1 RELACIÓN MATEMÁTICA

Previo al estudio de la noción de relación, es necesario explorar varios conceptos: tupla odenada, familia de conjuntos y producto cartesiano.

n-tupla Ordenada
Una n-tupla ordenada es un conjunto formado por n elementos dispuestos en una secuencia que no obedece al azar; lo común es emplear la siguiente notación para simbolizar una n-tupla ordenada: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. [1]

La igualdad de dos n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$, se define como:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n)$$

Existen varias maneras[2] para realizar la formalización matemática de n-tuplas; sin embargo, éste no será un tema que corresponda al alcance de este curso.

Producto Cartesiano (Conjunto Producto)
Dados dos conjuntos A y B, se denomina *conjunto producto* $A \times B$ al conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) de modo que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B; de manera formal:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \wedge y \in B\}$$
$$(x, y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \ \wedge y \in B$$
$$(x, y) \notin A \times B \leftrightarrow x \notin A \ \vee y \notin B$$

Generalizando, si se tiene una familia de conjuntos $A = \{A_i | i \in I\}$, el conjunto producto $\underset{i \in I}{\times} A_i$ está formado por todas las tuplas de manera que el elemento ubicado en la posición i, x_i, pertenece al conjunto A_i. Si $I = \mathbb{N}_n$, se tiene:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i\}$$

Para el caso de conjuntos *finitos* A_i, $i = 1, \dots, n$, se tiene que:
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Se puede simplificar la expresión $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ mediante $\times_{i=1}^{n} A_i$ Cuando $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, el conjunto producto se representa como A^n.

1.1 PROPIEDADES (O LEYES) DEL CONJUNTO PRODUCTO

Teoremas

Teorema R1. $(A \subseteq X) \wedge (B \subseteq Y) \leftrightarrow (A \times B) \subseteq (X \times Y)$

Teorema R2 $A \times B = \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

[1] También es frecuente hallar la siguiente notación: $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
[2] Varios matemáticos como Wiener, Hausdorff, y Kurtowski, han realizado propuestas.

Teorema R3 $(A \neq B) \wedge (A \times B \neq \emptyset) \rightarrow A \times B \neq B \times A$ No conmutatividad

Teorema R4 $A \times (BC) = (A \times B)(A \times C)$ Ley distribut. del producto respecto de la intersección.

Teorema R5 $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ Ley distribut. del producto respecto de la unión.

Teorema R6 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$ Ley asociativa del producto.

1.2 REPRESENTACIONES DEL CONJUNTO PRODUCTO

Para el caso de dos conjuntos, el conjunto producto se puede representar mediante el *plano cartesiano*; observe:

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1,2,3\}$

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

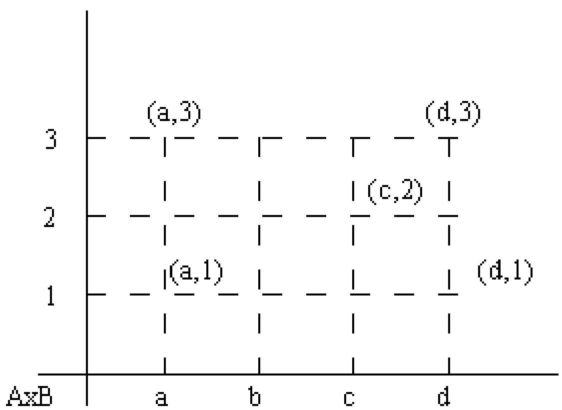


Ilustración 1 Representación de $A \times B$ mediante un plano cartesiano

Es frecuente, también, representar el conjunto producto mediante un *diagrama de árbol*.

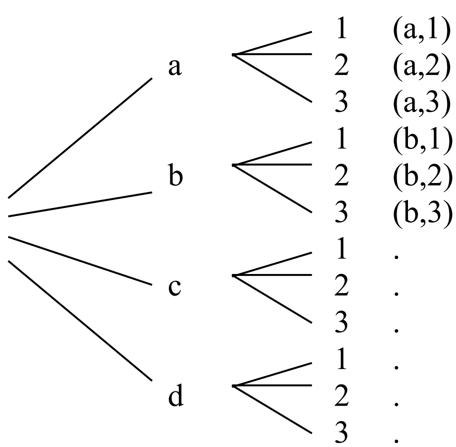


Ilustración 2 Representación de $A \times B$ mediante un diagrama de árbol

RELACIÓN

Una relación R de A en B, representada también como $R(x,y)$, es un conjunto de parejas ordenadas definido en $A\times B$ tal que ellas satisfacen una propiedad, característica, atributo, o condición simbolizado por una fbf P;

$$R=\{(x,y)|x\in A\ \wedge y\in B\wedge \mathrm{P}\}$$
$$(x,y)\in R\leftrightarrow x\in A\ \wedge y\in B\wedge \mathrm{P}$$

Dado que no todos los elementos de A requieren estar relacionados con elementos de B, a través de la condición P, el conjunto R es un *subconjunto* de $A\times B$, o sea $R\subseteq A\times B$. A este tipo de relaciones se les denomina *binarias*.

