Miguel Stiven Ascanio Quinchia 2231344
Alejandro Martinez Portilla

Problemas de mecanica clasica semana 3 [19/02/2025]

1. Considere un sistema con el siguiente Lagrangiano:

$$L = 1/2\, a(\dot{x}^2 \sin^2(y) + \dot{y}^2) + 1/2\, b(\dot{x}\cos(y) + \dot{z})^2$$

$$= a\dot{x}^2 \sin^2(y)/2 + a\dot{y}^2/2 + b\dot{x}^2\cos^2(y)/2 + b\dot{x}\dot{z}\cos(y) + b\dot{z}^2/2$$

a. Para derivar la ecuación de movimienta, aplicaremos la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas:

- Para x:

$$\partial L/\partial \dot{x} = a\dot{x}\sin^2(y) + b\dot{x}\cos^2(y) + b\dot{z}\cos(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}\sin^2(y) + a\dot{x}(2\sin(y)\cos(y)\dot{y}) + b\ddot{x}\cos^2(y) + b\dot{x}(-2\cos(y)\sin(y)\dot{y}) + b\ddot{z}\cos(y) - b\dot{z}\sin(y)\dot{y}$$

$$\partial L/\partial x = 0$$

Unimos lo anterior y nos queda:

$$\Rightarrow \ddot{x}(a\sin^2(y) + b\cos^2(y)) + \dot{x}\dot{y}\sin(2y)(a-b) + (b\ddot{z}\cos(y) - b\dot{y}\dot{z}\sin(y)) = 0$$

- Para y:

$$\partial L/\partial \dot{y} = a\dot{y}$$

$$\partial(\partial L/\partial \dot{y})/\partial t = a\ddot{y}$$

$$\partial L/\partial y = a\dot{x}^2\sin(y)\cos(y) - b\dot{x}^2\sin(y)\cos(y) - b\dot{x}\dot{z}\sin(y)$$

Unimos lo anterior y nos queda:

$$\Rightarrow a\ddot{y} - (a-b)\dot{x}^2\sin(2y)/2 + b\dot{x}\dot{z}\sin(y)$$

- Para z:

$$\partial L/\partial \dot{z} = b\dot{x}\cos(y) + b\dot{z} \Rightarrow \partial(\partial L/\partial \dot{z})/\partial t = b(\ddot{x}\cos(y) - \dot{x}\dot{y}\sin(y)) + b\ddot{z}$$

Y como L no depende explicitamente de z, nos queda:

$$\Rightarrow \ddot{z} + \ddot{x}\cos(y) - \dot{x}\dot{y}\sin(y) = 0$$

Por lo que nuestras ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} \ddot{x}(a\sin^2(y) + b\cos^2(y)) + \dot{x}\dot{y}\sin(2y)(a-b) + b\ddot{z}\cos(y) - b\dot{y}\dot{z}\sin(y) = 0 \\ \ddot{y}a - (a-b)\dot{x}^2\sin(2y)/2 + b\dot{x}\dot{z}\sin(y) = 0 \\ \ddot{z} + \ddot{x}\cos(y) - \dot{x}\dot{y}\sin(y) = 0 \end{cases}$$

b. Vamos a encontrar las cantidades conservadas.

Podemos observar que nuestro lagrangiano no depende explicitamente de "x" ni de "z" por lo que $\partial L/\partial x = \partial L/\partial y = 0$, lo que implica que el momento conjugado de "x" y "z" es igual a una contante, por que el momento de "x" e "z" son cantidades conservadas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = P_x = a\dot{x}\sin^2(y) + b\dot{x}\cos^2(y) + b\dot{z}\cos(y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(P_x) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = P_z = b\dot{x}\cos(y) + b\dot{z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(P_z) = 0$$

Por lo que tanto P_x como P_z no evolucionan en el tiempo, pues su derivada temporal es cero entonces son invariantes, osea, son cantidades conservadas.

c. "t" no aparece explicitamente en el lagrangiano, por lo que la energia tambien es una cantidad conservada, calculemos la:

$$H = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{y} - L$$

$$\Rightarrow H = (a\dot{x}\sin^2(y) + b\dot{x}\cos^2(y) + b\dot{z}\cos(y))\dot{x} + (a\dot{y})\dot{y} + (b(\dot{x}\cos(y) + \dot{z}))\dot{z}$$
$$-(1/2\, a\dot{x}^2\sin(y) + 1/2\, a\dot{y}^2 + 1/2\, b\dot{x}^2\cos^2(y) + b\dot{x}\dot{z}\cos(y) + 1/2\, b\dot{z}^2)$$

