Análise Matemática II (2012/2013)

Exame de Época Especial   11/09/2013   **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

1. Considere a função $f = (f_1, f_2)$, onde

$$f_1(x,y) = xe^{x/y}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Seja D o domínio de f.

(a) Determine e esboce o conjunto D.

(b) Indique o interior, a fronteira e o fecho de D, e conclua se D é aberto e/ou fechado.

(c) Justifique que f é contínua no seu domínio.

(d) Diga se f_1 é prolongável por continuidade à origem. Em caso afirmativo, escreva a sua função prolongamento F_1.

(e) Justifique que f_1 é diferenciável em D e determine o seu diferencial no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(f) Calcule $D(f \circ g)(0)$ sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$g(t) = (\frac{1}{2} + t^2, \frac{1}{2} + \sin(2t)).$$

2. Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = (y + 2xe^y, x - 2y + x^2e^y)$.

(a) Verifique que f é conservativo, e determine uma sua função potencial.

(b) Calcule o trabalho realizado por f para deslocar uma partícula do ponto $(1,1)$ para o ponto $(2,4)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

3. Calcule o volume do sólido definido por $z \leq 6 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

4. Considere $R \subset \mathbb{R}^2$ limitado pelas rectas

$$y = 2x, \quad y = 2x - 1, \quad y = -x \quad \text{e} \quad y = -x + 1.$$

(a) Esboce graficamente a região referida indicando o integral duplo iterado que permite calcular a respectiva área.

(b) Calcule a massa de uma chapa com a forma da região R e com massa específica $f(x, y) = 2x - y$.

5. Considere a função $f(x, y) = x^2 e^{-x^2} - y^2$.

   (a) Determine o gradiente e a matriz Hessiana de f.

   (b) Determine e classifique os pontos críticos de f.

6. Usando o Teorema de Stokes calcule $\int_S \operatorname{rot} F \cdot n dS$, sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = \left(x, y, (x^2 + y^2) \frac{z}{2}\right)$,

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, -2 < z < 2\right\}$$

   e n o vector normal unitário apontando para o exterior de S.

BOM TRABALHO!