CAPÍTULO 3

LÓGICA PROPOSICIONAL

LÓGICA PROPOSICIONAL

La Lógica Proposicional es una "Lógica Clásica", que tiene como unidad elemental a la proposición. Es bivalente lo que significa que las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas; pero no ambas.

3.1.- PROPOSICION.

Una proposición es la unidad mínima del lenguaje con contenido de información. Es un enunciado o frase declarativa que puede ser verdadera o falsa.

Son proposiciones:

Covid-19 es una pandemia.

Los médicos luchan contra el Covid-19.

El número π es real además es irracional.

El lenguaje de programación C fue desarrollado por Dennis Ritchie.

Figura 1: Dennis Ritchie
Fuente: https://www.flickr.com/

No son proposiciones: Oraciones interrogativas, exclamativas, imperativas, dubitativas, desiderativas (expresan deseo). Por ejemplo:

El representante de la Embajada de los Estados Unidos en Bolivia ***(Es un sujeto, se reemplaza por un nombre).***

¿Cuándo termina la cuarentena? ***(Interrogativa).***

Te ordeno que permanezcas en casa. ***(Imperativa).***

Quizá llueva hoy ***(Dubitativa).***

Tal vez di un buen examen. ***(Dubitativa).***

Ojalá que todo salga como lo esperamos. ***(Desiderativa).***

¡No salgan de sus casas! ***(Exclamativa).***

3.2.- TIPOS DE PROPOSICIONES.

Las proposiciones se clasifican por su complejidad en Atómicas y Moleculares.

1) **PROPOSICIONES ATÓMICAS. –** Expresan hechos simples. Son aquellas que NO se pueden subdividir en proposiciones más pequeñas.

Ejemplo: Los políticos son honestos.

Las proposiciones atómicas pueden clasificarse en:

a) **Proposiciones de atribución:** Describen una propiedad o característica que tiene un sujeto o individuo específico.

   Ejemplo: Los coronavirus son una extensa familia de virus

b) **Proposiciones de acción:** Expresan la ocurrencia de un hecho, sin sujeto determinado.

   Ejemplo: Pueden causar enfermedades en humanos. ***¿Quién o Qué?*** *Los coronavirus*

c) **Proposiciones de relación:** Constan de dos o más sujetos relacionados entre sí.

   Ejemplos:
   - Rosa y Maribel son primas.
   - Pamela y Romina son hermanas.
   - Mirna está sentada entre Helder y Juan Carlos.

   En los anteriores ejemplos las proposiciones son atómicas, aunque exista un **"y"** en ellas, **no es un conectivo**, sino una relación entre dos sujetos.

1) **PROPOSICIONES MOLECULARES. -** También se llaman proposiciones compuestas. Estas se forman a partir de oraciones más simples y expresan relaciones entre ellas. En éstas proposiciones intervienen los conectivos lógicos como ser "negación", "conjunción" "disyunción", "implicación", "doble implicación".

Ejemplos:

- Los días lunes **NO** hay permiso para salir.
- Tu día de salida es martes **o** miércoles.
- Donald Trump **y** Vladimir Putin son Presidentes de naciones poderosas.
- **Si** cumples los protocolos de seguridad **entonces** permanecerás sano.

3.3.- DEFINICIÓN FORMAL DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL.

3.3.1.-ALFABETO DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL

En el Lenguaje de la Lógica Proposicional L(P) se parte de un conjunto de símbolos (alfabeto) formado por:

1. Un conjunto fijo P de letras proposicionales.
2. Símbolos de Agrupación:), (
3. Conectivos lógicos: $\sim$, $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

3.3.2.-SÍMBOLOS PARA PROPOSICIONES.

También se llaman letras proposicionales. Al conjunto de símbolos para estas letras proposicionales se las denota con la letra P.

$P = \{p, q, r, s, \ldots\}$ Conjunto Finito. Se usa para grupos pequeños.

$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ Conjunto infinito numerable. Se usa para grupos de mayor tamaño.

3.3.3.- SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN O AGRUPACIÓN.

Se utilizan para establecer subestructuras y niveles de prioridad. Son los paréntesis ( ), corchetes [] y llaves {}. Generalmente sólo se usan los paréntesis.

3.3.4.- SÍMBOLOS PARA CONECTIVOS LÓGICOS.

