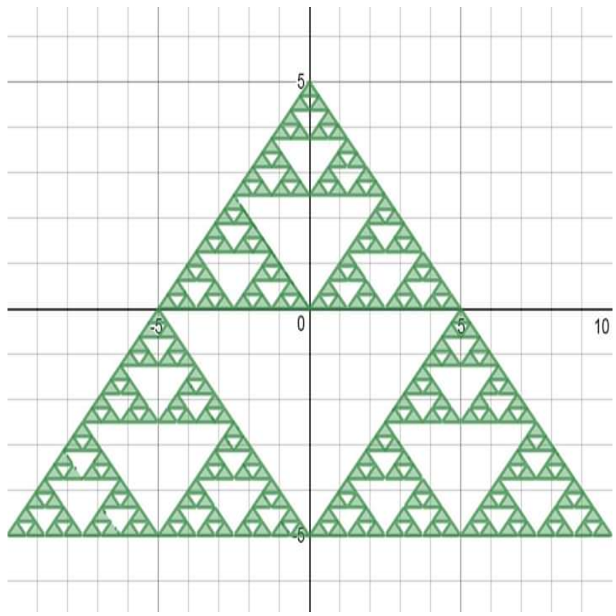


Figura inicial Figura 0 Figura 1 Figura 2

- **Triángulo de Sierpiński**. El matemático Waclaw Sierpinski, fue un importante matemático polaco que dedicó una parte de sus investigaciones al estudio de distintas formas de fractales.

  El triángulo de Sierpinski se puede descomponer en tres figuras congruentes. Cada una de ellas con exactamente la mitad de tamaño de la original. Si doblamos el tamaño de una de las partes recuperamos el triángulo inicial. El triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosimilares de él mismo. Decimos que es autosimilar (propiedades especifica de los fractales).

  Se debe aclarar que se puede construir a partir de cualquier triángulo.



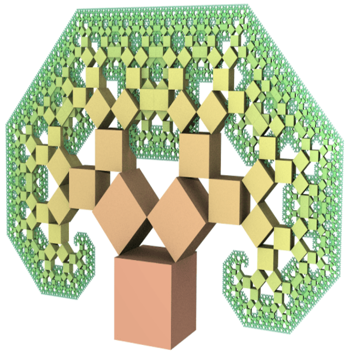
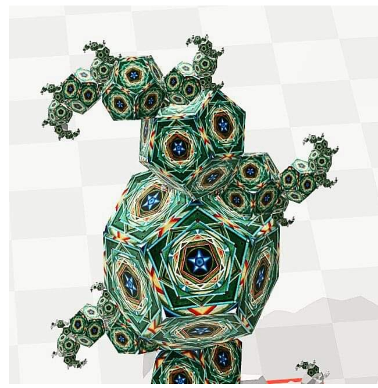
- **Árbol de Pitágoras**. El Árbol de Pitágoras es un plano fractal construido a partir de cuadrados inventado por el profesor Albert E. Bosman en 1942. Lleva el nombre del matemático griego llamado Pitágoras ya que en cada unión de 3 cuadrados se forma un triángulo rectángulo en una configuración tradicional utilizado para representar el teorema de Pitágoras. Si el cuadrado más grande tiene un tamaño de L x L, todo el árbol de Pitágoras encajará perfectamente dentro de una caja del tamaño de 6L 4L. Los detalles más finos de los árboles se asemejan a la curva de Lévy C.
  Propiedades:

  1. El número total de cuadrados en el paso n es $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$
  2. Presenta autosimilitud exacta.
  3. Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es 2.
  4. Se puede generar mediante el sistema de funciones iteradas no contractivo formado por las siguientes funciones:

     $f_1(x, y) = (x, y)$
     $f_2(x, y) = \dfrac{1}{2}(x - y, x + y) + (0, 1)$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, -x + y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Si se elimina la primera función del sistema de funciones iteradas, se tiene un sistema contractivo que genera un fractal parecido a la curva C de Lévy.

Referencias

[1] Benoît Mandelbrot, La Geometría Fractal de la Naturaleza, Tusquets.

[2] Falconer, Kenneth (2003). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley Sons, Ltd. pp. XXV.

[3] B. Mandelbrot. Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión. Tusquets Editores, S.A., 1993.

[4] Barnsley, M. Fractals everywhere.Academic Press Inc, 1988.

[5] Addison, Paul S. (1997). Fractals and chaos: an illustrated course. CRC Press. pp. 44-46. Consultado el 4 de Junio de 2020.

[6] Takayasu, H. (1990). Fractals in the physical sciences. Manchester: Manchester University Press. p. 36.

[7] Falconer, Kenneth (2013). Fractals, A Very Short Introduction. Oxford University Press.