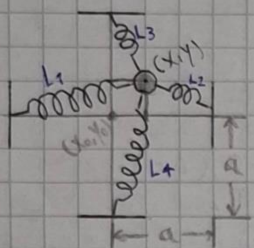
Nombres
Miguel Stiven Ascanio Quinchia
Alejandro Martinez Portilla

Ejercicios de mecánica clásica [Semana 4 & 5]

1a. Vamos a encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula anclada a 4 resortes con longitud natural a y constantes k_1 en x y k_2 en y:



Para definir nuesto lagrangiano, $(L = T - V)$, necesitamos la energía cinética

$$T = 1/2\, m \dot{r}^2 = 1/2\, m \dot{x}^2 + 1/2\, m \dot{y}^2 = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

y la energía potencial definida por

$$V = 1/2\, K (\Delta r)^2$$

Donde Δr es la elongación del resorte total, es decir, la longitud actual $L(x,y)$ menos la longitud natural a.

$$\Rightarrow V = 1/2\, k_1(L_1 - a)^2 + 1/2\, k_1(L_2 - a)^2 + 1/2\, k_2(L_3 - a)^2 + 1/2\, k_2(L_4 - a)^2$$

Donde las longitudes (L_1, L_2, L_3, L_4) y sus derivadas son:

$$L_1 = [(a+x)^2 + y^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{1x} = (a+x)/L_1 \;,\; \dot{L}_{1y} = y/L_1$$
$$L_2 = [(a-x)^2 + y^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{2x} = -(a-x)/L_2 \;,\; \dot{L}_{2y} = y/L_2$$
$$L_3 = [(a-y)^2 + x^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{3x} = x/L_3 \;,\; \dot{L}_{3y} = -(a-y)/L_3$$
$$L_4 = [(a+y)^2 + x^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{4x} = x/L_4 \;,\; \dot{L}_{4y} = (a+y)/L_4$$

Entonces, nuestro lagrangiano queda de la siguiente forma

$$L = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1(L_1 - a)^2 - 1/2\, k_1(L_2 - a)^2 - 1/2\, k_2(L_3 - a)^2 - 1/2\, k_2(L_4 - a)^2$$

Ahora, aplicaremos la ecuación de Euler Lagrange.

Para x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{k_1(L_1 - a)(a+x)}{L_1} + \frac{k_1(L_2 - a)(a-x)}{L_2} - \frac{k_2(L_3 - a)x}{L_3} - \frac{k_2(L_4 - a)x}{L_4}$$

$$= k_1\left(-\cancel{a} - x + \frac{a^2 + ax}{L_1} + \cancel{a} - x - \frac{a^2 - ax}{L_2}\right) - k_2\left(x - \frac{ax}{L_3} + x - \frac{ax}{L_4}\right)$$

$$= -k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) - k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, nos queda:

$$m\ddot{x} + k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0$$

Para y:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{k_1(L_1-a)y}{L_1} - \frac{k_1(L_2-a)y}{L_2} + \frac{k_2(L_3-a)(a-y)}{L_3} - \frac{k_2(L_4-a)(a+y)}{L_4}$$

$$= -k_1\left(y - \frac{ay}{L_1} + y - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(a - y - \frac{a^2-ay}{L_3} - a - y + \frac{a^2+ay}{L_4}\right)$$

$$= -k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) - k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, nos queda:

$$m\ddot{y} + k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right) = 0$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento nos quedan así:

$$\begin{cases} \ddot{x} + w_1^2\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + w_2^2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0 & (1) \\ \ddot{y} + w_1^2\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + w_2^2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

Donde:

- $w_1^2 = k_1/m$
- $w_2^2 = k_2/m$
- $L_1 = ((a+x)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_3 = ((a-y)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_2 = ((a-x)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_4 = ((a+y)^2 + y^2)^{1/2}$

Estas ecuaciones describen el movimiento de la partícula en el plano bidimensional XY.

1b. Para encontrar las ecuaciones de movimiento para oscilaciones pequeños, vamos a definir unas nuevas variables:

$$x = x_0 + \Delta x \;;\; x_0 = 0 \quad \wedge \quad y = y_0 + \Delta y \;;\; y_0 = 0$$

donde $(x_0, y_0) = (0, 0)$ es el punto central de equilibrio donde oscila la masa, y $(x, y) = (\Delta x, \Delta y)$ son las nuevas coordenadas las cuales son muy pequeñas. Ahora, nuestras nuevas longitudes son aproximadamente

$$L_1 = [a^2 + 2ax + x^2 + y^2]^{1/2} = a[1 + 2x/a + x^2/a^2 + y^2/a^2]^{1/2}$$

Donde, como $x << a$ e $y << a$ entonces $x^2/a^2 \approx 0$ e $y^2/a^2 \approx 0$

$$\Rightarrow L_1 \approx a[1 + 2x/a]^{1/2} \approx a[1 + 2x/2a] = a + x,$$

analogamente, las demas longitudes nos quedan:

$$L_1 \approx a + x \quad , \quad L_2 \approx a - x \quad , \quad L_3 \approx a - y \quad , \quad L_4 \approx a + y$$

