UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2009/10

SEMESTRE ÍMPAR

CTA, CA, EC, EER, EG, EI, EM, EQ, ERH, F, MA

Exame **23/01/2010**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \left(\ln(x-y), \sqrt{x^2+y^2-4}\right)$.

a) Determine e represente geometricamente o domínio D de f.

b) Indique o interior, o exterior, a fronteira e o fecho de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

c) Estude f quanto à diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$.

d) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

3) Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = \left(xz^2, \dfrac{x+y}{2}, e^{x+y+z}\right)$. Determine a matriz jacobiana e o rotacional de f no ponto $(1,1,0)$.

4) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y.$$

5) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

a) A função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

b) Seja φ uma função real diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$ e $\psi(x,y,z) = \varphi(x-y, y-z, z-x)$. Então,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

c) As equações $x^2 + y^2 = 3u + v$ e $x^2y = 4uv$ definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(0,2,0,4)$.

d) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Se $\nabla f(a,b) = (0,0)$, então f tem um máximo ou um mínimo em (a,b).

6) Considere o integral

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

a) Esboce a região de integração D e inverta a ordem de integração do integral dado.

b) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

7) Considere a região M limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 0$.

a) Esboce a região M e apresente o transformado da região M em coordenadas cilíndricas.

b) Calcule, utilizando integrais triplos, o volume da região M.

8) Determine, utilizando integrais de linha, o comprimento e o centro de massa duma semicircunferência uniforme de raio a.

9) Calcule o trabalho realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x,y) = (y+1, x)$ ao longo da linha fechada definida pelo arco de parábola $y = 4 - x^2$ entre os pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$ e pelo segmento de recta que une os pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$, no sentido horário.