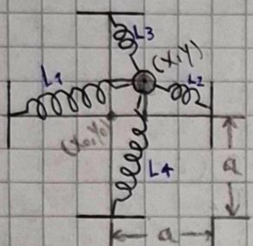
Nombres
Miguel Stiven Ascanio Quinchia
Alejandro Martinez Portilla

Ejercicios de mecánica clásica [Semana 4 & 5]

1a. Vamos a encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula anclada a 4 resortes con longitud natural a y constantes k_1 en x y k_2 en y:



Para definir nuesto lagrangiano, ($L = T - V$), necesitamos la energía cinetica

$$T = 1/2\, m \dot{r}^2 = 1/2\, m \dot{x}^2 + 1/2\, m \dot{y}^2 = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

y la energía potencial definida por

$$V = 1/2\, K (\Delta r)^2$$

Donde Δr es la elongación del resorte total, es decir, la longitud actual $L(x,y)$ menos la longitud natural a.

$$\Rightarrow V = 1/2\, k_1 (L_1 - a)^2 + 1/2\, k_1 (L_2 - a)^2 + 1/2\, k_2 (L_3 - a)^2 + 1/2\, k_2 (L_4 - a)^2$$

Donde las longitudes (L_1, L_2, L_3, L_4) y sus derivadas son:

$$L_1 = [(a+x)^2 + y^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{1x} = (a+x)/L_1 \quad ; \quad \dot{L}_{1x} = y/L_1$$

$$L_2 = [(a-x)^2 + y^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{2x} = -(a-x)/L_2 \quad ; \quad \dot{L}_{2y} = y/L_2$$

$$L_3 = [(a-y)^2 + x^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{3x} = x/L_3 \quad ; \quad \dot{L}_{3y} = -(a-y)/L_3$$

$$L_4 = [(a+y)^2 + x^2]^{1/2} \Rightarrow \dot{L}_{4x} = x/L_4 \quad ; \quad \dot{L}_{4y} = (a+y)/L_4$$

Entonces, nuestro lagrangiano queda de la siguiente forma

$$L = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1 (L_1 - a)^2 - 1/2\, k_1 (L_2 - a)^2 - 1/2\, k_2 (L_3 - a)^2 - 1/2\, k_2 (L_4 - a)^2$$

Ahora, apliquemos la ecuación de Euler Lagrange.

Para x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{k_1(L_1 - a)(a+x)}{L_1} + \frac{k_1(L_2 - a)(a-x)}{L_2} - \frac{k_2(L_3 - a)x}{L_3} - \frac{k_2(L_4 - a)x}{L_4}$$

$$= k_1\left(\cancel{-a} - x + \frac{a^2 + ax}{L_1} \cancel{+a} - x - \frac{a^2 - ax}{L_2}\right) - k_2\left(x - \frac{ax}{L_3} + x - \frac{ax}{L_4}\right)$$

$$= -k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) - k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, nos queda:

$$m\ddot{x} + k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0$$

Para y:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{k_1(L_1-a)y}{L_1} - \frac{k_1(L_2-a)y}{L_2} + \frac{k_2(L_3-a)(a-y)}{L_3} - \frac{k_2(L_4-a)(a+y)}{L_4}$$

$$= -k_1\left(y - \frac{ay}{L_1} + y - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(\cancel{a} - y - \frac{a^2-ay}{L_3} \cancel{-a} - y + \frac{a^2+ay}{L_4}\right)$$

$$= -k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) - k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, nos queda:

$$m\ddot{y} + k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right) = 0$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento nos quedan así:

$$\begin{cases} \ddot{x} + w_1^2\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + w_2^2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0 & (1) \\ \ddot{y} + w_1^2\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + w_2^2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

Donde:

- $w_1^2 = k_1/m$
- $w_2^2 = k_2/m$
- $L_1 = ((a+x)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_3 = ((a-y)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_2 = ((a-x)^2 + y^2)^{1/2}$
- $L_4 = ((a+y)^2 + y^2)^{1/2}$

Estas ecuaciones describen el movimiento de la partícula en el plano bidimensional xy.

