Probabilidad

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Experimento

Un experimento es cualquier acción o proceso por medio del cual se obtienen datos o información. Estos experimentos se llevan a cabo bajo ciertas condiciones controladas, un número definido o indefinido de veces.

Un experimento se dice que es determinístico, cuando además de conocer los posibles valores del experimento, también se conoce un resultado particular de él.

Un experimento aleatorio es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre. Se conocen los posibles resultados pero no se sabe de ante mano cuál va a ocurrir y proporciona diferentes resultados aún cuando se repite bajo las mismas condiciones

Introducción a la probabilidad

Uno de los objetivos de la estadística es el estudio de la variabilidad. Debido a esto, se necesita de una medida o escala que nos permita cuantificar el grado de seguridad o de incertidumbre respecto a un resultado o conjunto de resultados, en la realización de un experimento aleatorio.

Esto es **probabilidad:** una medida de la posibilidad de ocurrencia de un evento (resultado).

Ejemplos experimento aleatorio

1. El lanzamiento de un dado no cargado y observar el número que aparece en la cara superior.

2. El lanzamiento de una moneda cuatro veces y contar el número total de caras obtenidas.

3. La fabicación de artículos en una línea de producción y contar el número de artículos defectuosos producidos en un período de 24 horas.

4. Fabricar una bombilla. Luego se prueba su duración conectándola a un portalámparas y se anota el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.

5. Fabricar artículos hasta producir 10 no defectuosos. Luego, contar el número total de artículos manufacturados.

6. Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un período de 24 horas. En un sitio y una fecha señalados, leer dicho termógrafo.

7. Tiempo empleado por una persona de su casa al trabajo.
8. Número de personas que llegan a una oficina bancaria en un período de 10 horas.

Definiciones básicas

Espacio muestral

Espacio Muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Usualmente designamos este conjunto como S.

Para cada experimento considerado anteriormente (de los ejemplos), se describe el espacio muestral asociado así:

1. Lanzamiento de un dado: $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Lanzamiento de moneda: $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3. Artículos defectuosos en 24h: $S_3 = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, donde N es el número máximo de artículos que se pudo construir en 24 horas.
4. Duración de la bombilla: $S_4 = \{t : t \geq 0\}$
5. Fabricar artículos hasta 10 no defectuosos: $S_5 = \{10, 11, \ldots\}$
6. Termógrafo: $S_6 = \{t : m \leq t \leq M\}$, donde m es la temperatura mínima y M es la temperatura máxima.
7. Tiempo de viaje: $S_8 = \{t : t \geq 0\}$
8. Personas que llegan por hora: $S_9 = \{0, 1, \ldots, N\}$

Evento

Un **evento** A respecto a un espacio muestral particular S, es cualquier recopilación (subconjunto) del espacio muestral S. Esto significa que S mismo es un evento y también lo es el conjunto $\emptyset$.

Un **Evento Nulo o Vacío** $\emptyset$ es un evento que no tiene resultado dentro del espacio muestral.

Los siguientes son ejemplos de eventos asociados a los experimentos antes anotados: A_i se referirá a un evento asociado con el experimento ε_i.