Por lo que nuestro Lagrangiano para oscilaciones pequeñas es:

$$L = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1((a+x)-a)^2 - 1/2\, k_1((a-x)-a)^2 - 1/2\, k_2((a-y)-a)^2 - 1/2\, k_2((a+y)+a)^2$$

$$= 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1(x)^2 - 1/2\, k_1(-x^2) - 1/2\, k_2(-y)^2 - 1/2\, k_2(y)^2$$

$$= 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - k_1(x^2) - k_2(y^2)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange nos queda:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -2k_1 x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2k_1 x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2k_2 y$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + 2k_2 y = 0$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento nos quedan:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\underset{\omega_2}{W_2^2}\, y = 0, & \text{con} \quad W_2^2 = k_2/m \qquad (3) \\ \ddot{x} + 2\underset{\omega_1}{W_1^2}\, x = 0, & \text{con} \quad W_1^2 = k_1/m \qquad (4) \end{cases}$$

1c. Analisemos el caso isótropo, cuando $k_1 = k_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

- Ecuación de movimiento con oscilaciones normales $(W_1 = W_2)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + W^2\left(4x - \frac{a^2 + ax}{L_1} + \frac{a^2 - ax}{L_2} - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0 \\ \ddot{y} + W^2\left(4y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2} + \frac{a^2 - ay}{L_3} - \frac{a^2 + ay}{L_4}\right) = 0 \end{cases}$$

Analizando el sistema, podemos concluir que si $k_1 = k_2$, las ecuaciones describen un oscilador bidimensional acoplado (pues ambas ecuaciones dependen de las dos variables simultaneamente) y con la misma frecuencia natural $\omega = \omega_1 = \omega_2$ en x e y. Por otro lado, la unica diferencia con el caso anisótropo, es que la frecuencia angular ahora es diferente y mas compleja, pero sigue siendo un oscilador bidimensional acoplado.

- Ecuación de movimiento con oscilaciones pequeñas. $(W_1 = W_2)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2W^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2W^2 y = 0 \end{cases}$$

Analizando este sistema, podemos concluir que si $k_1 = k_2$, las ecuaciones describen un oscilador bidimensional desacoplado (pues las ecuaciones de movimiento solo dependen de una variable respectivamente) y con la misma frecuencia natural. La diferencia con el caso anisotropo, unicamente es que la frecuencia no es la misma en x y en y, pero el movimiento sigue siendo desacoplado.

1d. La energia la podemos definir como $E = T + V$, pues la energia cinetica T solo depende de la velocidad $(\dot{x}, \dot{y})$, y la energia potencial solo de la posición entonces podemos escribir la energia total como

- $E_{total} = E_x + E_y = (T(x) + V(x)) + (T(y) + V(y))$

Donde, en ambos casos:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 1/2\, m\dot{x} + V(x) \\ E_y &= 1/2\, m\dot{y} + V(y) \end{aligned}\right\}$$ Estas dos expresiones, representan la energia temporal en cada componente, y $V(x)$ y $V(y)$ los potenciales.

En el caso de las oscilaciones normales, no podemos separar $V(x)$ y $V(y)$, por lo que en general el potencial es de la forma $V(x,y)$, lo que implica que la energia en x y en y se estan intercambiando ya que el movimiento es acoplado, es decir, el movimiento en ambas ejes depende de ambas coordenadas, por lo que tiene sentido que las energias se intercambien siempre y cuando la energuia total se conserve.

Con pequeños oscilaciones, las energuias si se pueden separar en sus componentes, y nos queda:

$$\begin{cases} E_x = 1/2\, m \dot{x}^2 + k_1 x^2 \\ E_y = 1/2\, m \dot{y}^2 + k_2 x^2 \end{cases}$$

si las energuias se conservan, sus derivadas temporales dan cero, entonces

$$\begin{cases} \partial E_x / \partial t = m \dot{x} \ddot{x} + k_1 2 x \dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + 2k_1 x) \\ \partial E_y / \partial t = m \dot{y} \ddot{y} + k_2 2 y \dot{y} = \dot{y}(m\ddot{y} + 2k_2 y) \end{cases}$$

Tenemos que $m\ddot{x} = -2k_1 x$ segun (1) y $m\ddot{y} = -2k_2 x$ segun (2), entonces reemplazando:

$$\begin{cases} \partial E_x/\partial t = \dot{x}(-2k_1 x + 2k_1 x) = \dot{x}(0) = 0 \\ \partial E_y/\partial t = \dot{y}(-2k_2 y + 2k_2 y) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Entonces, en efecto, las energuias en x y en y se conservan si las oscilaciones pequeñas.