Las relaciones $\emptyset$ y $A\times B$ son dos casos de relaciones de A en B.

Las relaciones *n*-arias son las que se definen como:

$$R=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_i\in A_i\wedge \mathrm{P}\}$$

Luego, una relación *n*-aria R cumple con $R\subseteq A_1\times A_2\times\dots\times A_n$. [3]

Dominio de una relación

El dominio de una relación $R\subseteq A\times B$, $\delta(R)$, es un subconjunto de A, tal que:

$$\delta(R)=\left\{x\middle|x\in A\wedge\exists y\left((x,y)\in R\right)\right\}$$
$$x\in\delta(R)\leftrightarrow\ x\in A\wedge\exists y\left((x,y)\in R\right)$$

Rango de una relación

El rango de una relación $R\subseteq A\times B$, $\gamma(R)$, es un subconjunto de B, tal que:

$$\gamma(R)=\left\{y\middle|y\in B\wedge\exists x\left((x,y)\in R\right)\right\}$$
$$y\in\gamma(R)\leftrightarrow y\in B\wedge\exists x\left((x,y)\in R\right)$$

Inversa de una relación

Sea R una relación en $A\times B$, la inversa de una relación R, es una relación en $B\times A$, denotada mediante R^{-1} y definida como:

$$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$
$$(y,x)\in R^{-1}\leftrightarrow(x,y)\in R$$

Relación Idéntica en *A*

Una relación en A, es decir en $A\times A$, se denomina idéntica, si, y sólo si:

$$I_A=\{(x,y)|x\in A\ \wedge\ y=x\}$$
$$(x,y)\in I_A\leftrightarrow x\in A\ \wedge\ y=x$$

[3] Ello significa que, bajo tal notación: $R\subseteq\times_{i=1}^{n}A_i$

1.3 CARACTERÍSTICAS ASIGNABLES A LAS RELACIONES BINARIAS DEFINIDAS SOBRE EN UN MISMO CONJUNTO

Existe una colección de rasgos que pueden ser satisfechos por las relaciones binarias que se definan sobre un mismo conjunto, A por ejemplo. Cuando una relación binaria cumple alguno de ellos, adopta un adjetivo o caracterización.

a. **Reflexiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ es reflexiva si, y sólo si, *todas* las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales pertenecen a R.

$$R \text{ es reflexiva} \leftrightarrow \forall x\big((x,x) \in R\big)$$

b. **Simétrica**: una relación $R \subseteq A \times A$ es simétrica si *todas* las parejas ordenadas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: si $(x,y) \in R$, entonces $(y,x) \in R$.

$$R \text{ es simétrica} \leftrightarrow \forall x \forall y\big((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R\big)$$ [4]

Nota: Obsérvese la consecuencia de definir la simetría de la siguiente forma:

c. **Transitiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ es transitiva si, y sólo si, se cumple que: si un elemento está relacionado con un segundo y éste con un tercero, el primero está relacionado con el tercero.

$$R \text{ es transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R\big)$$

d. **Antireflexiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ será antireflexiva si, y sólo si, *ninguna* de las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales, cumplen R.

$$R \text{ es anti-reflexiva} \leftrightarrow \neg \exists x\big((x,x) \in R\big)$$ [6]

e. **Antisimétrica**: una relación $R \subseteq A \times A$ es antisimétrica si, y sólo si, *ninguna* de las parejas del conjunto producto $A \times A$ cumple que: si $(x,y) \in R$, entonces $(y,x) \in R$.

$$R \text{ es anti-simétrica} \leftrightarrow \forall x \forall y\big((x,y) \in R \wedge x \neq y \rightarrow (y,x) \notin R\big)$$ [7]

f. **Antitransitiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ es antitransitiva si, y sólo si, se cumple que: si un elemento está relacionado con un segundo y éste con un tercero, el primero no está relacionado con el tercero.

$$R \text{ es anti-transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \notin R\big)$$

g. **No reflexiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ es no reflexiva si, y sólo si, *no todos* los elementos del conjunto producto, en los que las componentes son iguales, satisfacen la relación R

$$R \text{ es no reflexiva} \leftrightarrow \exists x\big((x,x) \notin R\big)$$

[4] En la página de WolFram MathWorld (http://mathworld.wolfram.com/SymmetricRelation.html) definen Relación Simétrica empleando la bi-condicionalidad.

