1 CONJUNTOS

Una aproximación intuitiva al concepto de conjunto es: *colección de objetos*, y a los objetos se los denominará *elementos*. En general, los elementos de un conjunto se representan a través de las letras del abecedario en minúscula; por su parte, los conjuntos lo harán con letras mayúsculas *italizadas*.

Cuando un elemento a forma parte de un conjunto A, se dice que *pertenece* a él, y se acostumbra a representar ese hecho como $a \in A$; si no pertenece, se simboliza por $a \notin A$ (o también como: $\neg(a \in A)$)

Un tipo de conjunto de especial importancia es aquel conformado por **todos los elementos de interés en una situación particular**; a este tipo de conjunto se le denomina conjunto *universal* o conjunto *referencia*; lo habitual cuando se trata de representar a este tipo de conjunto, es emplear una letra mayúscula *italizada*, como X, aunque también es normal hacerlo con el símbolo 1. El universal X puede formalizarse como aquel conjunto que satisface: $\forall x(x \in X)$ donde x es un elemento cualquiera en una situación particular.

Hay dos formas de determinar los elementos de un conjunto, por *compresión* y por *extensión*. Se determinan los elementos de un conjunto por *compresión* cuando se establece una propiedad o característica de tal forma que aquellos elementos que la satisfacen quedan perfectamente estipulados, y pertenecen, por tanto, al conjunto; y los que no la cumplen, no pertenecen al conjunto; formalmente, la determinación de un conjunto por comprensión se representa como: $A = \{x | x \in X \wedge \mathrm{P}\}$ [1]; donde x representa cualquier elemento de un conjunto universal X, y P es una fbf del cálculo cuantificacional (o del proposicional) que hace referencia a un atributo, propiedad, regla, condición, relación o restricción que debe exhibir el elemento x para ser parte de A. Se define un conjunto por *extensión* cuando se listan todos, y cada uno, de los elementos que pertenecen a él; por ejemplo: $A = \{a, b, c, f\}$.

Observe la definición, por comprensión, de un conjunto C, $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 < \mathrm{x} < 3\}$, y por extensión $C = \{-4, -3, -2, -1,0,1,2\}$ donde el conjunto de referencia es el de los números enteros $\mathbb{Z}$.

1.1 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

- **De igualdad/diferencia**.

  Dos conjuntos A y B son *iguales* si, y sólo si, poseen los mismos elementos. La formalización de la igualdad entre dos conjuntos cualquiera A y B puede hacerse mediante el uso del cálculo cuantificacional; observe:

  $$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

  Dos conjuntos son diferentes, si, y sólo si, existe al menos un elemento que al pertenecer a uno de los conjuntos, necesaria y suficientemente, no está en el otro.

  $$A \neq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \leftrightarrow x \notin B)$$

- **De inclusión/exclusión**.

  Un conjunto A está *incluido* en un conjunto B, o es *subconjunto de* B, si todos sus elementos también se encuentran en B. Formalmente:

  $$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

[1] También es usual emplear la siguiente notación $A = \{x | x \in X, \mathrm{P}\}$

Un conjunto A no está incluido en otro B si, y solo si, existe al menos un elemento que se encuentra en A pero no en B.[2]

$$A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B)$$

Se dice que A es un *subconjunto propio* de B, si A es un subconjunto de B pero le hace falta *al menos* un elemento para ser igual a B, así:

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \land \exists x(x \notin A \land x \in B)$$

Además, un conjunto A no está incluido "propiamente" en otro B, cuando A posee un elemento que no lo tiene B, o cuando es B el que se encuentra incluido en A.