La tabla 2 muestra de manera clara la representación de los conectivos y los sinónimos que se encuentran en el Lenguaje natural.

CONECTIVO LÓGICO	REPRESENTACIÓN	SINÓNIMOS
Negación: "no p"	(¬ p) ó (~ p)	No es cierto que, No es el caso que, Es falso que, No sucede que, jamás, nunca, es imposible.
Conjunción: "p y q"	(p ∧ q)	Además, pero, sin embargo, a pesar, aunque, también, aún, a la vez, no obstante, tanto… como….
Disyunción: "p o q"	(p ∨ q)	Al menos, como mínimo.
Implicación: "si p entonces q"	(p → q) Antecedente Consecuente	*Si p , q* *p* solo si *q* es suficiente *p* para *q* no *p* a menos que *q*
	(q → p)	*p* si *q* solo si p entonces *q* *es* necesario *p* para *q* *p* cuando *q*
Doble Implicación: "p si y solo si q"	(***p*** ↔ ***q***)	p es suficiente y necesario para q

Tabla 2: Representación de Conectivos Lógicos

3. 4.- SINTAXIS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL. -

El L (P) está formado exactamente por aquellas palabras o ***fórmulas*** obtenidas mediante una cantidad finita de aplicaciones de las siguientes reglas (Bertossi Durán, 1995):

1. Cada Letra Proposicional de P es una fórmula. A estas fórmulas se les llama atómicas.
2. Si A es una fórmula entonces (~A) también es una fórmula.
3. Si A y B son fórmulas entonces (A * B) es una fórmula, donde * = { ∧,∨,→,↔ }

Ejemplo: Si P = {p , q , r } alguna fórmulas de L(P) son:

(p ∧ r) , ((p ∨ q) → r) , ((~ p) → (p ∨ r))

Una desventaja de nuestra notación, tal como está escrita, es que los paréntesis tienden a acumularse y deben correlacionarse correctamente. (Genesereth & Kao, 2016) Sería bueno si se pudiera prescindir de paréntesis, simplificando las oraciones anteriores estas podrían escribir como sigue.

$p \wedge r$, $p \vee q \rightarrow r$, $\sim p \rightarrow p \vee r$

Desafortunadamente, no se puede prescindir por completo de los paréntesis, ya que entonces no se podría presentar ciertas proposiciones de manera inequívoca.

Por ejemplo, prescindiendo de los paréntesis de las siguientes proposiciones se tendría como resultado una proposición completamente diferente.

$$\left.\begin{array}{l} ((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (s \vee (p \leftrightarrow q)) \\ ((p \vee (q \rightarrow r) \wedge s) \vee (p \leftrightarrow q)) \end{array}\right\} \quad p \vee q \rightarrow r \wedge s \vee p \leftrightarrow q$$

La solución a este problema es el uso de la prioridad de los conectivos (Genesereth & Kao, 2016). El conectivo **~** tiene una prioridad mayor que $\wedge$; $\wedge$ tiene una prioridad mayor que $\vee$; y $\vee$ tiene una prioridad mayor que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

PRIORIDAD DE CONECTIVOS LÓGICOS.-

Dentro de una proposición compuesta los conectivos lógicos adquieren la siguiente prioridad:

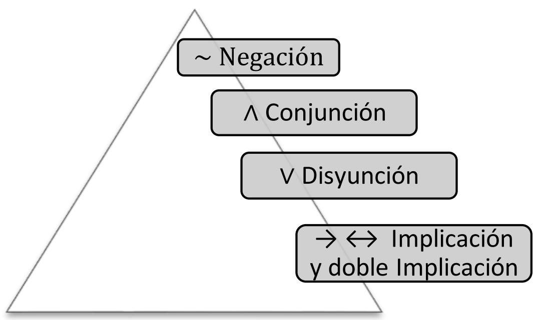


Figura 2: Prioridad de Conectivos Lógicos

En proposiciones que no presentan paréntesis la letra proposicional se asocia al conectivo de mayor prioridad.

Por ejemplo: $p \vee q \wedge \sim r \rightarrow s$ quedaría así : $((p \vee (q \wedge (\sim r))) \rightarrow s)$.

Cuando la letra proposicional está rodeada por dos conectivos de igual prioridad, la misma se asocia al de la derecha.

