Distribuciones conjuntas

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

En la vida real, muchos fenómenos estudiados se rigen por medio del comportamiento conjunto de varias variables involucradas.

Si X y Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamientode ambas variables se llama **Distribución Bivariada o Bivariable**.

Si se tienen más de dos variables, se llama **Distribución Multivariada**.

Variables discretas

Función de masa de probabilidad conjunta (f.m.p.c)

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La probabilidad de que $X = x$ y $Y = y$ está determinada por la función de probabilidad conjunta de X y Y la cual denotaremos por $P(x, y)$ y se define como

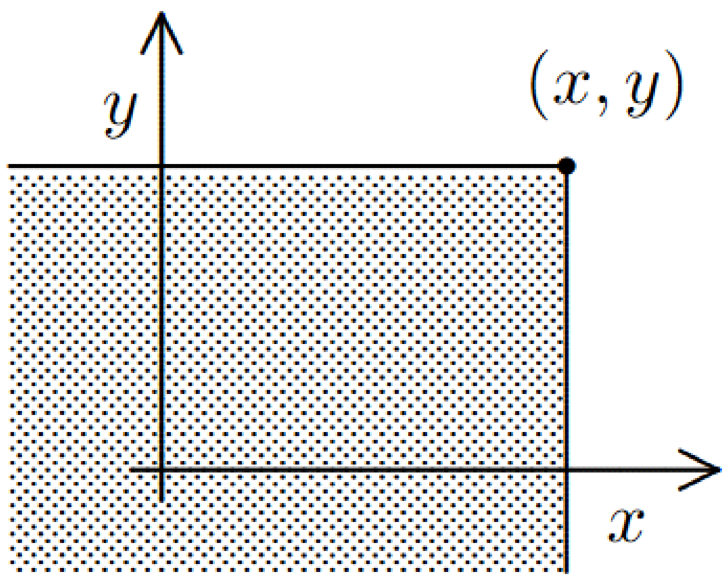
$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$$

Propiedades

- $p(x, y) \geq 0$
- $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$

Propiedades

- $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} p(x_i, y_i)$



Distribuciones marginales

Distribución Marginal de Y

$$p(y) = \sum_{x} p(x, y)$$

Distribución Marginal de X

$$p(x) = \sum_{y} p(x, y)$$

Distribuciones condicionales

Distribución condicional de Y **dado** $X = x$

$$p_{Y|x}(y) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$$

Distribución condicional de X **dado** $Y = y$

$$p_{X|y}(x) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias discretas con función dada por:

$$p(x, y) = k(x + y) \quad x = 1, 2, 3 \quad y = 1, 2$$

1. Calcule el valor de k de tal forma que $p(x, y)$ sea una f.m.p.c
2. Calcule $P(X + Y \leq 4)$

Ejemplo

Un costal de frutas que contiene 3 naranjas, 2 manzanas y 3 bananos. Se selecciona una muestra de 4 frutas. Si X es el número de naranjas y Y es el número de manzanas en la muestra, encuentre:

1. La función de masa de probabildad conjunta (f.m.p.c) de X y Y.
2. $P(X > 2, Y < 2)$
3. La distribución marginal de X y la de Y.
4. $P(X, Y \in A)$, donde $A = \{(x, y) : x + y \leq 2\}$
5. La distribución condicional de X dado $y = 2$.

Solución:

Vamos a responder las preguntas **1** y **2**

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-(x+y)}}{\binom{8}{4}}, & \text{si } x=0,1,2,3;\ y=0,1,2;\ 1\leq x+y\leq 4\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

$P(X=x,Y=y)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=0$				
$y=1$				
$y=2$				

$$P(X=0,Y=0)=0 \qquad P(X=0,Y=1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}}=\frac{2}{70}$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70} \qquad P(X=1,Y=0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{18}{70} \qquad P(X=1,Y=2)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{9}{70}$$

$$P(X=2,Y=0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{9}{70} \qquad P(X=2,Y=1)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{18}{70}$$

$$P(X=2,Y=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70} \qquad P(X=1,Y=2)=\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70}$$

$$P(X=3,Y=1)=\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}}=\frac{2}{70} \qquad P(X=3,Y=2)=0$$

$P(X=x, Y=y)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$p(y)$
$y=0$	0	3/70	9/70	3/70	15/70
$y=1$	2/70	18/70	18/70	2/70	40/70
$y=2$	3/70	9/70	3/70	0	15/70
$p(x)$	5/70	30/70	30/70	5/70	1

Variables continuas

Función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p.c)

Sean X y Y dos variables aleatorias continuas. Para un conjunto A en dos dimensiones, la probabilidad se calcula con función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p.c) para cualquier conjunto A en dos dimensiones así:

$$P(X, Y \in A) = \iint_{A} f(x, y) dxdy$$

Propiedades

- $f(x, y) \geq 0$

- $\int_x \int_y f(x, y) dydx = 1$

- $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dydx$

Distribuciones marginales

Distribución Marginal de Y

$$f(y) = \int_x f(x,y)dx$$

Distribución Marginal de X

$$f(x) = \int_y f(x,y)dy$$

Distribuciones condicionales

Distribución condicional de Y dado $X = x$

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

Distribución condicional de X dado $Y = y$

$$f_{X|y}(x) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

Si F (la acumulada) es continua en $\mathbb{R}^2$, existe una función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \text{ donde exista la derivada.}$$

