UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2009/10

SEMESTRE ÍMPAR

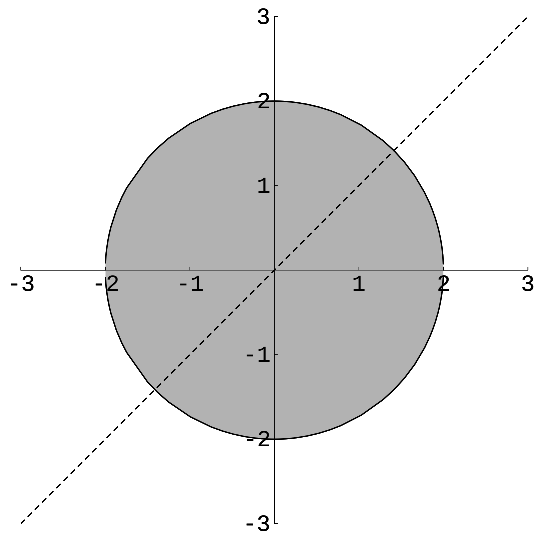
CTA, CA, EC, EER, EG, EI, EM, EQ, ERH, F, MA

1^a Frequência **7/11/2009**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Considere o conjunto A, a sombreado, na figura seguinte:



a) Determine analiticamente o conjunto A.

b) Indique o interior, o exterior, a fronteira, o fecho, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de A. Diga ainda, justificando, se A é aberto ou fechado.

c) Dê um exemplo, se possível, de uma sucessão $(\mathbf{u}_k)_k$ de termos em A convergente, cujo limite não pertence a A.

2) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$a)$ Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

$b)$ Indique, caso exista, a função prolongamento g por continuidade da função f ao ponto $(0,0)$.

$c)$ Determine $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

$d)$ Determine, usando a definição, a derivada de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(1,0)$, $f'_{(1,0)}(0,1)$.

3) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

$a)$ Seja f a função definida por $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{1-x^2-y^2},\dfrac{x}{\sqrt{y^2-x}}\right)$. Então, o domínio de f é um conjunto limitado.

$b)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^2}{x^2+(y-1)^2}=0.$

$c)$ Seja $B=\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\in\mathbb{R}^2:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(0,0)\}$. Então, toda a função $f:B\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua sse é contínua no ponto $(0,0)$.

$d)$ Para funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$, podem existir todas as derivadas parciais de primeira ordem num ponto e com o mesmo valor sem que a função seja contínua nesse ponto.