Por ejemplo: $p \vee q \vee r \leftrightarrow p \rightarrow s$ quedaría así $((p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow (p \rightarrow s))$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Expresar las siguientes fórmulas con todos sus paréntesis, tomando en cuenta la precedencia de conectivos lógicos.

1. $\sim p \vee q \wedge r$
2. $p \wedge q \vee \sim r$
3. $p \rightarrow q \rightarrow r$
4. $p \rightarrow q \leftrightarrow r \rightarrow s$
5. $p \wedge \sim q \rightarrow p \vee q \leftrightarrow r$
6. $r \rightarrow \sim s \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim r$
7. $p \rightarrow q \leftrightarrow r \rightarrow s \rightarrow t$
8. $p \leftrightarrow q \vee \sim r \rightarrow t \wedge \sim s \rightarrow w$
9. $r \wedge \sim s \wedge q \vee p \leftrightarrow \sim r$

3.4.1.- DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL. -

Al proceso de expresar frases del lenguaje natural en el lenguaje de la lógica proposicional se lo conoce como formalización; para lo cual se utilizan los tres elementos del Lenguaje L(P) como ser letras proposicionales, conectivos lógicos y símbolos de agrupación.

Ejemplo: Sean las siguientes proposiciones simples expresadas en el lenguaje natural: El estudiante es alegre. El estudiante es interesante. El estudiante es popular. Formalizar en Lógica Proposicional.

Letras proposicionales:

p = El estudiante es alegre.
q = El estudiante es interesante.
r = El estudiante es popular.

Formalizar las siguientes proposiciones compuestas:

1) El estudiante es alegre además de popular.
2) El estudiante es interesante o no es popular.
3) Si el estudiante es alegre o interesante entonces es popular.
4) Solo si el estudiante es popular entonces es alegre e interesante.
5) El estudiante es alegre e interesante si y solo si es popular.
6) No existe estudiante que sea a la vez alegre y popular.
7) Un estudiante es interesante o popular pero no ambos.

3.5.- SEMÁNTICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL. -

La semántica de la Lógica Proposicional tiene 3 roles importantes:

1. Proporcionar la noción de significado o interpretación
2. Precisar el concepto de verdad.
3. Definir el concepto de Consecuencia Lógica.

3.5.1.-ASIGNACIÓN DE VERDAD. -

Una asignación de verdad (Bertossi Durán, 1995, p. 17) es una función σ de P en el conjunto {0,1}.

Es decir: σ: P →{0,1}.

- Cada letra proposicional tiene exactamente un valor de verdad entre dos posibles: Verdadero (1) o Falso (0)
- Las asignaciones también se llaman valuaciones.
- Si P contiene "n" letras proposicionales entonces se tendrá 2^n valuaciones distintas.

Ejemplo: Si P={p,q,r } n=3 se tendrán 2^3 Se tendrían las siguientes valuaciones:

$\sigma_{1:}$ {p→1, q→1, r→1 } $\sigma_{2:}$ { p→1, q→1, r→0}

$\sigma_{3:}$ { p→1, q→0, r→1 $\sigma_{4:}$ {p→1, q→0, r→0 }

$\sigma_{5:}$ { p→0, q→1, r→1} $\sigma_{6:}$ { p→0, q→1, r→0}

$\sigma_{7:}$ { p→0, q→0, r→1} $\sigma_{8:}$ { p→0, q→0, r→0}

Ejemplo2: Si P = {p, q, r, s} n=4 se tendrán 2^4 valuaciones:

$\sigma_{1:}$ { p→1, q→1, r→1, s→1} ….

$\sigma_{16:}$ { p→0, q→0, r→0, s→0}

Ya está claro que para una Fórmula Atómica o Letra Proposicional solo se puede tener dos posibles valores de verdad, pero ¿Cómo se determina el valor de verdad para fórmulas compuestas?

Por ejemplo ¿Cuál es el valor de verdad de una fórmula A?

$$A = s \vee (r \rightarrow q \wedge p)$$

Para asignar valores de verdad a las fórmulas del Lenguaje Proposicional se necesita dar por primera vez el significado a los conectivos lógicos. Para tal efecto se utilizará inducción sobre fórmulas.

