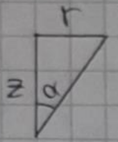
Miguel Stiven Ascanio Quinchia 2231344

Ejercicios Mecanica Clasica - semana 2 [14/02/2025]

1. Vamos a calcular la trayectoria que da la distancia mas corta entre dos puntos sobre la supersicie de un cono,



Por la geometria del sistema, tenemos la siguiente ligadura:

$\tan(\alpha) = r/z \Rightarrow z = \cot(\alpha)\, r \Rightarrow dz = \cot(\alpha)\, dr$

Ahora, vamos a usaro la siguiente expresion:

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \rightarrow$ coords. cilindricas

reemplazamos la ligadura en la anterior ecuación y organizamos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cot^2(\alpha)\, dr^2 = (\cot^2(\alpha)+1)\, dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$= \csc^2(\alpha)\, dr^2 + r^2 d\theta^2 = (\csc^2(\alpha) + r^2\dot{\theta}^2)\, dr^2$$

$$\Rightarrow ds = [\csc^2(\alpha) + r^2\dot{\theta}^2]^{1/2}\, dr \qquad \rightarrow \dot{\theta} = d\theta/dr$$

Ahora, integramos la anterior expresión

$$S = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\csc^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2}\, dr$$

Como queremos optimizar S, definimos el siguiente lagrangiano.

$$F = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \csc^2(\alpha)}$$

Ahora, aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) = \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Como F no depende explicitamente de θ ($\partial F/\partial\theta = 0$), entonces

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{r^2\theta'}{(r^2\theta'^2 + \csc^2(\alpha))^{1/2}} = C$$

Es constante, pues su derivada respecto a r es cero.

Despejamos θ' y nos queda:

$$\Rightarrow (r^2\theta')^2 = (C(r^2\theta'^2 + csc^2(\alpha))^{1/2})^2 \Rightarrow r^4\theta'^2 = C^2(r^2\theta'^2 + csc^2(\alpha))$$

$$\Rightarrow r^4\theta'^2 - C^2r^2\theta'^2 = C^2 csc^2(\alpha) \Rightarrow \theta'^2(r^4 - C^2r^2) = C^2 csc^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{C \cdot csc(\alpha)}{(r^4 - C^2r^2)^{1/2}} = \frac{C \cdot csc(\alpha)}{r(r^2 - C^2)^{1/2}}$$

Despejamos $d\theta$ e integramos:

$$\int d\theta = \int \frac{C \cdot csc(\alpha)}{r(r^2 - C^2)^{1/2}} dr = C \cdot csc(\alpha) \int \frac{dr}{r(r^2 - C^2)^{1/2}}$$

Si sustituimos $u = \sqrt{r^2 - C^2} \rightarrow du = r\,dr / \sqrt{r^2 - C^2}$

$$\Rightarrow \theta = C \cdot csc(\alpha) \int \frac{du}{u^2 + C^2} = \frac{csc(\alpha)}{C} \int \frac{du}{(u/C)^2 + 1}$$

Resolviendo lo anterior y reemplazando u, nos queda:

$$\theta = csc(\alpha) \arctan(\sqrt{r^2 - C^2}/C) + C_2$$

o lo que es lo mismo:

