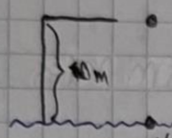
Miguel stiven Ascanio Quinchia 2231344

Problemas de Mecanica Clasica [Viernes 7 del 2024]

1a) Un clavadista se lanza a una piscina desde 10 m de altura. Vamos a calcular que tan profundo llega si el clavadista pesa 70 kg



Calculemos su velocidad al llegar al agua.

$$mgh = 1/2\, m V^2 \Rightarrow V = (2gh)^{1/2}$$

$$\Rightarrow V = (2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times 10\ m)^{1/2} = 14\ m/s$$

Ahora, vamos a suponer que el clavadista se comporta como una esfera, por lo que:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = m \Rightarrow r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right) = \left(\frac{3 \times 70\ kg}{4 \times \pi \times 933\ kg/m^3}\right)^{1/3} \approx 0{,}26\ m$$

Por lo que ahora, podemos aplicar la segunda ley de Newton en el objeto en el seno del fluido. Por lo que:

$$F = F_\rho + F_0 - F_W$$

Donde F_ρ es la fuerza de empuje del fluido, F_0 es la fuerza de friccion del mismo y F_W es el peso, entonces:

$$m \cdot a = \rho \cdot V \cdot g + (1/2) \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot V^2 - m \cdot g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^3 \cdot g}{3 \cdot m} + \frac{C \cdot \rho \cdot \pi r^2}{2m} V^2 - g$$

El coeficiente de recistencia C es igual a 0,47, pues suponemos que el cuerpo es una esfera, entonces reemplazando valores nos queda:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1000 \cdot 4\pi (0{,}26)^3 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 70} + \frac{0{,}47 \cdot 1000 \cdot \pi \cdot (0{,}26)^2}{2 \cdot 70} V^2 - 9{.}8$$

$$\Rightarrow V' = 0.51 + 0{,}71 V^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dV}{0{,}71V^2 + 0{,}51} = \int dt \quad , \quad V(0) = 14\ m/s$$

Esta integral se puede resolver, pero usare metodos computacionales para no extenderme en las cuentas, sabiendo que $V(0) = 14\ m/s$

Teniendo en cuenta lo anterior, nos da:

$V(t) = 0{,}85 \cdot \tan(0{,}6t + 1{,}5)$

Ahora, podemos calcular el tiempo exacto cuando la persona llega al fondo, cuando su velocidad es cero, entonces

$0{,}85 \tan(0{,}6t + 1{,}5) = 0 \Rightarrow \tan(0{,}6t + 1{,}5) = 0$

Sabemos que tang se hace cero en los multiplos enteros de π, entonces su angulo deberia ser:

$0{,}6t + 1{,}5 = n\pi \Rightarrow t = \dfrac{n\pi - 1{,}5}{0{,}6}$

Si probamos para $n = 1$, nos queda:

$t = \dfrac{\pi - 1{,}5}{0{,}6} = \underline{2{,}74\,s} \longrightarrow$ Que es el tiempo cuando el cuerpo llega al punto mas profundo posible.

Ahora encontramos la función posición integrando $V(t)$

$r(t) = \int V(t)\,dt = \int 0{,}85 \cdot \tan(0{,}6t + 1{,}5)\,dt$

Resolvemos lo anterior con una calculadora de integrales

$\Rightarrow r(t) = 1{,}42 \cdot \ln|\sec(0{,}6t + 1{,}5)| + C$

Para encontra C, recordemos que $r(0) = 0$, pues nuestro analisis empieza tan pronto el clavadista toca el agua en $r = 0$ y $t = 0$, entonces

$1{,}42 \ln|\sec(1{,}5)| + C = 0 \Rightarrow C = -3{,}76$

$\Rightarrow r(t) = 1{,}42 \ln|\sec(0{,}6t + 1{,}5)| - 3{,}76$

Entonces, para encontrar el punto mas bajo, evaluamos en

$\underline{r(2{,}74)} = 1{,}42 \ln(|\sec(0{,}6(2{,}74) + 1{,}5)|) - 3{,}76 = \boxed{-3{,}76 \text{ m}}$

Entonces, con nuestas suposiciones, el clavadista logró hundirse <u>3,76 metros</u>, por lo que tienen que hacer piscinas mas profundas que eso, para evitar heridos. pues las condiciones iniciales podrian ser otras (como la posición del cuerpo) y cambiar la profundidad.

