CALCULO PROPOSICIONAL

ALFABETO Alf_0

SIGNOS PRIMITIVOS	
Formas proposiciones simples A_{p_0} (fórmula atómica, átomo, literal, forma declarativa simple)	$\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \dots, \mathrm{p}_i, \mathrm{q}_i, \mathrm{r}_i, \dots$ Cada elemento del conjunto A_{p_0} representaría a una *oración declarativa simple*. Los subíndices i son números naturales
Signos de puntuación	Paréntesis: (,)
Conectivos lógicos primarios	$\neg, \vee$
SIGNOS COMPLEMENTARIOS	
Conectivos lógicos secundarios:	$\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

REGLAS DE FORMACIÓN DE FÓRMULAS RF_0

BÁSICAS
Definición de formas proposicionales simples RFP1. Cualquier forma proposicional simple es una fórmula bien formada fbf.
Definición de formas proposicionales negadas RFP2. Si R es una fbf, entonces $\neg\mathrm{R}$ es una fbf.
Definición de formas proposicionales disyuntivas RFP3. Si R y S son fbfs, entonces $\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$ es una fbf.
Definición de formas proposicionales agrupadas RFP4. Si R es una fbf, entonces (R) también es una fbf
COMPLEMENTARIAS
Definición de formas proposicionales conjuntivas RFP5. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$ se considera bien formada y se define como: $\neg(\neg\mathrm{R} \vee \neg\mathrm{S})$
Definición de formas proposicionales condicionales RFP6. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}$ se considera bien formada y se define como: $\neg\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$
Definición de formas proposicionales bicondicionales RFP7. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{S}$ se considera bien formada y se define como: $(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}) \wedge (\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{R})$
RFP8. Una secuencia de símbolos del alfabeto Alf_0 es una fbf del cálculo L_0 si, y sólo si, puede obtenerse de las anteriores reglas de formación.

Alcance de los signos de operación lógica

Alcance de la negación	Un signo de negación, ¬, sólo influye a la fbf que le siga inmediatamente.
Alcance de los signos de operación lógica: conjunción, disyunción, condicional, bicondicional ∧, ∨, →, ↔	Cada uno de estos signos tiene por alcance las fbfs **más cercanas** a su izquierda y derecha
Alcance de los paréntesis	Es la fbf que se encuentre entre un paréntesis izquierdo y el primer paréntesis derecho que halle.

Jerarquía entre las operaciones lógicas

Orden de prioridad **descendente** de izquierda a derecha	¬, ∧, ∨, →, ↔
El orden de prioridad se modifica con el uso de los signos de puntuación. Los paréntesis, así, superan en prioridad a cualquier operación lógica.	( )

Lógica Proposicional

(Enfoque Semántico o Teoría de Modelos)