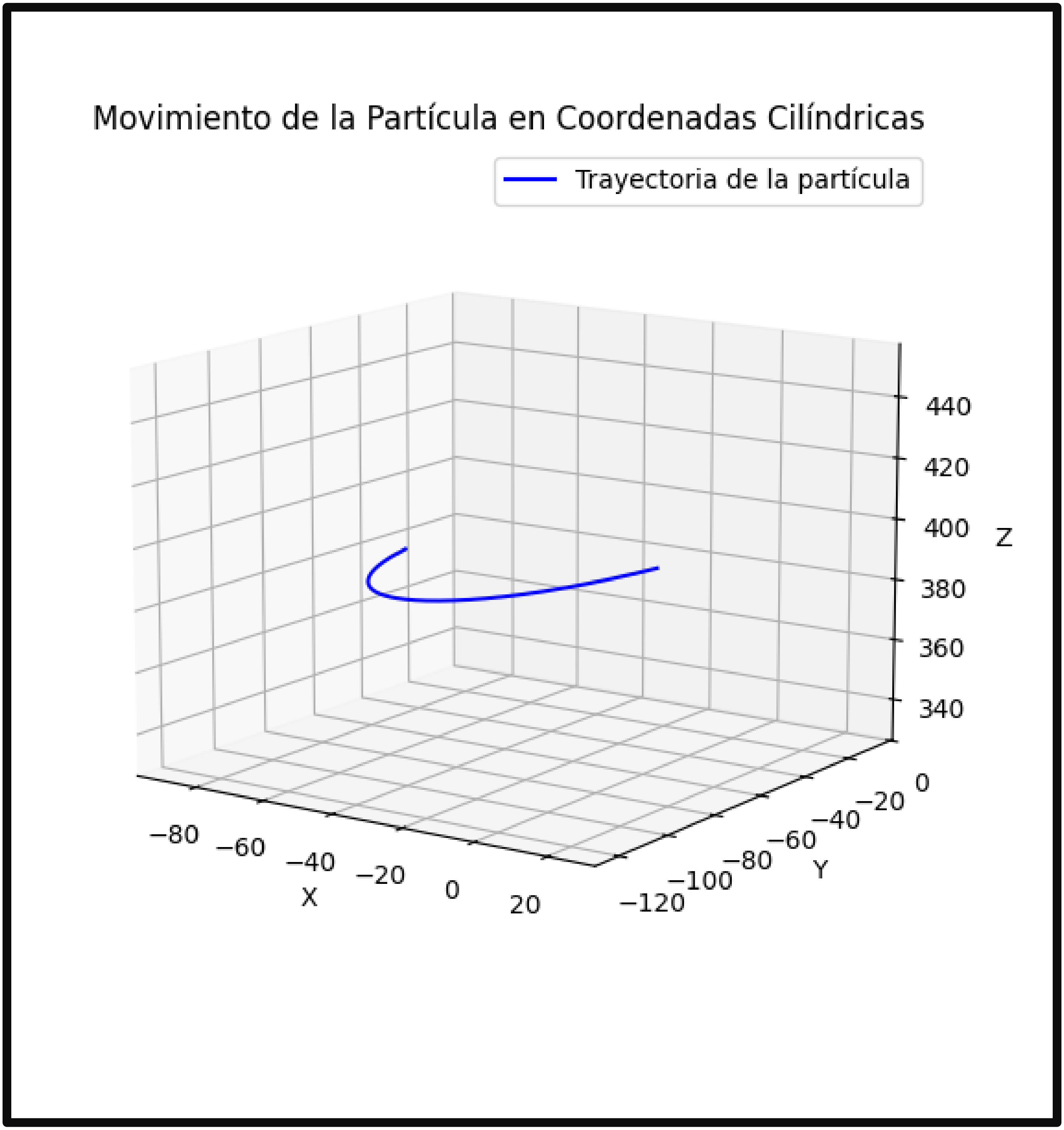
$$\theta(r) = -csc(\alpha) \cdot \arcsin(C_1/r) + C_2$$

Por lo que las ecuaciones que van a describir el movimiento son

$$S = \begin{cases} r(r) = r \\ \theta(r) = -csc(\alpha) \cdot \arcsin(C_1/r) + C_2 \\ z(r) = cot(\alpha) \cdot r \end{cases}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependes de las condiciones iniciales y finales de la posición, y α es el angulo de la mitad del vertice.

La siguiente imagen representa una trayectoria cualquiera entre dos puntos en la superficie del cono, es decir, la geodésica



2. Calcule el valor minimo de la integral.

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 1$$

Definimos el laplaciano $F = (y')^2 + 12xy$ y aplicamos la ecuación de euler lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (1)$$

•) $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\frac{dy}{dx}\right) = 2\frac{d^2y}{dx^2} = 2y'' \quad (2)$

•) $\frac{\partial F}{\partial y} = 12x \quad (3)$

$\Rightarrow 2y'' = 12x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ } Esto sale de reemplazar (2) y (3) en (1).