- Miremos el momento angular $L_z = y p_x - x p_y$

Donde: $p_x = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$ y $p_y = \partial L / \partial \dot{y} = m\dot{y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(y m \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial t}(x m \dot{y}) = \cancel{m\dot{y}\dot{x}} + m\ddot{x}y - \cancel{m\dot{y}\dot{x}} - m x \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_z}{\partial t} = m(\ddot{x}y - x\ddot{y}) = (m\ddot{x})y - (m\ddot{y})x$$

Podemos reemplazar $m\ddot{x}$ y $m\ddot{y}$ gracias a las ecuaciones (1) y (2).

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = -y\left(k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right)\right)$$
$$+ x\left(k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right)\right)$$

$$'' = \cancel{-yk_1 2x} + yk_1\frac{a^2+ax}{L_1} - yk_1\frac{a^2-ax}{L_2} \cancel{- yk_2 2x} + \frac{yk_2 ax}{L_3} - \frac{yk_2 ax}{L_4}$$
$$\cancel{+xk_1 2y} - \frac{xk_1 ay}{L_1} - \frac{xk_1 ay}{L_2} \cancel{+ xk_2 2y} + xk_2\frac{a^2-ay}{L_3} - xk_2\frac{a^2+ay}{L_4}$$

$$'' = a\left(yk_1\frac{a+x}{L_1} - yk_1\frac{a-x}{L_2} + xy\frac{k_2}{L_3} - xy\frac{k_2}{L_4} - xy\frac{k_1}{L_1} - xy\frac{k_1}{L_2}\right.$$
$$\left. + xk_2\frac{a-y}{L_3} - xk_2\frac{(a+y)}{L_4}\right)$$

$$'' = \frac{yk_1 a}{L_1} + \cancel{\frac{xyk_1}{L_1}} - \frac{yk_1 a}{L_2} + \cancel{\frac{xyk_1}{L_2}} + \cancel{\frac{xyk_2}{L_3}} - \cancel{\frac{xyk_2}{L_4}} - \cancel{\frac{xyk_1}{L_1}}$$
$$- \cancel{\frac{xyk_1}{L_2}} + \frac{xk_2 a}{L_3} - \cancel{\frac{xyk_2}{L_3}} - \frac{xk_2 a}{L_4} + \cancel{\frac{xyk_2}{L_4}}$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = a\left(y\frac{k_1}{L_1} - y\frac{k_1}{L_2} + x\frac{k_2}{L_3} - x\frac{k_2}{L_4}\right) \neq 0$$

- Entonces, podemos observar, que en general, para oscilaciones grandes el momento angular no se conserva

Ahora analicemos el momento angular de pequeñas oscilaciones.

$$L_z = y p_x - x p_y = y m\dot{x} - x m\dot{y} \Rightarrow \partial L_z/\partial t = m\ddot{x}y - m\ddot{y}x$$

Podemos reemplaza $m\ddot{x}$ y $m\ddot{y}$ por (3) y (4)

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = (-2k_1 x)y - (-2k_2 y)x = 2k_2 xy - 2k_1 xy = 2xy(k_2 - k_1)$$

- Entonces, en general, el momento angular para pequeñas oscilaciones tampoco se conserva, pero note que si $k_1 = k_2$ $\Rightarrow k_2 - k_1 = 0$ entonces, en el caso isotropo si se conserva el momento angular

• Revisemos la siguiente cizalladura

$$K = \omega_1 x \, \omega_2 y + \frac{p_x p_y}{m^2} \quad \text{com} \quad \omega_j = \sqrt{\frac{2k_j}{m}}$$

donde ω_i es la frecuencia angular que nos salieron de la ecuación de movimiento para bajas oscilaciones

$$K = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{2k_2}{m}} \cdot y + \frac{m\dot{x}\, m\dot{y}}{m^2} = 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m} xy + \dot{x}\dot{y}$$

Si K se conserva, su derivada temporal es cero:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m} \dot{x} y + 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m} x\dot{y} + \ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}$$

donde: $\ddot{x} = -2k_1 x/m \;\wedge\; \ddot{y} = -2k_2 y/m$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{m}(\dot{x}y + x\dot{y}) + \left(-\frac{2k_1 x}{m}\right)\dot{y} + \left(-\frac{2k_2 y}{m}\right)\dot{x}$$

$$\underline{\frac{\partial K}{\partial t} = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(2\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{m} - 2\frac{k_1}{m}\right)}$$

En general, esto no es 0, aunque, note que si $k_1 = k_2$, el segundo termino se cancela.

