Nombres
Miguel Stiven Ascanio Quinchia
Alejandro Martinez Portilla

Ejercicios de mecánica clásica [Semana 5]

Parte 2: Problema 1.

Calcule el ángulo de precesión del perihelio de una partícula con momento angular l y masa m moviéndose alrededor de una estrella de masa M. que produce el potencial $V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}$, donde ε es una constante muy pequeña.

El ángulo de precesión se define como el ángulo recorrido por la dirección del perihelio en el plano de movimiento durante un periodo de oscilación radial T_r

$$\Delta\theta = \dot{\theta}\, T_r = 2\pi\left(\frac{\dot{\theta}}{w_r}\right), \rightarrow \text{Se cumple dado } \varepsilon \text{ pequeño}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0^2},$$

$$w_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}},$$

w_r es la frecuencia de oscilación radial obtenida de la ecuación de un oscilador armónico deducido de considerar una pequeña perturbación de la oscilación radial.

$$\Rightarrow V_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Consideremos la condición de equilibrio en r_0

$$\left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2} - \frac{2\varepsilon}{r_0^3} - \frac{2l^2}{2\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{2\varepsilon + l^2/\mu}{GMm}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r} = -\frac{2GMm}{r_0^3} + \frac{6\varepsilon}{r_0^4} + \frac{3l^2}{\mu r_0^4} \quad (1)$$

(1) se simplifica con la condición de equilibrio, reemplazando queda

$$\left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r_0} = \frac{-GMm}{r_0^3}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi l}{\mu r_0^2}\left(\frac{GMm}{\mu r_0^3}\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\frac{l}{\sqrt{\mu GMm r_0}}\right)$$

Para presentar $\Delta\theta$ en función de parámetros conocidos, la condición de equilibrio se reemplaza en r_0.

$$\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{l}{\sqrt{\mu GMm\left(\frac{2\varepsilon + l^2/\mu}{GMm}\right)}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon\mu}{l^2}}} \quad (2)$$

Si consideramos la aproximación lineal de (2) por serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ con

$x = \frac{2\epsilon\mu}{l^2}$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{0} \frac{\left[(1+x)^{-1/2}\right]^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \approx 1 - \frac{x}{2},$$

$$\Delta\theta \approx 2\pi\left(1 - \frac{2\epsilon\mu}{2l^2}\right) \Rightarrow \Delta\theta - 2\pi = -2\pi\frac{\epsilon\mu}{l^2},$$

$\Delta\theta - 2\pi = \Delta\theta$ porque la órbita es cerrada y ϵ es pequeña $\epsilon \lll \frac{l^2}{2\mu}$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{-2\pi\epsilon\mu}{l^2}$$

2. Se nos dice que $F(r) = -k/r^2 - \lambda/r^3$ con $k, \lambda > 0$, y sabemos que por la ecuación de binet, se tiene que

$$u''(\theta) = -u(\theta) - \frac{\mu}{\ell^2 u^2(\theta)} \cdot F$$

Reemplazando, nos queda que:

$$u'' = -u - \frac{\mu}{\ell^2 u^2}\left(-ku^2 - \lambda u^3\right) = -u + \frac{\mu}{\ell^2}\left(k + \lambda u\right)$$

$$= -u + \frac{\mu}{\ell^2} k + \frac{\mu}{\ell^2}\lambda u = \frac{\mu}{\ell^2} k - u\left(1 - \frac{\mu\lambda}{\ell^2}\right)$$

Si $-A_1 = \mu k/\ell^2$ y $\omega^2 = (1 - \mu\lambda/\ell^2)$, nos queda

$\ddot{u} = -A_1 - \omega^2 u \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \omega^2 u + A = 0$

Donde, la solución general es de la forma.

$$u(\theta) = A + D \cdot \cos(\omega\theta + \phi)$$

Donde A, D, ω, ϕ son constantes cualquiera y haciendo el cambio de variable $\varepsilon = D/A$ y devolviendo $u = 1/r$,

$$\Rightarrow \quad 1/r = A(1 + \varepsilon \cdot \cos(\omega\theta + \phi)$$

que es la ecuación de una elipce, con $q = A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{q}{r} = (1 + \varepsilon\cos(\omega\theta + \phi)).$$ ✓

Ahora, debemos demostrar que la elipse tiene preseción, es decir $\Delta\theta < 2\pi$, donde:

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{\ell}{\mu r^2}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \left.\frac{\partial^2 V_{efe}}{\partial r^2}\right|_{r_0}\right)^{-1/2}$$

Ahora, tenemos

- $\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{ef} = \frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} - \frac{\ell^2}{2\mu r^3}$
- $\frac{1}{r_0^2}\left(k + \frac{\lambda}{r_0} - \frac{\ell^2}{2\mu r_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{\ell^2 - 2\mu\lambda}{2\mu k}.$

Donde $\ell = (u \cdot r_0 \cdot 2 \cdot \mu + 2\mu\lambda)^{1/2}$.

