Análise Matemática II (2010/2011)

1^a Frequência 15/04/2011 **Duração:** 2h

Grupo I

1. Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y}.$$
   (a) Determine o domínio de f, represente-o geometricamente, e diga qual é o seu interior e a sua fronteira.
   (b) Calcule (se existirem)
      (i) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$,
      (ii) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$,
      (iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0)=0.$$
Mostre que $x \mapsto f(x,0)$ e $y \mapsto f(0,y)$ são contínuas em zero, mas que f não é contínua em $(0,0)$.

3. Considere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = y^2 e^{3x} + \cos(xy).$$
   (a) Calcule ∇f em todos os pontos em que existe.
   (b) Diga e justifique em que pontos é que f é diferenciável.
   (c) Calcule todas as derivadas direccionais de f em $(0,0)$.

Grupo II

4. Utilize a regra da cadeia para calcular $\partial r/\partial u$ e $\partial r/\partial v$ se

$$r = x \ln y, \quad x = 3u^2 + v \text{ , e} \quad y = uv^2.$$

5. Supondo que, na vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$, a equação

$$x^3y^2 + x^3 + z^3 - z = 1,$$

define z em função de x e y, calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ no ponto $(1, 0)$.

6. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2, xyz\right).$$

Determine a matriz Jacobiana de f no ponto $(1, 2, 0)$.

7. Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos sela da função

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y.$$

8. Minimize o valor da função $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ sujeito à restrição $x + y = 6$.

BOM TRABALHO!