1b) Un corcho de 5 cm de diametro se sueta en una fosa de 5 metros desde el fondo, calculemos la velocidad.

El proceso será muy parecido al inciso anterior, así que procederé con los calculos directamente.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi \cdot 0.025^3}{3} \approx 6.54 \times 10^{-5} \ m^3$$

$$m = D \cdot V = 240 \frac{kg}{m^3} \times 6.54 \times 10^{-5} \ m^3 \approx 0.016 \ kg$$

Ahora, apliquemos Newton

$$m \cdot a = \rho \cdot V \cdot g - (1/2) \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 - mg$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\rho V g}{m} - \frac{C \cdot \rho \cdot A}{2m} v^2 - g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1000 \times 6.54 \times 10^{-5} \times 9.8}{0.016} - \frac{0.47 \times 1000 \times (\pi \times 0.025^2)}{2 \times 0.016} v^2 - 9.8$$

$$\Rightarrow v' = 31.03 - 29.37 v^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{31.03 - 29.37 v^2} = \int dt$$ $\rightarrow$ Resolvemos usando metodos computacionales

teniendo en cuenta que $v(t = 0s) = 0 \ m/s$, nos queda que:

$$v(t) = 1.03 - \frac{6037.71}{2937(e^{60.38t} + 1)} = 1.03 - \frac{2.05}{e^{60.38t} + 1}$$

Ahora integramos para calcular la posición

$$r(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(1.03 - \frac{2.05}{e^{60.38t} + 1}\right) dt = 0.034 \ln\left|e^{-60.38t} + 1\right| + 1.03t + C$$

sabemos que $r(t = 0s) = 0 \ m$, pues definimos el fondo como nuestro cero.

$$0.034 \cdot \ln|1+1| + 0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -0.024$$

$$\Rightarrow 0.034 \ln\left|e^{-60.38t} + 1\right| + 1.03t - 0.024 = r(t)$$

Ahora, para estimar la velocidad con la que llega el corcho a la superficie, debemos saber el tiempo exacto tal que $r(t) = 5$, para esto haremos el calculo computacionalmente pues despejar t es complicado por metodos convencionales. por lo que usaremos metodos graficos.

El analisis de las graficas nos lleva a que $r(t) = 5$ m en $t = 4{,}88$ s.

Sabiendo el tiempo que demora en subir, solo queda calcular la velocidad

$$V(t=4{,}88\,s) = 1{,}03 - \frac{2{,}05}{e^{60{,}38 \times 4{,}88} + 1} \approx \boxed{1{,}03 \ \frac{m}{s}}$$

Por lo que la velocidad con la que sale a la superficie el corcho es a 1,03 m/s aproximadamente. la cual es la velocidad terminal.

1c) Calculemos la velocidad a la que sale una burbuja de un gas ideal.

Partimos de la misma ecuación:

$$m \cdot a(t) = \rho \cdot V(t) \cdot g - (1/2) \cdot C \cdot \rho \cdot A(t)\, v_{(t)}^2 - mg,$$

$$A = \pi r^2 \quad \wedge \quad V = (4/3)\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(3V/4\pi)^{2/3}$$