Dada una fórmula arbitraria A de L(P), el valor de verdad de σ(A) es:

FUNCION: σ(A)
CASO BÁSICO:

Si A es una fórmula ATÓMICA entonces σ(A) = el valor original de A

PROCESO INDUCTIVO:

-Si A = ~ B entonces σ(A) = 1- σ(B)

-Si A = B ∨ C entonces σ(A) = max {σ(B), σ(C)}

-Si A = B ∧ C entonces σ(A) = min {σ(B), σ(C)}

-Si A = B → C { si σ(B)=1 y σ(C)= 0 entonces σ(A) =0
sino entonces σ(A) =1

-Si A es B ↔ C { si σ(B) = σ(C) entonces σ(A) =1
sino entonces σ(A) =0

En resumen:

		Negación	**Disyunción**	**Conjunción**	**Condicional**	**Bicondicional**
p	**q**	$\sim p$	p ∨ q	p Λ q	p → q	p ↔ q
1	1	0	1	**1**	1	**1**
1	0	0	1	0	**0**	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	**0**	0	1	**1**

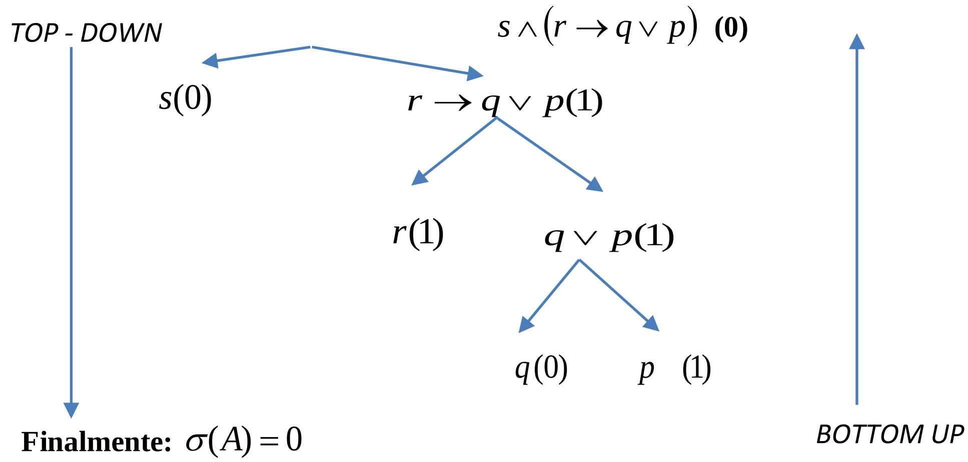
Tabla 3: Tabla de Verdad de Conectivos Lógicos

3.5.2.- INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS. –

El objetivo de la interpretación de fórmulas es determinar el valor de verdad de una fórmula para una valuación específica.

EJEMPLO 1: Determinar el valor de verdad de $A = s \wedge (r \rightarrow q \vee p)$ **para** σ: {p→1, q→0,r→1,s→0}

Primero se descompone la fórmula de arriba hacia abajo (TOP - DOWN) y luego se evalúa de abajo hacia arriba (BOTTOM UP)



Finalmente: $\sigma(A) = 0$

EJEMPLO 2: Determinar el valor de verdad de $B = s \rightarrow (r \rightarrow q \wedge p)$
Para σ: {p→1 , q→1, r→0 , s→0}

$$
\begin{gathered}
s \rightarrow (r \rightarrow q \wedge p) \\
0 \rightarrow (0 \rightarrow 1 \wedge 1) \\
0 \rightarrow (0 \rightarrow 1) \\
0 \rightarrow (1) \\
1
\end{gathered}
$$

Finalmente: $\sigma(B) = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar el valor de verdad de **las siguientes fórmulas:**

1) $A = [(p \rightarrow \neg q) \rightarrow s] \wedge [r \rightarrow (q \leftrightarrow p)]$ para σ: {p→0; q→1;r→0;s→0}

2) $B = [(s \vee t) \rightarrow (u \leftrightarrow p)] \vee (q \wedge p \rightarrow r)$ para σ: {p→1; q→1;r→0;s→0,t→1, u→1}

3) $C = r \rightarrow [s \leftrightarrow (p \wedge (t \vee \neg q))]$ σ: {p→1; q→1;r→0;s→0,t→1}

3.5.3 EVALUACIÓN SEMÁNTICA DE FÓRMULAS. -

La evaluación semántica de fórmulas supone determinar el valor de verdad de la fórmula para **todas las valuaciones posibles**. Este proceso se lo lleva a cabo por medio de tablas de verdad.