Conceptos Básicos

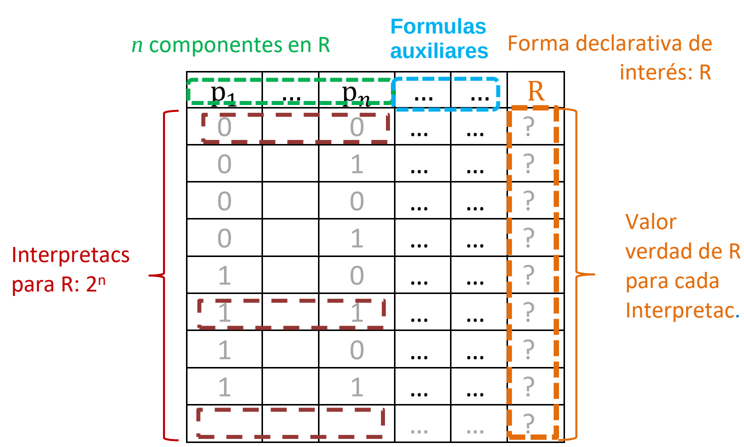
Fórmula básica componente de una fbf R	Es una forma declarativa, que aparece en R, a la que **NO se le puede calcular su valor de verdad, y no queda otra opción que asignárselo**. Ese es el caso de las *formas proposicionales simples* (p, q, r,…). Nota: cuando en una fbf aparezca, a su vez, una *letra mayúscula* (P, Q, S,…) trátela como una “componente básica”.
Interpretación de una fbf R	Es cada posible combinación (asignación) de valores de verdad de las **fórmulas básicas** que componen a R (Si R está formada por n de ellas, se tendrán 2^n interpretaciones).
Modelo de una fbf R	Se le dice a cualquier interpretación que hace “cierta” a R
La fbf R es *consistente* o *satisfacible*	Cuando existe al menos una interpretación que hace “cierta” a R. (R posee al menos un modelo)
La fbf R es *insatisfacible o contradictoria*	Cuando todas las interpretaciones vuelven “falsa” a R (R no posee modelos)
La fbf R es *tautología o verdad universal*	Cuando toda interpretación hace “cierta” a R (todas las interpretaciones se vuelven modelo)
La fbf R es *contingencia*	Cuando no todas las interpretaciones hacen “cierta” a R, pero tampoco todas la vuelven falsa.
Un conjunto de fbfs $\mathrm{R}, \mathrm{S}, \dots, \mathrm{T}$ son *consistentes entre sí*	Cuando puede hallarse al menos una interpretación que las vuelva “ciertas” simultáneamente (es decir, pueda encontrarse **al menos** un ***mismo*** *modelo* para todas).
La fbf P *implica lógicamente* a la fbf Q	Cuando **cada modelo** para la fbf P, **también es modelo** para la fbf Q; lo que se simboliza como $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$.[1]
Las fbfs P y Q son *lógicamente equivalentes*	Cuando cada interpretación arroja el mismo valor de verdad para las fbfs P y Q; se simboliza como $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$, $\big((\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P})\big)$, o $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$.[2]
Q es *consecuencia lógica* de las fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$	Cuando **cada modelo** para el conjunto de fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$, **también es modelo** para la conclusión Q.
Un conjunto de fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$, asumidas como premisas, y otra Q como conclusión, conforman un *argumento deductivo formal válido*	Cuando Q es *consecuencia lógica* de las fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$. Un argumento deductivo formalmente válido se representa como: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n \vDash \mathrm{Q}$

[1] En la práctica: cuando la fbf $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ es tautológica.

[2] En la práctica: cuando la fbf $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ es tautológica

	Nota: Si el conjunto de premisas es inconsistente, el argumento es formalmente válido, sin más análisis.

Tablas de Verdad

Tabla de verdad	Es un mecanismo que puede emplearse para: a) determinar la consistencia (satisfabilidad) **de una fbf** (y junto con ello, si contingente, tautológica o contradictoria), b) la consistencia **entre varias fbfs**, c) la existencia de relación de implicación o de equivalencia entre 2 fbfs, y d) la validez de un argumento lógico formal.
	Una tabla de verdad es un arreglo de filas y columnas organizado de la siguiente manera: • Cada una de las primeras n columnas de la primera fila (comenzando desde la izquierda), contiene uno de los n símbolos que identifican las **fórmulas básicas** que aparecen en la fbf R. • A partir de la columna n, todavía en la primera fila, se van configurando y ubicando combinaciones cada vez más complejas de fbfs (llámense **fórmulas auxiliares**), hasta que se generen la(s) forma(s) proposicional(es) de interés R. • A partir de la segunda fila, entre las columnas 1 y n, se localiza cada posible combinación de valores de verdad de las fórmulas básicas. Cada una de estas combinaciones se denomina ***interpretación***[3]. Además, para cada interpretación, y luego de la columna n hasta la última, se calculan y registran los valores de verdad de las correspondientes fbfs.
Configuración de una tabla de verdad para una fbf R	

[3] Existirán 2^n de tales combinaciones.

Configuración de una tabla de verdad para varias fbfs: $\mathrm{R}, \mathrm{S}, \dots, \mathrm{T}$

n componentes en R, S o T

Formulas auxiliares

Formas declarativas de interés: R, S, T

2^n Interpretac:

p_1	...	p_n	...	R	...	S	...	T
0		0	...	?	...	?	...	?
0		1	...	?	...	?	...	?
0		0	...	?	...	?	...	?
0		1	...	?	...	?	...	?
1		0	...	?	...	?	...	?
			...	?	...	?	...	?
1		1	...	?	...	?	...	?
1		0	...	?	...	?	...	?
			...	?	...	?	...	?
1		1	...	?	...	?	...	?

Valor verdad de R, de S y de T para cada Interpretac.

Tablas de verdad básicas

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunción

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disyunción

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Condicional

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bi-condicional

P	$\neg P$
1	0
0	1

Negación

Métodos empleados para verificar validez de argumentos deductivos formales

Sean $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ fbfs empleadas como *premisas*. Sea Q fbf empleada como *conclusión*.
La validez de un argumento deductivo se establece cuando se puede verificar que la fbf Q es consecuencia lógica del conjunto de premisas $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$.(No sobra mencionar que existen casos donde el argumento **no incluye premisas**).