Por ley de Boyle sabemos que $V_1 P_1 = V_2 P_2$

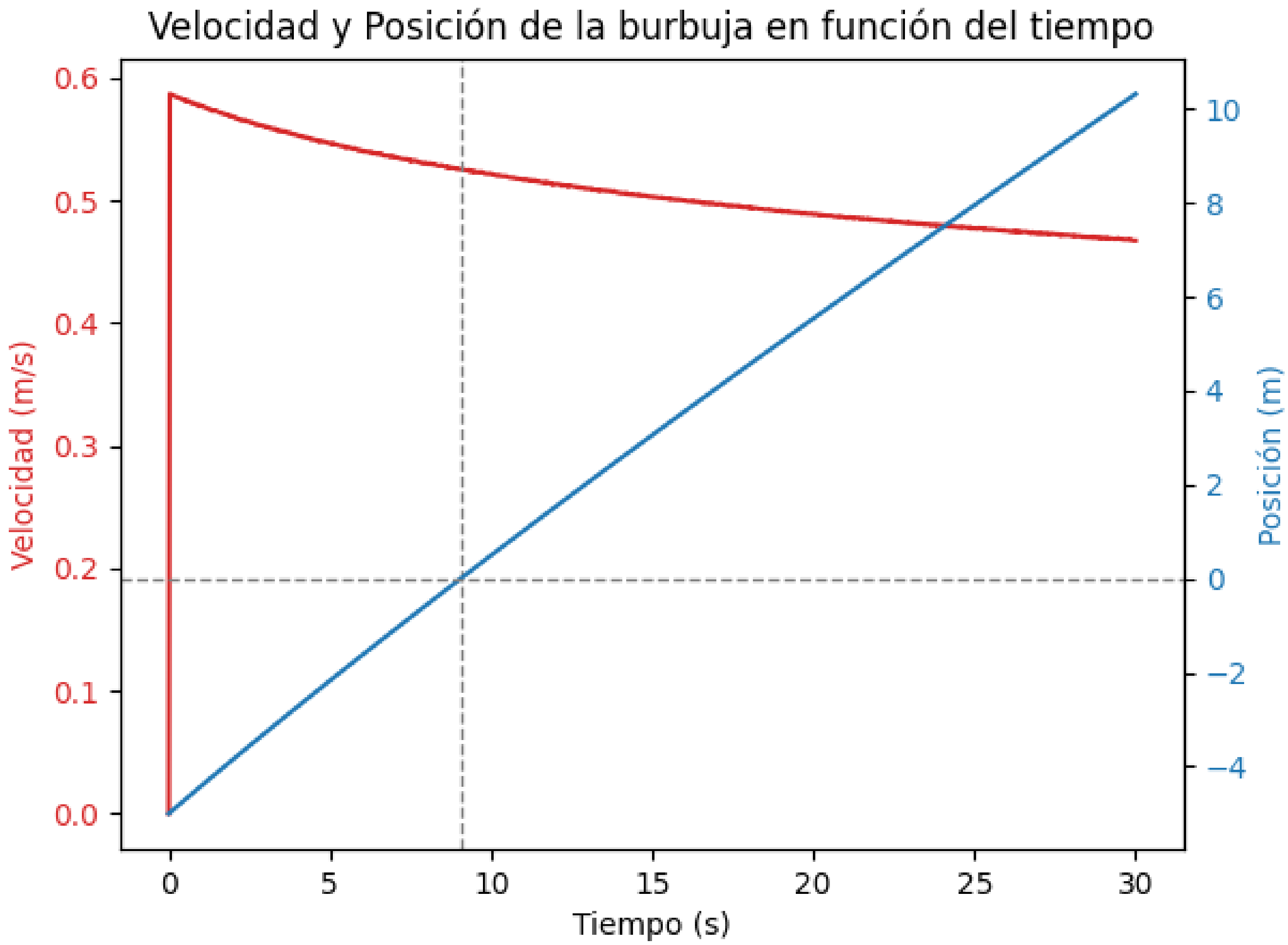
$$\Rightarrow V(h) \cdot (P_0 + \rho g h) = V_0 (P_0 + \rho g h_0)$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{P_0 + \rho g h_0}{P_0 + \rho g h} V_0 \quad \wedge \quad A(h) = \pi\left(\frac{3V_0}{4\pi} \cdot \frac{P_0 + \rho g h_0}{P_0 + \rho g h}\right)^{2/3}$$

finalmente, nuestra ecuación queda:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{(P_0 + \rho g h_0)\rho g V_0}{(P_0 + \rho g h(t))\, m} - \frac{C \cdot \rho}{2m} \cdot \pi \left(\frac{3V_0}{4\pi} \cdot \frac{P_0 + \rho g h_0}{P_0 + \rho g h(t)}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - g \quad ✓$$

Resolver esta ecuación es realmente complicado, por lo que realicé un codigo que aproxima la solución por medio de un método llamado Runge-Kutta de 4to orden. El uso de este metodo me llevó a que la burbuja le toma 9,05 segundos en salir a la superficie con una velocidad de 0,52 m/s.



Esta imagen representa el comportamiento de la burbuja de agua a medida que pasa el tiempo. La grafica azul representa la posicion de la burbuja, que parte desde -5 m y nos interesa ver en que tiempo llega a la altura cero. Por otro lado la grafica roja representa la velocidad de la burbuja, que podemos ver que tan pronto empieza, adquiere una velocidad considerable, y a medida que avanza el tiempo, su velocidad va disminuyendo gradualmente, esto se debe al aumento de masa de la burbuja. Finalmente, las lineas grises representan mi punto de interes, la horizontal representa la altura 0, es decir, la superficie de la fosa, mientras que la linea vertical representa el tiempo en el que la burbuja llega a la superficie, y podemos observar en la grafica, que velocidad tenia la burbuja en ese insntante.