• Ahora, describamos como se comporta el sistema ante transformaciones que estiran o sesgan la estructura del espacio de fases sin alterar la dinamia global. vamos a usar

$$\bar{x} = x + \lambda y, \quad \bar{y} = y$$

Entonces, si reemplazamos en nuestro lagrangiano, nos queda:

$$L = 1/2m(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) - k_1(\bar{x})^2 - k_2(\bar{y})^2$$

$$L = 1/2m((\dot{x}+\lambda\dot{y})^2 + \dot{y}^2) - k_1(x + \lambda y)^2 - k_2(y)^2$$

Ahora, aplicamos la ecuación de euler lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x}+\lambda\dot{y}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} + \lambda\ddot{y})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2k_1(x + \lambda y)$$

Para y, no hay variación, entonces, nuestras ecuaciones de movimiento nos quedan:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}+\lambda\ddot{y}) + 2k_1(x+\lambda y) = 0 & (1) \\ m(\ddot{y}) + 2k_2(y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Aplicamos distributiva en (1)

$$\Rightarrow m\ddot{x} + m\lambda\ddot{y} + 2k_1 x + 2k_1\lambda y = 0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x} + 2k_1 x) + (m\lambda\ddot{y} + 2k_1\lambda y) = 0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x} + 2k_1 x) + (m\ddot{y} + 2k_1 y)\lambda = 0$$

En general, note que esta es nuestra nueva ecuación de movimiento para x, por lo que el sistema parece variar ante transformaciones, pero, note que si $k_1 = k_2 = k$ el segundo termino se anula, pues queda

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2kx + \lambda(m\ddot{y} + 2ky) = 0$$

y por (2) con $k_2 = k_1 = k$ sabemos que

$$m\ddot{y} + 2ky = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2kx + \lambda(0) = 0$$

por lo que, nuestras ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2kx = 0 \\ m\ddot{y} + 2ky = 0 \end{cases}$$

por lo que podemos concluir que, el sistema es variante ante transformaciones siempre y cuando $k_1 = k_2 = k$, que es, nuevamente, en el caso isotropo.

1e) Ahora, revisemos si $L^2 + K^2 = 4E_x E_y$, entonces:

$$L^2 = (y p_x - x p_y)^2 = y^2 p_x^2 - 2xy p_x p_y + x^2 p_y^2$$

$$K^2 = \left(w_1 w_2 xy + \frac{p_x p_y}{m_2}\right)^2 = x^2 y^2 w_1^2 w_2^2 + \frac{2 w_1 w_2 xy p_x p_y}{m^2} + \frac{p_x^2 p_y^2}{m^4}$$

Norma

$$4E_xE_y = 4\cdot\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + k_1x^2\right)\cdot\left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + k_2y^2\right)$$

$$= 4\left(\frac{m^2\dot{x}^2\dot{y}^2}{4} + \frac{mk_2\dot{x}^2y^2}{2} + \frac{mk_1\dot{y}^2x^2}{2} + x^2y^2k_1k_2\right)$$

$$= m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2 + 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Igualando todo lo anterior, nos queda:

$$\Rightarrow y^2p_x^2 - 2xyp_xp_y + x^2p_y^2 + x^2y^2w_1^2w_2^2 + 2w_1w_2\,xyp_xp_y/m^2$$
$$+ p_x^2p_y^2/m^4 = m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2 + 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Reemplazando $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = m\dot{y}$ y $w_i^2 = 2k_i/m$

$$\Rightarrow y^2m^2\dot{x}^2 - 2m^2xy\dot{x}\dot{y} + x^2m^2\dot{y}^2 + 4x^2y^2k_1k_2/m^2$$
$$+ 4\sqrt{k_1k_2}\,xy\dot{x}\dot{y}/m^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 \neq m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2$$
$$+ 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Esta igualdad en general no se cumple, por lo que, en este caso, las cantidades conservadas si son independientes.

15. Como hemos observado en el inciso d), en el caso anisotropo, la unica cantidad que se conserva es la energia en X y en Y, pero las demas cantidades no.