Ejemplo

Una compañía está estudiando la cantidad de bajas por enfermedad (licencias por incapacidad) tomadas por sus empleados. La compañía permite un máximo de 100 horas de licencia por enfermedad pagada en un año. La variable aleatoria X representa el tiempo en horas de incapacidad tomada por un empleado seleccionado al azar el año pasado. La variable aleatoria Y representa el tiempo de licencia tomado por el mismo empleado este año. Cada variable aleatoria se mide en cientos de horas, por ejemplo, $X = 0.50$ significa que el empleado tomó 50 horas por incapacidad el año pasado. Por lo tanto, X y Y toman valores en el intervalo [0, 1]. La función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ para X e Y es:

$$f(x,y) = 2 - l.2x - 0.8y, \qquad \text{para} \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

$$f(x,y) = 2 - l.2x - 0.8y, \qquad \text{para} \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

1. Prueba si $f(x,y)$ es una función de densidad.
2. Encuentre $P(X \geq 0.50, Y \geq 0.50)$
3. Encuentre las marginales

Ejemplo

Se almacena gasolina en una cisterna al principio de cada semana y después se vende a clientes individuales. Definamos dos variables aleatorias:

- Y_1: proporción de la capacidad de la cisterna con gasolina después de surtir al principio de cada semana.
- Y_2: proporción de la capacidad de la cisterna que se vende durante la semana.

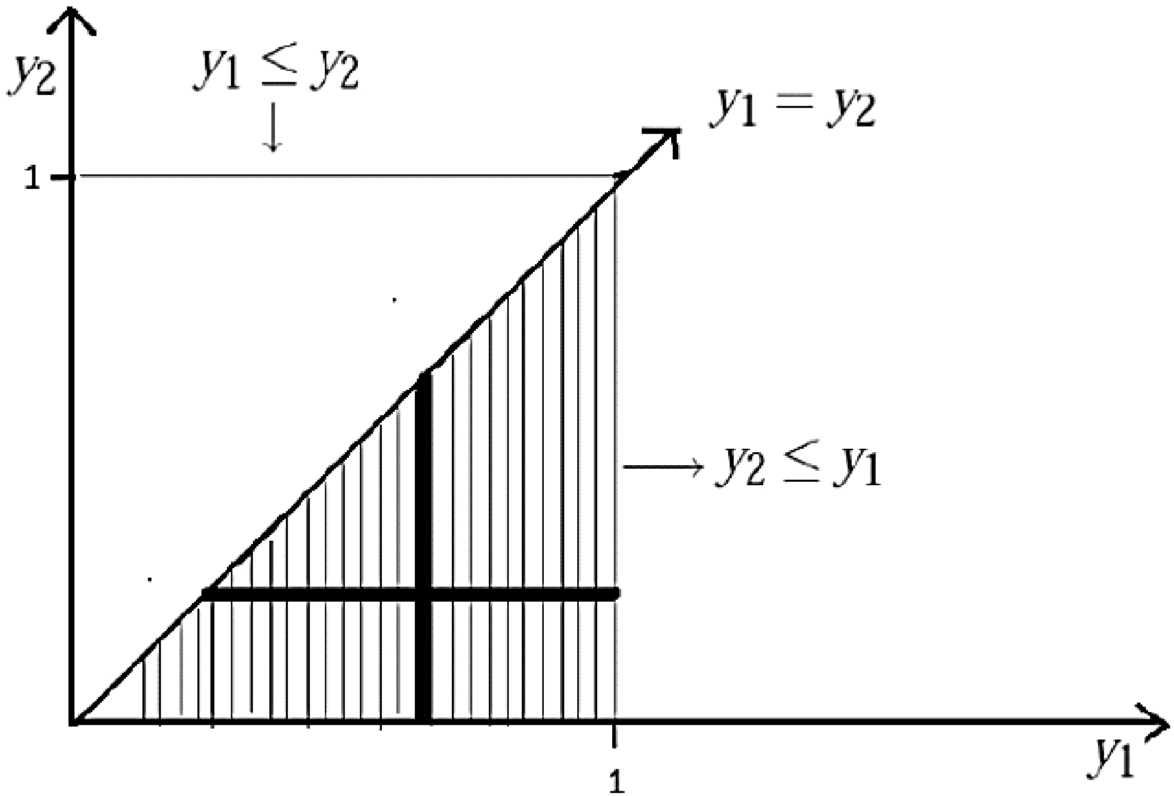
La f.d.p.c de Y_1 y Y_2 es:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} ay_1; & \text{si } 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Calcule a.
2. Encuentre las marginales.
3. Encuentre las condicionales.
4. Calcule la probabilidad de que se almacene menos de la mitad de la cisterna y se venda más de la tercera parte de la misma

Solución:

Rango de las variables



Región de la pregunta 4