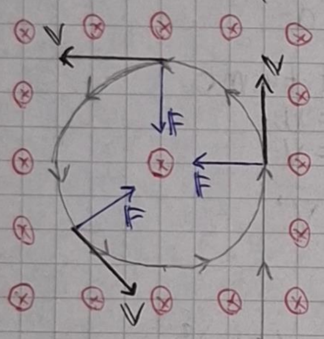
2a) supongamos un campo magnetico uniforme apuntando en dirección z positivo, es decir $\mathbb{B} = B\hat{k}$ y supongamos tambien que la particula entra con una velocidad constante apuntando a y positivo, es decir $\mathbb{V} = V\hat{j}$.
sabemos que

$$\mathbb{F} = \cancel{e\mathbb{E}}^{0} + \frac{e}{c}\mathbb{V}\times\mathbb{B}$$

$$\Rightarrow \mathbb{F} = \frac{e}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (\hat{i}(V\cdot B - 0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0))\, e/c$$

$$\Rightarrow \mathbb{F} = VB\,\hat{i}\cdot e/c$$

Es decir, la fuerza solo tiene componente en x y su valor es VB. Ahora, visualicemos el problema suponiendo que el campo magnetico $\mathbb{B}$ sale de la hoja



Si seguimos avanzando en el tiempo veremos que siempre hay una Fuerza que apunta hacia el centro, como una fuerza centripeta, por lo que la velocidad se va curvando y genera un movimiento giratorio, por lo que calculemos su radio

$$F_c = m\frac{V^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mV^2}{F_c}$$

$\|\mathbb{F}\| = F = eBV/c$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{mV^2}{eBV/c} = \frac{cmV}{eB} = \frac{V}{W_c}}$$

2b) supongamos que: $\mathbb{B} = B\hat{k} \wedge \mathbb{E} = E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

$$\Rightarrow F = m\cdot a = e(E_y\hat{j} + E_z\hat{k}) + e/c\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow m\cdot a = eE_y\hat{j} + eE_z\hat{k} + e/c\, V_yB\,\hat{i} + (-(e/c)V_xB)\hat{j}$$

$$\Rightarrow a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{eV_yB}{cm}\hat{i} + \left(\frac{eE_y}{m} - \frac{eV_xB}{cm}\right)\hat{j} + \frac{eE_z}{m}\hat{k}$$

$$a_z(t) = \frac{eE_z}{m} \Rightarrow V_z(t) = \int a_z(t)dt = \int\frac{eE_z}{m}dt = \frac{eE_z}{m}t + V_{0z}$$

$V_z(0) = V_0 =$ constante de integración

$$z(t) = \int V_z(t)dt = \int\left(\frac{eE_z}{m}t + V_0\right)dt = \frac{eE_z}{2m}t^2 + V_0 t + z_0$$

Entonces La componente z del movimiento es:

$$\boxed{z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2}, \text{ donde: } \begin{cases} z(0) = z_0 \\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = V_0 \end{cases}$$

2c) Calculemos la expresión para $x(t)$:

$$\Rightarrow a_x = \frac{eB}{cm}V_y \Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{eB}{cm}\dot{y}(t)$$

Ahora la expresión para $y(t)$:

$$\Rightarrow a_y = \frac{e \cdot E_y}{m} - \frac{eB}{cm}V_x \Rightarrow \ddot{y}(t) = \frac{eE_y}{m} - \frac{eB}{cm}\dot{x}(t)$$

Entonces, me queda el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'' = (eB/cm)\,y' \Rightarrow x'' = W_c y' \\ y'' = eE_y/m - (eB/cm)\,x' \end{cases} \Rightarrow \text{; sustituimo; } x' = u \text{; } y' = v$$

$$\begin{cases} u' = (eB/cm)\,v \Rightarrow u'' = (eB/cm)\,v' \\ v' = eE_y/m - (eB/cm)\,u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{eB}{cm}\right)\cdot\left(\frac{eE_y}{m} - \frac{eB}{cm}u\right) = \frac{e^2BE_y}{cm^2} - \left(\frac{eB}{cm}\right)^2 u$$

Resolvemos la ecuación homogenea asociada

$u'' + (eB/cm)^2 u = 0$ → sacamos su eq. característica:

$m^2 + (eB/cm)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\,(eB/cm)$

$U_h(x) = C_1\cos(eBx/cm) + C_2\sin(eBx/cm)$

Ahora busque la solución particular $U_p = C$ dond $U''_p = 0$.

