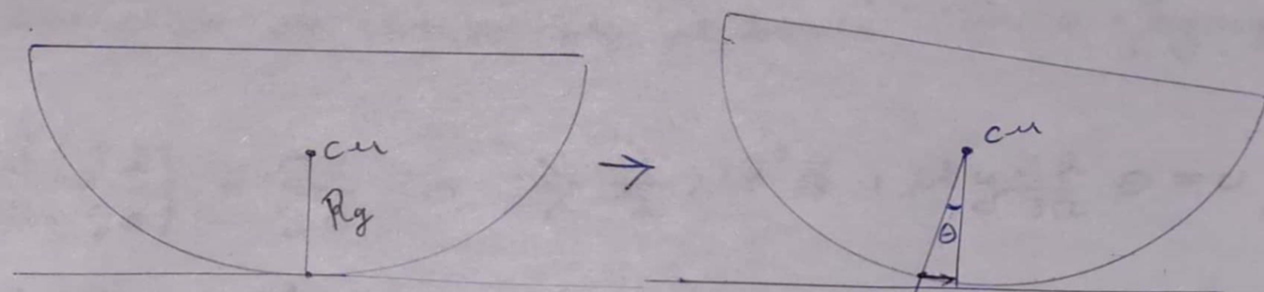
Taller: Pequeñas oscilaciones y Cuerpo rígido.

Alejandro Martínez Portilla 2230656
Miguel stiven Ascanio Quinchia

Punto 1:
Placa semicircular de masa M y Radio R.



Notemos que para la construcción del lagrangiano se tiene

$\Delta h = R_g(1-\cos\theta)$

$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2 - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$, que es un resultado conocido, luego por teorema de Ejes Paralelos: sustituyendo

$$I_{contacto} = I_{cm} + MR_g^2 \Rightarrow I_{contacto} = \frac{1}{2} MR^2$$

se puede observar que el sistema tiene un grado de libertad dado por θ, luego el lagrangiano queda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mg\Delta h,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 - MgR_g(1-\cos\theta).$$

Considerando Aproximación de pequeñas oscilaciones

$1 - \cos\theta = \frac{1}{2}\theta^2$, (Taylor).

Entonces:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}Mg\,\theta^2\left(\frac{4R}{3\pi}\right),$$

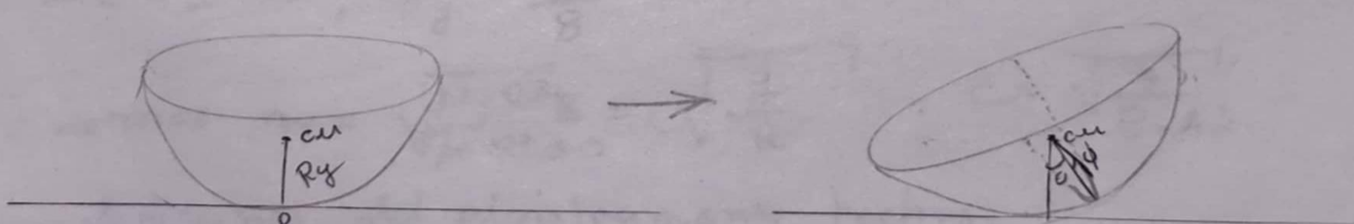
donde $R_g=\frac{4R}{3\pi}$. Expresión que tiene la forma de pequeñas oscilaciones $\sum_i' T_{ij}\dot{\theta}_i^2 - V_{ij}\theta_i^2$. Tomando la ecuación de movimiento mediante Euler-Lagrange eq.

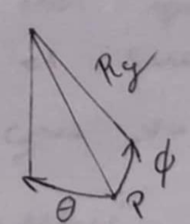
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}+Mg\frac{4R}{3\pi}\theta=0,$$

de donde se identifica la frecuencia angular.

$$w^2=\frac{Mg\frac{4R}{3\pi}}{\frac{1}{2}MR^2} \Rightarrow w=\sqrt{\frac{8g}{3\pi R}}.$$

b) Hemiesfera de masa M y Radio R





Construcción del Lagrangiano:
Análogamente al inciso anterior, el potencial se puede aproximar como

$$V(\theta,\phi)\approx\frac{1}{2}MgR_g(\theta^2+\phi^2).$$

P= Punto de equilibrio.