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B) \lor \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

Dos conjuntos A y B se dicen ***mutuamente excluyentes***, o ***disyuntos***, cuando no comparten elementos; formalmente se expresa de la siguiente manera:

$$A <> B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \notin B)$$

Dos conjuntos no son mutuamente excluyentes, cuando comparten al menos un elemento:

$$A \not<\!\not> B \leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \in B)$$

Nota. Procedimiento general para demostrar la relación de inclusión $A \subseteq B$

1.	$x \in A$	Supuesto.
$\vdots$		Aplicación de una secuencia de reglas de validez lógicas y de definiciones y teoremas propios de la Teoría de Conjuntos.
$i.$	$x \in B$	Resultado de los $i-1$ pasos previos
$i+1.$	$x \in A \rightarrow x \in B$	Ley de la inferencia deductiva entre las proposiciones del paso 1 e i.
$i+2.$	$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$	Generalización universal de la proposición del paso $i+1$.

1.2 ALGUNOS TIPOS DE CONJUNTOS

- **Conjuntos Finitos**

Un conjunto es finito cuando puede establecerse la cantidad de elementos que lo componen. En un conjunto finito de n elementos, a cada uno de esos elementos se le puede asignar un número natural entre 1 y n (es decir, se los puede enumerar). [3] A continuación, son presentados algunas clases de conjuntos finitos.

Conjunto unitario. Es aquel que posee sólo un elemento. Si $x \in X$, donde X es el conjunto de referencia, entonces el conjunto unitario conformado por ese elemento se denota como $\{x\}$. Además:

$$y \in \{x\} \leftrightarrow y = x$$

$$y \notin \{x\} \leftrightarrow y \neq x$$

$$x \in \{x\}$$

Conjunto binario. Es aquel que posee sólo dos elementos. Si $x \in X$ y $y \in X$, entonces el conjunto binario compuesto por esos elementos será $\{x, y\}$. Además:

$$z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \lor z = y$$

$$z \notin \{x, y\} \leftrightarrow z \neq x \land z \neq y$$

[2] Puede demostrarse que $A \nsubseteq B \vdash A \neq B$

[3] Los que no son finitos, son *Conjuntos infinitos*.

Conjunto n-ario. Es aquel que posee sólo n elementos. Si $x_1 \in X$ y… $x_n \in X$, entonces el conjunto n-ario se denota como $\{x_1, \dots, x_n\}$. Además:

$$z \in \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow z = x_1 \lor \dots \lor z = x_n$$

$$z \notin \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow z \neq x_1 \land \dots \land z \neq x_n$$

Nota: $\{x\} = \{x, x\} = \cdots = \{x, \dots, x\}$

- **Familia de Conjuntos.** Una familia $\boldsymbol{A}$ de conjuntos, es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos. Una familia $\boldsymbol{A}$ de conjuntos puede definirse entonces como:

  $A = \{x|\ s(x)\}$; donde $s(x)$: "x es un conjunto".

  Ejemplo de una familia de conjuntos puede ser la de los números reales $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$, donde $\mathbb{Q}$ simboliza el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros, y $\mathbb{N}$ el de los números naturales.

Es común, también, encontrar la siguiente forma de establecer una familia de conjuntos:

$$A = \{A_i | i \in I\}$$

Donde a la letra i se le denomina el *índice* o *identificador* del conjunto A_i; I es un conjunto en el que se coleccionan los identificadores, conocido como *conjunto de identificación o conjunto índice*; por todo lo anterior, al conjunto A se le llama también *conjunto indizado o indexado*. Se puede extraer una *subsecuencia* ***ordenada*** de índices de I, dígase J, cuando se satisface que $J \subseteq I$ y cada elemento de J conserva el orden de la secuencia original. La subsecuencia ordenada *complemento* de J, respecto de la secuencia I, es J' donde $J' = \{i | i \in I\ \land i \notin J\}$. Un conjunto de identificación frecuentemente empleado es el conjunto de los primeros n números naturales $\{1,2, \dots, n\}$, representado sea por I_n o mediante $\mathbb{N}_n$.

Un ejemplo de familia de conjuntos podría ser el que se conforme con dos conjunto de rectas que corten al eje Y en un mismo punto c, las unas con pendiente cero o positivas, y las otras con pendiente negativas, así: $L = \{L_1, L_2\}$, tal que $L_1 = \{y = mx + c \mid m \geq 0\}$, y $L_2 = \{y = mx + c \mid m < 0\}$.