Ejemplo: Determinar el valor de verdad de la siguiente fórmula, para todas las valuaciones.

$$A = (p \rightarrow q) \rightarrow [\sim r \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$$

$$B = \sim p \vee [(q \wedge r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)]$$

3.5.4 FÓRMULAS VÁLIDA (O TAUTOLOGIA).-

Una fórmula A es válida si y solo si es VERDADERA en todas sus valuaciones: σ(A)=1.

Ejemplo: p ∨ ~ p

3.5.5 FÓRMULA INSATISFACIBLE (O CONTRADICCIÓN).-

Una fórmula A es Insatisfacible si y solo si es FALSA en todas sus valuaciones: σ(A)=0

Ejemplo: p ∧ ~ p

3.5.6 FÓRMULA CONTINGENCIA. -

Una fórmula A es Contingencia si al menos una valuación la hace verdadera y al menos una la hace falsa. (Genesereth & Kao, 2016).

Ejemplo: p ∧ q

Una fórmula A es **Satisfacible** si y solo si al menos una valuación la hace verdadera.

Una fórmula satisfacible puede ser **Válida** o **Contingencia**.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejemplo: Hallar la tabla de verdad de la siguiente fórmula:

1) $A=[(p\rightarrow q)\vee r]\wedge\neg[\neg r\rightarrow\neg(p\wedge\neg q)]$

3.5.7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON LÓGICA PROPOSICIONAL. -

Se pueden utilizar interpretaciones de fórmulas o tablas de verdad para resolver diferentes tipos de problemas de lógica proposicional.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver los siguientes problemas con interpretaciones de fórmulas o tablas de verdad.

1.- Si “p” es verdadera, determinar el valor de verdad de $A=\neg p\rightarrow(r\vee q)$

2.- Si “q” es falsa, determinar el valor de verdad de $B=(p\leftrightarrow q)\wedge(r\wedge q)$ **.**

3.- Si la fórmula $C=(p\wedge r)\rightarrow(s\vee q)$ es falsa, determinar el valor de verdad de **p,q,r,s**

4.-Resolver el siguiente problema utilizando interpretación de fórmulas o tablas de verdad

Se sabe que “s es Falso” y que las fórmulas $A=(p\rightarrow q)\rightarrow(r\vee s)$ es Verdadera, $B=(q\wedge t)\vee(p\rightarrow u)$ es Verdadera**,** $C=(r\rightarrow s)\wedge(s\leftrightarrow\neg t)$ **es Verdadera.**

a) Determinar el valor de verdad de **p, q, r, s, t, u.**

b) Determinar el valor de verdad $D=(w\rightarrow p)\wedge(s\vee t)$

3.6.- CONSECUENCIA LÓGICA. -

Dado un argumento formado por un Conjunto de Fórmulas llamadas Premisas: $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y dada una Conclusión Q

La consecuencia lógica se representa de la siguiente manera:

$\Sigma \models Q$ Q es consecuencia lógica de Σ. El argumento es válido

$\Sigma \not\models Q$ Q NO es consecuencia lógica de Σ. El argumento NO es válido

La demostración se realiza mediante el método semántico o el método sintáctico:

3.6.1.- MÉTODO SEMÁNTICO (DEMOSTRACIÓN POR TABLAS DE VERDAD).-

Se dice que Q es consecuencia lógica de Σ si para cada valuación se cumple: "**Si σ hace verdadero al conjunto Σ implica que σ hace verdadera a Q".** En otras palabras un razonamiento es válido si: $\Sigma \rightarrow Q$ **es una tautología.**

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar la validez de los siguientes argumentos:

1.- $\Sigma = \{(p \vee r) \rightarrow q, (\neg p \wedge q) \rightarrow q, \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r), q \leftrightarrow r\}$ $Q = \{p \rightarrow r\}$

2.- $\Sigma = \{(p \wedge q) \rightarrow r, (q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg r, (r \wedge q) \rightarrow \neg p\}$

$Q = \{(p \vee q) \wedge \neg(r \wedge \neg p)\}$

3.6.2.-MÉTODO SINTÁCTICO. -

Una demostración a nivel semántico presenta algunas limitaciones, sobre todo cuando el número de letras proposicionales es grande. Por ejemplo con 9 letras se tienen 2^9=512 valuaciones, el trabajo es moroso y es fácil cometer errores. El método sintáctico permite una demostración a nivel simbólico.

