Distribuciones variables aleatorias continuas

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

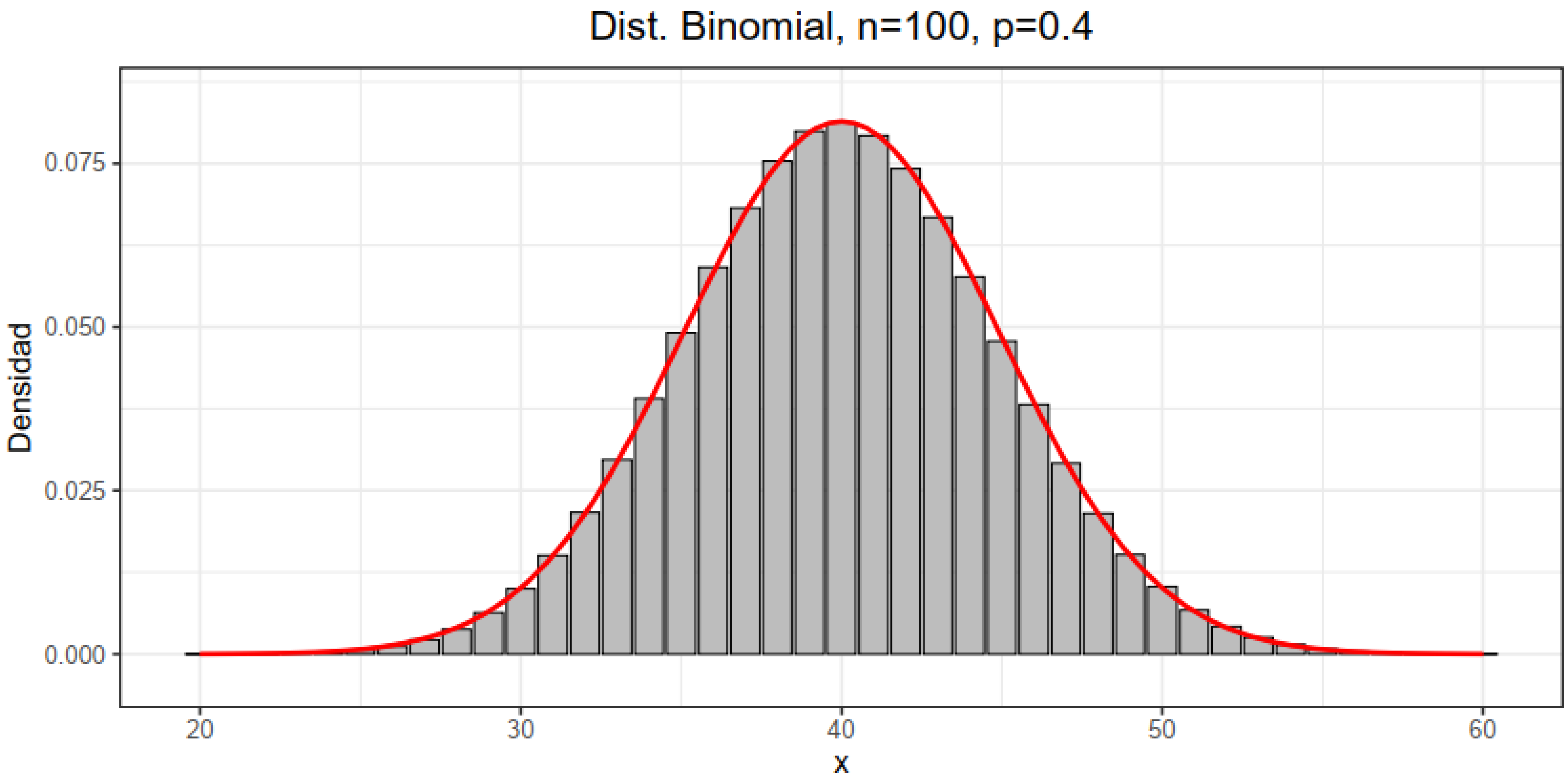
Aproximación normal de la binomial

Aproximación normal de la binomial

Suponga que X es una variable aleatoria binomial. Si n es grande, entonces las probabilidades para ésta variable aleatoria pueden ser aproximadas usando la distribución normal.

Como la binomial es una distribución discreta y la normal es una distribución contínua, se debe hacer una corrección por continuidad; así que para usar esta aproximación es común usar un factor de corrección, usualmente $\frac{1}{2}$.

Podemos observar la aproximación como sigue:



Sea $X \sim Binom(n, p)$, para n grande se tiene que:

$$P(X \leq x) = P\left(X \leq x + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(X \geq x) = P\left(X \geq x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

(para que contenga al punto x)

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P\left(X < x\right) = P\left(X \leq x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\right)$$

$$P\left(X > x\right) = P\left(X \geq x + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\right)$$

(para que no contenga al punto x)

En la práctica estas aproximaciones son buenas cuando $np \geq 10$ y $n(1-p) \geq 10$

Ejemplo

En la ciudad de Medellín, el 8 % de su población a viajado en los últimos 5 años. Se toma una muestra aleatoria de 1000 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 150 y 350 inclusive, hayan viajado en los últimos 5 años?

Ejemplo

Supóngase que en un canal de comunicación digital, el número de bits que se reciben de manera errónea puede modelarse con una v.a binomial, y que la probabilidad de recibir un bit de manera errónea es 1×10^{-05}. Si se transmiten 16 millones de bits, ¿cuál es la probabilidad de que se presenten más de 150 errores?

Solución:

Como n es grande podemos utilizar la aproximación, donde
$E(X) = np = 16000000 * 0.00001 = 160$ y
$\sigma^2 = np(1-p) = 160 * (1 - 0.00001) = 159.9$

Aplicando la formula anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} P(X > 150) &= P\left(X \geq 150 + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{150 + \frac{1}{2} - 160}{\sqrt{160 * (1 - 0.00001)}}\right) \\ &= P(Z \geq -0.75) = 1 - P(Z \leq -0.75) \\ &= 1 - \Phi\left(-0.75\right) = 1 - 0.2266 = 0.7734 \end{aligned}$$