Tambien tenemos que $\Delta\theta = 2\pi(\dot{\theta}/\omega_r)$.

Donde $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 V_{esc}}{\partial r^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -2\frac{k}{r^3} - 3\frac{k}{r^4} + \frac{3\ell}{2\mu r^4}$$

$$\wedge \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r_0^2} = \frac{(k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)^{1/2}}{\mu r_0^2}$$

Por lo que, combinando todo esto, nos queda:

$$\Delta\theta = 2\pi\left(-\frac{(k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)/\mu^2 r_0^4}{1/\mu(2k/r_0^3 + 3\lambda/r_0^4 + 3\ell^2/2\mu r_0^4)}\right)^{1/2}$$

$$= 2\pi\left(\frac{4\mu(kr+\lambda)}{3\ell^2 - 4k\mu r - 6\lambda\mu}\right)$$

Para la presesión, se necesita que $\Delta\theta < 2\pi$, entonces

$$\Rightarrow 4kr\mu + 2\mu\lambda < 3\ell^2 - 4kr\mu - 6\mu\lambda$$

$$\Rightarrow \quad 8\mu\lambda < 3\ell^2 - 8kr\mu$$

$$\Rightarrow \quad \lambda < \frac{3\ell^2}{8\mu} - kr$$

Como $k, r > 0$, entonces $-kr < 0$, por lo que:

$$\lambda < 3\ell^2/8\mu < \ell^2/\mu$$

y esto confirma que es un movimiento en precesión, ya que.

$$\Rightarrow \omega^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{\ell^2}{\mu}$$

y es el caso a considerar, pues si $\lambda = \ell^2/\mu \Rightarrow \omega^2 = 0$
$\Rightarrow r^{-1} = A(1 + \epsilon\cos(\phi))$, con $u''(\theta) = 0$ que es la función constante $u(\theta) = C$ o $u(\theta) = \theta$ de primer orden. y si $\lambda > \ell^2/\mu$ ω pertenece a los imaginario

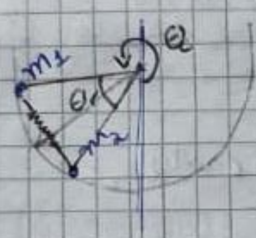
∴ En conclusión, para que exista presesión y se un movimiento elíptico, se necesita que $\lambda < \ell^2/\mu$

Parte 1: Problema 3.

Dos masas puntuales m_1 y m_2 están dentro de un pozo circular de radio R, sin fricción tal y como se muestra en la Figura 1. Las dos masas están unidas por un resorte de constante elástica k y longitud natural l. Además las masas están sometidas a un campo gravitacional y siempre se mueven sobre la superficie circular.

Se define θ_c como el ángulo del centro del círculo al centro de masa de las masas.

θ_r es el ángulo de amplitud entre las masas desde el centro geométrico del círculo



ligaduras $\Rightarrow l_i = x_i^2 + y_i^2 = R^2$,
$i = \{1, 2\}$,

Se consigue la distancia r entre las partículas,

$$\Rightarrow |l|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R^2\left((\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (\sen\theta_2 - \sen\theta_1)^2\right)$$

$$\Rightarrow |l|^2 = 4R^2 \sen^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \Rightarrow |l| = 2R \sen\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

Construcción del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta}_c^2}_{\text{centro de masa}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu R^2 \dot{\theta}_r^2}_{\text{Partícula virtual}} - V_{ef}$$

, donde

$M_T = M_1 + M_2$

$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_T}$

$$V_{ef} = \underbrace{-M_T g R \cos\theta_c}_{\text{gravitacional}} + \underbrace{\frac{1}{2} K \left(2R\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_r}{2}\right) - l\right)^2}_{r_0 \rightarrow \text{resorte}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta}_c^2 + \frac{1}{2} \mu R^2 \dot{\theta}_r^2 + M_T g R \cos\theta_c - \frac{1}{2} K r_0^2$$

Se calculan las Ec. de Mov. con Euler Lagrange.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_c = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_c \\ \ddot{\theta}_R + \frac{K}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_r \end{cases}$$

b) Ec de movimiento

a) Coord. generalizadas: θ_c y θ_r

c) Al dejar caer la masa 1 desde A se transfiere a través de las ligaduras energía potencial a la masa 2

De manera equivalente las masas experimentarán un aumento de energía cinética a medida que caen.

d)
$$\begin{cases} \text{Aproximación de segundo orden} \\ \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_c = 0 \rightarrow \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\theta_c = 0 \\ \ddot{\theta}_r + \frac{K}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K}{R\mu}\left(\theta_r - \frac{l}{R}\right) \end{cases}$$