Por otro lado, en el caso isotropo, todas las cantidades se conservan, pues:

- $\dfrac{\partial L_z}{\partial t} = 2xy(k_2 - k_1) \equiv 2xy(\cancel{k} - k) = 2xy(0) = 0$

El momento angular se conserva en $k_1 = k_2 = k$

- $\dfrac{\partial k}{\partial t} = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(2\dfrac{\sqrt{k_1k_2}}{m} - 2\dfrac{k}{m}\right) = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(\cancel{2\dfrac{k}{m}} - 2\dfrac{k}{m}\right) = 0$

Por lo que la cizalladura se conserva si $k_1 = k_2 = k$

Y por ultimo, en el caso isotropo, hemos demostrado que el sistema es invariante ante transformaciones como:

$\bar{x} = x + \lambda y \quad \wedge \quad \bar{y} = y$

2. Dos masas m_1 y m_2 $(m_1+m_2=M)$, estan separadas una distancia r_0 y se atran gravitacionalmente. Calculemos las velocidades V_1 y V_2, si se lanzan del repas y $r<r_0$

Entonces, la energuia mecanica total inicia es:

$$E_0 = T_0 + V_0 = 0 + \left(-\frac{Gm_1m_2}{r_0}\right). \quad (1)$$

donde la energia cinetica es cero $(T_0=0)$, parave parten del reposo y la energia potencia es la gravitacional.

Ahora, en un instante diferente, cuando la distancia es $r<r_0$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$$, es la energia cinetica

$$\Rightarrow V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$, es la energia potencial gravitacional.

Entonces, en la posición r, la energuia mecanica total es:

$$E_r = \left(\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2\right) + \left(-\frac{Gm_1m_2}{r}\right). \quad (2)$$

Ahora, coma la diferencia entre la energuia es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas

$$\Delta E = E_0 - E_r = W,$$

Pero como no hay fuerzas disipativas, entonces $W=0$:

$$\Rightarrow E_0 - E_r = -\frac{Gm_1m_2}{r_0} - \left(\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}\right) = 0$$

Reescribiendo, nos queda que:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_1m_2}{r_0}$$

$$\Rightarrow m_1V_1^2 + m_2V_2^2 = 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (3)$$

Como no hay fuerzas externas actuando en la dirección del movimiento, la cantidad de movimiento total se conservo, es decir $P_1 = P_2 \Rightarrow m_1V_1 = m_2V_2$

Gracias a que la cantidad de movimiento se conserva, podemos expresar

$$V_1 = (m_2/m_1) \cdot V_2$$

Podemos reemplazar esto en la ecuación (3):

$$m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} V_2 \right)^2 + m_2 V_2^2 = 2 G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) m_2 V_2^2 = 2 G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1} \right) \cancel{m_2} V_2^2 = 2 G m_1 \cancel{m_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_1} V_2^2 = 2 G m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \Rightarrow V_2^2 = \frac{2 G m_1^2}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{V_2 = m_1 \sqrt{2 \frac{G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}} .$$

Analogamente, para el otro caso tenemos:

$$V_2 = (m_1/m_2) \cdot V_1$$

Reemplazando en (3), nos queda:

$$m_1 V_1^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} V_1 \right)^2 = 2 G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \cancel{m_1} V_1^2 = 2 G \cancel{m_1} m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_2} V_1^2 = 2 G m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_2} V_1^2 = 2 G m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \Rightarrow V_1^2 = \frac{2 G m_2^2}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{V_1 = m_2 \sqrt{2 \frac{G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}} .$$

2. Se nos dice que $F(r) = -k/r^2 - \lambda/r^3$ con $k, \lambda > 0$, y sabemos que por la ecuación de binet, se tiene que

$$u''(\theta) = -u(\theta) - \frac{\mu}{\ell^2 u^2(\theta)} \cdot F$$

Reemplazando, nos queda que:

$$u'' = -u - \frac{\mu}{\ell^2 u^2}\left(-ku^2 - \lambda u^3\right) = -u + \frac{\mu}{\ell^2}\left(k + \lambda u\right)$$

$$= -u + \frac{\mu}{\ell^2} k + \frac{\mu}{\ell^2} \lambda u = \frac{\mu}{\ell^2} k - u\left(1 - \frac{\mu \lambda}{\ell^2}\right)$$

Si $-A_1 = \mu k / \ell^2$ y $\omega^2 = (1 - \mu \lambda / \ell^2)$, nos queda

$\ddot{u} = -A_1 - \omega^2 u \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \omega^2 u + A = 0$

Donde, la solución general es de la forma.

$$u(\theta) = A + D \cdot \cos(\omega \theta + \phi)$$

Donde A, D, ω, ϕ son constantes cualquiera y haciendo el cambio de variable $\varepsilon = D/A$ y devolviendo $u = 1/r$,

$$\Rightarrow \quad 1/r = A(1 + \varepsilon \cdot \cos(\omega\theta + \phi)$$

que es la ecuación de una elipse, con $q = A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{q}{r} = (1 + \varepsilon \cos(\omega \theta + \phi)).$$ ✓

Ahora, debemos demostrar que la elipse tiene presesión, es decir $\Delta\theta < 2\pi$, donde:

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{\ell}{\mu r^2}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 V_{efe}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}\right)^{-1/2}$$

Ahora, tenemos

- $\displaystyle \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{ef} = \frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} - \frac{\ell^2}{2\mu r^3}$
- $\displaystyle \frac{1}{r_0^2}\left(k + \frac{\lambda}{r_0} - \frac{\ell^2}{2\mu r_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{\ell^2 - 2\mu\lambda}{2\mu k}.$

Donde $\ell = (k \cdot r_0 \cdot 2 \cdot \mu + 2\mu\lambda)^{1/2}$.

