Lógica Cuantificacional: Otras definiciones básicas

Las siguientes definiciones son importantes para comprender "el sentido" de los axiomas y las reglas de validez, y su posterior aplicación en el desarrollo de pruebas formales.

Definición. El *ámbito* o *alcance* de un cuantificador lo conforman, el símbolo de variable que lo acompaña y la fbf más cercana que le sigue a la variable [1]. Observe los siguientes casos:

- Considere la fbf $\forall x\ \mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)$. Conforme con esta definición, la variable que acompaña al cuantificador universal es x y la fbf más cercana al cuantificador es la expresión $\mathrm{p}(x, y)$, luego $x\ \mathrm{p}(x, y)$ es su ámbito.
- En cambio, en la fbf $\forall x\ \big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)\big)$, el ámbito del cuantificador es la secuencia de signos $x\big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)\big)$.

Definición. Se denomina *ocurrencia* de una variable x en una fbf P, a cada aparición de x. Observe la siguiente fbf P:

- $\forall y\ \mathrm{p}(x, y) \rightarrow \exists z\ \mathrm{q}(z, y)$

  La variable y muestra tres ocurrencias en la fbf P (La aparición del signo y inmediatamente después del signo $\forall$ también debe contabilizarse).

  La variable x posee una ocurrencia en P.

  La variable z exhibe dos ocurrencias en P.

La ocurrencia de una variable en una fbf puede darse de dos maneras: libre o ligada.

Definición. Se dice que una variable x tiene *ocurrencia ligada* en una fbf P si cae en el ámbito de algún cuantificador y coincide con el signo de variable que acompaña al cuantificador; de lo contrario, se dice que su *ocurrencia* es *libre*. Es frecuente en la literatura encontrar la siguiente convención cuando se quiere especificar que una variable, por ejemplo x, tiene ocurrencia libre en una fbf cualquiera P; observe, $\mathrm{P}_{[x]}$.

Definición. Se dice que la fbf P es *libre* de la variable x si esta última no aparece en P, o si cada ocurrencia es ligada en P. Cuando no se conoce la fbf representada por P y no se informa si ésta es libre o no de una variable, se asume que P No es libre de esa variable.

Con base en la anterior definición, se especifican las siguientes.

Definición. Una fbf P se dice *cerrada* si, y sólo si, es libre de toda variable.

Definición. Una fbf P se dice *abierta* [2] si, y sólo si, no se encuentra libre de al menos una variable. Si se desea especificar que P es abierta, por ejemplo, con respecto a las variables x, y, z se puede emplear la notación $\mathrm{P}_{[x,y,z]}$.

---

[1] Algunos autores definen que el ámbito del cuantificador universal $\forall$ en la fbf $\forall x\mathrm{P}$ es la fbf P; lo mismo aplica para el cuantificador existencial. Ésta definición de alcance no será la que se emplee en este documento.

[2] Algunos autores también la denominan *función proposicional*.

- Observe la siguiente expresión en lenguaje natural: “la persona x conoce a todos”.

  Usando el cálculo de predicados, se puede usar como signo de predicado la letra c para simbolizar la relación *conoce* entre los individuos representados por los términos x y y. Con ellos se construye la forma proposicional simple $\mathrm{q}(x, y)$ para simbolizar: “la persona x conoce a la persona y”. Luego, la frase original “la persona *x* conoce a todos”, se puede representar como $\forall y\ \mathrm{q}(x, y)$.

  En la fbf $\forall y\ \mathrm{q}(x, y)$ la variable *x* tiene una ocurrencia libre; mientras que la variable *y* no posee ocurrencias libres, pues las dos ocurrencias que se observan caen bajo el alcance del cuantificador universal.

- Ahora observe el enunciado: “Existe alguien que conoce a todos”, que se puede representar como $\exists x \forall y\ \mathrm{q}(x, y)$.

  Advierta los ámbitos de cada cuantificador: $\exists\ \underbrace{x\forall\ \underbrace{y\ \mathrm{q}(x, y)}}$. Para el cuantificador existencial, el ámbito es $x\ \forall y\ \mathrm{q}(x, y)$; mientras que para el cuantificador universal es $y\ \mathrm{q}(x, y)$. En $\exists x \forall y\ \mathrm{q}(x, y)$, ni la variable *x* ni la *y* tienen ocurrencias libres.

Definición. $\mathrm{P}_{x|t}$ es una fbf que se obtiene de la fbf P mediante el reemplazo de las **ocurrencias libres** de x por un término t; a esta operación se le denomina *particularización*.

