UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2010/11

SEMESTRE ÍMPAR

CA, CTA, EC, EER, EG, EI, EM, ERH, F, MA

1^a Frequência **27/11/2010**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \left(\sqrt{4-(x+2)^2-(y-2)^2}, \frac{1}{x+y} \right)$$

e designe por D o seu domínio.

a) Determine o conjunto D e represente-o geometricamente.

b) Indique o interior, o exterior, a fronteira, o fecho, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

c) Dê um exemplo, se possível, de uma sucessão $(\mathbf{u}_k)_k$ de termos em D convergente, cujo limite não pertence a D.

d) Dê um exemplo, se possível, de uma sucessão $(\mathbf{u}_k)_k$ de termos em $\overline{D}$ convergente, cujo limite não pertence a $\overline{D}$.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

b) Estude a diferenciabilidade de f em todos os pontos do seu domínio.

c) Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

d) Verifique se a função f satisfaz as condições do Teorema de Schwarz no ponto $(0,0)$.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$.

3) Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que $z=f(x-y,y-x)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

4) De cada uma das afirmações seguintes diga, justificadamente, se é verdadeira ou falsa:

a) Se A é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, então $\overline{A}=A'$.

b) A função $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

c) Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ e a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$ é igual a 1. Então, f não é um campo diferenciável em $(0,0)$.

d) Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vectorial definida por $f(x,y,z)=(z+\operatorname{sen} y,-z+x\cos y,0)$. Então, a divergência e o rotacional de f são dados por

$$\operatorname{div} f(x,y,z)=-x\operatorname{sen} y \text{ e } \operatorname{rot} f(x,y,z)=(1,1,0),$$

respectivamente.

e) As equações $x-u-v=0$ e $y-3u-2v=0$ definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(2,5,1,1)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2$ neste ponto.