[5] En la página de WolFram MathWorld (http://mathworld.wolfram.com/SymmetricRelation.html) definen Relación Simétrica empleando la bi-condicionalidad.

[6] O expresado de manera equivalente: $\forall x (x,x) \notin R$

[7] Una forma alterna de expresarlo es: $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y\big)$

h. **No simétrica**: una relación $R \subseteq A \times A$ es no simétrica si, y sólo si, *no todas* las parejas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.

$$R \text{ es no simétrica} \leftrightarrow \neg\forall x\forall y\big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big)$$ [8]

i. **No Transitiva**: una relación $R \subseteq A \times A$ es no transitiva si, y sólo si, se cumple que: un elemento está relacionado con un segundo, éste con un tercero y el primero no está relacionado con el tercero.

$$R \text{ es no transtiva} \leftrightarrow \exists x\exists y\exists z\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge (x,z) \notin R\big)$$

j. **Asimétrica**: una relación $R \subseteq A \times A$ es asimétrica si, y sólo si, se cumple que: si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \notin R$.

$$R \text{ es asimétrica} \leftrightarrow \forall x\forall y\big((x,y) \in R \to (y,x) \notin R\big)$$ [9]

Ejemplos de características asignables a relaciones binarias en un conjunto

Para todos los ejemplos se establece una relación, llámese R y un conjunto A, donde $R \subseteq A \times A$ y $A \subseteq X$ (de hecho, se considerará que $A = X$). Formalmente:

$$A = X = \{x|\mathrm{Q}\}$$
$$R = \{(x,y)|x \in A \ \wedge y \in A \wedge \mathrm{P}\}$$

En cada caso, se declaran propiedades mediante las formas proposicionales P y Q (incluso las propiedades podrán expresarse mediante oraciones de un lenguaje cotidiano o uno cercano a él). Se pretende determinar, en cada uno de los siguientes literales, cuáles de las características asignables a una relación binaria son satisfechas.

a) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x *es una persona que vive en Colombia*"

P: $\mathrm{p}(x, y)$: "x *está casado por el rito católico con* y"

anti-reflexiva: nadie puede casarse consigo mismo

simétrica: si alguien está casado con una persona, esa otra persona también está casada con la primera.

Antitransitiva y transitiva: pues no se permite, legítimamente en esa religión, que una persona que se encuentre casada con una segunda y esa segunda con una tercera, así que **no se podría satisfacer** el antecedente de las respectivas condicionales (antecedente falso) lo que haría ciertas a estas últimas.

b) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x *es una persona*"

P: $\mathrm{p}(x, y)$: "x *es más alto que* y"

anti-reflexiva: No se puede ser más alto que uno mismo

---

[8] Una forma equivalente de expresarlo es: $\exists x\exists y\big((x,y) \in R \ \wedge \ (y,x) \notin R\big)$

[9] La definición de asimetría es más estricta que la de antisimetría, puesto que la primera no permite que un elemento pueda relacionarse consigo mismo.

asimétrica: si alguien es más alto que una segunda persona, esa segunda no puede ser más alta que la primera.

transitiva: si alguien es más alto que una segunda persona, y esa segunda más alta que una tercera, la primera será más alta que la tercera.

c) Q: $q(x)$: "x *es una persona*"

P: $r(x, y)$: "x *es padre de* y"

d) Q: $q(x)$: "x *es una persona*"

P: $s(x, y)$: "x *es compatriota de* y"

reflexiva: cada persona es compatriota de sí misma

simétrica: si alguien es compatriota de otra persona, la otra es compatriota de la primera

transitiva: si alguien es compatriota de otra, y ésta de una tercera, la primera es compatriota de la tercera.

e) Q: $q(x)$: "x *es un objeto*"

P: $t(x, y)$: "x *es igual a* y"

f) Q: $q(x)$: "x *es un número real*"

P: $p(x, y)$: "x *es menor que* y"

antireflexiva: cada número no puede ser menor a sí mismo

asimétrica: si un número es menor que un segundo, ese segundo no puede ser menor que el primero

transitiva: si un número es menor que un segundo, y el segundo de un tercero, el primero será menor que el tercero.

g) Q: $q(x)$: "x *es un número real*"