1b. Para encontrar las ecuaciones de movimiento para oscilaciones pequeños, vamos a definir unas nuevas variables:

$$x = x_0 + \Delta x \; ; \; x_0 = 0 \quad \wedge \quad y = y_0 + \Delta y \; ; \; y_0 = 0$$

donde $(x_0, y_0) = (0, 0)$ es el punto central de equilibrio donde oscila la masa, y $(x, y) = (\Delta x, \Delta y)$ son las nuevas coordenadas las cuales son muy pequeñas. Ahora, nuestras nuevas longitudes son aproximadamente

$$L_1 = [a^2 + 2ax + x^2 + y^2]^{1/2} = a[1 + 2x/a + x^2/a^2 + y^2/a^2]^{1/2}$$

Donde, como $x \ll a$ e $y \ll a$ entonces $x^2/a^2 \approx 0$ e $y^2/a^2 \approx 0$

$$\Rightarrow L_1 \approx a[1 + 2x/a]^{1/2} \approx a[1 + 2x/2a] = a + x,$$

analogamente, las demas longitudes nos quedan:

$$L_1 \approx a + x \quad , \quad L_2 \approx a - x \quad , \quad L_3 \approx a - y \quad , \quad L_4 \approx a + y$$

Por lo que nuestro Lagrangiano para oscilaciones pequeñas es:

$$L = 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1((a+x)-a)^2 - 1/2\, k_1((a-x)-a)^2 - 1/2\, k_2((a-y)-a)^2 - 1/2\, k_2((a+y)+a)^2$$

$$= 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 1/2\, k_1(x)^2 - 1/2\, k_1(-x^2) - 1/2\, k_2(-y)^2 - 1/2\, k_2(y)^2$$

$$= 1/2\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - k_1(x^2) - k_2(y^2)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange nos queda:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -2k_1 x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2k_1 x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2k_2 y$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + 2k_2 y = 0$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento nos quedan:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\underbrace{w_2^2}_{\omega_2^2}\, y = 0, & \text{con } w_2^2 = k_2/m \qquad (3) \\ \ddot{x} + 2\underbrace{w_1^2}_{\omega_1^2}\, x = 0, & \text{con } w_1^2 = k_1/m \qquad (4) \end{cases}$$

1c. Analisemos el caso isótropo, cuando $k_1 = k_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

- Ecuación de movimiento con oscilaciones normales ($W_1 = W_2$):

$$\begin{cases} \ddot{x} + W^2\left(4x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2} - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right) = 0 \\ \ddot{y} + W^2\left(4y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2} + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right) = 0 \end{cases}$$

Analizando el sistema, podemos concluir que si $k_1 = k_2$, las ecuaciones describen un oscilador bidimensional acoplado (pues ambas ecuaciones dependen de las dos variables simultaneamente) y con la misma frecuencia natural $\omega = \omega_1 = \omega_2$ en X e Y. Por otro lado, la unica diferencia con el caso anisótropo, es que la frecuencia angular ahora es diferente y mas compleja, pero sigue siendo un oscilador bidimensional acoplado.

- Ecuación de movimiento con oscilaciones pequeñas. ($W_1 = W_2$):

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2W^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2W^2 y = 0 \end{cases}$$

Analizando este sistema, podemos concluir que si $k_1 = k_2$, las ecuaciones describen un oscilador bidimensional desacoplado (pues las ecuaciones de movimiento solo dependen de una variable respectivamente) y con la misma frecuencia natural. La diferencia con el caso anisotropo, unicamente es que la frecuencia no es la misma en X y en Y, pero el movimiento sigue siendo desacoplado.

1d. La energia la podemos definir como $E = T + V$, pues la energia cinetica T solo depende de la velocidad $(\dot{x}, \dot{y})$. y la energia potencial solo de la posición entonces podemos escribir la energia total como

- $E_{total} = E_x + E_y = (T(x) + V(x)) + (T(y) + V(y))$

Donde, en ambos casos:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 1/2\, m\dot{x} + V(x) \\ E_y &= 1/2\, m\dot{y} + V(y) \end{aligned}\right\}$$ Estas dos expresiones, representan la energia temporal en cada componente, y $V(x)$ y $V(y)$ los potenciales.

En el caso de las oscilaciones normales, no podemos separar $V(x)$ y $V(y)$, por lo que en general el potencial es de la forma $V(x,y)$, lo que implica que la energia en x y en y se estan intercambiando ya que el movimiento es acoplado, es decir, el movimiento en ambas ejes depende de ambas coordenadas, por lo que tiene sentido que las energias se intercambien siempre y cuando la energuia total se conserve.