- **Conjunto vacío**. Cuando un conjunto carece de elementos se representa por $\emptyset$, o el símbolo 0, y se denomina *conjunto vacío*; formalmente se define del siguiente modo: sea $\boldsymbol{A}$ cualquier subconjunto de $\boldsymbol{X}$, o sea $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$, entonces

  $$\emptyset = \{x | x \in A \land x \notin A\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$x \in \emptyset \leftrightarrow x \in A \land x \notin A$$

  Además, la no pertenencia de un elemento al conjunto se formaliza así:

  $$x \notin \emptyset \leftrightarrow x \notin A \lor x \in A$$

- **Conjunto Potencia de $\boldsymbol{A}$ (Conjunto de Partes de $\boldsymbol{A}$).** La familia de todos los subconjuntos que pueden conformarse con los elementos de $\boldsymbol{A}$ se denomina su conjunto potencia, $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$**:**

  $$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A$$

  La no pertenencia de un elemento al conjunto se formaliza así:

$$B \notin \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \nsubseteq A$$

1.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS

- **Unión**. Sean A y B dos conjuntos. El conjunto que se forma con los elementos que pertenezcan al menos a uno de esos conjuntos se denomina **unión** de A y B:

  $$A + B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$x \in (A + B) \leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$

  La no pertenencia de un elemento al conjunto unión, se formaliza así:

  $$x \notin (A + B) \leftrightarrow x \notin A \land x \notin B$$

- **Intersección**. El conjunto que se forma con los elementos que pertenezcan simultáneamente a A y a B se le conoce como **intersección** de A y B:

  $$A \cdot B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$x \in A \cdot B \leftrightarrow x \in A \land x \in B$$

  La no pertenencia de un elemento al conjunto intersección, se formaliza así:

  $$x \notin A \cdot B \leftrightarrow x \notin A \lor x \notin B$$

- **Diferencia de A respecto de B**. Es el conjunto que resulta de identificar los elementos que se encuentran en A y que no pertenecen a B.

  $$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \land x \notin B$$

  La no pertenencia de un elemento al conjunto diferencia, se formaliza así:

  $$x \notin (A - B) \leftrightarrow x \notin A \lor x \in B$$

- **Diferencia Simétrica** entre A y B Es el conjunto que resulta de identificar los elementos que se encuentran en A o en B pero **no** en ambos:

  $$A \oplus B = (A - B) + (B - A) = \{x | (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)\}$$

  Expresión formal asociada es:

  $$x \in A \oplus B \leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)$$

  La no pertenencia de un elemento al conjunto diferencia simétrica, se formaliza así:

  $$x \notin A \oplus B \leftrightarrow (x \notin A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \in A)$$

- **Complementación (Conjunto complemento** de un conjunto A, respecto a un conjunto referencia X). Se compone de los elementos de X que no se encuentran en A; o sea:

$$A' = X - A = \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$$

Expresión formal asociada es:

$$x \in A' \leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A$$

La no pertenencia de un elemento al conjunto complemento de A, es decir a A', es:

$$x \notin A' \leftrightarrow x \notin X \vee x \in A$$

Puesto que lo normal es considerar que $x \in X$, y aplicando el TP5a al lado derecho de la bicondicional previa, se tiene:

$$x \notin A' \leftrightarrow x \in A$$

Nota. Es fácil mostrar que la definición formal de conjuntos disyuntos es equivalente a $\neg\exists x(x \in A \wedge x \in B)$, luego:

$$A <> B \leftrightarrow \neg\exists x(x \in A \cdot B)$$

Luego, el concepto de conjuntos disyuntos puede ser reinterpretado de la siguiente manera; "dos conjuntos son disyuntos cuando la intersección entre ellos no tiene elementos". [4]

Empleando la definición del complemento de un conjunto, se pueden simbolizar de una manera diferente algunas definiciones anteriores:

$$A - B = A \cdot B'$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= A \cdot B' + B \cdot A' \\ &= (A + B) \cdot (A \cdot B)' \end{aligned}$$

$$x \in A'' \leftrightarrow x \notin A'$$

1.4 ALCANCE Y PRECEDENCIA (JERARQUÍA) DE APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Para leer y comprender adecuadamente expresiones en el ámbito de la Teoría de Conjuntos, es importante establecer o conocer una jerarquía entre las operaciones que allí puedan aparecer. La jerarquía debe considerar que podrán encontrarse símbolos que refieren operaciones entre conjuntos, como también símbolos que corresponden a expresiones lógicas.

