Análise Matemática II (2012/2013)

Exame de Recurso 28/06/2013 **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

Resolva cada parte numa folha de teste diferente.

Parte I

1. Considere a função $f(x,y) = \left(\frac{y}{x-2y}, e^{xy}, \ln(x^2+1)\right)$.

   (a) Determine o domínio da função f e diga, justificando, se é um conjunto compacto.

   (b) Diga, justificando, o conjunto dos pontos onde a função dada é contínua.

   (c) Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Considere $E \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 8 = 0\right\}.$$

   (a) Determine o plano tangente a E no ponto $(2,1,0)$.

   (b) Justifique que numa vizinhança de $(2,1,0)$ é possível escrever $y = \varphi(x,z)$ onde φ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$.

   (c) Calcule o diferencial $D\varphi(2,0)$.

Parte II

3. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = xy$ quando (x,y) pertence à elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

4. Calcule, aplicando o Teorema de Green,

$$\oint_C \left(x^2 + y^2\right) dx - 2xy dy,$$

   onde C é a fronteira da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.

5. Calcule
$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$
onde D é a região dentro do cilindro $x^2+y^2=4$, entre os planos $z=-2$ e $z=4$ e com $x \geq 0$.

Parte III

6. Determine a massa e a primeira coordenada do centro de massa.de uma placa homogénea com a forma do conjunto
$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y<x+2\right\}.$$

7. Considere o campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por
$$F(x,y,z)=\left(3z-\sin x, x^2+e^y, y^3-\cos z\right)$$
e a superfície S dada por
$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=2-x^2-y^2,\ z>1\right\},$$
com normal unitária apontando para fora.

   (a) Parametrize a superfície S.

   (b) Considere C o bordo da superfície S. Aplicando o Teorema de Stokes calcule o trabalho realizado por F ao longo de C.

BOM TRABALHO!