1 RELACIÓN DE ORDEN

Toda relación binaria R definida en A, que sea reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice *relación de orden*, y se denota como (A, R); así que, si a, b y c son elementos cualesquiera de una relación de orden R:

RO1	$(a, a) \in R$	reflexividad
RO2	$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$	antisimetría
RO3	$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$	transitivida

Cuando dos elementos cualesquiera $a \in A$ y $b \in A$ se vinculan mediante una relación de orden R, o sea $(a, b) \in R$, se dicen *comparables*. Notaciones frecuentemente empleadas para representar $(a, b) \in R$, son $a \preccurlyeq b$ o $a \leq b$; mientras que $(a, b) \notin R$ se simboliza como $a \nleq b$ o $a \npreccurlyeq b$. En concordancia con estas notaciones, también puede representarse a (A, R) mediante $(A, \preccurlyeq)$ o $(A, \leq)$ [1]

De acuerdo con lo anterior, RO1 a RO3 se pueden re-expresar como:

RO1	$a \leq a$
RO2	$a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$
RO3	$a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$

Una relación de orden R definida en un conjunto A en la cual no necesariamente cada elemento es comparable con todos los demás, se le denomina *relación de orden parcial*; además, el conjunto A será referido como *conjunto parcialmente ordenado* (partially ordered set, o *poset*).

Por otro lado, el caso de una relación de orden $\leq$ definida en un conjunto A en el que *cada elemento es comparable con cada uno de los otros*, se denomina *relación de orden total*. Formalmente, una relación de orden $\leq$ es *total* si, y sólo si para todo par de elementos a y b:

$$(a \leq b) \vee (b \leq a)$$

Ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados:

- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$: el conjunto potencia de A, cuyos elementos (los subconjuntos de A) se ordenan mediante la operación de "inclusión".
- $(\mathbb{Z}^+, \leq)$: el conjunto de los enteros positivos, cuyos elementos se ordenan mediante la operación "menor o igual".
- $(\mathbb{Z}^+, x|y)$: el conjunto de los enteros positivos, cuyos elementos se ordenan mediante la operación "divisibilidad".

1.1 REPRESENTACIÓN DE RELACIONES DE ORDEN

Mediante un grafo

Ejemplo 1. Observe la Figura. Ella representa un grafo donde: $V = \{a, b, c, d, e\}$ es un conjunto de elementos denominados *vértices*; y el conjunto E de elementos llamados *aristas* o *arcos*, es:

$E = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, b), (a, d), (a, e), (e, b), (a, b), (d, b), (d, e)\}$.

[1] Es importante resaltar que, en este caso, el signo $\leq$ no hace referencia exclusiva a la relación "menor o igual", y asume un significado más general: "relación de orden".

Observe que E representa una relación en V, reflexiva, antisimétrica y transitiva, por ende, una relación de orden parcial.

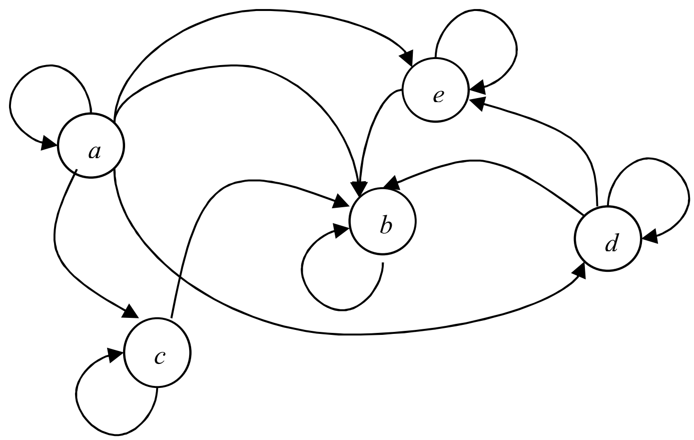


Ilustración 1 Grafo para la relación de orden (V, E)

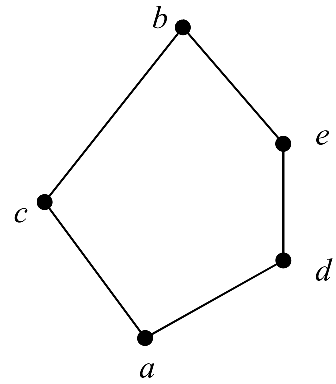
Representación de relaciones de orden mediante Diagramas de Hasse

En el caso de las relaciones de orden parcial, se ha planteado el uso, más conveniente, de los diagramas de Hasse. Estos diagramas se construyen con base en las siguientes directrices:

- No use las aristas que representan el enlace de un elemento consigo mismo (es decir, aquellas que simbolizan la propiedad reflexiva)
- No use las aristas que unan directamente aquellos vértices que se puedan conectar mediante un camino que use dos o más aristas. (las aristas a eliminar son aquellas que son consecuencia de la propiedad transitiva).
- Coloque los vértices de manera que las aristas queden apuntando siempre hacia arriba. Lo anterior implica que en la parte más inferior se ubican aquellos vértices de los cuales sólo salen aristas, y en la parte superior aquellos a los cuales sólo llegan aristas.
- Elimine las cabezas de flecha de las aristas, pues ya se hacen innecesarias.
- Reemplace los círculos por puntos.

