

# Cálculo de Programas Trabalho Prático MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática  
Universidade do Minho

Junho de 2021

## Grupo nr. 53

---

|       |                             |
|-------|-----------------------------|
| 93204 | José João Gonçalves         |
| 93314 | Maria Sofia Rocha Gomes     |
| 93194 | Miguel Rodrigues Santa Cruz |

## 1 Preâmbulo

**Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

## 2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “*literária*” [1], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

---

<sup>1</sup>O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

### 3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

#### 3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulo principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCI** utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na directoria *app*.

## Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

*Symbolic differentiation* consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

*Bin Sum X (N 10)*

designa  $x + 10$  na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

**Propriedade [QuickCheck] 1** *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr == id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr == id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o  $X$ , a função

$$eval\_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 12 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

**Propriedade [QuickCheck] 2** A função *eval\_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop\_sum\_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_sum\_idr a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} sum\_idr \textbf{ where} \\ sum\_idr &= eval\_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop\_sum\_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_sum\_idl a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} sum\_idl \textbf{ where} \\ sum\_idl &= eval\_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop\_product\_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_product\_idr a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} prod\_idr \textbf{ where} \\ prod\_idr &= eval\_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop\_product\_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_product\_idl a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} prod\_idl \textbf{ where} \\ prod\_idl &= eval\_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop\_e\_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop\_e\_id a &= eval\_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop\_negate\_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop\_negate\_id a &= eval\_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 3** Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop\_double\_negate &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_double\_negate a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} eval\_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize\_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 12 expressa como um hilomorfismo<sup>2</sup> e teste as propriedades:

**Propriedade [QuickCheck] 4** A função *optimize\_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop\_optimize\_respects\_semantics &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop\_optimize\_respects\_semantics a exp &= eval\_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize\_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:<sup>3</sup>

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

<sup>2</sup>Qual é a vantagem de implementar a função *optimize\_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

<sup>3</sup>Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

**Propriedade [QuickCheck] 5** A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (Real a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

**Propriedade [QuickCheck] 6** Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, Real a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

## Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.<sup>4</sup>

Para o caso de funções sobre os números naturais ( $\mathbb{N}_0$ , com functor  $F X = 1 + X$ ) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Lei (3.94) em [2], página 98.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.<sup>5</sup>
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau  $ax^2 + bx + c$  em  $\mathbb{N}_0$ . Seguindo o método estudado nas aulas<sup>6</sup>, de  $f\ x = ax^2 + bx + c$  derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$\text{init} = (c, a + b)$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de  $C_n$  que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \cdot \text{for loop init where } \dots$$

que implemente esta função.

**Propriedade [QuickCheck] 7** A função proposta coincide com a definição dada:

$$prop\_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

**Sugestão:** Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

## Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto  $\{P_0, \dots, P_N\}$  de pontos de controlo, onde  $N$  é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

<sup>5</sup>Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

<sup>6</sup>Secção 3.17 de [2] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.



Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto  $\{P_0\}$  (ordem 0) é o próprio ponto  $P_0$ . O valor de uma curva de Bézier de ordem  $N$  é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros  $N - 1$  pontos e da curva de Bézier dos últimos  $N - 1$  pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo  $[0, 1]$ , é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão  $N$  é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados *NPoint* representa um ponto com  $N$  dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados *OverTime a* representa um termo do tipo  $a$  num dado instante (dado por um *Float*).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente *calcLine* como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

**Propriedade [QuickCheck] 8** *Definição alternativa.*

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função *deCasteljau* como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

**Propriedade [QuickCheck] 9** *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho<sup>7</sup> clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

## Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia  $x$ ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde  $k = \text{length } x$ . Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

**Propriedade [QuickCheck] 10** *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: [Double] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

## Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

<sup>7</sup>A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.



# Anexos

## A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina<sup>9</sup>, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até  $i = n$  da função exponencial  $\exp x = e^x$ , via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja  $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$  a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que  $e\ x\ 0 = 1$  e que  $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ . Se definirmos  $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  teremos  $e\ x$  e  $h\ x$  em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para  $h\ x\ n$  etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Exemplos tirados de [2].

<sup>9</sup>Cf. [2], página 102.

