UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2009/10

SEMESTRE ÍMPAR

CTA, CA, EC, EER, EG, EI, EM, EQ, ERH, F, MA

2^a Frequência **12/12/2009**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estude f quanto à diferenciabilidade em todos os pontos do seu domínio.

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

2) Sejam f uma função diferenciável e $z = f(x,y)$, onde $x = s+t$ e $y = s-t$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = \big(1 + x^2 - 2y, 1 - xy\big)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(0,0)$ dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a matriz jacobiana de $g \circ f$ no ponto $(1,1)$.

b) Determine a divergência de f no ponto $(1,1)$.

4) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ye^{x-y}$. Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 no ponto $(0,0)$.

5) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

6) Determine a distância mínima entre o ponto $(2,0,-1)$ e o plano de equação $x + y - z = 1$.

7) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

a) Existem funções não diferenciáveis num ponto que têm derivadas parciais nesse ponto.

b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função definida por $f(x,y,z) = (2x + 3y + 5z, x - y, 2y + 3z)$. Então, f é invertível numa vizinhança do ponto $(1,0,1)$.

c) A função $f(x,y) = 6xe^y - x^3 - e^{3y}$ definida na região do plano dada por $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$ tem um extremante no ponto $(0,0)$.