

Variables aleatorias

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Función de distribución acumulada variable aleatoria
discreta

Función de distribución acumulada

Sea X una v.a discreta con f.m.p $p(x)$. **La función de distribución acumulada** de X , se representan con $F_X(x)$ (mayúscula) y se define como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} p(x'), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Si $F_X(x)$ es una función escalonada, X es una v.a discreta.
- Si $F_X(x)$ es una función continua, X es una v.a continua
- Si $F_X(x)$ se puede expresar como combinación lineal de funciones escalonadas y continuas, X es una v.a mixta¹.

¹Las v.a mixtas no se ven en este curso

Ejemplo

Tres monedas no cargadas son lanzadas simultáneamente. Escribir la f.d.a.

Solución:

La variable aleatoria es X : número de caras obtenidas.

El rango de X es: $A_X = \{0, 1, 2, 3\}$

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

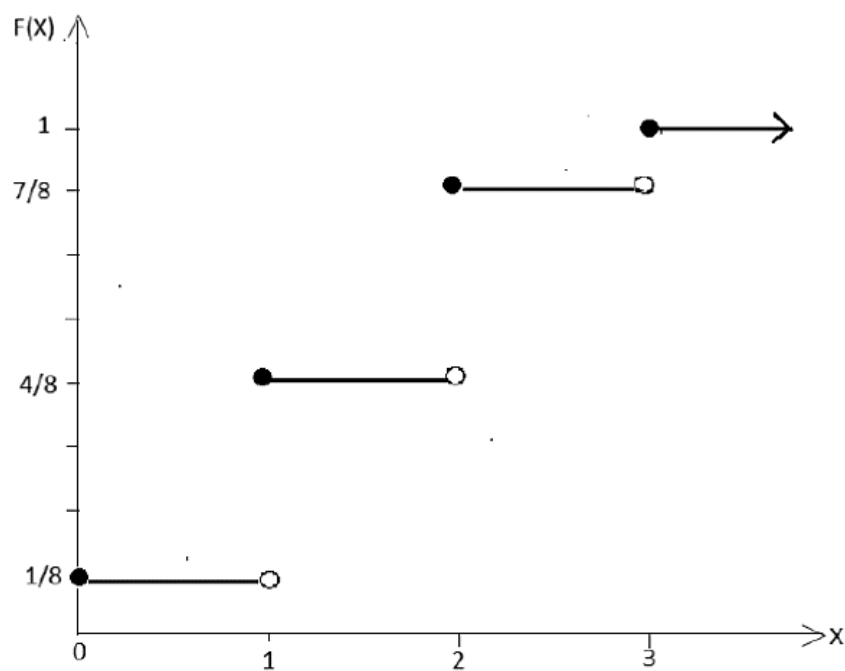
$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



Propiedades

- $0 \leq F(x) \leq 1$, porque $F(x)$ es una probabilidad.
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.
- Si $X < Y \implies F(x) < F(y)$.
- $P(X = a) = F(a) - F(a - 1)$.