Ejemplo

1. A_1 : Un número par ocurre (lanzamiento de un dado); esto es, $A_1 = \{2, 4, 6\}$.

2. A_2 : Se obtienen dos o más caras; $A_2 = \{2, 3, 4\}$.

3. A_3 : Todos los artículos fueron no defectuosos; $A_3 = \{0\}$.

4. A_4 : La bombilla se quema en menos de 10 horas; $A_4 = \{t : 0 \leq t \leq 10\}$.

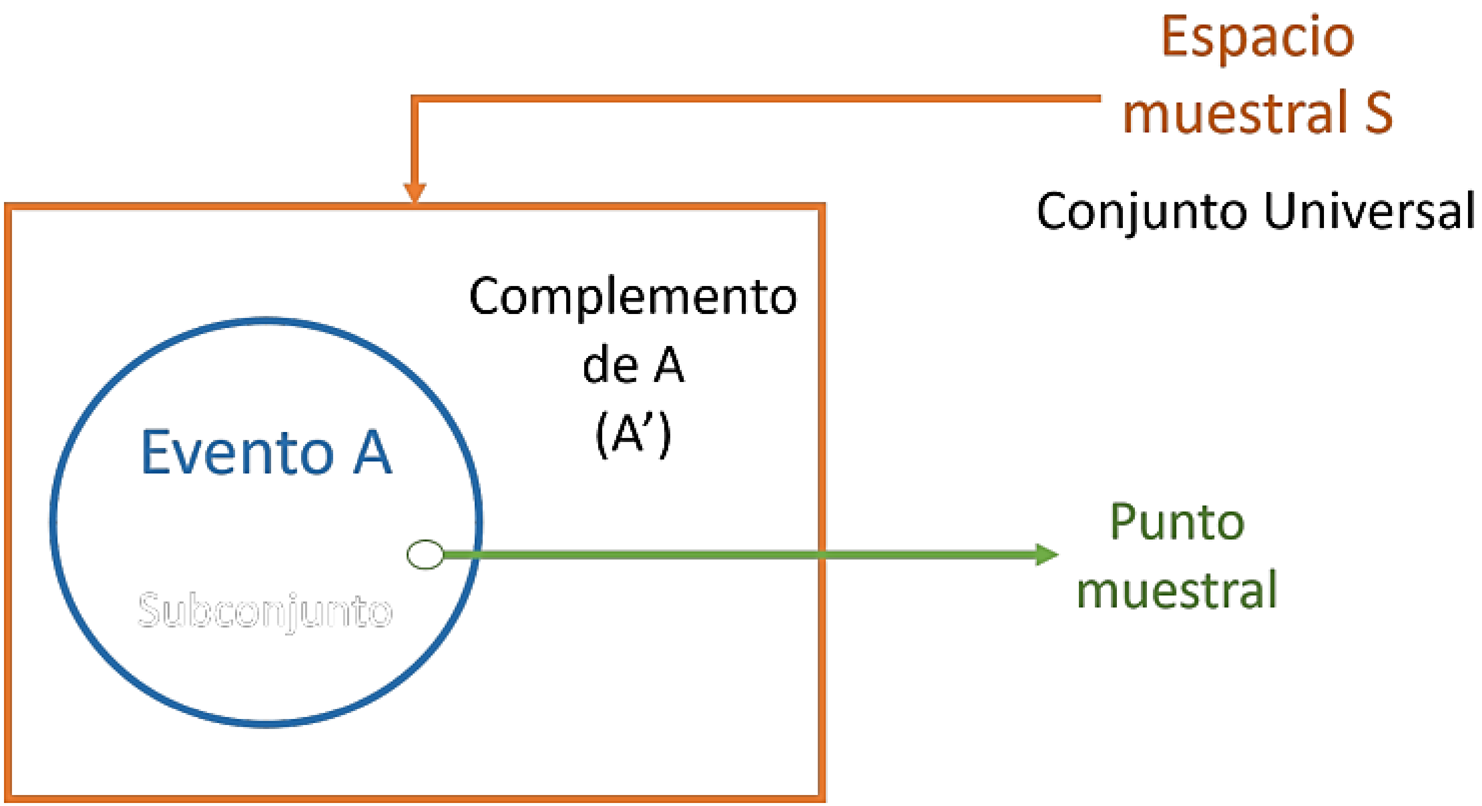
5. A_5 : El número total de artículos manufacturados es inferior a 16; $A_5 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Operaciones básicas