Por el desarrollo de Taylor sobre $\Delta h=R_g(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\phi)$

La energía cinética se expresa como $T = \frac{1}{2} I_{\text{contacto}} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)$

Entonces el lagrangiano aproximado

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} I_c (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} \mu g R_g (\theta^2 + \varphi^2)$$

adoptó la forma para pequeñas oscilaciones.
El cálculo de las eq. de movimiento da

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{\mu g R_g}{I_c} \theta = 0 & : q_1 = \theta \\ \ddot{\phi} + \frac{\mu g R_g}{I_c} \phi = 0 & : q_2 = \phi \end{cases}$$

$i = \{1, 2\}$

que son las ecuaciones de dos osciladores armónicos desacoplados.

$$\Rightarrow w^2 = \frac{\mu g R_g}{I_c} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{\mu g R_g}{I_c}}.$$

Si $I_c = 1.3 \mu R^2$, $R_g = \frac{3R}{8}$

Tenemos $w = \sqrt{\frac{\mu g R^3/8}{\mu R^2 1.3}} = C\sqrt{\frac{g}{R}}$: $C = \sqrt{\frac{3}{8 \cdot 1{,}3}}$

Consideraciones del planteamiento hechas:

→ Cuando los objetos oscilan alrededor del punto de equilibrio, el punto de contacto con el suelo cambia y por tanto la distancia R_g que va desde el centro de masa al punto de contacto también, pero al tratarse de pequeñas oscilaciones se ignora esta corrección.

→ Es claro que al ser objetos de masa M y distribución homogénea, el centro geométrico coincide con el centro de masa y la distancia del CM. a cualquier punto del la curvatura del objeto será mayor que R y que fue tomado como el punto de equilibrio estable. por las razones anteriores.

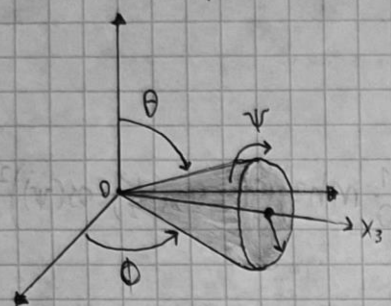
Análisis de Frecuencia en Ausencia y Presencia de Roce.

los cálculos hechos corresponden a rodadura sin deslizar lo que implica un roce. sin rozamiento el sistema no oscila y las frecuencias calculadas no tienen sentido físico.

Con Roce:

$$w_1 = \sqrt{\frac{g8}{R\pi 3}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{g3}{R\,8\times 1{,}3}}$$

2. Un cono circular uniforme de altura h, angulo de vertice α y masa m, rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano (x, y)



Como el cono gira siempre sobre el mismo plano, no hay nutación, por lo que

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = cte.$$

Elegimos que O, sea fijo en el plano.

- Ahora, calculemos la velocidades angulares:

$$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \overset{0}{\dot{\theta}} \cos\psi = \dot{\phi} \sin(\pi/2 - \alpha/2) \sin\psi = \dot{\phi} \cos(\alpha/2) \sin(\psi)$$

$$\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \overset{0}{\dot{\theta}} \sin\psi = \dot{\phi} \sin(\pi/2 - \alpha/2) \cos\psi = \dot{\phi} \cos(\alpha/2) \cos(\psi)$$

$$\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\pi/2 - \alpha/2) = \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin(\alpha/2).$$

- Ahora, los momentos de inercia del cono (respecto a O):

El radio es $R = h/2$.

- Momento polar (eje de simetria):

$$I_3 = \frac{3}{10} m R^2 = \frac{3}{10} m \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{3}{40} m h^2$$

- Momentos transversales

$$I_1 = I_2 = \underbrace{\left(\frac{3}{80} m (4h^2 + R^2)\right)}_{\text{momento en el cm}} + m d^2 \quad ; \quad d = \frac{3}{4} h \begin{cases} \text{distancia de O} \\ \text{al centro de masa} \end{cases}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80} m 4h^2 + \frac{3}{80} m \left(\frac{h}{2}\right)^2 + m \left(\frac{3h}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{20} m h^2 + \frac{3}{320} m h^2 + \frac{9}{16} m h^2 = \frac{231}{320} m h^2$$

a. Encuentre la energia cinetica: $T = T_{rot} + T_{tran}$

Como definimos nuestro sistema en O, su energia cinetica translacional es cero, por lo que

$$\Rightarrow T = T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{231}{320} mh^2\right)\left(\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin(\psi)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{231}{320} mh^2\right)\left(\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\psi)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{40} mh^2\right)\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{231}{640} mh^2 \left(\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2(\psi) + \dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2(\psi)\right) + \frac{3}{80} mh^2\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{3}{80} mh^2 \left(\frac{77}{8}\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\right) \checkmark$$

Podemos ver que no esta θ, por lo que es una coordenada ciclica, y como no hay ninguna energia potencial que afecte el sistema, $L = T$.

b. La unica velocidad libre es $\dot{\phi}$. Al no haber fuerzas externas $\dot{\phi}$ es contante, por lo que el tiempo en dar una vuelta es:

$$T_{vuelta} = 2\pi / \dot{\phi}.$$

c. Ahora los momentos angulares

$$L_1 = I_1 \omega_1 = \left(\frac{231}{320} mh^2\right)\left(\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin(\psi)\right)$$

$$L_2 = I_2 \omega_2 = \left(\frac{231}{320}\right) mh^2 \left(\dot{\phi}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\psi)\right)$$

$$L_3 = I_3 \omega_3 = \left(\frac{3}{40} mh^2\right)\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$