## C Código fornecido

### Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

### Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan<sup>10</sup>:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

### Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

---

<sup>10</sup>Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:<sup>11</sup>

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

---

<sup>11</sup>Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

## QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop <- arbitrary
    unop <- arbitrary
    exp1 <- arbitrary
    exp2 <- arbitrary
    a <- arbitrary
    frequency · map (id × pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]
infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) :: Real a => a -> a -> Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x) == (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

## Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 =>
(=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f =  $\lambda$ a -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f =  $\lambda$ a -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4  $\equiv$ 
( $\equiv$ ) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\equiv$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\equiv$  g a
infixr 4  $\leq$ 
( $\leq$ ) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\leq$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\leq$  g a
infixr 4  $\wedge$ 
( $\wedge$ ) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f  $\wedge$  g =  $\lambda$ a -> (f a)  $\wedge$  (g a)
```

## D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

### Problema 1

São dadas:

```
cataExpAr g = g · recExpAr (cataExpAr g) · outExpAr
anaExpAr g = inExpAr · recExpAr (anaExpAr g) · g
hyloExpAr h g = cataExpAr h · anaExpAr g
```

```

eval_exp :: Floating a => a -> (ExpAr a) -> a
eval_exp a = cataExpAr (g_eval_exp a)
optimize_eval :: (Floating a, Eq a) => a -> (ExpAr a) -> a
optimize_eval a = hyloExpAr (gopt a) clean
sd :: Floating a => ExpAr a -> ExpAr a
sd = π2 · cataExpAr sd_gen
ad :: Floating a => a -> ExpAr a -> a
ad v = π2 · cataExpAr (ad_gen v)

```

Definir:

### outExpAr

```

outExpAr X = i1 $ ()
outExpAr (N a) = i2 · i1 $ a
outExpAr (Bin o l r) = i2 · i2 · i1 $ (o, (l, r))
outExpAr (Un o e) = i2 · i2 · i2 $ (o, e)

```

Para este exercicio, sabemos que  $outExpAr \cdot inExpAr = id$ , sendo este um isomorfismo. Portanto:

$$outExpAr \cdot inExpAr = id \quad (4)$$

$$\equiv \{ \text{Def. inExpAr; Natural-id; Reflexão-+} \}$$

$$outExpAr \cdot [X, num\_ops] = [i_1, i_2] \quad (5)$$

$$\equiv \{ \text{Fusão-+} \}$$

$$[outExpAr \cdot X, outExpAr \cdot num\_ops] = [i_1, i_2] \quad (6)$$

$$\equiv \{ \text{Eq-+} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \cdot X = i_1 \\ outExpAr \cdot num\_ops = i_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\equiv \{ \text{Def. num ops; Natural-id; Reflexão-+} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \cdot X = i_1 \\ outExpAr \cdot [N, ops] = i_2 \cdot [i_1, i_2] \end{cases} \quad (8)$$

$$\equiv \{ \text{Eq-+ (no segundo ramo)} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \cdot X = i_1 \\ outExpAr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot ops = i_2 \cdot i_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\equiv \{ \text{Def. ops} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \cdot X = i_1 \\ outExpAr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot [bin, \widehat{Un}] = i_2 \cdot i_2 \cdot [i_1, i_2] \end{cases} \quad (10)$$

$$\equiv \{ \text{Eq-+} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \cdot X = i_1 \\ outExpAr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot bin = i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot \widehat{Un} = i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\equiv \{ \text{Pointwise} \}$$

$$\begin{cases} outExpAr \underline{X} = i_1 () \\ outExpAr (N a) = i_2 \cdot i_1 (a) \\ outExpAr (Bin o l r) = i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 (o, (l, r)) \\ outExpAr (Un o e) = i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 (o, e) \end{cases} \quad (12)$$

□

(13)

Deste modo, chegamos à expressão final de outExpAr.

### recExpAr

Aplicando a regra:  $baseExpAr' g f = baseExpAr id g id f f id f$  em  $recExpAr$  fica:

$$recExpAr id g = baseExpAr' id g \quad (14)$$

$$\equiv \{ \text{equivalente} \}$$

$$recExpAr id g = baseExpAr id id id g g id g \quad (15)$$

□

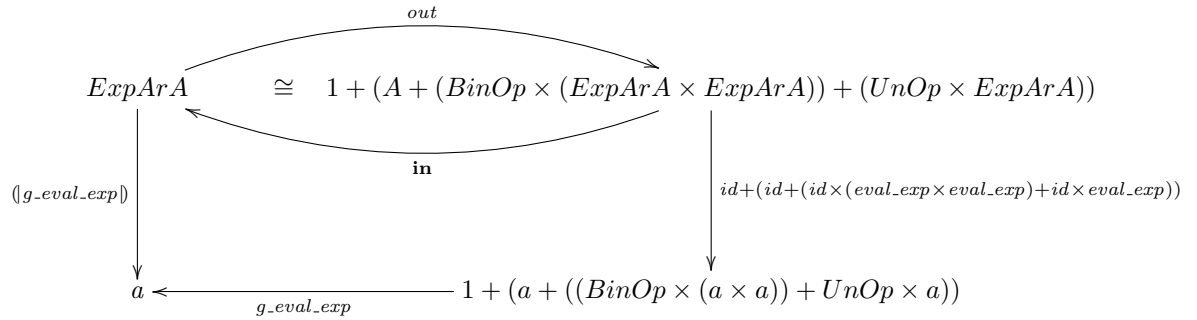
(16)

Chegando a esta definição:

$$recExpAr f = id + (id + (id \times (f \times f) + id \times f))$$

### g\_eval\_exp

Tendo a definição de  $recExpAr$  é possível obter o seguinte diagrama do catamorfismo de  $eval\_exp$ :



Para descobrir o gene  $g\_eval\_exp$  usamos o seu tipo e as regras matemáticas.

Portanto:

```
g_eval_exp e = [e, g_eval1] where
  g_eval1 = [id, g_eval2]
  g_eval2 = [g_eval_exp3, g_eval_exp4]
  g_eval_exp3 (a, (b, c)) = if a ≡ Product then b * c else b + c
  g_eval_exp4 (a, b) = if a ≡ E then Prelude.exp b else - b
```

### optimize\_eval

Para tirar proveito dos elementos absorventes de cada operação, definimos um hilomorfismo onde o anamorfismo não altera a estrutura de dados o que permite que o catamorfismo permaneça igual ao gene  $g\_eval\_exp$ .

```
clean (Bin Product _ (N 0)) = outExpAr $ N 0
clean (Bin Product (N 0) _) = outExpAr $ N 0
clean x = outExpAr x
```

$$gopt\ a = g\_eval\_exp\ a$$

### sd\_gen

Tendo a definição de  $recExpAr$  é possível obter o seguinte diagrama do catamorfismo de  $sd$ :

$$\begin{array}{ccc}
 ExpAr\ A & \xrightarrow{\quad out \quad} & 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A)) + (UnOp \times ExpAr\ A)) \\
 \downarrow \scriptstyle \llbracket sd\_gen \rrbracket & \cong & \downarrow \scriptstyle id + (id + (id \times (sd \times sd) + id \times sd)) \\
 ExpAr\ A \times ExpAr\ A & \xleftarrow{\scriptstyle sd\_gen} & 1 + (A + ((BinOp \times ((ExpAr\ A)^2 \times (ExpAr\ A)^2)) + UnOp \times (ExpAr\ A)^2))
 \end{array}$$

Para descobrir o gene  $sd\_gene$  temos de usar o seu tipo e as regras de derivação conhecidas.

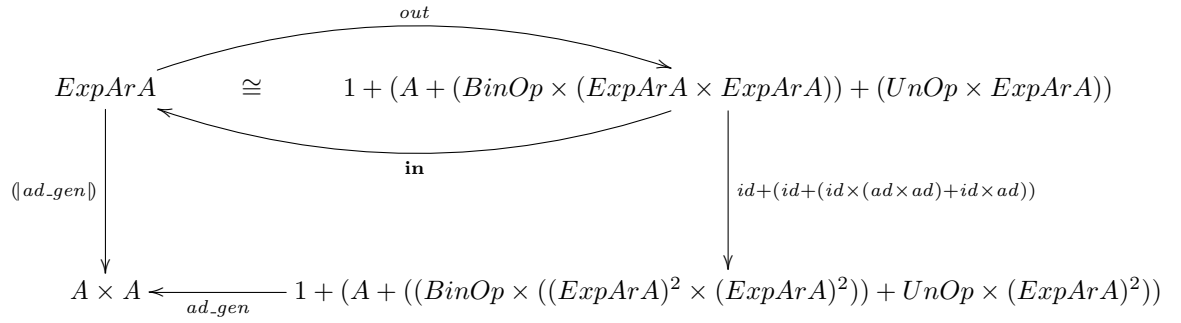
Portanto:

```

sd_gen :: Floating a =>
  () + (a + ((BinOp, ((ExpAr a, ExpAr a), (ExpAr a, ExpAr a))) + (UnOp, (ExpAr a, ExpAr a)))) -> (ExpAr a
sd_gen = [g_sd1, [g_sd2, [g_sd_gen4, g_sd_gen5]]] where
  g_sd1 _ = (X, N 1)
  g_sd2 a = (N a, N 0)
  g_sd_gen4 (o, ((exp1, exp2), (exp3, exp4))) = if o == Product then (Bin Product exp1 exp3, Bin Sum (Bin Product exp2 exp4))
  else (Bin Sum exp1 exp3, Bin Sum exp2 exp4)
  g_sd_gen5 (o, (exp1, exp2)) = if o == E then (Un o exp1, Bin Product (Un o exp1) exp2)
  else (Un o exp1, Un o exp2)

```

**ad\_gen**



Para calcular o valor da derivada de uma expressão nesse ponto, sem manipular a expressão original através do método de *Automatic differentiation* temos que definir um gene do catamorfismo que crie um par com o valor original e o valor da derivada no ponto. Utilizando o diagrama e as regras matemáticas chega-se à definição:

```

ad_gen d = [g_ad1, [g_ad2, [g_ad3, g_ad4]]] where
  g_ad1 = (d, 1)
  g_ad2 a = (a, 0)
  g_ad3 (o, ((e1, e2), (e3, e4))) = if o ≡ Product then (e1 * e3, e1 * e4 + e2 * e3)
    else (e1 + e3, e2 + e4)
  g_ad4 (o, (e1, e2)) = if o ≡ E then (Prelude.exp e1, (Prelude.exp e1) * e2)
    else (negate e1, negate e2)

```

## Problema 2

Definir

```

loop (c, k, s) = (c * k `div` s, k + 4, s + 1)
inic = (1, 2, 2)
prj (c, k, s) = c

```

por forma a que

```
cat = prj · for loop inic
```

seja a função pretendida. **NB:** usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

A função pode ser definida recursivamente como se deriva a seguir:

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)!(n+1)!} \iff C_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)2n!}{(n+2)(n+1)!(n+1)n!} \iff C_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \times C_n \iff C_{n+1} = \\
&\frac{(2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \times C_n \iff C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} \times C_n
\end{aligned}$$

A partir daqui podemos definir 3 funções:  $c$ ,  $k$  e  $s$  tal que:

$$c \ 0 = 1$$

$$c_{n+1} = c_n * \frac{k_n}{s_n}$$

$$k \ 0 = 2$$

$$k_n = 4n + 2 \iff k_{n+1} = 4n + 4 + 2k_{n+1} = k_n + 4$$

$$s \ 0 = 2$$

$$s_n = n + 2 \iff s_{n+1} = n + 2 + 1 \iff s_{n+1} = s_n + 1$$



Sendo a *inic* igual á inicialização das variáveis, ou seja,  $inic = (1,2,2)$ , *loop* igual ao corpo do ciclo,  $loop(c,k,s) = (c*k \text{ 'div' } s, k+4, s+1)$  e *prj* a função que dado um triplo devolve o primeiro elemento.

### Problema 3

Para este exercício, começamos por desenhar o diagrama que representa este catamorfismo, pelo que se apresenta em seguida:

$$\begin{array}{ccc}
 NPoint & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + Q \times NPoint \\
 \downarrow \text{(|g|)=calcLine} & & \downarrow \text{id+id} \times \text{calcLine} \\
 NPoint \rightarrow (OverTime\ NPoint) & \xleftarrow{g} & 1 + Q \times (NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint)
 \end{array}$$

Deste modo, tendo o diagrama e sabendo que *calcLine* é um catamorfismo de um *either*, temos que o seu gene é  $g = [g1, g2]$ . Para *g1*, através da ajuda do *ghci*, determinamos que é do tipo  $[Q] \rightarrow Float \rightarrow [Q]$  e sabemos que para este caso o resultado será sempre uma lista vazia. Podemos então inferir que para quaisquer que sejam os dois argumentos, o resultado será sempre o mesmo:  $g1 \_ \_ = nil$ .

Para *g2*, através do código fornecido nos anexos, reparamos que num trecho da função auxiliar é-nos fornecida uma função que se adequa ao caso do *g2*, sendo que temos um par que vai para o mesmo tipo do resultado deste catamorfismo:  $(Q, NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint) \rightarrow (NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint)$ . Assim, recorreremos a esta função para calcular *g2*, obtendo assim o segundo elemento do *either* que compõe o catamorfismo.

#### calcLine