3.6.2.1.- FORMULAS EQUIVALENTES -

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes si exactamente las mismas valuaciones las hacen verdaderas.

3.6.2.2.- CONECTIVOS FUNCIONALMENTE COMPLETOS. -

Los conectivos funcionalmente completos son la negación y la disyunción { ~, ∨ } ya permiten representar al resto de conectivos {⟶, ↔ , ∧ } . (Bertossi Leopoldo, 1996, p.22).

3.6.2.3.- FORMA NORMAL DISYUNTIVA (F.N.D).-

Es una Disyunción de Conjunciones de literales. Un literal es una letra proposicional o una negación de una letra proposicional (p, ~q):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}$$

Ejemplo: (~ r ∧ p) ∨ (q ∧ s ∧ ~ t) está en F.N.D.

TABLAS DE EQUIVALENCIAS LÓGICAS

1 2 3	**Supresión de Condicional** **Supresión de Bicondicional** **Contraposición:**	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	
4	**Doble Negación(Involución)**	$\sim (\sim A) \Leftrightarrow A$	
5	**Idempotencia:**	$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$
6	**P. Conmutativa**	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
7	**P. Asociativa**	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
8	**P. Distributiva:**	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9	**L. De Morgan**	$\sim (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\sim (A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$
10	**Absorción**	$A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$
11	**Elemento neutro**	$A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
12	**Tautología**	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	
13	**Contradicción**		$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$ $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

Tabla 4: Tabla de Equivalencias Lógicas

3.6.2.4.- FORMA NORMAL CONJUNTIVA (F.N.C).-

Es una Conjunción de Disyunciones de literales.

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij}$$

Ejemplo: (r ∨ p) **∧** (s ∨q ∨ ~ t) **∧** (~ q ∨ p) está en F.N.C.

Para transformar una Fórmula a su equivalente en F.N.C. o F.N.D. se debe seguir los pasos:

1. Reemplazar las implicaciones o dobles implicaciones por sus equivalentes lógicos en términos de conectivos funcionalmente completos.
2. Introducir las negaciones dentro de las fórmulas.
3. Distribuir y en su caso redistribuir hasta lograr la forma normal requerida (F.N.C. o F.N.D.)

EJERCICIOS PROPUESTOS

Llevar la fórmula $A=(q\rightarrow p)\leftrightarrow(q\rightarrow r)$ a F.N.C.

3.6.2.5.- FORMA CLAUSAL. -

Una CLAUSULA es una fórmula expresada como disyunción de literales. Para expresar fórmula como cláusulas se realiza lo siguiente:

1.-Llevar la fórmula a F.N.C.

2.-Reemplazar las conjunciones ∧ por "comas" ","

Finalmente, todo lo que se encuentra entre "comas" es cláusula.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Llevar la siguiente fórmula a Forma Normal Conjuntiva.

$$[\sim(\sim(\sim p \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge q)) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)] \wedge [(r \vee s) \wedge ((\sim r \rightarrow t) \vee s)]$$

$$[(p \vee r) \vee (s \wedge q)) \vee (\sim p \wedge \sim r)] \wedge [(r \vee s) \wedge ((r \vee t) \vee s)] \text{ Elim. Condicional}$$

$$[(p \vee r) \vee (s \wedge q)) \vee (\sim p \wedge \sim r)] \wedge [(r \vee s) \wedge (r \vee s \vee t)] \text{ Conmutativa}$$

$$[((p \vee r) \vee (\sim p \wedge \sim r)) \vee (s \wedge q)] \wedge [(r \vee s) \wedge (r \vee s \vee t)] \text{ Conmutativa}$$

$$[((\sim p \vee p \vee r) \wedge (p \vee r \vee \sim r)) \vee (s \wedge q)] \wedge [r \vee s] \text{ Absorción}$$

$$[(1 \wedge 1) \vee (s \wedge q)] \wedge [r \vee s] \text{ Tautología}$$

$$1 \wedge (r \vee s) \text{ Idempotencia}$$

$$r \vee s \quad \text{F.N.C.}$$

3.6.2.6.- PRINCIPIO DE RESOLUCIÓN.-

Si C**1 = {** l1 ∨ l2 ∨ ……. ∨ l_m **}** **y C2= {** l'1 ∨ l'2 ∨ ……. ∨ l'n **}** son cláusulas, donde l_m y l'n son literales complementarios, éstas se pueden resolver para obtener una nueva cláusula **C3** llamada resolvente.