Con pequeñas oscilaciones, las energuias si se pueden separar en sus componentes, y nos queda:

$$\begin{cases} E_x = 1/2\, m\dot{x}^2 + k_1 x^2 \\ E_y = 1/2\, m\dot{y}^2 + k_2 y^2 \end{cases}$$

si las energuias se conservan, sus derivadas temporales dan cero, entonces

$$\begin{cases} \partial E_x/\partial t = m\dot{x}\ddot{x} + k_1 2x\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + 2k_1 x) \\ \partial E_y/\partial t = m\dot{y}\ddot{y} + k_2 2y\dot{y} = \dot{y}(m\ddot{y} + 2k_2 y) \end{cases}$$

Tenemos que $m\ddot{x} = -2k_1 x$ segun (1) y $m\ddot{y} = -2k_2 x$ segun (2), entonces reemplazando:

$$\begin{cases} \partial E_x/\partial t = \dot{x}(-2k_1 x + 2k_1 x) = \dot{x}(0) = 0 \\ \partial E_y/\partial t = \dot{y}(-2k_2 y + 2k_2 y) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Entonces, en efecto, las energuias en x y en y se conservan si las oscilaciones pequeñas.

- Miremos el momento angular $L_z = y p_x - x p_y$

Donde: $p_x = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ y $p_y = \partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(y m\dot{x}) - \frac{\partial}{\partial t}(x m\dot{y}) = \cancel{m\dot{y}\dot{x}} + m\ddot{x}y - \cancel{m\dot{y}\dot{x}} - m x\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_z}{\partial t} = m(\ddot{x}y - x\ddot{y}) = (m\ddot{x})y - (m\ddot{y})x$$

Podemos reemplazar $m\ddot{x}$ y $m\ddot{y}$ gracias a las ecuaciones (1) y (2).

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = -y\left(k_1\left(2x - \frac{a^2+ax}{L_1} + \frac{a^2-ax}{L_2}\right) + k_2\left(2x - \frac{ax}{L_3} - \frac{ax}{L_4}\right)\right)$$
$$+ x\left(k_1\left(2y - \frac{ay}{L_1} - \frac{ay}{L_2}\right) + k_2\left(2y + \frac{a^2-ay}{L_3} - \frac{a^2+ay}{L_4}\right)\right)$$

$$'' = \cancel{-yk_1 2x} + yk_1\frac{a^2+ax}{L_1} - yk_1\frac{a^2-ax}{L_2} \cancel{- yk_2 2x} + \frac{yk_2 ax}{L_3} - \frac{yk_2 ax}{L_4}$$
$$\cancel{+xk_1 2y} - \frac{xk_1 ay}{L_1} - \frac{xk_1 ay}{L_2} \cancel{+ xk_2 2y} + xk_2\frac{a^2-ay}{L_3} - xk_2\frac{a^2+ay}{L_4}$$

$$'' = a\left(yk_1\frac{a+x}{L_1} - yk_1\frac{a-x}{L_2} + xy\frac{k_2}{L_3} - xy\frac{k_2}{L_4} - xy\frac{k_1}{L_1} - xy\frac{k_1}{L_2}\right.$$
$$\left. + xk_2\frac{a-y}{L_3} - xk_2\frac{(a+y)}{L_4}\right)$$

$$'' = \frac{yk_1 a}{L_1} + \cancel{\frac{xyk_1}{L_1}} - \frac{yk_1 a}{L_2} + \cancel{\frac{xyk_1}{L_2}} + \cancel{\frac{xyk_2}{L_3}} - \cancel{\frac{xyk_2}{L_4}} - \cancel{\frac{xyk_1}{L_1}}$$
$$-\cancel{\frac{xyk_1}{L_2}} + \frac{xk_2 a}{L_3} - \cancel{\frac{xyk_2}{L_3}} - \frac{xk_2 a}{L_4} + \cancel{\frac{xyk_2}{L_4}}$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = a\left(y\frac{k_1}{L_1} - y\frac{k_1}{L_2} + x\frac{k_2}{L_3} - x\frac{k_2}{L_4}\right) \neq 0$$

- Entonces, podemos observar, que en general, para oscilaciones grandes el momento angular no se conserva

Ahora analicemos el momento angular de pequeñas oscilaciones.

$$L_z = y p_x - x p_y = y m\dot{x} - x m\dot{y} \Rightarrow \partial L_z/\partial t = m\ddot{x}y - m\ddot{y}x$$

podemos reemplaza $m\ddot{x}$ y $m\ddot{y}$ por (3) y (4)

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = (-2k_1 x)y - (-2k_2 y)x = 2k_2 xy - 2k_1 xy = 2xy(k_2 - k_1)$$

