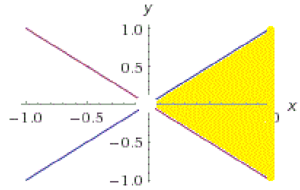
1. Encontre o domínio D de $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$, a aderência e as curvas de nível.

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge -x \leq y \leq x\right\}$$



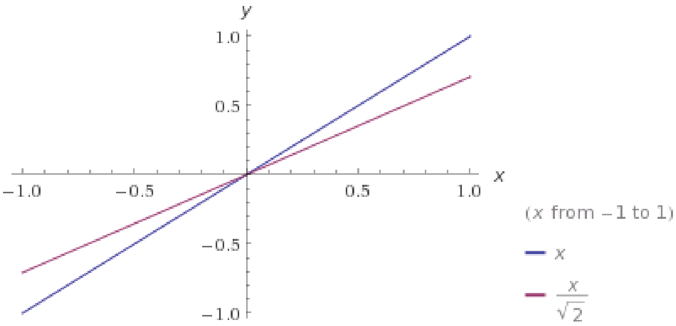
$$\overline{D_f} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x\right\}$$

Curvas de nível: $f(x,y) = K \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = K \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \sin K \Leftrightarrow y = \sin K\, x$

As curvas de nível são retas que passam na origem e declive $\sin K$

$$K = \frac{\pi}{2} \rightarrow\ y = x$$

$$K = \frac{\pi}{4} \rightarrow\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$



2. Mostre que a função $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ tem derivadas parciais em $(0,0)$, mas que aí não é diferenciável

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h0} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{0}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-h0} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{0}{h} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{0h0} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{0}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-h0} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{0}{h} = 0 \end{cases}$$

Para que a função seja diferenciável em $(0,0)$ é necessário que o seguinte limite exista e seja 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \times (x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \times (y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} - 0 - 0 \times (x) - 0 \times (y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{|\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta|}}{\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\sqrt{|\cos\theta \operatorname{sen}\theta|}}{\rho} = \sqrt{|\cos\theta \operatorname{sen}\theta|}$$

Como o limite depende de θ, não existe (e não é 0), a função não é diferenciável em $(0,0)$.

3. Mostre que a equação $x^3 + y^3 = 3xy + 3$ define implicitamente y como função de x ($y = f(x)$) numa vizinhança do ponto $(1,2)$. Determine a equação da reta tangente a f nesse ponto.

$$x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0\ \rightarrow F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$$

A equação define y, implicitamente, como função de x, $f(x)$ perto do ponto $(1,2)$ se:

- $F(1,2) = 0 \rightarrow 1 + 8 - 6 - 3 = 0$ ✓
- $F \in C^1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Estas derivadas existem e são contínuas numa vizinhança de $(1,2)$ ✓

- $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) \neq 0 \to 12 - 3 = 9 \neq 0$ ✓

Assim a equação $F = 0$ define implicitamente y como função de x perto do ponto $(1,2)$.

$$y'(1) = \frac{dy}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)} = -\frac{-3}{9} = \frac{1}{3}.$$

A equação da reta tangente a f no ponto $(1,2)$ é

$$y - 2 = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}.$$

4. Determine os extremos de $f(x,y) = xy^2$ sujeito a $x + y = 6$.

Constrói-se a função de Lagrange e encontram-se os seus pontos críticos …

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x+y-6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + \lambda = 0 \\ 2xy + \lambda = 0 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ 2xy - y^2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ y(2x - y) = 0 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

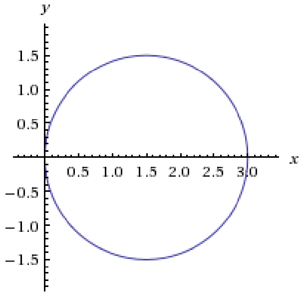
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ y = 2x \\ x + 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -16 \\ y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Temos os pontos críticos $(6,0,0)$ e $(2,4,-16)$.

$$f(6,0) = 0, \qquad f(2,4) = 32$$

$\therefore$ O mínimo é 0 e o máximo é 32.

