UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2010/11

SEMESTRE ÍMPAR

CA, CTA, EC, EER, EG, EI, EM, ERH, F, MA

2^a Frequência **18/01/2011**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ye^{x-y}$. Determine a fórmula de Taylor de ordem 3 no ponto $(0,0)$.

2)

$a)$ Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = y^2 - x^3 + x^2$ definida em $\mathbb{R}^2$.

$b)$ Determine a distância mínima entre o ponto $(0,0)$ e a hipérbole de equação $y^2 - x^2 + 2x + 3 = 0$.

3) Considere o integral

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{y}^{y+1} f(x,y)\,dxdy.$$

$a)$ Esboce a região de integração D e inverta a ordem de integração do integral dado.

$b)$ Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

4) Considere a região M limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

$a)$ Esboce a região M e apresente o transformado da região M em coordenadas cilíndricas.

$b)$ Indique, em coordenadas cartesianas e em coordenadas cilíndricas, os integrais triplos que definem o volume da região M.

$c)$ Calcule, utilizando integrais triplos, o volume da região M.

5) Determine, utilizando integrais de linha, o comprimento, a massa e as coordenadas do centro de massa de um arame que tem o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$, supondo que a densidade da massa é igual a $k\,(1-y)$.

6) Calcule, utilizando integrais de linha, o trabalho realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}\,(x, y) = \left(x^2 y, x\right)$ ao longo do triângulo $\mathcal{C}$ de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$, no sentido horário.

7) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

$a)$ Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Se $\nabla f\,(a,b) = (0,0)$, então f tem um máximo ou um mínimo em (a,b).

$b)$ A função $f\,(x,y) = \cos x + \cos y + \cos (x+y)$ definida na região do plano dada por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$ tem um extremante no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$c)$ O campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(3x^2 y + y, x^3 + x + 1\right)$ é conservativo.