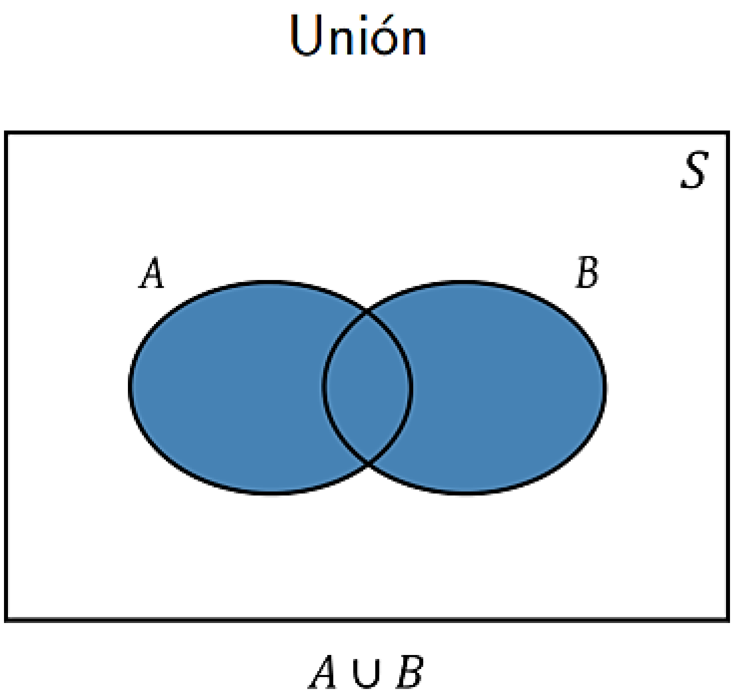
- En cada ejemplo de los vistos antes definimos el espacio muestral como un conjunto.
- También definimos los eventos (o sucesos) como conjuntos.
- Por lo tanto, las operaciones de conjuntos son aplicables:

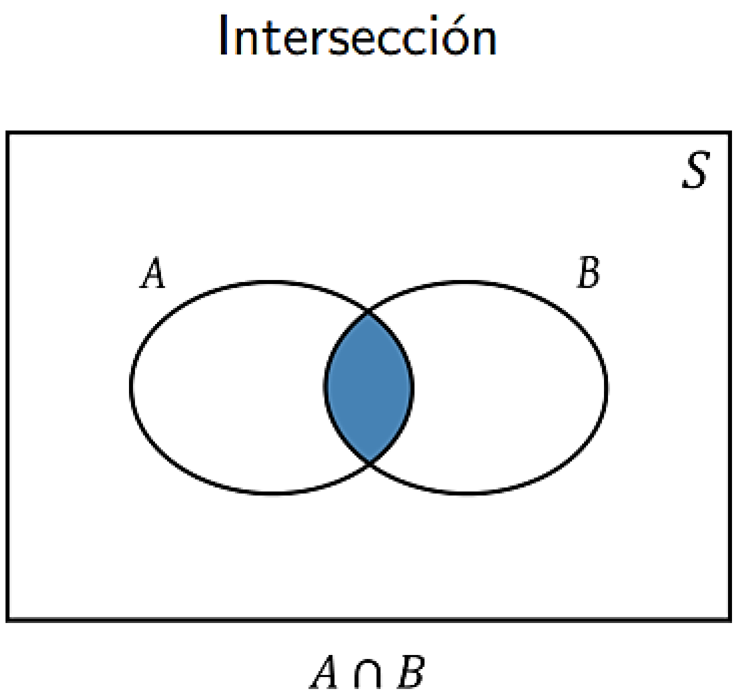
  Unión($\cup$), intersección ($\cap$), contenencia ($\subset$) y complemento.

Diagrama de Venn



Unión e intersección





Unión e intersección

Sean A y B dos eventos del espacio muestral S.

- **Unión:** Es el evento formado por todos los posibles resultados en A o B o en ambos. Se denota por $A \cup B$.