- Entonces, en general, el momento angular para pequeñas oscilaciones tampoco se conserva, pero note que si $k_1 = k_2$ $\Rightarrow k_2 - k_1 = 0$ entonces, en el caso isotropo si se conserva el momento angular

• Revisemos la siguiente cizalladura

$$K = w_1 x w_2 y + \frac{p_x p_y}{m^2} \quad \text{com} \quad w_j = \sqrt{\frac{2k_j}{m}}$$

donde w_j es la frecuencia angular que nos salieron de la ecuación de movimiento para bajas oscilaciones

$$K = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{2k_2}{m}} \cdot y + \frac{m\dot{x}\, m\dot{y}}{m^2} = 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m} xy + \dot{x}\dot{y}$$

Si K se conserva, su derivada temporal es cero:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m}\dot{x}y + 2\frac{(k_1 k_2)^{1/2}}{m}x\dot{y} + \ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}$$

donde: $\ddot{x} = -2k_1 x/m \quad \wedge \quad \ddot{y} = -2k_2 y/m$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{m}(\dot{x}y + x\dot{y}) + \left(-\frac{2k_1 x}{m}\right)\dot{y} + \left(-\frac{2k_2 y}{m}\right)\dot{x}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(2\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{m} - 2\frac{k_1}{m}\right)$$

En general, esto no es 0, aunque, note que si $k_1 = k_2$, el segundo termino se cancela.

• Ahora, describamos como se comporta el sistema ante transformaciones que estiran o sesgan la estructura del espacio de fases sin alterar la dinamia global. vamos a usar

$$\bar{x} = x + \lambda y, \quad \bar{y} = y$$

Entonces, si reemplazamos en nuestro lagrangiano, nos queda:

$$L = 1/2m(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) - k_1(\bar{x})^2 - k_2(\bar{y})^2$$

$$L = 1/2m((\dot{x}+\lambda\dot{y})^2 + \dot{y}^2) - k_1(x+\lambda y)^2 - k_2(y)^2$$

Ahora, aplicamos la ecuación de euler lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x}+\lambda\dot{y}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x}+\lambda\ddot{y})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2k_1(x+\lambda y)$$

Para y, no hay variación, entonces, nuestras ecuaciones de movimiento nos quedan:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}+\lambda\ddot{y})+2k_1(x+\lambda y)=0 & (1) \\ m(\ddot{y})+2k_2(y)=0 & (2) \end{cases}$$

Aplicamos distributiva en (1)

$$\Rightarrow m\ddot{x}+m\lambda\ddot{y}+2k_1x+2k_1\lambda y=0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}+2k_1x)+(m\lambda\ddot{y}+2k_1\lambda y)=0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}+2k_1x)+(m\ddot{y}+2k_1 y)\lambda=0$$

En general, note que esta es nuestra nueva ecuación de movimiento para x, por lo que el sistema parece variar ante transformaciones, pero, note que si $k_1=k_2=k$ el segundo termino se anula, pues queda

$$\Rightarrow m\ddot{x}+2kx+\lambda(m\ddot{y}+2ky)=0$$

y por (2) con $k_2=k_1=k$ sabemos que

$$m\ddot{y}+2ky=0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+2kx+\lambda(0)=0$$

por lo que, nuestras ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} m\ddot{x}+2kx=0 \\ m\ddot{y}+2ky=0 \end{cases}$$

por lo que podemos concluir que, el sistema es variante ante transformaciones siempre y cuando $k_1=k_2=k$, que es, nuevamente, en el caso isotropo.

1e) Ahora, revisemos si $L^2+K^2=4E_xE_y$, entonces:

$$L^2=(yp_x-xp_y)^2=y^2p_x^2-2xyp_xp_y+x^2p_y^2$$

$$K^2=\left(w_1w_2xy+\frac{p_xp_y}{m_2}\right)^2=x^2y^2w_1^2w_2^2+\frac{2w_1w_2xyp_xp_y}{m^2}+\frac{p_x^2p_y^2}{m^4}$$

$$4E_xE_y = 4\cdot\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + k_1x^2\right)\cdot\left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + k_2y^2\right)$$

$$= 4\left(\frac{m^2\dot{x}^2\dot{y}^2}{4} + \frac{mk_2\dot{x}^2y^2}{2} + \frac{mk_1\dot{y}^2x^2}{2} + x^2y^2k_1k_2\right)$$

$$= m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2 + 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Igualando todo lo anterior, nos queda:

$$\Rightarrow y^2p_x^2 - 2xy\,p_xp_y + x^2p_y^2 + x^2y^2w_1^2w_2^2 + 2w_1w_2\,xy\,p_xp_y/m^2$$
$$+ p_x^2p_y^2/m^4 = m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2 + 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Reemplazando $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = m\dot{y}$ y $w_i^2 = 2k_i/m$

$$\Rightarrow y^2m^2\dot{x}^2 - 2m^2xy\dot{x}\dot{y} + x^2m^2\dot{y}^2 + 4x^2y^2k_1k_2/m^2$$
$$+ 4\sqrt{k_1k_2}\,xy\dot{x}\dot{y}/m^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 \neq m^2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 2mk_2\dot{x}^2y^2$$
$$+ 2mk_1\dot{y}^2x^2 + 4x^2y^2k_1k_2$$

Esta igualdad en general no se cumple, por lo que en este caso, las cantidades conservadas si son independientes.

15. Como hemos observado en el inciso d), en el caso anisotropo, la unica cantidad que se conserva es la energia en X y en Y, pero las demas cantidades no.

Por otro lado, en el caso isotropo, todas las cantidades se conservan, pues:

- $$\frac{\partial L_z}{\partial t} = 2xy(k_2 - k_1) \equiv 2xy(\cancel{k} - k) = 2xy(0) = 0$$

El momento angular se conserva en $k_1 = k_2 = k$

- $$\frac{\partial k}{\partial t} = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(2\frac{\sqrt{k_1k_2}}{m} - 2\frac{k}{m}\right) = (\dot{x}y + x\dot{y})\left(\cancel{2\frac{k}{m}} - 2\frac{k}{m}\right) = 0$$

Por lo que la cizalladura se conserva si $k_1 = k_2 = k$

Y por ultimo, en el caso isotropo, hemos demostrado que el sistema es invariante ante transformaciones como:

$\bar{x} = x + \lambda y \quad \wedge \quad \bar{y} = y$

2. Dos masas m_1 y m_2 $(m_1+m_2=M)$, estan separadas una distancia r_0 y se atran gravitacionalmente. Calculemas las velocidades V_1 y V_2, si se lanzan del repas y $r<r_0$

Entonces, la energuia mecanica total inicia es:

$$E_0 = T_0 + V_0 = 0 + \left(-\frac{Gm_1m_2}{r_0}\right). \quad (1)$$

donde la energia cinetica es cero $(T_0=0)$, parave parten del reposo y la energia potencia es la gravitacional.

Ahora, en un instante diferente, cuando la distancia es $r<r_0$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$$, es la energia cinetica

$$\Rightarrow V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$, es la energia potencial gravitacional.

Entonces, en la posición r, la energuia mecanica total es:

$$E_r = \left(\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2\right) + \left(-\frac{Gm_1m_2}{r}\right). \quad (2)$$

Ahora, coma la diferencia entre la energuia es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas

$$\Delta E = E_0 - E_r = W,$$

Pero como no hay fuerzas disipativas, entonces $W=0$:

$$\Rightarrow E_0 - E_r = -\frac{Gm_1m_2}{r_0} - \left(\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}\right) = 0$$

Reescribiendo, nos queda que:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_1m_2}{r_0}$$

$$\Rightarrow m_1V_1^2 + m_2V_2^2 = 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (3)$$

Como no hay fuerzas externas actuando en la dirección del movimiento, la cantidad de movimiento total se conserva, es decir $P_1 = P_2 \Rightarrow m_1V_1 = m_2V_2$

Gracias a que la cantidad de movimiento se conserva, podemos expresar

$$V_1 = (m_2/m_1) \cdot V_2$$

Podemos reemplazar esto en la ecuación (3):

$$m_1\left(\frac{m_2}{m_1}V_2\right)^2 + m_2V_2^2 = 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)m_2V_2^2 = 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1}\right)\cancel{m_2}V_2^2 = 2Gm_1\cancel{m_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_1}V_2^2 = 2Gm_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow V_2^2 = \frac{2Gm_1^2}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{V_2 = m_1\sqrt{2\frac{G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}.$$

Analogamente, para el otro caso tenemos:

$$V_2 = (m_1/m_2) \cdot V_1$$

Reemplazando en (3), nos queda:

$$m_1V_1^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}V_1\right)^2 = 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\cancel{m_1}V_1^2 = 2G\cancel{m_1}m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_2}V_1^2 = 2Gm_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_2}V_1^2 = 2Gm_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow V_1^2 = \frac{2Gm_2^2}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

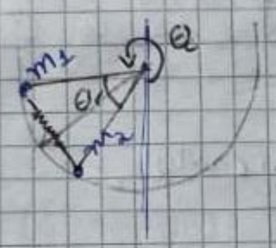
$$\Rightarrow \underline{V_1 = m_2\sqrt{2\frac{G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}.$$

Parte 1: Problema 3.

