Fractales

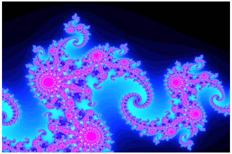
Anely Flores Suárez

Escuela Superior de Física y Matemáticas

June 17, 2020

Introducción

- La palabra "fractal" proviene del latín fractus, que significa "fragmentado", "fracturado", o simplemente "roto" o "quebrado", muy apropiado para objetos cuya dimensión es fraccionaria. El término fue acuñado por Benoît Mandelbrot en 1977 aparecido en su libro The Fractal Geometry of Nature. Al estudio de los objetos fractales se le conoce, generalmente, como geometría fractal.

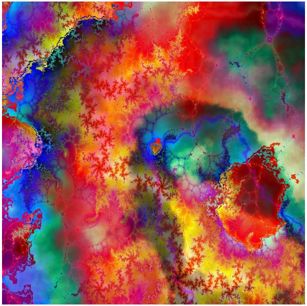




¿Qué es un Fractal?

Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de autosimilitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si es entera no es un entero normal.

¿Qué es un Fractal?

- Un conjunto u objeto es considerado fractal cuando su tamaño se hace arbitrariamente mayor a medida que la escala del instrumento de medida disminuye.




Propiedades de los fractales

- **Dimensión no entera**.- La dimensión de un fractal no es un número entero sino un número generalmente irracional.

Propiedades de los fractales

- **Estructura compleja a cualquier escala** .-Los fractales muestran estructuras muy complejas independientemente de la escala a la cual lo observemos.

Propiedades de los fractales

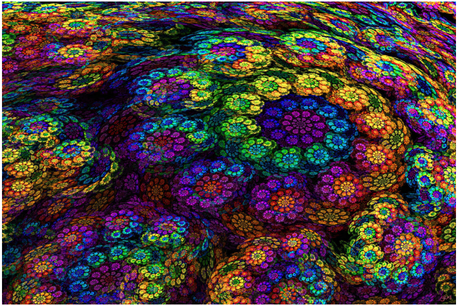
- **Infinitud**.-Se consideran infinitos ya que a medida que aumentamos la precisión del instrumento de medición observamos que el fractal aumenta en longitud o perímetro.

Propiedades de los fractales

- **Autosimilitud en algunos casos**.-Existen fractales plenamente autosimilares de manera que el todo está formado por pequeños fragmentos parecidos al todo.

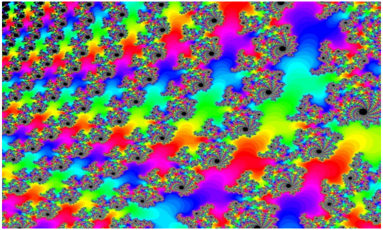
¿Cómo se construye un fractal?

- Normalmente un fractal se construye mediante una fórmula o función que se va iterando un número arbitrario de veces. Aunque otra forma de lograrlo es mediante la aplicación de técnicas de recursividad. Con estos dos métodos es como solemos conseguir la autosimilitud de los fractales, ya que aplicamos la misma función a diferentes niveles.



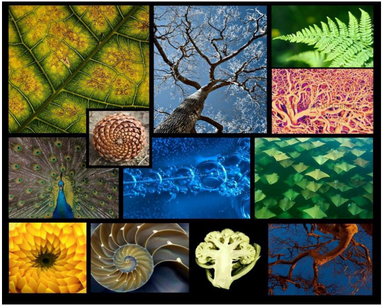
¿Cómo se construye un fractal?

- Tan importante es la elección de la formula como la elección del método de coloreado de los resultados. En relación a esto, existen multitud de técnicas de coloreado como pueden ser:
  1. Coloreado mediante el algoritmo de tiempo de escape.
  2. Coloreado por convergencia a soluciones de una ecuación.
  3. Cualquier otro que puedas imaginar.



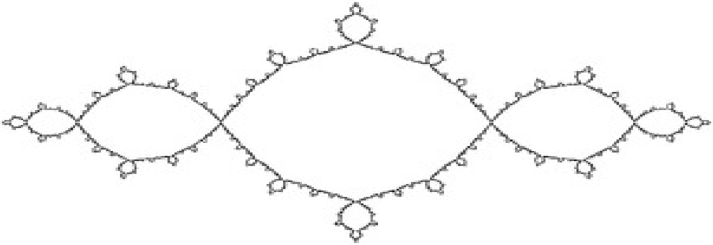
Fractales naturales

Existen multitud de fractales naturales en las cosas más insignificantes, y que pasamos por alto cada día. Estos fractales no son infinitos (porque fuera del elegante universo de las matemáticas ese concepto es difícil), pero si son autosimilares a muchos niveles. Claros ejemplos de estos fractales son:



Algunos Fractales

- **Conjunto de Julia**. Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función.