$\Rightarrow 0 + (eB/cm)^2 C = e^2BE_y/cm^2 \Rightarrow C = E_y c/B$

Entonces, la solución es

$$u(t) = x'(t) = C_1\cos(eBx/cm) + C_2\sin(eBx/cm) + E_y c/B$$

Ahora, integramo $x'(t)$ para obtene $x(t)$ y nos queda:

$\Rightarrow X(t) = C_2 \sin(W_c t) + C_1 \cos(W_c t) + (E_Y C/B)t + C_3$ (1)

$\Rightarrow X'(t) = -C_1 W_c \sin(W_c t) + C_2 W_c \cos(W_c t) + E_Y C/B$

$\Rightarrow X''(t) = -W_c^2 (C_2 \sin(W_c t) + C_1 \cos(W_c t))$

Ahora, como $x'' = W_c Y' \Rightarrow$

$Y'(t) = -C_2 W_c \sin(W_c t) - C_1 W_c \cos(W_c t)$

$Y(t) = C_2 \cos(W_c t) - C_1 \sin(W_c t) + C_4$ (2)

- X' e Y' pueden ser reescritos de la siguiente manera

$$\begin{cases} X' = W_c A \sin(W_c t + \phi) + E_Y C/B \iff \tan(\phi) = -C_1/C_2 \\ Y' = -W_c A \sin(W_c t + \phi) \iff \tan(\phi) = C_1/C_2 \quad \wedge \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \end{cases}$$

Ambas funciones poseen el mismo argumento, por lo cual tienen el mismo periodo el cuales dado por:

$$T = 2\pi / W_c$$

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{2\pi/W_c - 0} \int_0^{2\pi/W_c} \left(W_c A \sin(W_c t + \phi) + \frac{E_Y C}{B} \right) dt$$

$$= \frac{W_c}{2\pi} \left[\frac{E_Y C t}{B} - A \cos(W_c t + \phi) \right|_{t=0}^{t=2\pi/W_c} = \boxed{\frac{E_Y C}{B}}$$

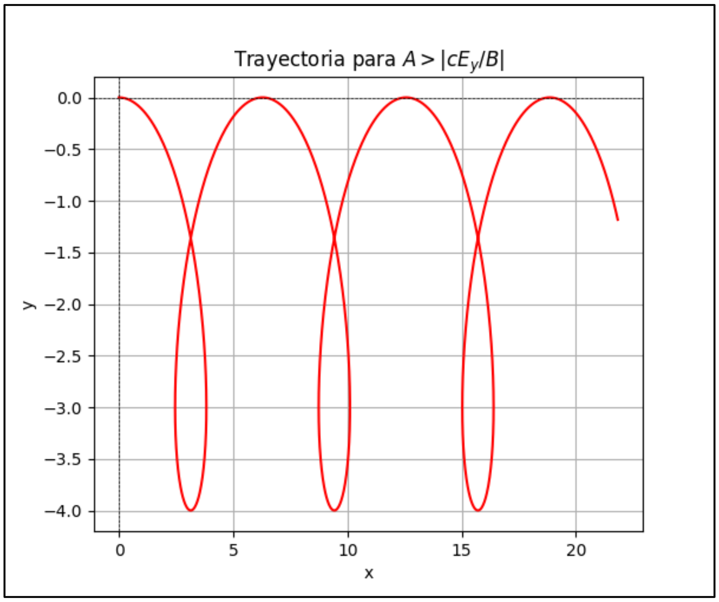
$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{1}{2\pi/W_c - 0} \int_0^{2\pi/W_c} \left(-W_c A \sin(W_c t + \phi) \right) dt$$