```

calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
calcLine = cataList h where
  h = [g1, g2]
  g1 _ _ = nil
  --
  g2 (d,f) l = case l of
    [] → nil
    (x : xs) → λz → concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z

```

#### deCasteljau

```

deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
deCasteljau = hyloAlgForm alg coalg where
  coalg = ⊥
  alg = ⊥
  hyloAlgForm = ⊥

```

Para este caso, sabemos que teríamos que partir de que um hilomorfismo é a composição dos combinadores catamorfismo e anamorfismo, pelo que inicialmente se constrói a estrutura (anamorfismo) e depois se consome a estrutura criada (catamorfismo). Porém, não conseguimos progredir na resolução deste problema até chegar a uma solução para o mesmo.

### Problema 4

Solução para listas não vazias:

```

avg = π1 · avg_aux

avg_aux = cataList [b, q] where
  b = (1, 0)
  q (h, (avg, lng)) = ((h + (avg * lng)) / (succ lng), (succ lng))

```

**NOTA:** Neste caso, uma vez que estamos a trabalhar com listas não vazias, utilizamos  $\mathbf{in} = [\text{singl}, \text{cons}]$  em vez de  $\mathbf{in} = [\text{nil}, \text{cons}]$ .

O diagrama correspondente a este exercício traduz-se no seguinte:

$$\begin{array}{ccc} A+ & \xleftarrow{\text{inList}} & A + A \times A \\ \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + id \times \langle g \rangle \\ A \times N & \xleftarrow{g} & A + A \times (N \times N) \end{array}$$

Pelo enunciado sabemos que:

$\text{avg\_aux} = \langle [b, q] \rangle$  e que  $\text{avg\_aux} = \langle \text{avg}, \text{length} \rangle$ .

Deste modo, podemos inferir que  $\langle \text{avg}, \text{length} \rangle = \langle [b, q] \rangle$ .

Portanto torna-se necessário traduzir este either num split, para que seja possível aplicar a Lei da Recursividade Mútua (Fokkinga).

$$[b, q] \tag{17}$$

$$\equiv \{ \text{Reflexão-x} \}$$

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \cdot [b, q] \tag{18}$$

$$\equiv \{ \text{Fusão-x} \}$$

$$\langle \pi_1 \cdot [b, q], \pi_2 \cdot [b, q], \cdot \rangle \tag{19}$$

$$\equiv \{ \text{Fusão-+} \}$$

$$\langle [\pi_1 \cdot b, \pi_1 \cdot q], [\pi_2 \cdot b, \pi_2 \cdot q] \rangle \tag{20}$$

$$\square \tag{21}$$

Deste modo, conseguimos aplicar diretamente a Lei da Recursividade Mútua (tal como sugerido), uma vez que sabemos que:

$\text{avg\_aux} = \langle \text{avg}, \text{length} \rangle$  é equivalente a  $\langle \text{avg}, \text{length} \rangle = \langle ([\pi_1 \cdot b, \pi_1 \cdot q] [\pi_2 \cdot b, \pi_2 \cdot q]) \rangle$

$$\tag{22}$$

$$\equiv \{ \text{Fokkinga} \}$$

$$\begin{cases} \text{avg} \cdot \mathbf{in} = [\pi_1 \cdot b, \pi_1 \cdot q] \cdot F \langle \text{avg}, \text{length} \rangle \\ \text{length} \cdot \mathbf{in} = [\pi_2 \cdot b, \pi_2 \cdot q] \cdot F \langle \text{avg}, \text{length} \rangle \end{cases} \tag{23}$$

$$\equiv \{ \text{Def. in; Ff} = id + id \times f \}$$

$$\begin{cases} \text{avg} \cdot [\text{singl}, \text{cons}] = [\pi_1 \cdot b, \pi_1 \cdot q] \cdot (id + id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) \\ \text{length} \cdot [\text{singl}, \text{cons}] = [\pi_2 \cdot b, \pi_2 \cdot q] \cdot (id + id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) \end{cases} \tag{24}$$

$$\equiv \{ \text{Fusão-+; Absorção-+} \}$$

$$\begin{cases} [\text{avg} \cdot \text{singl}, \text{avg} \cdot \text{cons}] = [\pi_1 \cdot b, \pi_1 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle)] \\ [\text{length} \cdot \text{singl}, \text{length} \cdot \text{cons}] = [\pi_2 \cdot b, \pi_2 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle)] \end{cases} \tag{25}$$