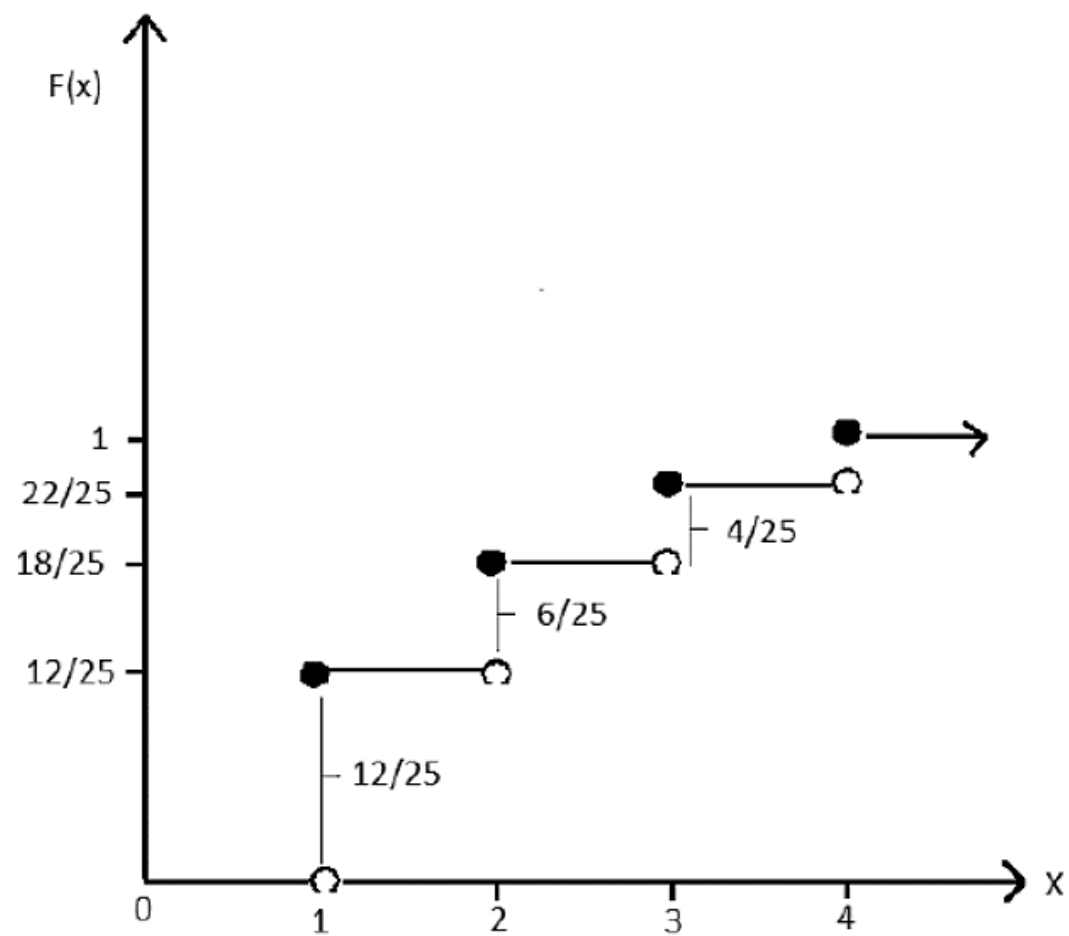
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 1).$
- $P(a < X < b) = F(b - 1) - F(a).$
- $P(a \leq X < b) = F(b - 1) - F(a - 1).$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$

Ejemplo

Sea X una v.a discreta. Determine el valor de k para que

$$p(x) = \frac{k}{x} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

sea f.m.p. Halle $p(x)$, $F(x)$ y $P(1 \leq X \leq 3)$.



Ejemplo

Una variable X tiene la siguiente función de probabilidad:

x	1	2	3	4	Total
$P(X=x)$	0.30	0.40	0.20	0.10	1

- Hallar la función de distribución de acumulada.
- Calcular: $P(X < 2)$, $P(2 < X \leq 4)$, $P(X \leq 3|X > 1)$

Ejemplo

Sea $F(x)$ la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X . Halle la f.m.p.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{16}, & \text{para } 0 \leq x < 1, \\ \frac{5}{16}, & \text{para } 1 \leq x < 2, \\ \frac{11}{16}, & \text{para } 2 \leq x < 3, \\ \frac{15}{16}, & \text{para } 3 \leq x < 4, \\ 1, & \text{para } x > 4. \end{cases}$$

Ejercicio

Una urna contiene 4 bolas blancas y 3 bolas negras. Se extraen al azar y sin reemplazo dos bolas de dicha urna. Sea X : número de bolas blancas en las dos extraídas. Hallar la f.m.p. y f.d.a. de X . Expresarla en forma gráfica y en forma tabular.