Tambien tenemos que $\Delta\theta = 2\pi(\dot{\theta}/\omega_r)$.

Donde $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 V_{esc}}{\partial r^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -2\frac{k}{r^3} - 3\frac{k}{r^4} + \frac{3\ell}{2\mu r^4}$$

$$\wedge \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r_0^2} = \frac{(k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)^{1/2}}{\mu r_0^2}$$

Por lo que, combinando todo esto, nos queda:

$$\Delta\theta = 2\pi\left(-\frac{(k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)/\mu^2 r_0^4}{1/\mu(2k/r_0^3 + 3\lambda/r_0^4 + 3\ell^2/2\mu r_0^4)}\right)^{1/2}$$

$$= 2\pi\left(\frac{4\mu(kr+\lambda)}{3\ell^2 - 4k\mu r - 6\lambda\mu}\right)$$

Para la presesión, se necesita que $\Delta\theta < 2\pi$, entonces

$$\Rightarrow 4kr\mu + 2\mu\lambda < 3\ell^2 - 4kr\mu - 6\mu\lambda$$

$$\Rightarrow 8\mu\lambda < 3\ell^2 - 8kr\mu$$

$$\Rightarrow \lambda < \frac{3\ell^2}{8\mu} - kr$$

Como $k, r > 0$, entonces $-kr < 0$, por lo que:

$$\lambda < 3\ell^2/8\mu < \ell^2/\mu$$

y esto confirma que es un movimiento en precesión, ya que.

$$\Rightarrow \omega^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{\ell^2}{\mu}$$

y es el caso a considerar, pues si $\lambda = \ell^2/\mu \Rightarrow \omega^2 = 0$
$\Rightarrow r^{-1} = A(1 + \epsilon\cos(\phi))$, con $u''(\theta) = 0$ que es la función constante $u(\theta) = c$ o $u(\theta) = \theta$ de primer orden. y si $\lambda > \ell^2/\mu$ ω pertenece a los imaginario

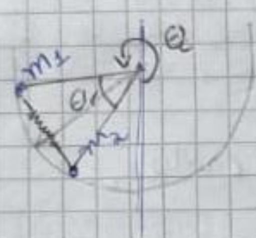
$\therefore$ En conclusión, para que exista presesión y se un movimiento elíptico, se necesita que $\lambda < \ell^2/\mu$

Parte 1: Problema 3.

Dos masas puntuales m_1 y m_2 están dentro de un pozo circular de radio R, sin fricción tal y como se muestra en la Figura 1. Las dos masas están unidas por un resorte de constante elástica k y longitud natural l. Además las masas están sometidas a un campo gravitacional y siempre se mueven sobre la superficie circular.

Se define θ_c como el ángulo del centro del círculo al centro de masa de las masas.

θ_r es el ángulo de amplitud entre las masas desde el centro geométrico del círculo



Ligaduras $\Rightarrow l_i = x_i^2 + y_i^2 = R^2$,

$i = \{1, 2\}$,

Se consigue la distancia r entre las partículas,

$$\Rightarrow |r|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R^2\left((\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\right)$$

$$\Rightarrow |r|^2 = 4R \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \Rightarrow |r| = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

Construcción del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta}_c}_{\text{centro de masa}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu R \dot{\theta}_r}_{\text{partícula virtual}} - V_{ef}$$

, donde

$M_T = M_1 + M_2$

$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_T}$

$$V_{ef} = \underbrace{-M_T g R \cos\theta_c}_{\text{gravitacional}} + \frac{1}{2} K \underbrace{\left(2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - l\right)^2}_{r_0 \Rightarrow \text{resorte}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta}_c^2 + \frac{1}{2} \mu R \dot{\theta}_1^2 + M_T g R \cos\theta_c - \frac{1}{2} K r_0^2$$

Se calculan las Ec. de Mov. por Euler Lagrange.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta_c = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_c \\ \ddot{\theta}_R + \frac{K}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_1 \end{cases}$$

b) Ec de movimiento

a) Coord. generalizadas: θ_c y θ_r

c) Al dejar caer la masa 1 desde A se transfiere a través de las ligaduras energía potencial a la masa 2

De manera equivalente las masas experimentarán un aumento de energía cinética a medida que caen.

d)
$$\begin{cases} \text{Aproximación de segundo orden} \\ \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta_c = 0 \rightarrow \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\theta_c = 0 \\ \ddot{\theta}_r + \frac{K}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K}{R\mu}\left(\theta_1 - \frac{l}{R}\right) \end{cases}$$