C3= {C**1** - l_m **}** ∨ **{ C2 -** l'n **}**

Una cláusula vacía es aquella que no contiene literales. Se representa por un rectángulo. $\square$

3.6.2.7.- MÉTODO GENERAL DE RESOLUCIÓN.-

Para poder demostrar que una fórmula Q es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ (Σ |=Q) se siguen los siguientes pasos:

1° Se expresa el conjunto {Σ ∪ ¬Q} en cláusulas.

2° Se busca obtener la cláusula vacía, a partir del conjunto de cláusulas aplicando el principio de Resolución. Si se logra esto se demuestra que Σ |= Q y el argumento es válido, de lo contrario y el argumento no es válido Σ|≠Q.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar la validez de los siguientes razonamientos:

1) $\sum=\{p\rightarrow[(s\vee t)\wedge\neg r],\quad \neg p\rightarrow(q\wedge t),\quad \neg r\rightarrow[\neg t\wedge(\neg p\vee s)],\quad s\rightarrow[\neg q\wedge(r\vee t)]\ \}$
$Q=\{r\wedge t\}$

2) $\Sigma = \{(p \vee r) \to q, (\neg p \wedge q) \to q, \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r), q \leftrightarrow r\}$
$Q = \{p \to r\}$

3) $\Sigma = \{(p \wedge q) \to r, (q \to \neg p) \to \neg r, (r \wedge q) \to \neg p\}$
$Q = \{(p \vee q) \wedge \neg(r \wedge \neg p)\}$

3.6.2.8.- ESTRATEGIAS DE BORRADO. -

Son técnicas que permiten eliminar cláusulas antes de ser utilizadas, ya que dichas cláusulas no aportan a la búsqueda de la cláusula vacía.

a) ELIMINACIÓN DE CLÁUSULAS CON LITERALES PUROS. -

Un literal es **puro** si y sólo si no existe un literal complementario a él en el conjunto de cláusulas. **Ejemplo:** Sea el conjunto de cláusulas: C= {~p ∨ q ∨r, ~q ∨ s , ~r ∨ p }

Se elimina la segunda cláusula porque contienen el literal PURO: s

b) ELIMINACIÓN DE CLÁUSULAS CON TAUTOLOGÍAS. -

Una tautología es una cláusula que contiene un literal y su complementario. **Ejemplo:** La cláusula C= { ~q ∨ s , p ∨ ~s , ~q ∨ q ∨ r, ~r ∨ p }

Se elimina la cláusula tres porque contiene q además de ~q

c) ELIMINACIÓN DE SUBSUNCIONES. -

Una cláusula C1 subsume a otra cláusula C2 si y solo si todo literal de C1 pertenece también a C2 es decir $C1 \subseteq C2$. Entonces la cláusula C2 se elimina

Ejemplo: La cláusula C1= p ∨ q subsume a C2= p ∨ q ∨ r.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.- Determinar la validez del siguiente argumento por resolución (Aplicar estrategias de borrado).

$\Sigma = \{(p \vee q) \leftrightarrow r, \quad \neg(p \vee r) \to s\}$ $\qquad Q = \{\neg r \to s\}$

II.- Formalizar y determinar la validez del siguiente argumento

Solo si entregas tu matrícula entonces estás registrado en el sistema, no obstante, exista algún error en los datos. Si la fila es muy larga entonces es falso que el trámite dure pocas horas, pero si existe algún error en los datos entonces hay que presentar una carta a DTIC. Por tanto: si no presentas una carta a DTIC y no entregas tu matrícula entonces no puedes votar en las elecciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertossi Durán, L., 1995. Lógica para Ciencias de la Computación. Primera ed. Chile: TELEDUC.

Genesereth, M. & Kao, E. J., 2016. Introduction to Logic. Tercera ed. s.l.:Morgan & Claypool Publisher