Distribuyendo y simplificando llegamos a:

$$H = 1/2\, a\dot{x}^2\sin^2(y) + 1/2\, a\dot{y}^2 + 1/2\, b\dot{x}^2\cos^2(y) + b\dot{x}\dot{z}\cos(y) + 1/2\, b\dot{z}^2$$

b. Por lo que las cantidades conservadas son:

$$\begin{cases} P_x = a\dot{x}\sin^2(y) + b\dot{x}\cos^2(y) + b\dot{z}\cos(y) \\ P_z = b\dot{x}\cos(y) + b\dot{z} \\ H = 1/2\, a(\dot{x}^2\sin^2(y) + \dot{y}^2) + 1/2\, b(\dot{x}\cos(y) + \dot{z})^2 \end{cases}$$

Con lo anterior en cuenta, podemos decir que el sistema es integrable, pues al tener 3 coordenadas generalizadas y 3 cantidades conservadas, este criterio es suficiente para que el sistema sea integrable

d) Suponiendo que que $y(t) = y_0 = cte \Rightarrow y' = y'' = 0$, nos queda

$$\begin{cases} \ddot{x}(a\sin^2(y_0) + b\cos^2(y_0)) + \ddot{z}\, b\cos(y_0) = 0 & (\text{caso } (x)) \\ \dot{x}\dot{z}\, b - (a-b)\dot{x}^2\cos(y_0) = 0 & (\text{caso } (y)) \\ \ddot{z} + \ddot{x}\cos(y_0) = 0 & (\text{caso } (z)) \end{cases}$$

- Del caso y, llegamos a que

$$(a-b)\dot{x}^2\cos(y_0) = b\dot{x}\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \dot{x}\cos(y_0)\cdot(a-b)/b \quad (1)$$

- Del caso z, llegamos a que:

$$\ddot{z} = -\ddot{x}\cos(y_0) \quad (2)$$

- Reemplazando (2) en el caso x, nos queda:

$$\ddot{x}(a\sin^2(y_0) + b\cos^2(y_0)) + (-\ddot{x}\cos(y_0))\, b\cos(y_0) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(a\sin^2(y_0) + b\cos^2(y_0) - b\cos^2(y_0)) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(a\sin^2(y_0)) = 0$$

Si $a\sin^2(y_0) \neq 0$, entonces $\ddot{x} = 0$ lo que implica que

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}dt = \int 0\, dt = \frac{dx}{dt} = V_x \Rightarrow \int \frac{dx}{dt}dt = \int V_x dt = x(t) = V_x t + x_0$$

Y para $z(t)$ tenemos: de (1)

$$\int \frac{dz}{dt}dt = \int \frac{a-b}{b}\cos(y_0)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{constante}}dt = z(t) = \frac{a-b}{b}\cos(y_0)V_x t + z_0$$

Por lo que nuestras ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} x(t) = V_x t + x_0 \\ z(t) = (a-b)/b \cdot V_x \cos(y_0) t + z_0 \end{cases}$$

2. Una particula de masa m se mueve en un potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

a) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \cdot (-2\alpha \tanh(\alpha x)\,\text{sech}^2(\alpha x)) = -2\alpha V_0 \frac{\sinh(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)}$$

Sustituyendo en Euler-Lagrange:

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \frac{2\alpha V_0 \tanh(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-2\alpha V_0}{m} \cdot \frac{\sinh(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)} \quad \checkmark$$

Y esta ultima es la ecuación de movimiento de la particula

b) La particula depende explicitamente de "x" por lo que el momento conjugado P_x no es constante por lo que no es una cantidad conservada. Por otro lado el lagrangiano no depende explicitamente del tiempo, por lo que la energia se conserva (Debido a la invarianza temporal), esto implica que la energia total es una cantidad conservada. Aplicando la función Hamiltoneana, que en este caso es la misma energia mecánica

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = cte$$

Entonces, la energia es una cantidad conservada, pues es invariante en el tiempo, mientra que el momento $P_x = \partial L / \partial \dot{x}$ No se conserva, pues el lagrangiano no es invariante bajo traslaciones en X.

c) Miremos que pasa si $E < 0$ y $E \geq 0$.