Ahora, resolvamos la ecuación

•) $\int \frac{d^2y}{dx^2}dx = \int 6x\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1$

•) $\int \frac{dy}{dx}dx = \int (3x^2 + C_1)dx \Rightarrow y(x) = x^3 + C_1x + C_2$

Ahora, apliquemos el PVI $y(0) = 0$

$0 = (0)^3 + C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow y(x) = x^3 + C_1x$

Ahora apliquemos el PVI $y(1) = 1$

$1 = (1)^3 + C_1(1) \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow y(x) = x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2$

$$I = \int_0^1 [(3x^2)^2 + 12x(x^3)]\,dx = \int_0^1 21x^4 = \left[\frac{21}{5}x^5\right|_0^1$$

$I = 21/5\,(1)^5 - (0)^5 = 21/5 = 4.2$

3. Encuentre la geodésica entre los puntos $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$

- Una de nuestras ligaduras es $x^2 + y^2 = a^2$ y si cambiamos a coordenadas cilíndricas, nos queda que $r^2 = a^2$. Pero podemos observar que en el punto 2, el radio es igual $-a$, pero, ¿que representa esto?

Pues, que el radio aparezca en negativo, implica que está reflejado en un angulo de $180°$, por lo que una manera analoga de escribir los puntos es:

$$\begin{cases} P_1 = (a, 0, 0) \\ P_2 = (a, \pi, \pi) \end{cases}$$

: Lo que implica que el radio permanece constante ($dr = 0$) y solo rota:

Por lo que: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$

Pero sabemos que $r = a \Rightarrow dr = 0$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2 = [a^2 + \dot{z}^2] d\theta^2$$

$$\Rightarrow S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right)^{1/2} d\theta$$

Lagrangiano: $F = (a^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$

Ahora, aplicamos la ecuación de euler-lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}} F = \frac{z'}{(z'^2 + a^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{a^2 z''}{((z'^2 + a^2)^{3/2}} = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \rightarrow$ Esto es así porque F no depende explícitamente de z

Igualando las anteriores expresiones tenemos

$$\int \frac{d^2 z}{d\theta^2} d\theta = \int 0 \, d\theta \Rightarrow \int \frac{dz}{d\theta} d\theta = \int C_1 d\theta \Rightarrow z = C_1 \theta + C_2$$