Algunos Fractales

Una familia muy importante de conjuntos de Julia se obtiene a partir de funciones cuadráticas simples,como por ejemplo:

$$F_c(z) = z^2 + c$$

donde c es un número complejo.

Algunos Fractales

El conjunto de Julia que se obtiene a partir de esta función se denota J_c. El proceso para obtener este conjunto de Julia de es el siguiente:Se elige un número complejo cualquiera z y se va construyendo una sucesión de números de la siguiente manera:

$$z_0 = z$$

$$z_1 = F(z_0) = z_0^2 + c$$

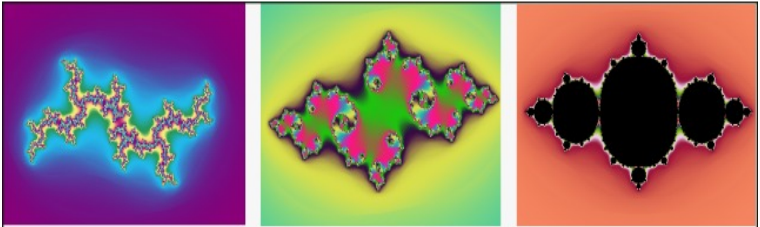
$$z_2 = F(z_1) = z_1^2 + c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n + 1 = F(z_n) = z_n^2 + c$$

Algunos Fractales

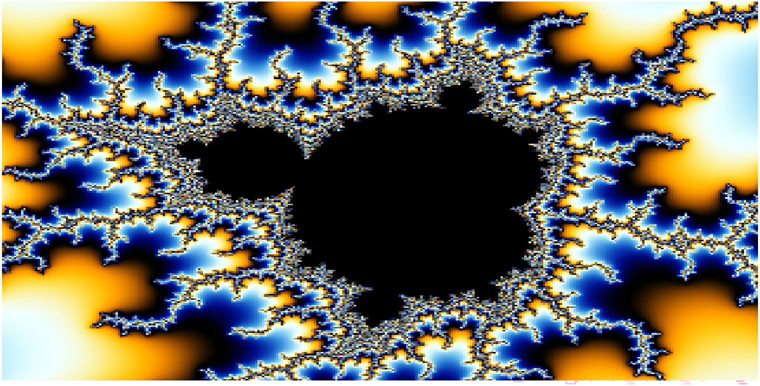
Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que z pertenece al conjunto de Julia de parámetro c, denotado por J_c; de lo contrario, si la sucesión tiende al infinito, z queda excluido de éste.



Conjunto de Julia para c = 0 + 0.8i | Conjunto de Julia para c = -0.8 - 0.25i | Conjunto de Julia para c = -0.8 +0i

Algunos Fractales

- **Conjunto de Mandelbrot**. Mandelbrot modifica el proceso iterativo de Julia haciendo variable el punto c y fijando el punto $z_0 = 0$.



Algunos Fractales

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos c para los cuales la sucesión de puntos obtenida por el método iterativo

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = F(z_0) = z_0^2 + c$$
$$z_2 = F(z_1) = z_1^2 + c$$

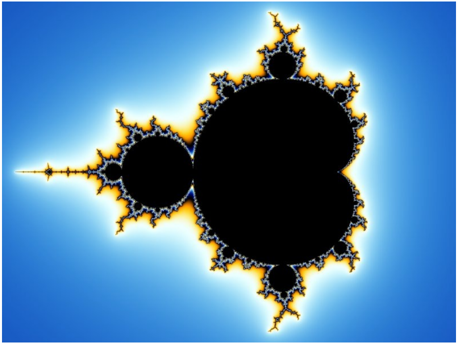
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n + 1 = F(z_n) = z_n^2 + c$$

no tiende a infinito, es decir, **está acotada**.

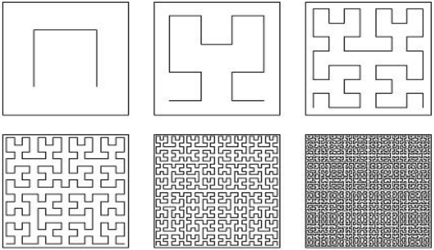
Algunos Fractales

Si asignamos el color negro a los puntos c que dan lugares a sucesiones acotadas y otros colores a los demás puntos, según lo rápido que tiendan al infinito, la representación obtenida para el conjunto de Mandelbrot es:



Algunos Fractales

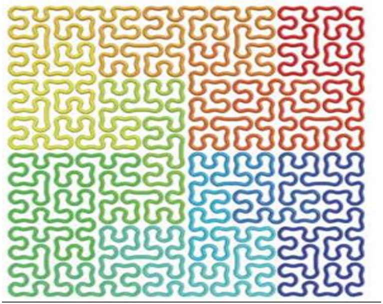
- **Curvas de Peano**. Una curva de Peano, nombre en honor al matemático italiano Giuseppe Peano, es un tipo de curva continua que "recubre" todo el plano. Este tipo de curvas se obtienen mediante una sucesión de curvas continuas sin intersecciones que convergen a una curva límite. Su dimensión topológica es 1 su dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch es 2.