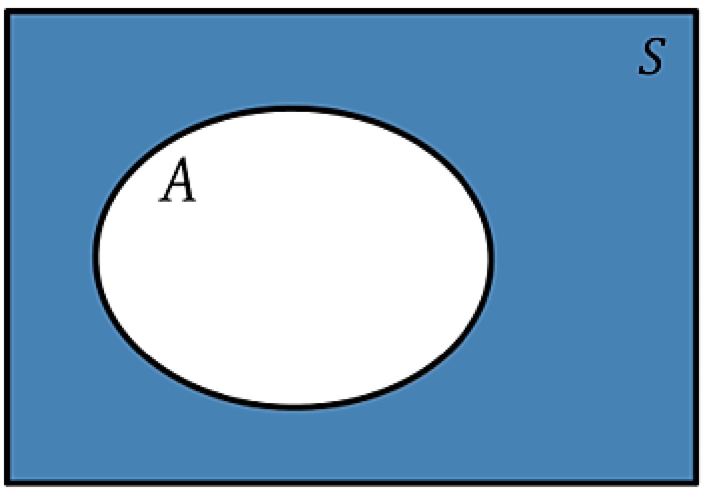
$$A \cup B : \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$$

- **Intersección:** Es el evento formado por todos los resultados comunes tanto en A como en B. Se denota por $A \cap B$.

$$A \cap B : \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}$$

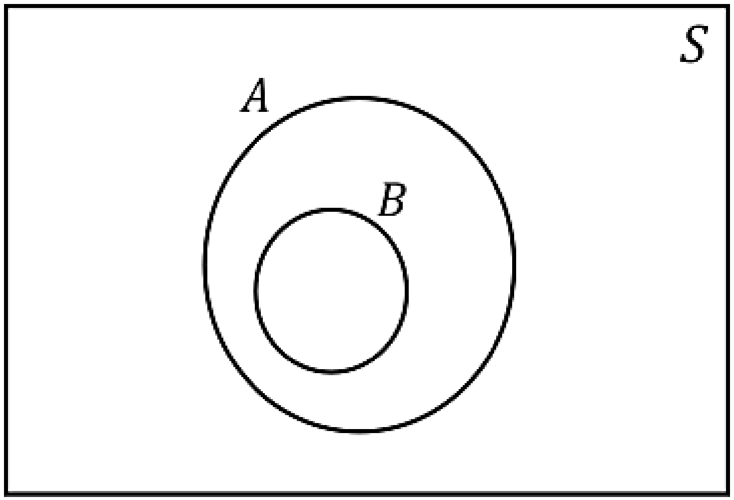
Complemento y contenencia

Complemento



$A^C = \bar{A} = A'$

Contenencia



$B \subset A$

Complemento y contenencia

Sean A y B dos eventos del espacio muestral S.

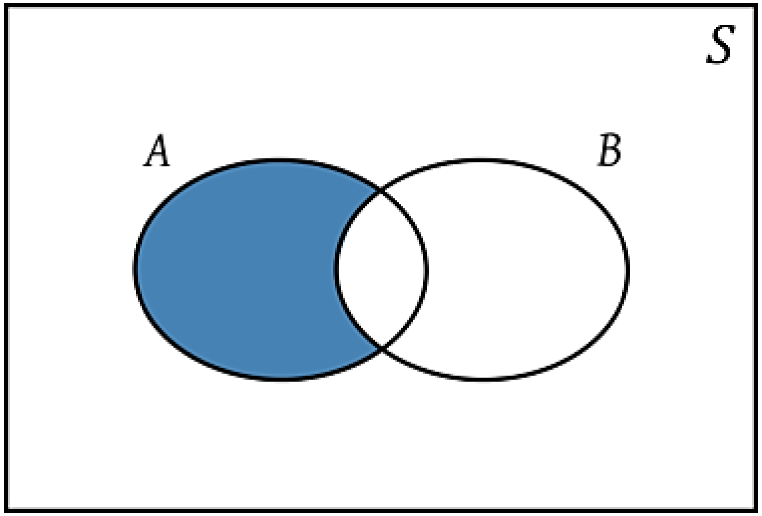
- **Complemento:** El complemento de un evento A con respecto a el espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en A. Se denota por $A^{'}$ (también se puede denotar como: A^c, $\bar{A}$).

- **Contenencia:** Si cualquier resultado de B también es un resultado de A, se dice que el evento B está contenido en A. Se denota por $B \subset A$.

Diferencia

- **Diferencia:** Es el evento formado por todos los posibles resultados en A, excluyendo a los resultados de B. Se denota por $A - B$, o $A \setminus B$.