Alcance de operaciones *sobre* y de relaciones *entre* Conjuntos

- De encontrar signos de agrupación, ( ), deben aplicarse a los conjuntos que agrupa.
- De encontrar signo de complementación, $'$, debe aplicársele al conjunto más próximo que le antecede.
- De hallar signo de intersección, $\cdot$, debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.
- De hallar signo de unión, $+$, debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.
- De hallar signo de unión, $-$, debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.
- De hallar signo de unión, $\oplus$, debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.
- De hallar signo de igualdad/diferencia, $=, \neq$, cada uno debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.

[4] Otra manera de expresarlo es: $A <> B \leftrightarrow A \cdot B = \emptyset$

- De hallar signo(s) de inclusión/no-inclusión/exclusión, $\subseteq, \nsubseteq, \subset, \not\subset, <>, \nless\ngtr$, cada uno debe aplicársele a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha.
- De hallar signo(s) de pertenencia/no-pertenencia, $\in, \notin$, cada uno debe aplicarse al elemento más próximo a su izquierda y al conjunto más próximo que le sucede.

Prioridad de operaciones que aparecen en expresiones de Teoría de Conjuntos

$(\quad); \,'; \cdot; +; -, \oplus; =, \neq; \subseteq, \nsubseteq, \subset, \not\subset, <>, \nless\ngtr; \in, \notin; \neg; \wedge; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow$

En esta lista de precedencia debe entenderse que:

a) La prioridad más alta la tiene los signos de agrupación; de ahí hacia la derecha se reduce la prioridad.
b) Los signos que se separan con comas tienen la misma precedencia entre ellos.
c) Cuando se encuentren operaciones con la misma precedencia podrá emplear símbolos de paréntesis para establecer cuál debe efectuarse con prelación; si no lo hace, se entenderá que la prioridad se obtendrá cuando se lee la expresión de izquierda a derecha.

Es necesario resaltar que la estructura final de una fbf depende exclusivamente de quien la construye; éste deberá tomar la decisión del uso de los signos de agrupación para aquellas situaciones donde es necesario romper con esta jerarquía y ser fiel al significado de la proposición de la que proviene.

Ejemplos
Se suministra una secuencia de símbolos, coloque paréntesis que encierren las expresiones según el alcance y jerarquía de las operaciones y relaciones entre conjuntos:

- $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A}$

  $(A \cdot B) = A$

- $A \cdot B' = \emptyset \rightarrow A \subseteq B$

  $\big((A \cdot (B)') = \emptyset\big) \rightarrow (A \subseteq B)$

- $A \subseteq B \leftrightarrow A \cdot B = A$

  $(A \subseteq B) \leftrightarrow \big((A \cdot B) = A\big)$

- $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq A \cdot B \wedge A \cdot B \subseteq A$

  $(A \subseteq B) \rightarrow \Big(\big(A \subseteq (A \cdot B)\big) \wedge \big((A \cdot B) \subseteq A\big)\Big)$

- $x \notin A \vee (x \in A \wedge x \in B)$

  $(x \notin A) \vee \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big)$

- $x \notin A \vee x \in A \wedge x \notin A \vee x \in B$

  $\Big((x \notin A) \vee \big((x \in A) \wedge (x \notin A)\big)\Big) \vee (x \in B)$

- $(x \notin A \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B)$

$\big((x \notin A) \vee (x \in A)\big) \wedge \big((x \notin A) \vee (x \in B)\big)$

- $\neg\neg x \in A \wedge \neg x \in \emptyset \rightarrow \neg\neg x \in B$

  $\Big(\big(\neg(\neg(x \in A))\big) \wedge \big(\neg(x \in \emptyset)\big)\Big) \rightarrow \big(\neg(\neg(x \in B))\big)$

1.5 PROPIEDADES (O LEYES) DE LAS RELACIONES Y DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Teoremas

Sea 1 el conjunto referencia donde se definirán los subconjuntos A, B, C; las siguientes son propiedades obedecidas por las operaciones de conjuntos.