Dos masas puntuales m_1 y m_2 están dentro de un pozo circular de radio R, sin fricción tal y como se muestra en la Figura 1. Los dos masas están unidos por un resorte de constante elástica K y longitud natural l. Además los masas están sometidos a un campo gravitacional y siempre se mueven sobre la superficie circular.

Se define θ_c como el ángulo del centro del círculo al centro de masa de las masas.

θ_r es el ángulo de amplitud entre las masas desde el centro geométrico del círculo



Ligaduras $\Rightarrow l_i = x_i^2 + y_i^2 = R^2$,
$i = \{1, 2\}$,

Se consigue la distancia r entre las partículas,

$$\Rightarrow |r|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R^2\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\right)$$

$$\Rightarrow |r|^2 = 4R \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \Rightarrow |r| = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

Construcción del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta}_c}_{\text{centro de masa}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{R} \dot{\theta}_r}_{\text{Partícula virtual}} - V_{ef}\,, \quad \text{donde}$$

$M_T = M_1 + M_2$

$\mu = \dfrac{M_1 M_2}{M_T}$

$$V_{ef} = \underbrace{-M_1 g R\cos\theta_c}_{\text{gravitacional}} + \underbrace{\frac{1}{2}k\left(2R\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - l\right)^2}_{r_0 \rightarrow \text{resorte}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}M_1 R^2\dot{\theta}_c^2 + \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}_1^2 + M_1 g R\cos\theta_c - \frac{1}{2}k\, r_0^2$$

Se calculan las Ec. de Mov. con Euler Lagrange.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_c = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_c \\ \ddot{\theta}_R + \frac{k}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0 & ; \text{ con respecto a } \theta_1 \end{cases}$$

b) Ec de movimiento.

a) Coord. generalizadas: θ_c y θ_r

c) Al dejar caer la masa 1 desde A se transfiere a través de las ligaduras energía potencial a la masa 2

De manera equivalente las masas experimentarán un aumento de energía cinética a medida que caen.

d) Aproximación de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_c = 0 \rightarrow \ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\theta_c = 0 \\ \ddot{\theta}_r + \frac{k}{R\mu} r_0 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{R\mu}\left(\theta_1 - \frac{l}{R}\right) \end{cases}$$

Con frecuencias $w_r^2 = \frac{K}{R\mu}$ y $w_c^2 = g/R$

y punto de equilibrio para $\theta_r = \frac{l}{R}$

e) $l = R$, $l = 2R$

Cuando $l = R \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{K}{R\mu}\left(2R\,\text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - R\right)\cos\frac{\theta_1}{2} = 0$

$\theta_{eq} = \frac{\pi}{3}$ [Rad] , equivalentemente 60°

Cuando $l = 2R \Rightarrow$ equivalentemente 180°

$\Rightarrow \theta_{eq} = \pi$ [Rad] $\Leftarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{K}{2\mu}\left(2R\,\text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - 2R\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0$

F) Con el potencial culombiano queda

$L = \mu_1 R^2 \dot{\theta}_r + R\mu\dot{\theta}_1 + \mu_1 gR\cos\theta_1 - \frac{1}{2}K\, r_0^2 - V_c$

$V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left|\frac{q_1 q_2}{2R\,\text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right|$

$\Rightarrow \theta_c$ para pequeñas oscilaciones es equivalente

$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{K}{\mu R}(R\theta_1 - l) - \frac{Kq_1 q_2}{R^3\mu}\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) = 0$ es la

Nueva ecuación.

g) La agregación de una tercer carga en el centro geométrico del círculo se generarían dos nuevos potenciales V_{31}, V_{32} que impedirían el desarrollo teórico de la masa reducida de una partícula virtual; cambiando por completo el planteamiento.

En presencia de las ligaduras, los potenciales $V_{31} = V_{31}(R)$, $V_{32} = V_{32}(R)$ constantes para todo el movimiento posible de m_1 y m_2. Luego si se respetan las condiciones de ligadura mencionadas no habrá cambios en las ec. de movimiento.