Pero sabemos que $z(0) = 0$ y $z(\pi) = \pi$

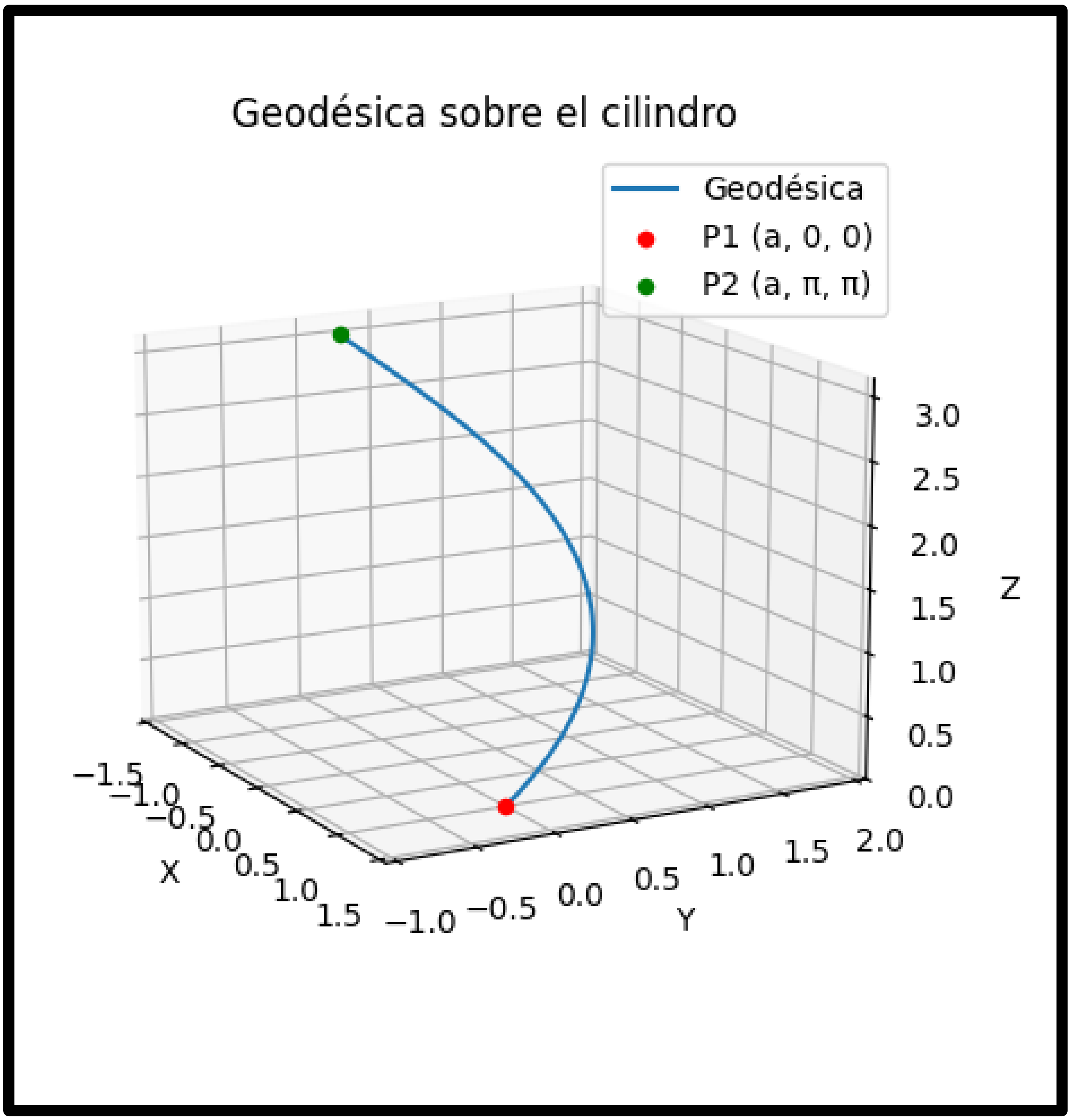
$$\Rightarrow z(0) = C_1 (0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow z = C_1 \theta$$

$$\Rightarrow z(\pi) = C_1 \pi = \pi \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow z = \theta$$

Ya con estos datos, podemos construir la trayectoria de la geodesica

$$S = \begin{cases} r = a \rightarrow \text{constante} \\ \theta(\theta) = \theta \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

La siguiente imagen muestra como se veria una trayectoria cualquiera entre dos puntos en la superficie del cilindro



Ya con estos datos, podemos construir la trayectoria de la geodesica

$$S = \begin{cases} r = a \rightarrow \text{constante} \\ \theta(\theta) = \theta \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

4. Partamos del principio de minima acción, que dice que un sistema fisico busca minimizar la acción S.

$$S = \int_0^T L\,dt \quad , \text{donde}, \quad L = T - V$$

Donde L es el lagrangiano, T la energia cinetica y K la energia potencial. Para un objeto que cae bajo la acción de la gravedad, nos queda así:

•) $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

•) $V = mgy$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - mgy$$

Supongamos que L minimiza S, por lo que cumple que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) - mg = m\frac{d^2y}{dt^2} - mg = \emptyset$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = mg \Rightarrow \ddot{y} = g$$

Esto parece ser muy redundante, demostramos que el agua moja, pero esto nos sirve como criterio para saber, cual de las 3 cumple, por lo que resolvamos el sistema

$$\Rightarrow \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dt = \int g\,dt = gt + C_1$$

$$\frac{dy}{dt} = V(t) = gt + C_1 \Rightarrow V(\emptyset) = \emptyset = g\cdot(\emptyset) + C_1 \Rightarrow C_1 = \emptyset$$