J1 $\forall x(x \notin \emptyset)$

El conjunto vacío carece de elementos.

J2 $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto A de X

Todo conjunto incluye al conjunto vacío.

J3 $A = \emptyset \leftrightarrow \forall x(x \notin A)$

Un conjunto cualquiera es igual al conjunto vacío si, y sólo sí, carece de elementos.

J4 $x \in A \leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

Afirmar que "un elemento pertenece a un conjunto" es equivalente a asegurar que "el conjunto unitario formado con ese elemento está incluido en ese mismo conjunto".

J5 $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes: "Todos los elementos de A también se encuentran en B" y "Todos los subconjuntos que se pueden configurar con los elementos de A, también se pueden configurar con los elementos de B".

J6 $A \subseteq A + B$

La unión de dos conjuntos incluye a cualquiera de esos dos conjuntos.

J7 $A \cdot B \subseteq A$

Un conjunto incluye a su intersección con cualquier otro conjunto.

J8 $A \cdot B \subseteq A + B$

La intersección de dos conjuntos se encuentra incluida en su unión.

J9 $(A + B \subseteq A \cdot B) \rightarrow A = B$

Cuando la unión de dos conjuntos se incluya en la intersección, es porque necesariamente esos dos conjuntos son iguales.

J10 $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq B + C$

Si un conjunto A se encuentra incluido en otro B, continuará estándolo en la unión de B con cualquier otro conjunto.

J11 $(A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C) \leftrightarrow A + B \subseteq C$

Afirmar que “dos conjuntos están incluidos en otro conjunto” es equivalente a asegurar que “su unión también lo estará”.

J12 $(C \subseteq A \wedge C \subseteq B) \leftrightarrow C \subseteq A \cdot B$

Afirmar que “dos conjuntos incluyen a un mismo conjunto” es equivalente a asegurar que “la intersección de aquellos también lo incluirá”.

J13 $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

Si un conjunto se encuentra incluido en un segundo conjunto y éste, a su vez, en un tercero, el primero también estará incluido en el tercero.

J14a	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A + B = B)$	
J14b	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cdot B = A)$	
J15a	$(A \subseteq B) \rightarrow (A + C \subseteq B + C)$	
J15b	$(A \subseteq B) \rightarrow (A \cdot C \subseteq B \cdot C)$	
J16a	$(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \rightarrow (A + C \subseteq B + D)$	
J16b	$(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \rightarrow (A \cdot C \subseteq B \cdot D)$	
J17a	$A \cdot B = B \cdot A$	Conmutatividad[5]
J17b	$A + B = B + A$	Conmutatividad
J18a	$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	Asociatividad
J18b	$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$	Asociatividad
J19a	$A \cdot A = A$	Idempotencia
J19b	$A + A = A$	Idempotencia
J20a	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	Distributividad de la intersección respecto a la unión
J20b	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributividad de la unión respecto a la intersección
J21a	$A + A \cdot B = A$	Absorción
J21b	$A \cdot (A + B) = A$	Absorción
J22a	$A \cdot \emptyset = \emptyset$	Acotación
J22b	$A + 1 = 1$	Acotación
J23a	$A + \emptyset = A$	Elemento neutro de la unión
J23b	$A \cdot 1 = A$	Elemento neutro de la intersección
J24a	$\emptyset' = 1$	
J24b	$1' = \emptyset$	
J25	$A'' = A$	Involución
J26a	$(A \cdot B)' = A' + B'$	De Morgan
J26b	$(A + B)' = A' \cdot B'$	De Morgan

[5] En adelante, la operación intersección entre los subconjuntos A y B, podrá ser simbolizada de una segunda forma: $A \cdot B$.