1. Movimiento finito ($E < 0$): Dado que la energia total es negativa, implica que la particula está atrapada en un pozo de potencial, y su movimiento esta limitado en una region del espacio.

Para ver esto, consideremos la energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \qquad (3)$$

Dado que $E < 0$, la energia cinetica será positiva solo si:

$$E + V_0/\cosh^2(\alpha x) \geq 0$$

Por lo tanto, la particula estará confinada a una región donde:

$$-E \leq \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

Esto define un intervalo donde la particula puede moverse. Fuera de este intervalo, la energia cinetica sería negativa, lo cual es fisicamente imposible (porque implicaria una masa negativa o una velocidad imaginaria). Por todo esto, el movimiento es finito

2. Movimiento infinito $E \geq 0$: Dado que la energia total no es negativa, implica que la particula tiene la suficiente energia como para salir del pozo de potencial y moverse infinitamente lejos. Consideremos nuevamente la energia cinetica: (3)

Dado que $E \geq 0$ y $V_0/\cosh^2(\alpha x)$ es siempre positivo siempre y cuando $V_0 \geq 0$, entonces, la energia cinetica será siempre positiva para todo x. Esto significa que la particula puede moverse infinitamente lejos sin restricciones

En los limites cuando $x \to \pm\infty$, $\cosh^2(\alpha x) \to \infty$ y por tanto $V_0/\cosh^2(\alpha x) \to 0$, por lo que la energia cinetico se aproxima a:

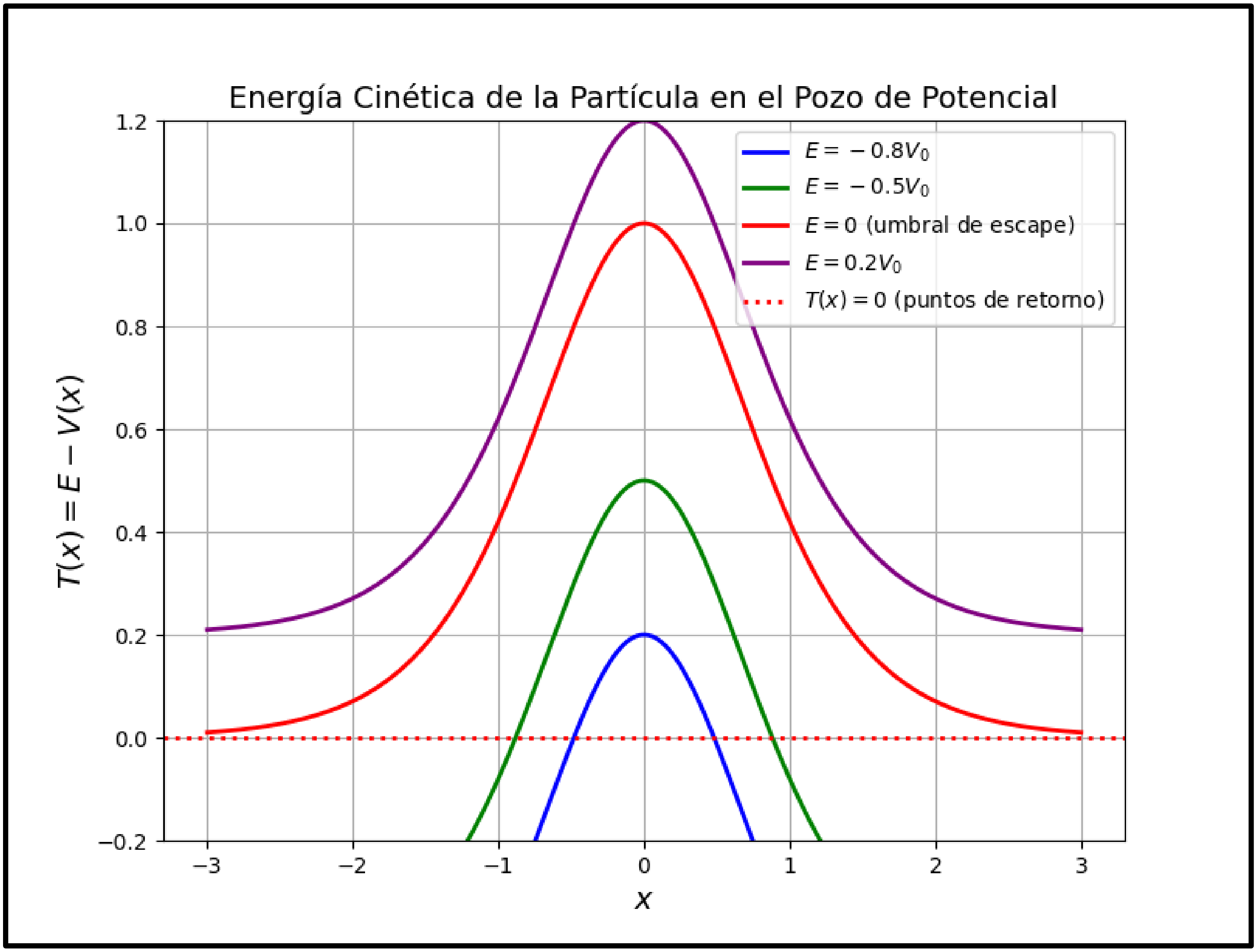
$$T = 1/2\, m \dot{x}^2 \to E$$

lo que implica que la particula tiene una energia cinetica residual E cuando está muy lejos del origen, lo que permite un movimiento infinito.

d) En los puntos de retorno, la dirección cambia y la velocidad se anula, por lo que la energia cinetica es cero:

$$\left.E = \cancel{T} + V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \equiv -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x_{ret})}\right\} \text{Despejamos } x$$

$$\Rightarrow \cosh^2(\alpha x_{ret}) = -\frac{V_0}{E} \quad \Big\} \text{ Como } \cosh^2(\alpha x_{ret}) \geq 1, \text{ los puntos de retorno existen solo si } E \leq -V_0$$



Explicación de la gráfica

- En el eje **horizontal (x)**, representamos la posición de la partícula.
- En el eje **vertical (T(x))**, representamos la **energía cinética T(x)=E−V(x).**
- Se usarán **varios valores de E** para ilustrar diferentes casos:
  - **E1 = −0.8V0 (azul, movimiento confinado)**.
  - **E2 = −0.5V0 (verde, movimiento confinado con mayor amplitud)**.
  - **E3 = 0 (rojo punteado, umbral de escape)**.
  - **E4 = 0.2V0 (púrpura, movimiento infinito)**.
- Se puede observar en la curva verde y azul, que la particula no se puede mover libremente, esta confianada a unos ciertos valores extremos de x, aproximadamente entre -1 y 1.

Para $E=-V_0$, el punto de retorno es $x=0$ y para $E<-V_0$ los puntos de retorno son:

$$x_{retorno} = \pm \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{V_0}{E}}\right) \checkmark$$

El mínimo valor posible de la energía es cuando la partícula está en el fondo, matemáticamente, $V(x)$ es mínimo cuando $\cosh^2(x_0)=1$ lo que ocurre cuando $x_0=0$, por lo que:

$$E_{min} = V(0) = -V_0/\cosh^2(0) = -V_0$$

Por lo que el mínimo valor posible de la energía es $E_{min}=-V_0$.

e) Para determinar el periodo del movimiento en función de la energía E, usaremos la ecuación de conservación de energía (3) y despejamos $\dot{x}$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)} \checkmark$$

El periodo T es el tiempo que tarda en ir la partícula de x_{ret} a $-x_{ret}$, y es expresado por

$$T = \int_{-x_{ret}}^{x_{ret}} \frac{dx}{\dot{x}} = 2\int_0^{x_{ret}} \frac{dx}{\dot{x}}$$

Reemplazando $\dot{x}$ y simplificando nos queda que:

$$T = \sqrt{2m}\int_0^{x_{ret}}\left(E+\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)^{-1/2} \cdot dx$$

Esta integral en sí misma y sin valores numéricos, es complejo de resolver. El mejor método, sería usando aproximaciones numéricas como simpson. Las mejores aproximaciones son:

- Para energía baja $E \approx -V_0$

$$T \approx \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2V_0}}$$

- Para energía alta $E \approx 0$

$$T \approx \frac{\sqrt{2mV_0}}{\alpha E}$$

③ El lagrangiano de un sistema se expresa como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + b2\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2)$$
$$- \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

sujeto a $b^2 - ac \neq 0$; a, b, c son constantes.

a) Eq. Mov.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad , \ i = \{1, 2\} \ , \ x_i = \{x, y\}$$