Algunos Fractales

Técnicamente la curva de Peano es el límite de una sucesión de curvas con las siguientes propiedades:

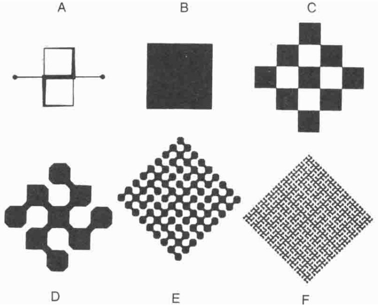
1. Cada una de las curvas es continua y la sucesión converge uniformemente.
2. Cada función es inyectiva, y es homeomorfa a un intervalo.



Algunos Fractales

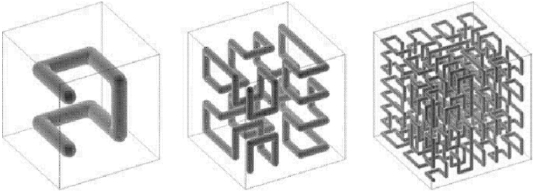
Esas dos propiedades implican que la curva límite satisfará las siguientes condiciones:

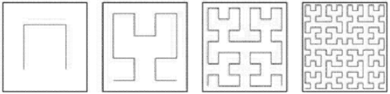
- Será una curva continua.
- La curva de Peano es equipotente a la región (0; 1)x(0; 1); sin embargo la dimensión de la curva peaniana es 1 y del cuadrado es 2.



Algunos Fractales

La construcción puede generalizarse a cualquier dimensión n y pueden construirse curvas (con dimensión topológica 1) pero cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch iguala la del espacio. Esto último implica que la clausura topológica en el espacio euclídeo de dicha curva tiene un volumen n-dimensional diferente de cero.



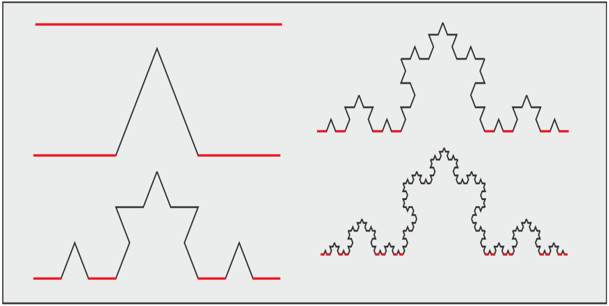


Algunos Fractales

- **Curva de Koch**. Helge von Koch introdujo la curva que lleva su nombre en 1904 como un ejemplo de una curva que no tiene tangente en ningún punto.

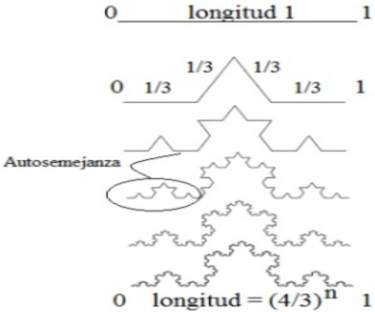
Algunos Fractales

Para construir la curva de Koch se parte del segmento unidad (0,1) eliminando el intervalo abierto central de longitud $1/3$ y sustituyéndolo por dos intervalos de longitud $1/3$ cada uno de ellos y que forman con el intervalo eliminado un triángulo equilátero.



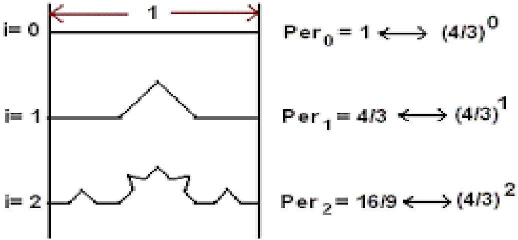
Algunos Fractales

Con esto habremos obtenido una curva K_1 formada por cuatro segmentos de longitud $1/3$. Si repetimos este proceso sobre cada uno de los segmentos de K_1 obtendremos otra curva K_2 formada por 4^2 segmentos de longitud 3^{-2} cada uno de ellos, y así sucesivamente.