Porque se deja caer

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{dt}dt = \int g t\, dt = \frac{1}{2} g t^2 + C_2$$

$$y(t) = 1/2\, g t^2 + C_2 \rightarrow y(0) = h = 1/2\, g (0)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = h$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + h \quad \checkmark$$

y podemos observar, que la ecuación que cumple este criterio de menor acción es la segunda, pues si escojemos $g = -g_2$, nos queda:

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g_2 t^2 \Rightarrow y'(t) = -g_2 t \Rightarrow y''(t) = -g_2$$

podemos notar que cumple el criterio de minima acción

Por ultimo, si metemos esto en la integral de acción nos queda:

$$S = \int_0^T L\, dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - m g y \right) dt$$

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m (-g_2 t)^2 - m g_2 \left(h - \frac{1}{2} g_2 t^2\right)\right) dt$$

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m g_2^2 t^2 - m g_2 h + \frac{1}{2} m g_2^2 t^2 \right) dt$$

$$S_2 = \int_0^T m g_2^2 t^2\, dt - \int_0^T m g_2 h\, dt = \left[m g_2^2 \frac{t^3}{3} - m g h t \right|_0^T$$

$$S_2 = m g_2^2 \frac{T^3}{3} - m g h T = \frac{m g_2 T (g_2 T^2 - 3h)}{3}$$

si hacemos esto con los otros dos casos, notaremos que el caso mas optimos es este, pues si nos ponemos a probar datos, la mas optima es S_2, a continuación, dejo los resultados.

$S_1 = T g m (g(T+1) - 2h)/2$

$S_2 = T g m (g T^2 - 3h)/3$ → Mas optimo

$S_3 = T g m ((9T^4 + 10T^3) g - 160h)/160$

5. Calculemos la ecuación de movimiento dada por

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

Aplicaremos la ecuación de Euler lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Calculemos la derivada de L respecto a $\dot{x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m^2}{12}\cdot 4\dot{x}^3 + m\cdot 2\dot{x}\cdot f(x) = \frac{m^2}{3}\dot{x}^3 + 2mf(x)\dot{x}.$$

Ahora calculemos la derivada de lo anterior respecto a t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{m^2}{3}\cdot 3\dot{x}^2\ddot{x} + 2m(f(x)\ddot{x} + (f'(x)\dot{x})\dot{x})$$

$$= m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2mf(x)\ddot{x} + 2mf'(x)\dot{x}^2.$$

Ahora calculemos la derivada de L respecta a x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}^2 f'(x) - 2f(x)f'(x)$$

Ahora, sustituimos en la ecuación de euler-lagrange

$$m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2mf(x)\ddot{x} + 2mf'(x)\dot{x}^2 - m\dot{x}^2 f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$\ddot{x}(m^2\dot{x}^2 + 2mf(x)) = f'(x)(m\dot{x}^2 - 2m\dot{x}^2 - 2f(x))$$

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x)(m\dot{x}^2 + 2f(x))}{m(m\dot{x}^2 + 2f(x))} = -\frac{f'(x)}{m}$$

Analogamente:

$$F = m\cdot a = -\frac{f'(x)(mv^2 + 2f(x))}{mv^2 + 2f(x)} = -f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -f'(x)/m \quad \equiv \quad F = m\cdot a = -f'(x)$$

6. Dado: $L = \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b$,

Y la ecuación: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0.$ (1)

Derivamos L respecto a $\dot{q}^a$ $(\partial g_{bc}/\partial \dot{q}^a = 0)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{1}{2} g_{bc}(\delta^b_a \dot{q}^c + \delta^c_a \dot{q}^b) = g_{ab}\dot{q}^b$$

Ahora calculemos la derivada de lo anterior respecto a t.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = \dot{g}_{ab}\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b$$

Por ultimo, calculemos la derivada de L respecto a q^a:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c$$

Y sustituimos en la ecuación de euler lagrange (1)

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

$$\Rightarrow \quad g_{ab}\ddot{q}^b = -\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c$$

Multiplicamos por la inversa de g_{ab}, g^{ad}

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}^d = -g^{da}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c$$

Reordenamos los terminos dentro del parentesis

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

donde los coeficientes de christoffel son:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}\right)$$

Demostrado.