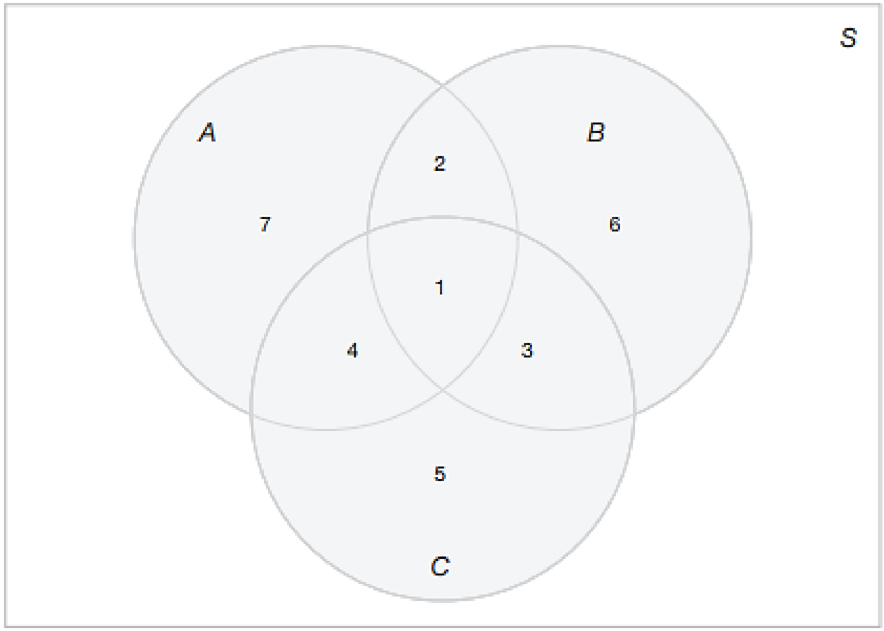
$$A - B : \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$$

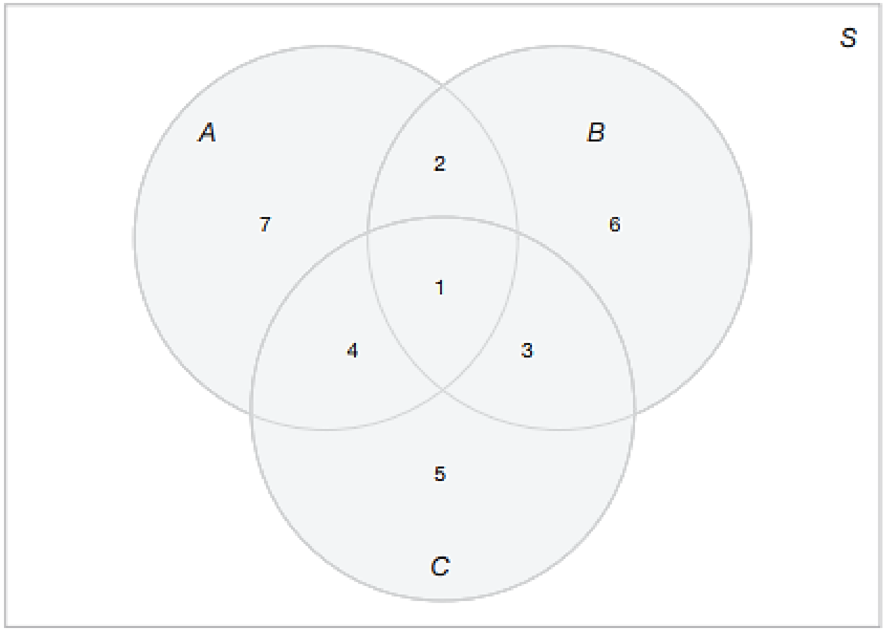


Ejemplo

Sea $S = \{a, b, c, d, e\}$ con $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$ eventos.