Algunos Fractales

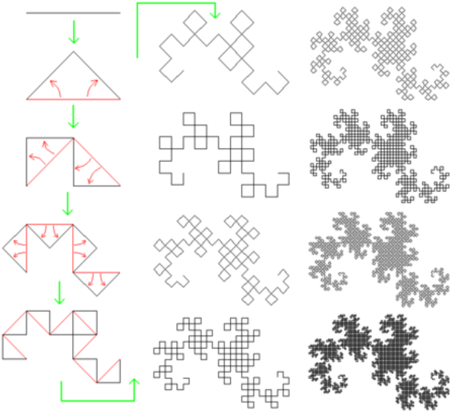
En el paso n se tendrá una curva K_n formada por 4^n segmentos de longitud 3^{-n}. Esta sucesión de curvas converge uniformemente a una curva K llamada curva de Koch, cuya longitud es infinita($lim- > 4^n/3^n = \infty$).



$$\therefore \text{Per}_n = \lim_{n \to \infty} (4/3)^n = \infty$$

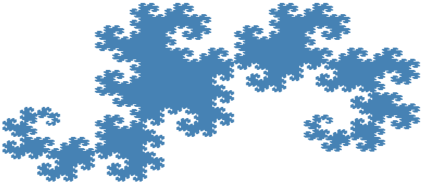
Algunos Fractales

- **Curva de Dragón**. La curva del dragón es un fractal que se construye siguiendo los siguientes pasos:



Algunos Fractales

- **Curva de Dragón**. La curva del dragón es un fractal que se construye siguiendo los siguientes pasos:
    1. A partir de un segmento, se construye el triángulo rectángulo e isósceles, como lo muestra las dos primeras figuras. Luego se borra el segmento inicial.
    2. Se repite varias veces el proceso de remplazar un segmento por otros dos para cada línea de la curva, alternando siempre la orientación de los triángulos.



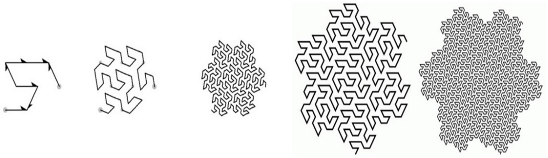
Algunos Fractales

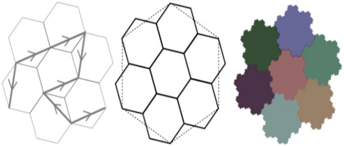
- **Curva de Gosper**. La curva de Gosper, nombrada así en honor a Bill Gosper, es una curva de Peano. Es un fractal similar en su construcción a la curva del dragón o a la de Hilbert.

Algunos Fractales

Esta figura, un tipo particular de Curva de Peano, es un ejemplo más de cómo fue naciendo la geometría fractal, a finales del siglo XIX y principios del XX.

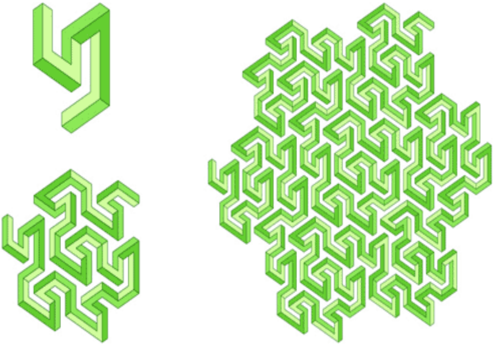
1. No hay puntos de autocontacto.
2. Su dimensión topológica y real es idéntica: D(t)= D= 2.





Algunos Fractales

Estas figuras adquirieron el nombre de "terágonos", del griego "tera" (monstruo), porque se les consideraba figuras "monstruosas" en comparación con otros polígonos conocidos.

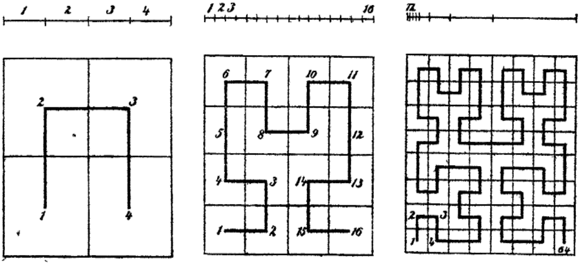


Algunos Fractales

- **Curva de Hilbert**. La curva de Hilbert (también conocida como la curva que recubre el plano de Hilbert) es una curva fractal continua que recubre el plano descrita inicialmente por el matemático alemán David Hilbert en 1891, como una variante de las curvas que recubren el plano descubiertas por Giuseppe Peano en 1890.