Puesto que P puede corresponder a distintas formas proposicionales (condicional, bicondicional, negación, conjunción o disyunción), observe:

Si P corresponde a una forma proposicional tipo negación, ¬Q, se tiene que:

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon (\neg \mathrm{Q})_{x|t} \quad \text{Enuncia que el término } t \text{ satisfaría a la fbf } \neg\mathrm{Q}$$

o

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon\colon \neg\left(\mathrm{Q}_{x|t}\right) \quad \text{Enuncia que No es el caso que el término } t \text{ satisfaría a la fbf Q}$$

Si P corresponde a una forma proposicional tipo disyunción, Q ∨ R, se tiene que:

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})_{x|t} \colon \mathrm{Q}_{x|t} \vee \mathrm{R}_{x|t}$$

Si P corresponde a una forma proposicional tipo conjunción, Q ∧ R, se tiene que:

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})_{x|t} \colon \mathrm{Q}_{x|t} \wedge \mathrm{R}_{x|t}$$

Si P corresponde a una forma proposicional tipo condicional, Q → R, se tiene que:

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})_{x|t} \colon \mathrm{Q}_{x|t} \rightarrow \mathrm{R}_{x|t}$$

Si P corresponde a una forma proposicional tipo bicondicional, Q ↔ R, se tiene que:

$$\mathrm{P}_{x|t}\colon (\mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{R})_{x|t} \colon \mathrm{Q}_{x|t} \leftrightarrow \mathrm{R}_{x|t}$$

Sobre una fbf P puede efectuarse más de una particularización; observe cómo se representaría el caso en que se efectúe una particularización sobre P reemplazando la variable x y, sobre ese resultado, una particularización en la que se reemplace la variable y: $\left(\mathrm{P}_{x|t_1}\right)_{y|t_2}$; esta doble particularización también podría escribirse como: $\mathrm{P}_{x|t_1, y|t_2}$.

Cuando se está en la operación particularización debe impedirse la aparición del fenómeno conocido como *colisión de variables*, en el que una variable “originalmente libre” pasa a ser “ligada” (o viceversa)

Definición. Se dice que un término t es *libre* de la variable x en una fbf P si al efectuar la particularización $\mathrm{P}_{x|t}$ el término t no contiene una variable que se ligue al efectuar el reemplazo; ello significa que ninguna ocurrencia libre de x en P cae dentro del alcance de cualquier cuantificador, $\forall y$ o $\exists y$, donde y es una variable que aparece en t [3].

A continuación, se presentan algunos casos.

Se tiene la expresión "Hay alguien que es madre de *y*". Si $\mathrm{t}(x, y)$ es la fbf que se emplea para representar la expresión "*x* es madre de *y*", entonces la expresión original se traduciría a: $\exists x\ \mathrm{t}(x, y)$. Si se simboliza la fbf $\exists x\ \mathrm{t}(x, y)$ mediante la letra P, entonces:

- La particularización $\mathrm{P}_{x|y}$ no genera modificación alguna en la expresión original; pues para efectuar el reemplazo, *x* debería corresponder a una variable con ocurrencia libre en la fbf P.
- La particularización $\mathrm{P}_{y|z}$ produce la fbf $\exists x\ \mathrm{t}(x, z)$. Esta particularización no produce el fenómeno de colisión de variables, y por tal razón, es admitida.
- La particularización $\mathrm{P}_{y|x}$ da origen a la fbf $\exists x\ \mathrm{t}(x, x)$. Como se observa, la variable x no es libre de y, pues el segundo argumento se ha ligado al cuantificador. Si se traduce al lenguaje cotidiano la expresión particularizada ella diría algo como: "existe alguien que es madre de sí mismo", lo cual es diferente de lo que se había planteado originalmente.
- Considere la fbf $\forall x\ \mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)$ y suponga que se pretende efectuar la particularización $\mathrm{S}_{z|f(a,x)}$ donde S representará la fbf $\forall x\ \mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)$. Se puede afirmar que el término $f(a, x)$ es libre de la variable z ya que en $\mathrm{S}_{z|f(a,x)}$: $\forall x\ \mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}\big(f(a, x)\big)$ no se presenta el fenómeno de colisión de variables.

  Obsérvese que se estableció en ejemplo previo que el ámbito del cuantificador es la fbf $x\ \mathrm{p}(x, y)$, por tanto el símbolo *x* que aparece en $\mathrm{q}\big(f(a, x)\big)$ representaría "realmente" a una variable diferente[4] a la que aparece en $\forall x\ \mathrm{p}(x, y)$.