Ejemplo





Ejemplo

Las orquídeas de un vivero, presentan las siguientes características:

		Tamaño de pétalo	
		Grande	Pequeño
Color	Lila	40	4
	Blanca	2	3

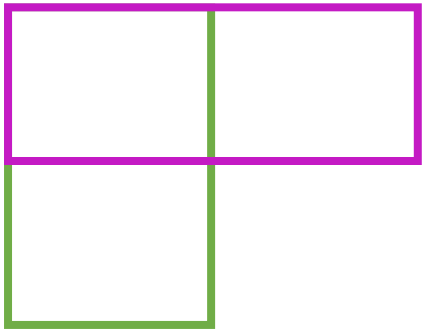
Sean los eventos:

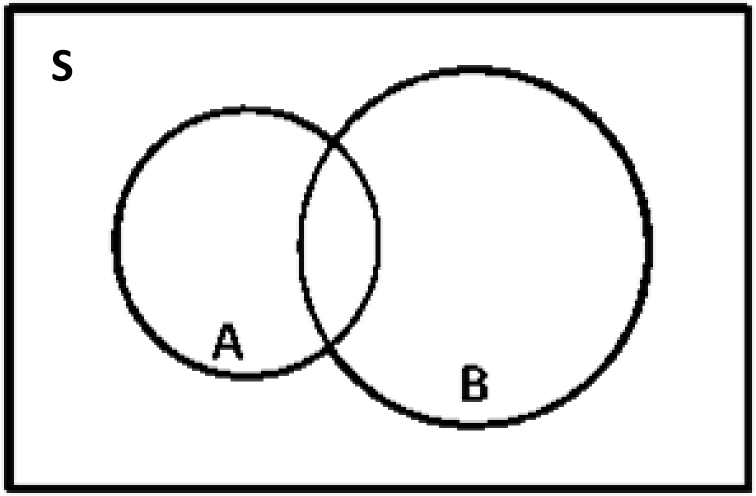
A : la orquídea es de pétalo grande. B : la orquídea es de color lila.

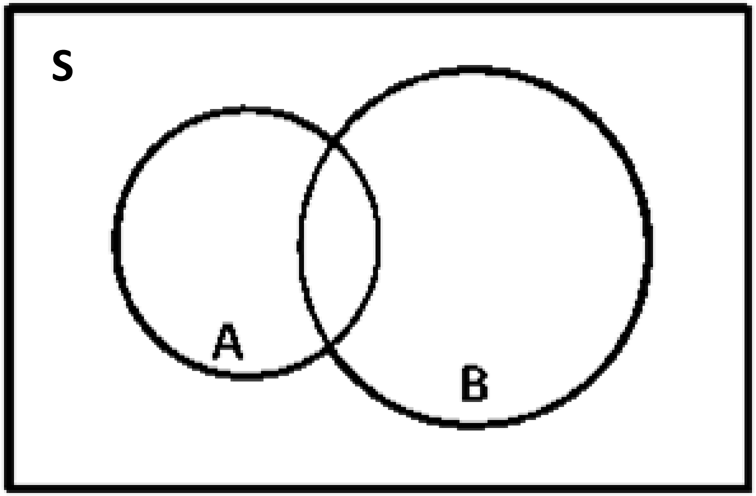
Determine el número de muestras en $A \cap B$, A^c y $A \cup B$. Represente con diagramas de Venn este espacio muestral y los eventos A y B. Indique el número de resultados en cada región del diagrama.

Ejemplo

		Tamaño de pétalo	
		Grande	Pequeño
Color	Lila	40	4
	Blanca	2	3







Eventos excluyentes y exhaustivos

- **Eventos excluyentes (disjuntos):** Dos eventos E_1 y E_2 se dicen mutuamente excluyentes o disjuntos si $E_1 \cap E_2 = \{\emptyset\}$.

- **Eventos Exhaustivos:** Dos eventos E_1 y E_2, se dice que son exhaustivos si se cumple que $E_1 \cup E_2 = S$.