Algunos Fractales

Debido a que recubre el plano, su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es 2 (precisamente, su imagen es el cuadrado unitario, cuya dimensión es 2 en cualquier definición de dimensión; su gráfico es un conjunto compacto homeomórfico al intervalo cerrado de la unidad, con una dimensión de Hausdorff de 2).



Algunos Fractales

H_n es la n-ésima aproximación al límite de la curva. La distancia euclidiana de H_n es $2^n - \frac{1}{2^n}$, i.e., crece exponencialmente con n, a la vez que está siempre contenida en un cuadrado de área finita.

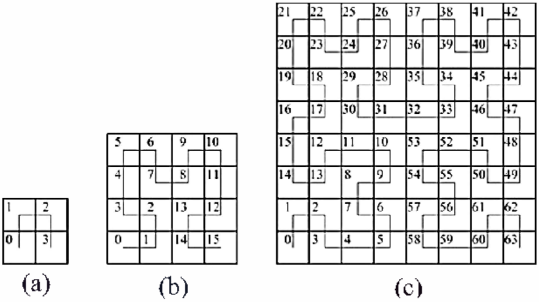
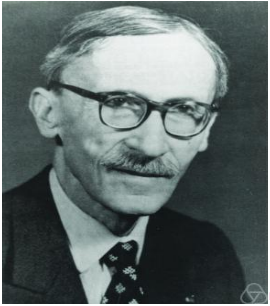


Fig. 2: Illustration of Hilbert curves at different resolutions d = 1, 2 and 3

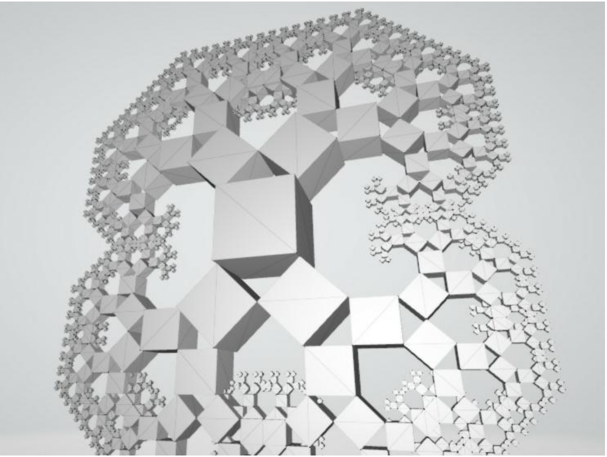
Algunos Fractales

- **Curva de Lévy**. En matemática, la curva de Lévy C es un fractal autosimilar. Descrita por primera vez por Ernesto Cesàro en 1906 y G. Farber en 1910, hoy lleva el nombre del matemático francés Paul Pierre Lévy quien, en 1938, fue el primero en exhibir sus propiedades de autosimilaridad y proveer una construcción geométrica.



Algunos Fractales

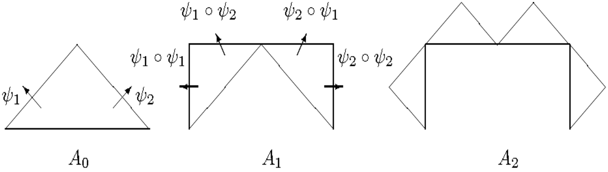
Propiedades:

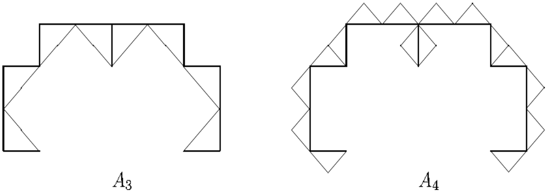


Algunos Fractales

Propiedades:

- La dimensión de Hausdorff de la curva es igual a 2 (contiene conjuntos abiertos).

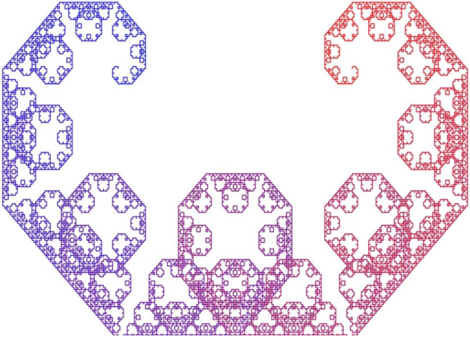




Algunos Fractales

Propiedades:

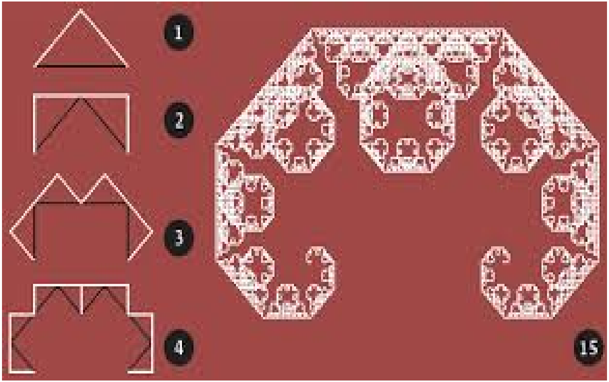
- Su frontera tiene una dimensión estimada de 1.934007183Weisstein, Eric W.



