Análise Matemática II (2013/2014)

Exame de recurso 1/07/2014 **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

Resolva cada grupo numa folha de teste diferente.

Grupo I

1. Determine e esboce o *domínio* e as *linhas de nível* da função de duas variáveis
$$f(x,y) = \sqrt{xy}.$$

2. Considere a função
$$u = x^2 \sin y + y^2 \sin x.$$
Calcule a *derivada de 4ª ordem* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.

3. Mostre que, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,1,1,0)$, o sistema de equações
$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$$
define *implicitamente* u e v como funções contínuas e diferenciáveis $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Determine a *matriz de Jacobi* e o *Jacobiano* da aplicação
$$(x,y) \mapsto (u(\overset{0}{x},\overset{1}{y}), v(x,y))$$
nesse ponto.

4. Utilizando os *multiplicadores de Lagrange*, encontre os pontos de extremo local da função
$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$
sujeita à condição
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}.$$
Justifique cuidadosamente a natureza desses extremos.

Grupo II

5. Calcule o *integral duplo*

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy,$$

sendo D a região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas rectas $x = 2$, $y = x$ e pela hipérbole $xy = 1$.

6. Determine a *massa de um sólido* que tem a forma da coroa esférica

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\right\},$$

onde $b > a > 0$, e a sua densidade é

$$\rho\,(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Aplicando o *Teorema de Green*, calcule o *integral de linha*

$$\oint\limits_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(2x + \cos\left(y^2\right)\right) dy,$$

onde C é a curva fechada que delimita a região situada entre as parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$, e é percorrida no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

8. Encontre, **se for possível**, em cada um dos casos, uma função $u = u\,(x, y)$ tal que o seu *diferencial* é dado por

   (a) $du = (x + \cos y)\, dx + (x \sin y - e^y)\, dy;$

   (b) $du = (2x \cos y - y^2 \sin x)\, dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)\, dy.$

BOM TRABALHO!