  Ahora, se intenta llevar a cabo la particularización $\mathrm{S}_{y|f(a,x)}$: $\forall x\ \mathrm{p}\big(x, f(a, x)\big) \rightarrow \mathrm{q}(z)$ ello tiene como consecuencia que el término $f(a, x)$ se ligue al cuantificador, es decir, no sea libre de y; aquí se presenta el fenómeno de colisión de variables.
- Sea la fbf $\forall x\ \big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)\big)$. Si se considera que S: $\forall x\ \big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)\big)$, entonces la variable *x* no posee ocurrencias libres en S. Mientras que, tanto *y* como *z* tienen una ocurrencia libre, respectivamente, en S; además, el ámbito del cuantificador es la fbf $x\big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}(z)\big)$. Observe que en la particularización $\mathrm{S}_{z|f(a,x)}$: $\forall x\ \Big(\mathrm{p}(x, y) \rightarrow \mathrm{q}\big(f(a, x)\big)\Big)$ el término $f(a, x)$ pasa a ser dependiente del cuantificador (cuando, originalmente, la variable z que reemplaza no lo era). Lo mismo ocurre cuando se hace $\mathrm{S}_{y|f(a,x)}$: $\forall x\ \Big(\mathrm{p}\big(x, f(a, x)\big) \rightarrow \mathrm{q}(z)\Big)$. Así las cosas, el término $f(a, x)$ no es libre ni de la variable z, ni de la variable y. En ambos casos, se presenta colisión de variables.

---

[3] Ello porque $\mathrm{P}_{x|t}$ haría que t se ligara al cuantificador.

[4] Esto evidencia que el mismo símbolo x está representando dos cosas diferentes

Definición. $\forall y\ \mathrm{P}_{x|y}$ es una fbf que se obtiene de la fbf $\forall x$ P [5]. Esta es una operación que se aplica, en caso que sea posible, con el fin de efectuar reemplazos de signos de variable; a esta operación se la conoce como *variante*.[6] *La fbf resultante de aplicar la operación variante es* ***equivalente****, desde el punto de vista lógico, a la fbf de la que se obtuvo*.

La intención fundamental de la operación variante es diferenciar nombres de variables cuando, por ejemplo, más de un cuantificador comparte el mismo nombre de variable. Sin embargo, como sucede en la operación particularización, es necesario tener cuidado con el fenómeno de la colisión de variables.

- Se tiene la expresión "Todo el mundo tiene a alguien que sea su madre". Si $\mathrm{t}(x, y)$ se emplea para representar la expresión "x es madre de *y*", entonces la expresión original se representa como: $\forall y \exists x\ \mathrm{t}(x, y)$. Si se simboliza la fbf $\exists x\ \mathrm{t}(x, y)$ mediante la letra P, entonces la fbf se convierte en $\forall y$ P.

  Ahora obsérvense las siguientes variantes para $\forall y$ P:

  La variante $\forall x \mathrm{P}_{y|x}$ no debe aplicarse, pues origina el fenómeno de colisión de variable; observe que ya en la particularización $\mathrm{P}_{y|x}$ se detecta un problema $\mathrm{P}_{y|x}\colon \exists x\ \mathrm{t}(x, x)$; es evidente que el segundo argumento de $\mathrm{t}(x, x)$ se ligó al cuantificador existencial, y es obvio que estaba libre de él en la expresión original; es decir, se originó el fenómeno de colisión de variables. También ocurre que en la expresión variante $\forall x \mathrm{P}_{y|x}\colon \forall x \exists x\ \mathrm{t}(x, x)$ el cuantificador universal dejó de afectar a la variable que le correspondía – la del segundo argumento. Si se aceptara esa particularización, el uso del cuantificador universal no tendría sentido y podría descartarse, hecho que obviamente es incorrecto.

  La variante $\forall z \mathrm{P}_{y|z}$ produce la fbf $\forall z\ \exists x\ \mathrm{t}(x, z)$, la que no genera dificultad alguna y es, simplemente, el cambio de nombre de una variable.

- Ahora examine la frase "Hay alguien que es madre de *y*". El enunciado se simboliza como: $\exists x\ \mathrm{t}(x, y)$. Si se simboliza la fbf $\mathrm{t}(x, y)$ mediante la letra P, entonces la fbf se transforma en $\exists x$ P; obsérvese las siguientes variantes:

  La variante $\exists y\ \mathrm{P}_{x|y}$ produce la fbf $\exists y\ \mathrm{t}(y, y)$, y se origina una colisión de variables.
  La variante $\exists z\ \mathrm{P}_{x|z}$ produce la fbf $\exists z\ \mathrm{t}(z, y)$ la cual no presenta inconveniente alguno; la consecuencia de esta variante es el cambio de nombre de una de las variables.

[5] Lo que obliga a que x sea una variable libre en P.
[6] La misma operación se aplica en $\exists y\ \mathrm{P}_{x|y}$.