Algunos Fractales

Propiedades:

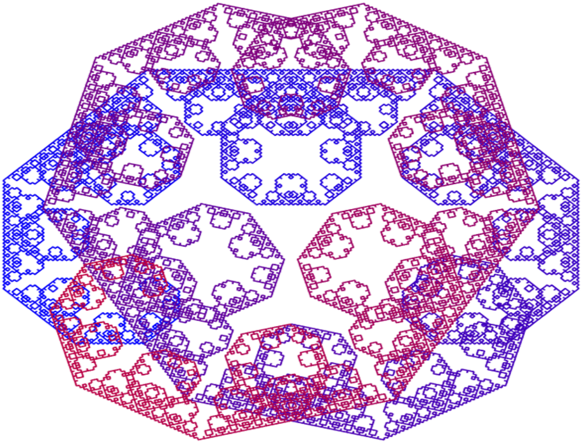
- Es un teselado del plano.



Algunos Fractales

Propiedades:

- Es un caso particular de la curva de De Rham.

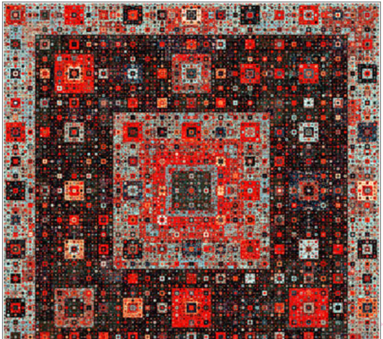


Algunos Fractales

- **Alfombra de Sierpiński**. La alfombra de Sierpiński es un conjunto fractal descrito por primera vez por Wacław Sierpiński en 1916.

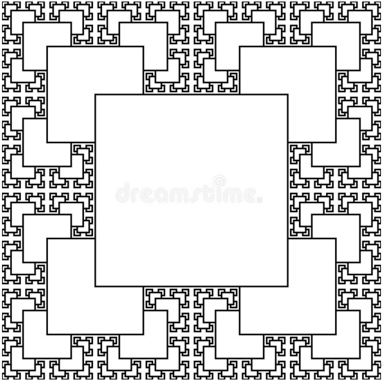
Algunos Fractales

Constituye una generalización en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Comparte con él muchas propiedades: ambos son un conjunto compacto, no numerable y de medida nula. Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es $\log(8)/\log(3) \approx 1,892789...$



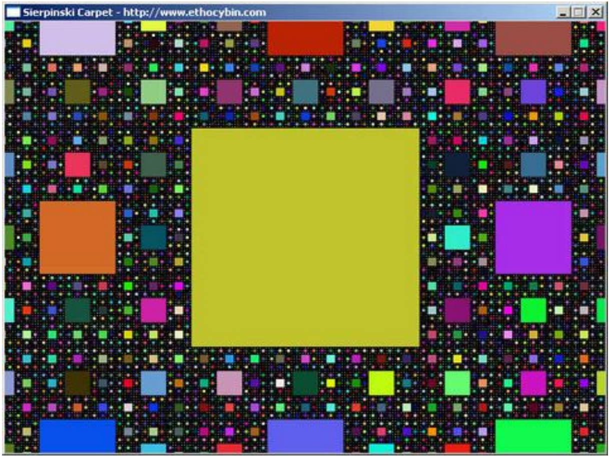
Algunos Fractales

Es universal para todo objeto compacto del plano. Así, cualquier curva dibujada en el plano con las autointersecciones que queramos, por más complicada que sea, será homeomorfa a un subconjunto de la alfombra de Sierpinski.