$$\equiv \{ \text{Eq-+} \}$$

$$\begin{cases} \text{avg} \cdot \text{singl} = \pi_1 \cdot b \\ \text{avg} \cdot \text{cons} = \pi_1 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) \\ \text{length} \cdot \text{singl} = \pi_2 \cdot b \\ \text{length} \cdot \text{cons} = \pi_2 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) \end{cases} \tag{26}$$

$$\equiv \{ \text{Pointwise} \}$$

$$\begin{cases} \text{avg} \cdot \text{singl } l = (\pi_1 \cdot b) l \\ \text{avg} \cdot \text{cons } (h, t) = \pi_1 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) (h, t) \\ \text{length} \cdot \text{singl } l = (\pi_2 \cdot b) l \\ \text{length} \cdot \text{cons } (h, t) = \pi_2 \cdot q \cdot (id \times \langle \text{avg}, \text{length} \rangle) (h, t) \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{Assoc-comp; Def. cons} \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{avg} \cdot \text{singl } l = \pi_1 \cdot (b \ l) \\ \text{avg} (h : t) = \pi_1 \cdot q \cdot (id \ h, \langle \text{avg}, \text{length} \rangle \ t) \\ \text{length} \cdot \text{singl } l = \pi_2 \cdot (b \ l) \\ \text{length} (h : t) = \pi_2 \cdot q \cdot (id \ h, \langle \text{avg}, \text{length} \rangle \ t) \end{array} \right. \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{Def-split} \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{avg} \cdot \text{singl } l = \pi_1 \cdot (b \ l) \\ \text{avg} \cdot \text{cons} (h : t) = \pi_1 (q (h, (\text{avg } t, \text{length } t))) \\ \text{length} \cdot \text{singl } l = \pi_2 \cdot (b \ l) \\ \text{length} \cdot \text{cons} (h : t) = \pi_2 (q (h, (\text{avg } t, \text{length } t))) \end{array} \right. \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\Box \quad (30)$$

Após chegar a este ponto, é possível inferir que temos que tomar  $b$  e  $q$  como pares. Assim, temos  $b = (1, 0)$  e  $q (h, (\text{avg}, \text{lng})) = ((h + (\text{avg} * \text{lng})) / (\text{succ } \text{lng}), (\text{succ } \text{lng}))$ .

Note-se que para  $q$  utilizámos o cálculo da média ponderada para o primeiro elemento do par e o incremento do length para o segundo.

#### Solução para árvores de tipo **LTree**:

$$\begin{aligned}
\text{avgLTree} &= (\widehat{f}) \cdot \langle \pi_1 \cdot \langle \text{gene} \rangle, \pi_2 \cdot \langle \text{gene} \rangle \rangle \text{ where} \\
h1 &= id \\
h2 &= (\widehat{+}) \cdot (\pi_1 \times \pi_1) \\
k1 &= \underline{1} \\
k2 &= (\widehat{+}) \cdot (\pi_2 \times \pi_2) \\
b &= \langle h1, k1 \rangle \\
q &= \langle h2, k2 \rangle \\
\text{gene} &= [b, q]
\end{aligned}$$

Para este exercício, resolvemos utilizar um  $\langle \text{sum}, \text{length} \rangle$ , uma vez que nos facilita o cálculo e, deste modo apenas temos que efetuar a divisão entre os membros deste split para obter a média.

O diagrama correspondente a este exercício traduz-se no seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
\text{LTree } A & \xleftarrow{\text{in}} & A + (\text{LTree } A \times \text{LTree } A) \\
\langle g \rangle \downarrow & & \downarrow id + \langle g \rangle \times \langle g \rangle \\
A \times N & \xleftarrow{g} & A + (A \times N) \times (A \times N)
\end{array}$$