Con frecuencias $w_r^2 = \frac{K}{R\mu}$ y $w_0^2 = g/R$

y punto de equilibrio para $\theta_r = \frac{l}{R}$

e) $l = R$, $l = 2R$

Cuando $l = R \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{K}{R\mu}\left(2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - R\right)\cos\frac{\theta_1}{2} = 0$

$\theta_{eq} = 1$ [Rad] , visualmente $60°$

Cuando $l = 2R \Rightarrow$ visualmente $180°$

$\Rightarrow \theta_{eq} = 2$ [Rad] $\Leftarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{K}{2\mu}\left(2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - 2R\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0$

F) Con el potencial culombiano queda

$\mathcal{L} = \mu_r R^2 \dot{\theta}_r + R\mu\dot{\theta}_1 + \mu_T gR\cos\theta_1 - \frac{1}{2}K\,r_0^2 - V_c$

$V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left|\frac{q_1 q_2}{2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right|$

$\Rightarrow \theta_c$ para pequeñas oscilaciones es inmediato

$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{K}{\mu R}(R\theta_1 - l) - \frac{Kq_1 q_2}{R^3\mu}\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) = 0$ es la

Nueva ecuación.

g) La agregación de una tercer carga en el centro geométrico del círculo se generarían dos nuevos potenciales V_{31}, V_{32} que impedirían el desarrollo teórico de la masa reducida de una partícula virtual, cambiando por completo el planteamiento.

En presencia de las ligaduras, los potenciales $V_{31} = V_{31}(R)$, $V_{32} = V_{32}(R)$ constantes para todo el movimiento posible de m_1 y m_2. Luego si se respetan las condiciones de ligadura mencionadas no habría cambios en las ec. de movimiento.

3a. Para calcular el acercamiento maximo de la sonda a jupiter, podemos usar la conservación del momento angular.

En el infinito: $L = m V_0 b$

En el $r = r_{min}$: $L = m V_f r_{min}$

Por lo tanto, obtenemos que: $V_f = V_0 b / r_{min}$

Ahora, calculemos la energia justo antes del impacto:

$$E_f = T_f + V_f = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}}$$

y la energia en el infinito es $E_0 = 1/2\, m V_0^2 - \cancel{GMm/\infty}$

como la energia se conserva, entonces: $E_0 = E_f$

$$\Rightarrow \frac{m V_0^2}{2} = \frac{m V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}} \Rightarrow V_0^2 = \frac{V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{2GM}{r_{min}}$$

$$\Rightarrow V_0^2 r_{min}^2 = V_0^2 b^2 - 2 r_{min} GM$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4(GM)^2 + 4 V_0^4 b^2}}{2V_0^2}$$

como tomamos el valor positivo, pues hablamos de distancia, nos queda que:

$$r_{min} = -\frac{GM}{V_0^2} + 2\sqrt{\left(\frac{GM}{V_0^2}\right)^2 + b^2} \,. \checkmark$$

3b. Para calcular el angulo de dispersión x podemos usar la siguiente relación

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{b V_0^2}{GM}$$

De donde el angulo de dispersión es:

$$x = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{b V_0^2}\right)$$

Parte 2 Problema 4

Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria parabólica alrededor del sol y cruza la órbita terrestre. Suponga que la órbita terrestre es circular y que está en el mismo plano que la trayectoria del cometa. Encuentre el máximo número de días que el cometa puede permanecer en la órbita de la tierra.

Trayectoria $\begin{cases} E=0 \text{ ; Cometa} \rightarrow \text{Parábola} \\ e=0 \text{ ; Tierra} \rightarrow \text{Circular} \end{cases}$

Para la órbita circular $r_1 = q_1 = \frac{l^2}{\mu k} = \frac{k}{2|E|}$

Para la órbita parabólica $r_2 = q_2 / 1 + \cos\theta$

Igualamos el radius de ambos ecuaciones, $q_1 = q_2$

$\Rightarrow q = q/_{1+\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

Es decir, el cometa recorre $\pi/2$ radianes, como máximo antes de salir de la órbita terrestre.

$\Rightarrow$ En longitud de arco $l = \theta R_T = \frac{\pi}{2}(1{,}5\times10^{11})$

$$\Rightarrow l = 2{,}3 \times 10^{11}\ m$$

Distancia Recorrida Proyectada sobre la Trayectoria de la tierra.

Si la distancia Total de la órbita terrestre es)

$$l_T = 2\pi(R_T) = 9{,}4\times10^{11}\ m$$

Entonces por regla de Tres se obtiene

$$t = \frac{(2,3 \times 10^{11})\ (365)}{(9,4 \times 10^{11})}$$

$\Rightarrow t = 91$ Días aproximadamente puede permanecer en órbita.