Algunos Fractales

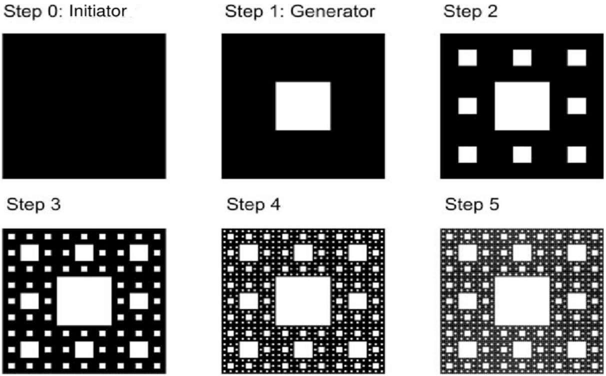
Propiedades:



Algunos Fractales

Propiedades:

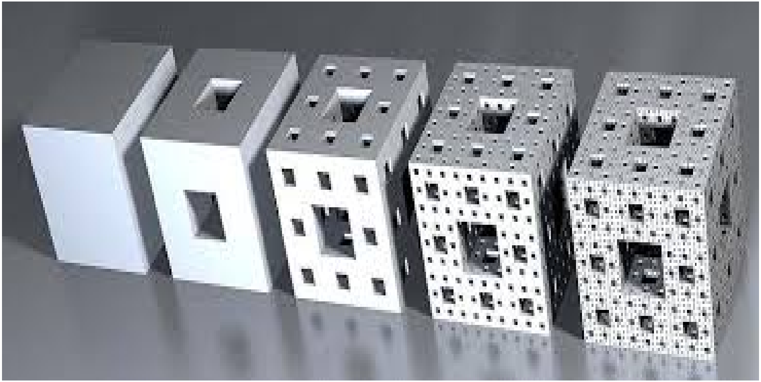
- El área de la alfombra es cero (en la Medida de Lebesgue)



Algunos Fractales

Propiedades:

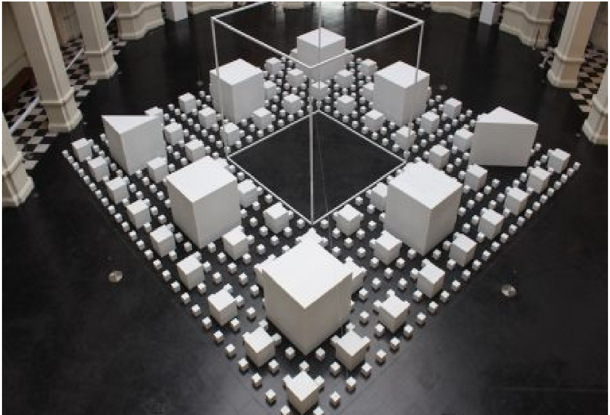
- El interior de la alfombra esta vacío.



Algunos Fractales

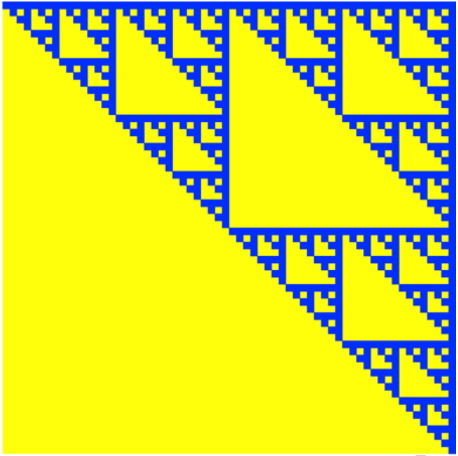
Propiedades:

- La Dimensión de Hausdorff de la alfombra es $\log(8)/\log(3) \approx 1,892789...$



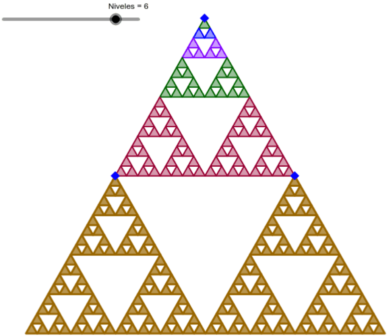
Algunos Fractales

- **Triángulo de Sierpiński**. El triángulo de Sierpinski se puede descomponer en tres figuras congruentes.



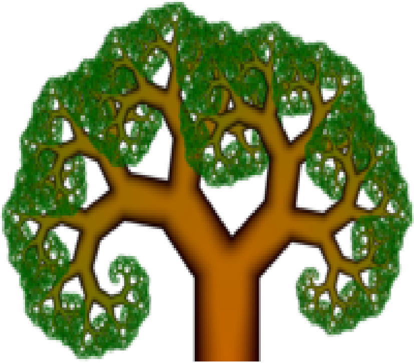
Algunos Fractales

Cada una de ellas con exactamente la mitad de tamaño de la original. Si doblamos el tamaño de una de las partes recuperamos el triángulo inicial. El triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosimilares de él mismo.