Ejemplo

Se lanza un dado no cargado. El espacio muestral para este experimento es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Defina por extensión los siguietes eventos:

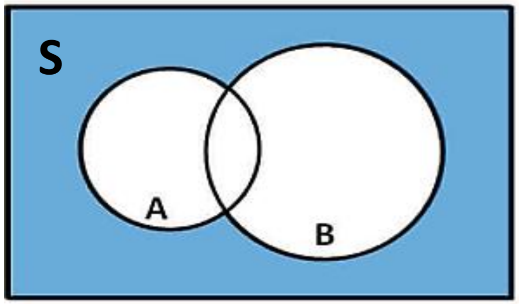
- E_1: El resultado es un número par.
- E_2: El resultado es un número primo.
- E_3: El resultado es un número impar.

Identifique cuál par de ellos son excluyentes, ¿son los tres eventos mutuamente excluyentes?

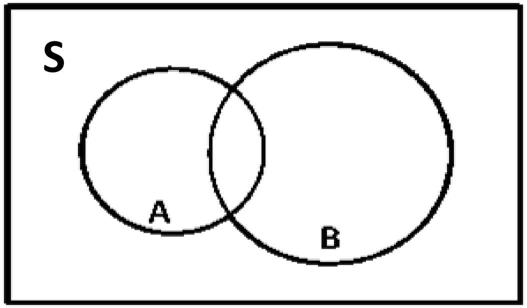
Resultados útiles

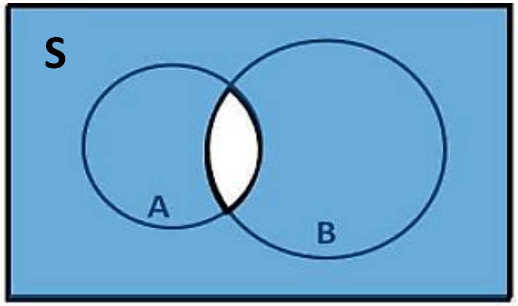
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A^c = S$
- $A \cap A^c = \emptyset$
- $S^c = \emptyset$
- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Resultados útiles

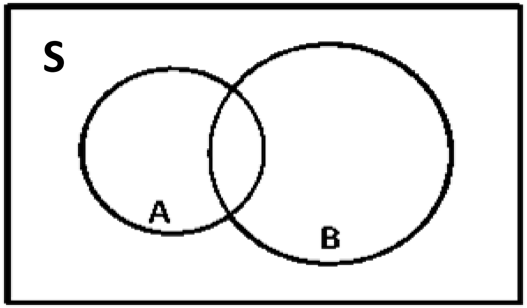


(A ∪ B)'





(A ∩ B)'



Ejercicio

Una empresa tiene 100 empleados, 37 de ellos fuman, 40 practican algún deporte y 40 tienen tarjeta de crédito. 7 fuman y practican algún deporte, 20 practican algún deporte y tienen tarjeta de crédito. 10 fuman y tienen tarjeta de crédito, pero no practican deportes. 2 fuman y practican algún deporte pero no tienen tarjeta de crédito. Defina los eventos:

A: El empleado fuma.

B: El empleado practica algún deporte.

C: El empleado tiene tarjeta de crédito.

Gráfique éstos eventos en un diagrama de Venn. Determine el número de empleados en cada uno de los siguientes eventos:

$$A \cap B \cap C, \quad A \cup B \cup C, \quad A \cap C, \quad A \cap \bar{B}, \quad A \cap \bar{C}, \quad B \cap \bar{C}$$

$$B \cap C \cap \bar{A}, \quad \overline{A \cap B \cap C}, \quad \overline{A \cup B \cup C}$$

Definición de la probabilidad

Probabilidad clásica

Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado con ε. Sea A un evento de S. La probabilidad de ocurrencia del evento A, denotada $P(A)$, se define como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

donde $n(A)$ es el número de elementos de A (casos favorables a A) y $n(S)$ es el número de elemetos del espacio muestral S (total de casos posibles).

Para calcular probabilidad, basta con saber los valores $n(A)$ y $n(S)$. Para conocerlos, es necesario tener maneras de hacer conteos.