Una vez se concreta un diagrama de Hasse para una relación de orden, y observar la disposición y conexión espacial de los elementos en él, se podría afirmar que una manera de *traducir* $x \preccurlyeq y$ es: “x es un elemento que precede o a lo sumo se encuentra al mismo nivel que y”, o también puede afirmarse que “y es un elemento que sucede o por lo menos se encuentra al mismo nivel que x”.

Ejemplo 2. El grafo mostrado en el Ejemplo 1, y que corresponde a la relación de orden (V, E), puede ser representado mediante el siguiente diagrama de Hasse.



1.2 ELEMENTOS EXTREMOS EN UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO

Se A un conjunto parcialmente ordenado por medio de una relación de orden cualquiera $\leq$, es decir, $(A, \leq)$. Los siguientes son clases de elementos que pueden determinarse en una relación de orden parcial.

Elemento maximal de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (maximal element of A with respect to $\preccurlyeq$)

Sean a y x, elementos de A. Se dice que:

a es un *elemento maximal* de A si, y sólo si, $\forall x(a \leq x \rightarrow a = x)$ [2]

Un elemento de A es maximal si, y sólo si, ningún elemento con el que sea comparable, diferente a él, lo sucede.

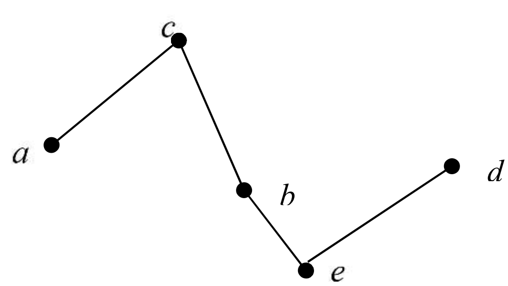
Elemento minimal de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (minimal element of A with respect to $\preccurlyeq$)

Sean b y x, elementos de A. Se dice que:

b es un *elemento minimal* de A si, y sólo si, $\forall x(x \leq b \rightarrow b = x)$ [3]

Un elemento de A es minimal si, y sólo si, ningún elemento con el que sea comparable, diferente a él, lo antecede.

Ejemplo 3. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado de tal forma que se produce el siguiente diagrama de Hasse. Utilice tal diagrama y determine: la relación $\leq$, los elementos maximales, y los minimales.



$$\leq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(e,b),(e,d),(e,c),(b,c)\}$$

Los elementos c y d son maximales.
Los elementos a y e son minimales.

[2] O, equivalentemente, $\neg\exists x(a \neq x \land a \leq x)$
[3] O, de manera equivalente, $\neg\exists x(a \neq x \land x \leq a)$

Elemento máximo de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (Last element of A with respect to $\preccurlyeq$)

Se afirma que: a es *elemento máximo* de A si, y sólo si, $\forall x(x \leq a)$.

Un elemento es máximo para A si, y sólo si, sucede a los demás elementos de A.

Elemento mínimo de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (First element of A with respect to $\preccurlyeq$)

Se afirma que: b es *elemento mínimo* de A si, y sólo si, $\forall x(b \leq x)$.

Un elemento es mínimo para A si, y sólo si, antecede a los demás elementos de A.

Cota superior de un subconjunto B de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (Upper bound of B on A with respect to $\preccurlyeq$)

Un elemento a de A se denomina *cota superior de B* $(B \subseteq A)$ si, y sólo si, $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq a)$.

Un elemento de A es cota superior del subconjunto B si, y sólo si, sucede a todos los elementos de B.

Cota inferior de un subconjunto B de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (Lower bound of B on A with respect to $\preccurlyeq$)

Un elemento b de A se denomina *cota inferior de B* $(B \subseteq A)$ si, y sólo si, $\forall x(x \in B \rightarrow b \leq x)$.

Un elemento de A es cota inferior del subconjunto B si, y sólo si, antecede a todos los elementos de B.

Con base en las dos anteriores definiciones se puede afirmar que: $e \leq d$ es equivalente a declarar que "e es cota inferior de $\{d\}$", y que "d es cota superior de $\{e\}$".

Mínima cota superior de un subconjunto B de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (least upper bound of B on A with respect to $\preccurlyeq$)[4]

El elemento a^* de A se denomina *mínima cota superior* (m.c.s.) de B $(B \subseteq A)$ si, y sólo si, $\forall x(a^* \leq x)$, donde x y a^* son cotas superiores de B.

Un elemento de A es mínima cota superior de B si, y sólo si, es cota superior de B y antecede a las demás cotas superiores de B.

Máxima cota inferior de un subconjunto B de A con respecto a una relación $\preccurlyeq$ (greatest lower bound of B on A with respect to $\preccurlyeq$)[5]

El elemento b^* de A se denomina *máxima cota inferior* (m.c.s.) de B $(B \subseteq A)$ si, y sólo si, $\forall x(x \leq b^*)$, donde x y b^* son cotas inferiores de B.

Un elemento de A es máxima cota inferior de B si, y sólo si, es cota inferior de B y sucede a las demás cotas inferiores de B.

[4] En algunos textos también es conocido como *supremo* (supremum)
[5] En algunos textos también es conocido como *ínfimo* (infimum)