⇒ Reemplazando el lagrangiano en las eq. de Euler-Lagrange se obtiene

$$\begin{cases} ma\ddot{x} + mb\ddot{y} - kax - kby = 0 \ ; \ i = 1 \\ mb\ddot{x} + mc\ddot{y} - kbx - kcy = 0 \ ; \ i = 2 \end{cases}$$

En forma Matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} m\ddot{x} - kx \\ m\ddot{y} - ky \end{pmatrix}}_{(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(0)}$$

dado que $\mathrm{Det}(A) \neq 0$.

$$\Rightarrow A^{-1}A(x) = A^{-1}(0) \Rightarrow (x) = (0),$$ que es

$$\begin{cases} m\ddot{x} - kx = 0 \\ m\ddot{y} - ky = 0 \end{cases}$$, un sistema desacoplado de osciladores armónicos.

b) $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0 \Rightarrow H \neq H(q, \dot{q}_j) \Rightarrow H = cte$

$$H = \sum_{i=1}^{s=2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} \quad ; \ \dot{q}_j = \dot{x}_i \Rightarrow H = T + V$$

$$\Rightarrow H = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + y^2) = Cte.$$

c) Dado que el sistema tiene dos coordenadas generalizadas a las que les corresponde una cantidad conservada, la energía total, a priori no es integrable en tanto que hace falta un elemento más en el conjunto linealmente independiente de primeras integrales, no obstante, en virtud de la forma desacoplada resultante de las Eq. de movimiento, es posible plantear una descomposición de la energía que satisface las condiciones de integrabilidad a saber, $E_T = cte = E_x + E_y$, definidas así

$E_x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$. $E_y = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} K y^2$. tales que

$\frac{dE_i}{dt} = 0$, $i = \{1, 2\}$.

4) Una partícula se mueve en un plano sujeta a

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right]$$

del que se requiere hallar el potencial generalizado para construir el Lagrangiano del sistema.

La fuerza generalizada se define como

$$f_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right). \quad (1)$$

En el problema se tiene $F = \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{r^2 c^2} + \frac{2\ddot{r}}{rc^2}$, $f = f(r, \dot{r}, \ddot{r})$.

y por (1), u debe ser $u(r, \dot{r})$. partiendo de (1)

$\Rightarrow f_i = m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{r}\frac{\partial V(r,\dot{r})}{\partial r \partial \dot{r}} + \ddot{r}\frac{\partial V(r,\dot{r})}{\partial \dot{r}\partial \dot{r}}$. y por igualación

$\Rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{r^2c^2} + \frac{2}{rc^2}\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{r}\frac{\partial V}{\partial r \partial \dot{r}} + \ddot{r}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}^2}$ (1.5) de donde se reconstruye la función potencial:

$\Rightarrow$ Seccion con $\ddot{r}$

$$\frac{2}{c^2 r}\ddot{r} = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{r}^2}\ddot{r} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{r}^2} = \frac{2}{c^2 r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} = \int \frac{2}{c^2 r}\, d\dot{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} = \int \frac{2}{c^2 r}\, d\dot{r} = \frac{2}{c^2 r}\dot{r} + g(r)$$

$$\Rightarrow V = \int \left[\frac{2\dot{r}}{c^2 r} + g(r)\right] d\dot{r} = \underline{\frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + g(r)\dot{r} + f(r)}. \quad (2)$$

Determinación de las funciones de r en (2). $(g(r)$ y $f(r))$,

se Reemplaza (2) en (1,5)

$$V = \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + g(r)\dot{r} + f(r) \rightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{r}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}\partial r} + \ddot{r}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}^2} = F$$

$$\Rightarrow -\left[-\frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} + g'(r)\dot{r} + f'(r)\right] + \dot{r}\left[-\frac{2\dot{r}}{c^2 r^2} + g'(r) + 0\right]$$
$$+ \ddot{r}\left[\frac{2}{c^2 r} + 0 + 0\right] = F$$

$$\Rightarrow \frac{-\dot{r}^2}{r^2 c^2} + \frac{2\ddot{r}}{r c^2} + g'(r)\dot{r} + g'(r) + f'(r) = \frac{-\dot{r}^2}{r^2 c^2} + \frac{2\ddot{r}}{r c^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow g(r) = 0, \quad f'(r) = \frac{1}{r^2} \Rightarrow f = \int \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{1}{r} + \cancel{c}$$

anulada sin pérdida de gen.

$$\Rightarrow V(r,\dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + \frac{1}{r}$$

El lagrangiano queda.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \left[\frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r}\right].$$