Con frecuencias $w_r^2 = \frac{K}{R\mu}$ y $w_c^2 = g/R$

y punto de equilibrio para $\theta_r = \frac{l}{R}$

e) $l = R$, $l = 2R$

Cuando $l = R \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{K}{R\mu}\left(2R \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - R\right)\cos\frac{\theta_1}{2} = 0$

$\theta_{eq} = 1\,[Rad]$, aproximadamente 60°

Cuando $l = 2R \Rightarrow$ aproximadamente 180°

$\Rightarrow \theta_{eq} = 2\,[Rad] \Leftarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{K}{2\mu}\left(2R \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - 2R\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0$

F) Con el potencial coulombiano queda

$\mathcal{L} = \mu_T R^2 \dot{\theta}_c + R\mu\dot{\theta}_1 + \mu_T g R\cos\theta_1 - \frac{1}{2}K\, r_c^2 - V_c$

$V_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left|\frac{q_1 q_2}{2R\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right|$

$\Rightarrow \theta_c$ para pequeñas oscilaciones es invariante

$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{K}{\mu R}(R\theta_1 - l) - \frac{K q_1 q_2}{R^3\mu}\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) = 0$ es la

Nueva ecuación.

g) La agregación de una tercer carga en el centro geométrico del circulo se generarían dos nuevos potenciales V_{31}, V_{32} que impedirían el desarrollo teórico de la masa reducida de una partícula virtual, cambiando por completo el planteamiento.

En presencia de las ligaduras, los potenciales $V_{31} = V_{31}(R)$, $V_{32} = V_{32}(R)$ constantes para todo el movimiento posible de m_1 y m_2. Luego si se respetan las condiciones de ligadura mencionadas no habrá cambios en las ec. de movimiento.

3a. Para calcular el acercamiento maximo de la sonda a jupiter, podemos usar la conservación del momento angular.

En el infinito: $L = m V_0 b$

En el $r = r_{min}$: $L = m V_f r_{min}$

Por lo tanto, obtenemos que: $V_f = V_0 b / r_{min}$

Ahora, calculemos la energia justo antes del impacto:

$$E_f = T_f + V_f = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}}$$

y la energia en el infinito es $E_0 = 1/2\, m V_0^2 - \cancel{GMm/\infty}$

como la energia se conserva, entonces: $E_0 = E_f$

$$\Rightarrow \frac{m V_0^2}{2} = \frac{m V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}} \Rightarrow V_0^2 = \frac{V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{2GM}{r_{min}}$$

$$\Rightarrow V_0^2 r_{min}^2 = V_0^2 b^2 - 2 r_{min} GM$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4(GM)^2 + 4 V_0^4 b^2}}{2V_0^2}$$

Como tomamos el valor positivo, pues hablamos de distancia, nos queda que:

$$r_{min} = -\frac{GM}{V_0^2} + 2\sqrt{\left(\frac{GM}{V_0^2}\right)^2 + b^2}\,. \checkmark$$

3b. Para calcular el angulo de dispersion χ podemos usar la siguiente relación

$$\cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{b V_0^2}{GM}$$

De donde el angulo de dispersión es:

$$\chi = 2\tan^{-1}\left(\frac{GM}{bV_0^2}\right)$$

Parte 2 Problema 4

Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria parabolica alrededor del Sol y cruza la órbita terrestre. Suponga que la órbita terrestre es circular y que está en el mismo plano que la trayectoria del cometa. Encuentre el máximo número de días que el cometa puede permanecer en la órbita de la tierra.

Trayectoria $\begin{cases} E=0 \text{ ; Cometa} \rightarrow \text{Parábola} \\ e=0 \text{ ; Tierra} \rightarrow \text{Circular} \end{cases}$

Para la órbita circular $r_1 = q_1 = \frac{l^2}{\mu k} = \frac{k}{2|E|}$

Para la órbita parabólica $r_2 = q_2 / 1 + \cos\theta$

Igualamos el lado de ambas ecuaciones, $q_1 = q_2$

$\Rightarrow q = q/_{1+\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

Es decir, el cometa se corre $\pi/2$ radianes como máximo antes de salir de la órbita terrestre.

$\Rightarrow$ en longitud de arco $l = \theta R_T = \frac{\pi}{2}(1{,}5\times10^{11})$

$\Rightarrow l = 2{,}3\times10^{11}\ m$

Distancia recorrida proyectada sobre la trayectoria de la tierra.

Si la distancia total de la órbita terrestre es

$l_T = 2\pi(R_T) = 9{,}4\times10^{11}\ m$

Entonces por regla de Tres se obtiene

$$t = \frac{(2{,}3 \times 10^{11})(365)}{(9{,}4 \times 10^{11})}$$

$\Rightarrow t = 91$ Días aproximadamente puede permanecer en órbita.