5. Calcule $\iint_D y$, $D \to x^2 + y^2 \leq 3x$.



Trata-se de um círculo não centrado na origem … vou 'arranjar' o centro e o raio…

$$x^2 + y^2 \leq 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}$$

Centro $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{3}{2}$

$$0 \leq x \leq 3$$
$$-\sqrt{3x - x^2} \leq y \leq \sqrt{3x - x^2}$$

$$\iint_D y = \int_0^3 \int_{-\sqrt{3x-x^2}}^{\sqrt{3x-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{3x-x^2}}^{y=\sqrt{3x-x^2}} dx = \int_0^3 \frac{3x - x^2}{2} - \frac{3x - x^2}{2} dx = 0$$

6. **Calcule a massa do arco parametrizado por $\boldsymbol{r(t) = (t\cos t\,, t\sin t\,, t), 0 \leq t \leq 2\pi}$ e densidade $\boldsymbol{z}$.**

Massa $M = \int_C \text{densidade} = \int_C z$

Trata-se de resolver um integral de linha de uma função escalar $f(x, y, z) = z$

$$\int_C f(x, y, z) = \int_a^b f(r) \times \|r'\| dt$$

$f(r) = f(t\cos t\,, t\sin t\,, t) = t$

$\|r'\| = \|(\cos t - t\sin t\,, \sin t + t\cos t\,, 1)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} = \sqrt{t^2 + 2}$

$$M = \int_C z = \int_0^{2\pi} t \times \sqrt{t^2 + 2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2t(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sqrt{(t^2 + 2)^3}}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{(4\pi^2 + 2)^3}}{3} - \frac{\sqrt{(2)^3}}{3}.$$

7. Calcule o trabalho realizado pela força $\boldsymbol{F(x, y) = (e^x - y^3, \cos y + x^3)}$ ao deslocar uma partícula que se move ao longo da circunferência $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$, no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

O trabalho é dado pelo integral de linha para campos vetoriais.

$$\int_C F(x, y) = \int_C Pdx + Qdy$$

Como a curva C é fechada e percorrida no sentido anti-horário, posso aplicar o Teorema de Green.

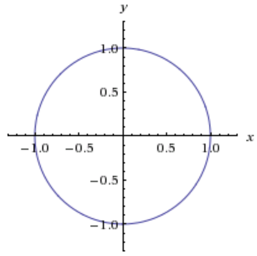
$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vou calcular primeiro as derivadas, se forem iguais, a função integranda é 0 e assim o integral pedido é zero (evito estar a desenhar e preencher o integral duplo com a região R limitada pela curva C).

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y + x^3) = 3x^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x - y^3) = -3y^2$$

$$\oint_C (e^x - y^3)\, dx + (\cos y + x^3) dy = \iint_R 3x^2 - -3y^2 = \iint_R 3(x^2 + y^2).$$

A região R é um círculo centrado na origem e raio 1. Vou utilizar coordenadas polares.



$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_R 3(x^2 + y^2) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \times \rho d\theta d\rho = \int_0^1 3\rho^3 (2\pi - 0) d\rho = 6\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 6\pi \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{3\pi}{2}$$

8. Determine a e b de modo a que exista uma função $u(x, y)$ tal que

$$\boldsymbol{du = (aye^x + be^y)dx + (axe^y + e^x)dy}.$$

Uma função u existe se $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Ora $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = ae^y + e^x$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y} = ae^x + be^y$

Assim é necessário que

$$\begin{cases} e^x = ae^x \\ ae^y = be^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Para a encontrar é necessário que $\nabla u = (P, Q)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ye^x + e^y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y + e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \displaystyle\int ye^x + e^y dx \\ u = \displaystyle\int xe^y + e^x dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = ye^x + e^y x + A(y) \\ u = xe^y + e^x y + B(x) \end{cases}$$

$$\therefore u(x, y) = xe^y + ye^x + C.$$