J27a	$A \cdot A' = \emptyset$	Tercio excluido
J27b	$A + A' = 1$	Tercio excluido

J28a $(A \subseteq B) \leftrightarrow (B' \subseteq A')$. B contiene a A, sii lo que está por fuera de A contiene lo que está por fuera de B.

J28b $(A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cdot B' = \emptyset)$ B contiene a A, sii A no posee elementos que están por fuera de B

J28c $(A \subseteq B) \leftrightarrow (A' + B = 1)$

J29 $(A + B = 1) \leftrightarrow (A' \subseteq B)$

J30 Si $x \in 1$, $A \subseteq 1$ y $B \subseteq 1$, entonces sólo una de las siguientes relaciones es válida:

$$x \in A \cdot B$$
$$x \in A \cdot B'$$
$$x \in A' \cdot B$$
$$x \in A' \cdot B'$$

J31a $(A \cdot B + A \cdot B') = A$

J31b $\big((A + B) \cdot (A + B')\big) = A$

2 CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

La cardinalidad de un conjunto es una medida de su tamaño; si A es un conjunto finito la cardinalidad se define como el número de elementos que lo componen. La cardinalidad de un conjunto A se denota de varias maneras, observe estas dos: $|A|$, o $card(A)$. Si A es un conjunto finito, se puede probar que el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$, $|\mathcal{P}(A)|$, es $2^{|A|}$.

2.1 PROPIEDADES

Card1	$\lvert\emptyset\rvert = 0$	Definición de cardinalidad de conjunto vacío
Card2	$A \subseteq B \rightarrow \lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	Definición de relación de cardinalidades bajo la condición de inclusión entre conjuntos
Card3	$A \cdot B = \emptyset \rightarrow \lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$	Definición de cardinalidad entre conjuntos excluyentes

2.2 PROPIEDADES DEDUCIBLES DE LA CARDINALIDAD

Teoremas

Card4 $|A \cdot B| \leq |A|$

Card5 $|A| \leq |A + B|$

Card6 $|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B|$

Card7 $|A'| = |X| - |A|$; donde $|X|$ es la cardinalidad del conjunto referencia X.

Card8 $(a \leq |A| \leq b) \leftrightarrow (|X| - b \leq |A'| \leq |X| - a)$

Card9a $\underbrace{\max(|A|, |B|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro} \leq |A + B| \leq \underbrace{|A| + |B|}_{A\ y\ B\ excluyentes}$

Card9b $\underbrace{\max(|A|,|B|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro} \leq |A+B| \leq \underbrace{\min(|A|+|B|,|X|)}_{A\ y\ B\ no\ necesariamente\ excluyentes}$ [6]

El valor extremo izquierdo se presenta cuando alguno de los dos conjuntos está incluido en el otro, caso en el que la unión sería el mayor de los dos conj9buntos; el valor extremo derecho se origina cuando a) los conjuntos no comparten elementos, eventualidad en la que basta sumar los elementos de los dos conjuntos, b) cuando comparten elementos $A \cdot B \neq \emptyset$ y las cardinalidades de ambos suman más que las del conjunto universal.

Card10a $\underbrace{0}_{A\ y\ B\ excluyentes} \leq |A \cdot B| \leq \underbrace{\min(|A|,|B|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro}$ [7]

El valor extremo izquierdo se presenta cuando los conjuntos no comparten elementos, el valor extremo derecho se presenta cuando alguno de los dos conjuntos está incluido en el otro, caso en el que la intersección sería el menor de los dos conjuntos.

Explorar la siguiente expresión

Card10b $\underbrace{\max(0,(|A|+|B|)-|X|)}_{A\ y\ B\ no\ necesariamente\ excluyentes} \leq |A \cdot B| \leq \underbrace{\min(|A|,|B|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro}$

[6] Se supone que no se conoce el valor de $|A \cdot B|$, porque si así fuera bastaría con emplear el teorema Card_6

[7] Se supone que no se conoce el valor de $|A + B|$, porque si así fuera bastaría con emplear el teorema Card_6