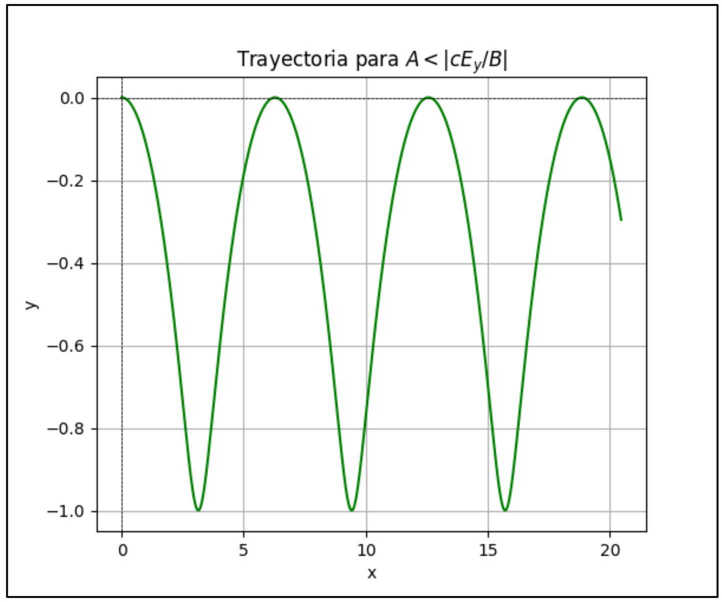
$$= \left[\frac{A W_c \cos(W_c t + \phi)}{2\pi} \right|_{t=0}^{t=2\pi/W_c} = \boxed{0}$$

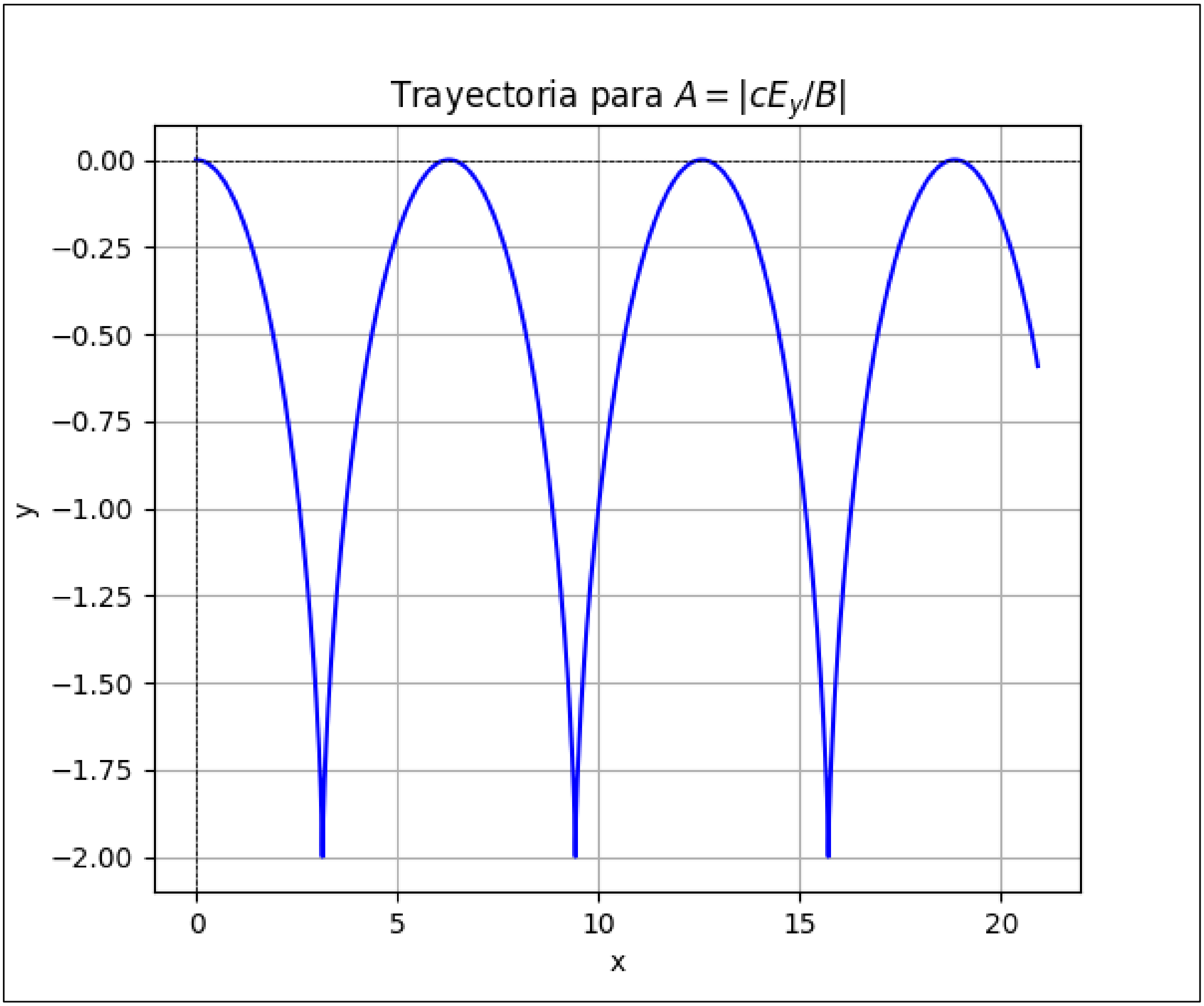
Si retomamos las ecuaciones (1) y (2) y escogemos las siguientes condiciones: $C_1, C_3 = 0$, $C_2 = A/W_c$ y $C_4 = -1$. Con estos arreglos nos quedan estas funciones:

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = \frac{A}{W_c} \sin(W_c t) + \frac{C E_Y}{B} t \\ Y(t) = \frac{A}{W_c} (\cos(W_c t) - 1) \end{cases}}$$

A continuación muestro las graficas de los 3 casos


Trayectoria para $A > |cE_y/B|$
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
y
0
5
10
15
20
x


Trayectoria para $A < |cE_y/B|$
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
y
0
5
10
15
20
x


Trayectoria para $A = |cE_y/B|$
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
y
0
5
10
15
20
x

3a. Una gota cae con una masa inicial m_0 y pasa por una nube donde su masa aumenta a razon de b g/s y su fricción es proporcional a su velocidad por lo que

$$F_{total} = \frac{d(mv)}{dt} = F_W - F_r \quad \wedge \quad m(t) = m_0 + bt$$

Reemplazamos cada fuerza y reorganizamos

$$mg - kv = \frac{d(mv)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

Reemplazamos lo anterior recordando que $dm/dt = b$

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt} + vb$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{k+b}{m}\right)v = g - \left(\frac{k+b}{m_0+bt}\right)v} \quad \checkmark$$

Esta ecuación define la velocidad de la gota, ahora intentemos resolverla.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k+b}{m}v = g \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{k+b}{m_0+bt}dt} = (m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}$$

$$\Rightarrow v(t)\cdot(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}} = g\int (m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}dt$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{gb}{k+2b}(m_0+bt) + c(m_0+bt)^{-\frac{k+b}{b}}$$

Aplicamos la condición inicial $v(0) = 0$

$$0 = \frac{gb}{k+2b}m_0 + c\,m_0^{-\frac{k+b}{b}} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{gb}{k+2b}m_0^{\frac{k+2b}{b}}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{gb}{k+2b}\left((m_0+bt) - m_0^{\frac{k+2b}{b}}(m_0+bt)^{-\frac{k+b}{b}}\right)$$

3b) Cuando la gota sale de la nube, su masa se ha duplicado por lo que $m(t_f) = m_0 \cdot 2$, dado que $m(t_f) = m_0 + b\cdot t_f$

$$m_0 + b\cdot t_f = 2m_0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{m_0}{b}$$

Una vez teniendo el tiempo final solo lo reemplazamos en nuestra función de velocidad

$$V(t_f) = \frac{gb}{k+2b}\left(m_0 + b\left(\frac{m_0}{b}\right)\right) - \frac{gb}{k+2b} m_0^{\frac{k+2b}{b}} \left(m_0 + b\left(\frac{m_0}{b}\right)\right)^{-\frac{k+b}{b}}$$

simplificando esta expresión lo mas que se puede, llegamos a que:

$$\boxed{V_{final} = \frac{2gbm_0}{k+2b}\left(1 - 1^{-\frac{k+b}{b}}\right)}$$

3c) La velocidad límite ocurre cuando el peso se equilibra con la fuerza de resistencia del aire, es decir:

$$m \cdot \cancel{v'(t)} = mg - kV \quad \Rightarrow \quad 0 = mg - k \cdot V_{lim}$$

Entonces, la velocidad límite es:

$$\boxed{V_{lim} = \frac{mg}{k} = \frac{2m_0 g}{k}}$$