Parte 2: Problema 5.

Una partícula con momento angular $\mathcal{L}$ describe la órbita $r = a(1 + \cos\theta)$

a) Encuentre la Fuerza central que produce esta órbita.

b) Calcule el periodo de esta órbita.

c) Determine la energía mínima que debe tener la partícula para escapar de esta órbita.

Solución a)

$|F(r)| = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \rightarrow$ Fuerza Central,

A partir de la ecuación diferencial de la órbita

$$\frac{l^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad u = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

Se reemplaza u para obtener $-\frac{\partial V}{\partial u}$.

Note que $-\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u} = F(r)\left(-\frac{1}{u^2}\right) = -F(r)\,r^2$

Se calcula $\frac{d^2u}{d\theta^2}$.

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^2} + \frac{2\sin^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{\mu}\left(\frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^2} + \frac{2\sin^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3} + \frac{1}{a(1+\cos\theta)}\right) = -F(r)\, r^2$$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} + 1\right),$$

$$\cos\theta = \frac{r}{a} - 1$$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{1}{r^3}\left[\frac{(r-a)^2}{r^2} - \frac{a}{r}\right] = -\frac{(r-a)^2 - ra}{r^5}$$

Solución b)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} \; ; \; l = cte \Rightarrow A = \frac{l}{2\mu}\int_0^T dt = \frac{l}{2\mu}T,$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\mu}{l}A \; ; \; A = 6\pi(2a)^2 \Rightarrow A = 3/2\, \pi a^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{3\pi\mu}{l}a^3$$

Solución c). Considere

$$\int F(r)\,dr = -V(r) = \int \frac{(r-a)^2 - ra}{r^5}\,dr \,,$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3a}{r^4} + \frac{a^2}{r^5} \right) dr = \frac{-1}{2r^2} + \frac{a}{r^3} - \frac{a^2}{4r^4} + C$$

$$\Rightarrow V_{ef} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{2r^2 - 4ra + a^2}{4r^4} + C \;; \quad E = V_{ef}.$$

La condición de $E \geq 0$ en las órbitas implica que éstas sean parabólica o hiperbólica, es decir, que salgan de su órbita.

$$E \geq 0 \,,$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{2\mu} \geq \frac{2r^2 - 4ra + a^2}{4r^2}$$

6a. Como existe conservación del momento, entonces:

$$M_T V_T + m_c V_c = M_F V_F$$

Donde $m_c = M_T/8$, $V_c = -5V_T$ y $M_F = m_c + M_T$

$$\Rightarrow M_T V_T + \frac{M_T}{8}(-5V_T) = \left(M_T + \frac{M_T}{8}\right) V_F$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} M_T V_T = \frac{9}{8} M_T V_f \Rightarrow V_f = \frac{1}{3} V_T$$

La tierra originalmente seguía una órbita circular, pero despues del choque, al ser reducida su velocidad, la nueva orbita será eliptica con energia:

$$E_F = \frac{1}{2} M_F V_F^2 - \frac{G M_\odot M_F}{R} \quad ; \quad \begin{array}{l} M_\odot \equiv \text{Masa del sol} \\ R \equiv \text{Radio de la orbita} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} M_{final} \left(\frac{1}{9} V_T^2\right) - \frac{G M_\odot M_{final}}{R}$$

Ademas, sabemo que en la obita original $V_T^2 = G M_\odot / R$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{18} \cdot \frac{G M_\odot M_{final}}{R} - \frac{G M_\odot M_{final}}{R} = -\frac{17 G M_\odot M_{final}}{18 R}$$

Ademas, tenemos que: $E = -G M_\odot M_{final}/2a$

donde a es el semieje mayor de la orbita

$$\Rightarrow -\frac{17 \cancel{G M_\odot M_{final}}}{18 R} = -\frac{\cancel{G M_\odot M_{final}}}{2a} \Rightarrow a = \frac{9}{17} R$$

El perihelio y el afelio estan dados por

$$r_p = a(1-e) \, , \, r_a = a(1+e) \quad ; \quad e^2 = 1 + \frac{2 E L^2}{G^2 M_\odot^2 M_f^3}$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{9R}{17}\left(1 - \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f M}\right)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{9R}{17}\left(1 + \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f M}\right)^{1/2}\right)$$

6b. El nuevo periodo orbital es:

$$T' = T\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} \quad ; \quad a = \frac{9}{17}R \quad \wedge \quad T = 365 \text{ días}$$

$$\Rightarrow T' = 365 \text{ días} \times \left(\frac{9}{17}\right)^{3/2} \approx \underline{140{,}6 \text{ días}}$$