UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2010/11

SEMESTRE ÍMPAR

CA, CTA, EC, EER, EG, EI, EM, ERH, F, MA

Exame **22/01/2011**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \left(\sqrt{4-(x+2)^2-(y-2)^2}, \ln(x+y)\right)$$

e designe por D o seu domínio.

a) Determine o conjunto D e represente-o geometricamente.

b) Indique o interior, o exterior, a fronteira e o fecho de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{3x^3}{x^2+y^2}.$$

a) Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

b) Indique a função prolongamento g, por continuidade, da função f ao ponto $(0,0)$.

c) Determine $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

d) Estude a diferenciabilidade de g em todos os pontos do seu domínio.

e) Determine a derivada de g no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(1,0)$, $g'_{(1,0)}(0,1)$.

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$.

a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 no ponto $(\pi, 1)$.

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\pi, 1, f(\pi,1))$.

4) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x.$$

5) Considere o integral

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dydx.$$

a) Esboce a região de integração D e inverta a ordem de integração do integral dado.

b) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

6) Considere a região M do 1.º octante limitada pelo parabolóide $z = 3 - x^2 - y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

a) Esboce a região M e apresente o transformado da região M em coordenadas cilíndricas.

b) Calcule, utilizando integrais triplos, o volume da região M.

7) Seja $\mathcal{C}$ o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ e $(0,2)$.

a) Calcule, utilizando integrais de linha, o perímetro de $\mathcal{C}$.

b) Calcule, utilizando integrais de linha, o trabalho realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x,y) = (3+x, 5y-4x)$ ao longo de $\mathcal{C}$, no sentido horário.

8) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

a) Toda a sucessão convergente de elementos de A converge para um elemento de A.

b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2x^2y^4)$. Então, f é localmente invertível numa vizinhança de $(1,1)$ e a matriz jacobiana da função inversa de f no ponto $f(1,1)$ é dada por $\begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$.

c) A função $f(x,y) = 6xe^y - x^3 - e^{3y}$ definida na região do plano dada por $-1 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$ tem um extremante no ponto $(0,0)$.

d) O campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{3y} - y^2 \operatorname{sen} x, 3xe^{3y} + 2y\cos x\right)$ é conservativo.