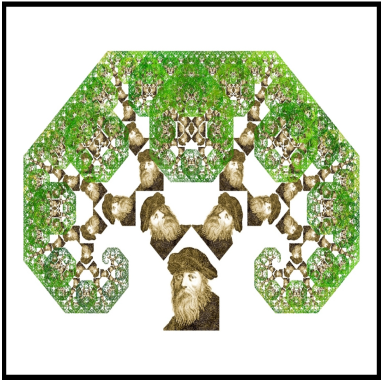
Algunos Fractales

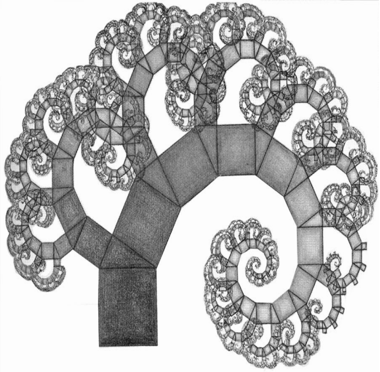
- **Árbol de Pitágoras**. El Árbol de Pitágoras es un plano fractal construido a partir de cuadrados inventado por el profesor Albert E. Bosman en 1942.



Algunos Fractales

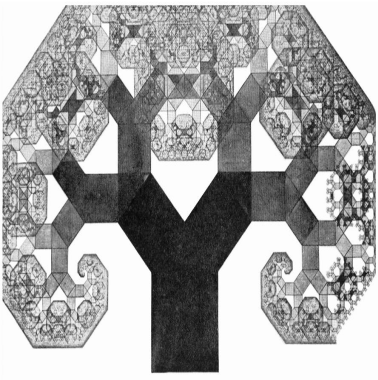
Lleva el nombre del matemático griego llamado Pitágoras ya que en cada unión de 3 cuadrados se forma un triángulo rectángulo en una configuración tradicional utilizado para representar el teorema de Pitágoras.

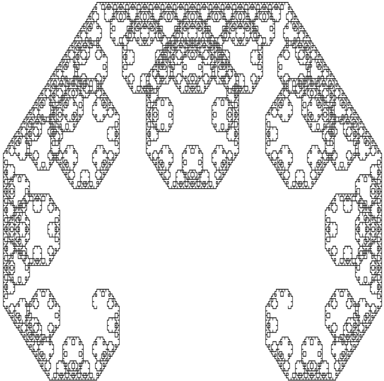




Algunos Fractales

Si el cuadrado más grande tiene un tamaño de L x L, todo el árbol de Pitágoras encajará perfectamente dentro de una caja del tamaño de 6L 4L. Los detalles más finos de los árboles se asemejan a la curva de Lévy C.





Algunos Fractales

Propiedades:

Algunos Fractales

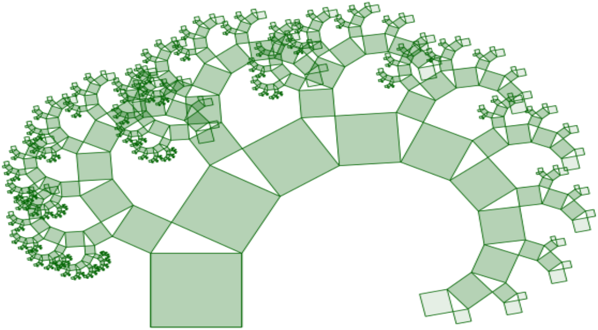
Propiedades:

- El número total de cuadrados en el paso n es $\sum_{k=0}^{n} 2^k$

Algunos Fractales

Propiedades:

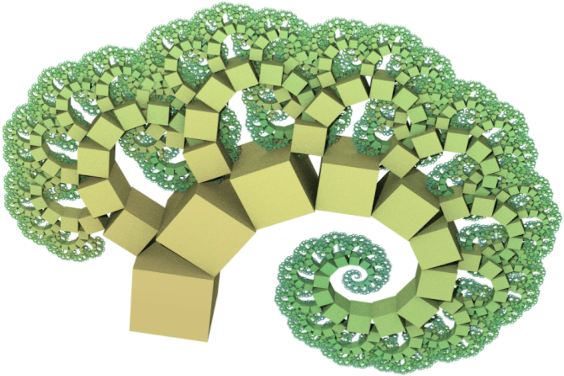
- Presenta autosimilitud exacta.



Algunos Fractales

Propiedades:

- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es 2.



Algunos Fractales

Propiedades:

- Se puede generar mediante el sistema de funciones iteradas no contractivo formado por las siguientes funciones:

$$f_1(x,y) = (x,y)$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x-y, x+y) + (0,1)$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x+y, -x+y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Algunos Fractales