P: $p(x, y)$: "x *es menor o igual que* y"

h) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x es un $subconjunto$ de un $conjunto$ B" (Lo que implica que $A = \mathcal{P}(B)$)

P: $\mathrm{r}(x, y)$: "el $conjunto$ x $tiene$ $inclusión$ $propia$ en el $conjunto$ y"

i) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x es un $subconjunto$ de un $conjunto$ B" (Lo que implica que $A = \mathcal{P}(B)$)

P: $\mathrm{s}(x, y)$: "el $cojunto$ x $está$ $incluido$ en el $conjunto$ y".

reflexiva: cada conjunto está incluido en sí mismo

antisimétrica: si un conjunto está incluido en un segundo, ese segundo no puede estar incluido en el primero, a no ser que se trate del mismo conjunto.

transitiva: si un conjunto está incluido en un segundo, y el segundo incluido en un tercero, el primero está incluido en un tercero.

j) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x es una $línea$ $recta$"

P: $\mathrm{t}(x, y)$: "x es $línea$ $recta$ $paralela$ a la $línea$ $recta$ y"

reflexiva: cada línea recta es paralela a sí misma

simétrica: si una recta es paralela a otra, esa otra es paralela a la primera.

transitiva: si una recta es paralela a una segunda, y esa segunda a una tercera, la primera es paralela a la tercera.

k) Q: $\mathrm{q}(x)$: "x es una $línea$ $recta$";

P: $\mathrm{u}(x, y)$: "x es $perpendicular$ a y"

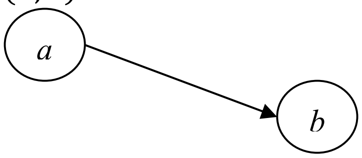
Representación de una relación binaria en A mediante un grafo

Hay varias maneras de representar una relación, las cuales incluyen las usadas para representar el producto cartesiano: plano cartesiano y diagramas de árbol; otra frecuentemente usada es el grafo.

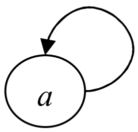
Grafo. De manera muy general, un grafo es un conjunto formado por dos elementos: un conjunto V cuyos componentes son denominados *vértices* o *nodos*, y un conjunto E de *arcos* o *aristas*. Cada arista representa la relación entre dos nodos de V. En términos formales, un grafo G se define como: $G = \{V, E\}$.

Un elemento de V que está relacionado con otro se indica mediante una flecha; así:

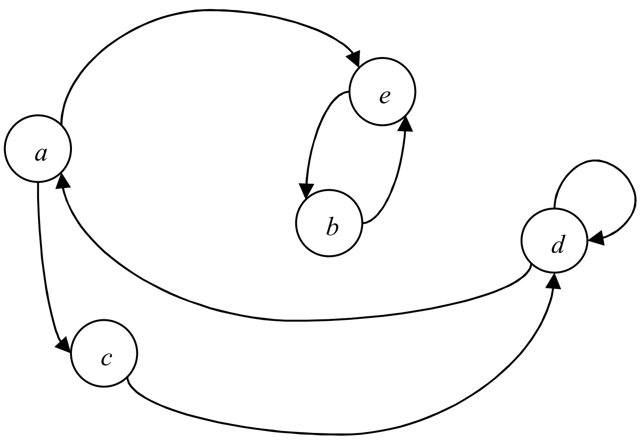
$(a, b) \in R$



Mediante un lazo se muestra cuándo un elemento se relaciona consigo mismo:
$(a, a) \in R$



Ejemplo. Observe el siguiente grafo. Determine V y E.



$V = \{a, b, c, d, e\}$; $E = \{(a, e), (a, c), (b, e), (c, d), (d, a), (d, d), (e, b)\}$

1.4 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS EN A

Teoremas

Teorema R7. I_A es reflexiva en A; $A \neq \emptyset$

Teorema R8. A^2 es reflexiva en A; $A \neq \emptyset$

Teorema R9. R es reflexiva en $A \leftrightarrow I_A \subseteq R$

Teorema R10. I_A y A^2 son simétricas en A, cualquiera que sea A

Teorema R11. R es simétrica en $A \leftrightarrow R = R^{-1}$

Teorema R12. I_A es anti-simétrica en A

Teorema R13. R es anti-simétrica en $A \leftrightarrow R \cdot R^{-1} \subseteq A$ [10]

Teorema R14. I_A es transitiva en A [11]

[10] R y R^{-1} sólo comparten las posibles parejas (x, x); lo cual corresponde a puntos de A.
[11] $\forall x\big((x, x) \in I_A \wedge (x, x) \in I_A \to (x, x) \in I_A\big)$.