Assim, passamos a demonstrar os cálculos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sum} \cdot \text{in} = h \cdot F \langle \text{sum}, \text{length} \rangle \\ \text{len} \cdot \text{in} = k \cdot F \langle \text{sum}, \text{length} \rangle \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ h = [h1, h2]; k = [k1, k2]; Ff = id + f \times f \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{sum} \cdot \text{in} = [h1, h2] \cdot (id + \langle \text{sum}, \text{length} \rangle \times \langle \text{sum}, \text{length} \rangle) \\ \text{len} \cdot \text{in} = [k1, k2] \cdot (id + \langle \text{sum}, \text{length} \rangle \times \langle \text{sum}, \text{length} \rangle \ 0) \end{array} \right. \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{Absorção+; Def. in; Eq+} \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{sum} \cdot \text{Leaf} = h1 \\ \text{sum} \cdot \text{Fork} = h2 \cdot (\langle \text{sum}, \text{length} \rangle \times \langle \text{sum}, \text{length} \rangle) \\ \text{length} \cdot \text{Leaf} = k1 \\ \text{length} \cdot \text{Fork} = k2 \cdot (\langle \text{sum}, \text{length} \rangle \times \langle \text{sum}, \text{length} \rangle) \end{array} \right. \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\Box \quad (34)$$

Neste ponto, é preciso ter em conta o objetivo de cada ramo.

- Para o primeiro ramo, sabemos que o somatório de uma folha é o proprio valor (dividir por 1).
- Para o segundo ramo, temos que somar os valores dos somatórios decorrentes de cada ramo.
- Para o terceiro ramo, sabemos que o tamanho de uma arvore com apenas uma folha é 1.
- Finalmente, para o quarto ramo, queremos atualizar o length, somando os length's das duas arvores descendentes do nodo em questão.

Deste modo, conseguimos obter os valores para  $h1$ ,  $h2$ ,  $k1$  e  $k2$ .

Posteriormente, temos que ter em conta que no final do cálculo temos  $\langle [h1, h2], [k1, k2] \rangle$ , mas sendo o gene um either, temos que aplicar a Lei da Troca como meio de obter um either de splits, ficando então  $[\langle h1, k1 \rangle, \langle h2, k2 \rangle]$ , sendo  $b = \langle h1, k1 \rangle$  e  $q = \langle h2, k2 \rangle$ .

Por fim, para obter o avg, temos apenas que efetuar a divisão do somatório pelo tamanho, recorrendo ao  $\widehat{(\cdot)}$ .

## Problema 5

Inserir em baixo o código **F#** desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`:

# Índice

- LaTeX, [1](#)
  - [bibtex](#), [2](#)
  - [lhs2TeX](#), [1](#)
  - [makeindex](#), [2](#)
- Cálculo de Programas, [1](#), [2](#), [5](#)
  - Material Pedagógico, [1](#)
    - BTree.hs, [8](#)
    - Cp.hs, [8](#)
    - LTree.hs, [8](#), [16](#)
    - Nat.hs, [8](#)
- Combinador “pointfree”
  - cata*, [8](#), [9](#), [15](#)
  - either*, [3](#), [8](#), [13](#), [15–17](#)
- Curvas de Bézier, [6](#), [7](#)
- Deep Learning), [3](#)
- DSL (linguagem específica para domínio), [3](#)
- F#, [8](#), [17](#)
- Função
  - $\pi_1$ , [6](#), [9](#), [15](#), [16](#)
  - $\pi_2$ , [9](#), [13](#), [15](#), [16](#)
  - for*, [6](#), [9](#), [14](#)
  - length*, [8](#), [15–17](#)
  - map*, [11](#), [12](#)
  - succ*, [15](#), [16](#)
  - uncurry*, [3](#), [13](#), [16](#), [17](#)
- Functor, [5](#), [11](#)
- Haskell, [1](#), [2](#), [8](#)
  - Gloss, [2](#), [11](#)
  - interpretador
    - GHCi, [2](#)
  - Literate Haskell, [1](#)
  - QuickCheck, [2](#)
  - Stack, [2](#)
- Números de Catalan, [6](#), [10](#)
- Números naturais ( $\mathbb{N}$ ), [5](#), [6](#), [9](#)
- Programação
  - dinâmica, [5](#)
  - literária, [1](#)
- Racionais, [7](#), [8](#), [10–12](#)
- U.Minho
  - Departamento de Informática, [1](#)

## Referências

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.