Parte 2: Problema 5.

Una partícula con momento angular $\mathcal{L}$ describe la órbita $r = a(1 + \cos\theta)$

a) Encuentre la Fuerza central que produce esta órbita.

b) Calcule el periodo de esta órbita.

c) Determine la energía mínima que debe tener la partícula para escapar de esta órbita.

Solución a)

$$|F(r)| = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \rightarrow \text{Fuerza Central},$$

A partir de la ecuación diferencial de la órbita

$$\frac{l^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad u = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

Se reemplaza u para obtener $-\frac{\partial V}{\partial u}$.

Note que $-\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u} = F(r)\left(-\frac{1}{u^2}\right) = -F(r)\, r^2$

Se calcula $\frac{d^2u}{d\theta^2}$.

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^2} + \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{\mu}\left(\frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^2} + \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3} + \frac{1}{a(1+\cos\theta)}\right) = -F(r)\, r^2$$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} + 1\right),$$

$\cos\theta = \frac{r}{a} - 1$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{1}{r^3}\left[\frac{(r-a)^2}{r^2} - \frac{a}{r}\right] = -\frac{(r-a)^2 - ra}{r^5}$$

Solución b)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}\ ;\ l = cte \Rightarrow A = \frac{l}{2\mu}\int_0^T dt = \frac{l}{2\mu}T,$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\mu}{l}A\ ;\ A = 6\pi(2a)^2 \Rightarrow A = 3/2\,\pi a^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{3\pi\mu}{l}a^3$$

Solución c). Considere.

$$\int F(r)\,dr = -V(r) = \int \frac{(r-a)^2 - ra}{r^5}\,dr \,,$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3a}{r^4} + \frac{a^2}{r^5}\right) dr = \frac{-1}{2r^2} + \frac{a}{r^3} - \frac{a^2}{4r^4} + C$$

$$\Rightarrow V_{ef} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{2r^2 - 4ra + a^2}{4r^4} + C \;; \quad E = V_{ef}.$$

La condición de $E \geq 0$ en las órbitas implica que éstas sean parabólica o hiperbólica, es decir, que salga de su órbita.

$$E \geq 0 \,,$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{2\mu} \geq \frac{2r^2 - 4ra + a^2}{4r^2}$$

6a. Como existe conservación del momento, entonces:

$$M_T V_T + m_c V_c = M_F V_F$$

Donde $m_c = M_T / 8$, $V_c = -5V_T$ y $M_F = m_c + M_T$

$$\Rightarrow M_T V_T + \frac{M_T}{8}(-5V_T) = \left(M_T + \frac{M_T}{8}\right) V_F$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} M_T V_T = \frac{9}{8} M_T V_f \Rightarrow V_f = \frac{1}{3} V_T$$

La tierra originalmente seguia una órbita circular, pero despues del choque, al ser reducida su velocidad, la nueva orbita será eliptica con energia:

$$E_F = \frac{1}{2} M_F V_F^2 - \frac{G M_\odot M_F}{R} \quad ; \quad M_\odot \equiv \text{Masa del sol}, \quad R \equiv \text{Radio de la orbita}$$

$$= \frac{1}{2} M_{final}\left(\frac{1}{9} V_T^2\right) - \frac{G M_\odot M_{final}}{R}$$

Ademas, sabemo que en la obita original $V_T^2 = G M_\odot / R$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{18} \cdot \frac{G M_\odot M_{final}}{R} - \frac{G M_\odot M_{final}}{R} = -\frac{17 G M_\odot M_{final}}{18 R}$$

Ademas, tenemos que: $E = -G M_\odot M_{final} / 2a$

donde a es el semieje mayor de la orbita

$$\Rightarrow -\frac{17 \cancel{G M_\odot M_{final}}}{18 R} = -\frac{\cancel{G M_\odot M_{final}}}{2a} \Rightarrow a = \frac{9}{17} R$$

El perihelio y el afelio estan dados por

$$r_p = a(1-e) \,,\; r_a = a(1+e) \quad ; \quad e^2 = 1 + \frac{2 E L^2}{G^2 M_\odot^2 M_f^3}$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{9R}{17}\left(1 - \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f M}\right)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{9R}{17}\left(1 + \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f M}\right)^{1/2}\right)$$

6b. El nuevo periodo orbital es:

$$T' = T\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} \quad ; \quad a = \frac{9}{17}R \quad \wedge \quad T = 365 \text{ dias}$$

$$\Rightarrow T' = 365 \text{ dias} \times \left(\frac{9}{17}\right)^{3/2} \approx \underline{140{,}6 \text{ dias}} \quad \checkmark$$