Métodos basados en Tabla de verdad

Forma 1: *Verificación de Tautología de la forma de condicional*:
premisa1 ^ premisa2 ^ ... ^ premisan -> conclusiónclarativa

¿El argumento incluye premisas?

No: Construya Tabla de verdad para la fbf Q

¿la fbf Q es tautológica?

- Sí:
  El argumento es válido: $\vDash \mathrm{Q}$
- No:

	El argumento es No válido: $\nvDash \mathrm{Q}$ Sí: Construya Tabla de verdad para la fbf $\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \rightarrow \mathrm{Q}$ ¿La fbf $\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \rightarrow \mathrm{Q}$ es tautológica? • Sí: El argumento es válido: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n \vDash \mathrm{Q}$ • No: El argumento es No válido: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n \nvDash \mathrm{Q}$
Forma 2: *Verificación de consistencia entre las formas declarativas*: premisa1, premisa2,...,premisan, conclusión	¿El argumento incluye premisas? No: Resuelva de la misma manera que el de su caso homólogo de la forma 1, es decir, Construya Tabla de verdad para la fbf Q. ¿la fbf Q es tautológica? • Sí: El argumento es válido: $\vDash \mathrm{Q}$ • No: El argumento es No válido: $\nvDash \mathrm{Q}$ Sí: Construya Tabla de verdad donde aparezca, entre otras, una columna para cada premisa $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ y para la conclusión Q. ¿Toda interpretación que se vuelve ***modelo*** "de manera simultánea" para las premisas, también lo es para conclusión? • Sí: El argumento es válido: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n \vDash \mathrm{Q}$ • No: El argumento es No válido: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n \nvDash \mathrm{Q}$
Métodos basados en Análisis de Asignación de valores de verdad[4]	
Suposición de validez *Toda interpretación que haga ciertas a las premisas "simultáneamente", también hace cierta a la conclusión*	¿El argumento incluye premisas? No: ¿la fbf Q es cierta para toda interpretación (asignación de valor de verdad)? • Sí: El argumento es válido: $\vDash \mathrm{Q}$ • No: El argumento es No válido: $\nvDash \mathrm{Q}$ Sí: ¿Alguna premisa es inconsistente, o el conjunto de premisas es inconsistente? • Sí: El argumento es válido: $\vDash \mathrm{Q}$ • No: Suponga que cada premisa $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ y la conclusión Q, son ciertas.

[4] Encontré en Copi&Cohen, pags 489 y 490, un método análogo a éste denominado Técnica Abreviada de Tablas de Verdad.

	Ensaye la construcción de interpretaciones compatibles con esta suposición: ¿Encontró que **toda interpretación** compatible "verifica el supuesto"? ▪ Sí: El supuesto se confirma, o sea el argumento es válido: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vDash Q$. ▪ No: Al menos una interpretación compatible generó valor de verdad contradictorio en alguna fbf (sea premisa, conclusión, o en un átomo de ellas). Así pues, el supuesto se refuta, es decir, el argumento es No válido $P_1, P_2, \ldots, P_n \nvDash Q$.
Suposición de No validez *Al menos una interpretación hace ciertas a las premisas "simultáneamente", pero falsa a la conclusión*	¿El argumento incluye premisas? No: ¿la fbf Q es falsa para al menos una interpretación? • Sí: Se confirma supuesto, luego el argumento es NO válido: $\nvDash Q$ • No: El argumento es válido: $\vDash Q$ Sí: ¿Alguna premisa es inconsistente, o el conjunto de premisas es inconsistente? • Sí: El argumento es válido: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vDash Q$ • No: **Suponga** que cada premisa $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es cierta y la conclusión Q, falsa. Ensaye la construcción de interpretaciones compatibles con esta suposición. ¿Encontró **al menos una interpretación** compatible que "verifica el supuesto"? ▪ Sí: El supuesto se confirma, o sea el argumento es No válido: $P_1, P_2, \ldots, P_n \nvDash Q$. ▪ No: Cada interpretación compatible generó valor de verdad contradictorio en alguna fbf (sea premisa, conclusión, o en un átomo de ellas). Así pues, el supuesto se refuta, es decir, el argumento es válido: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vDash Q$.

DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS CONSISTENCIA, CONTINGENCIA, TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN DE UNA FBF: TABLAS DE VERDAD

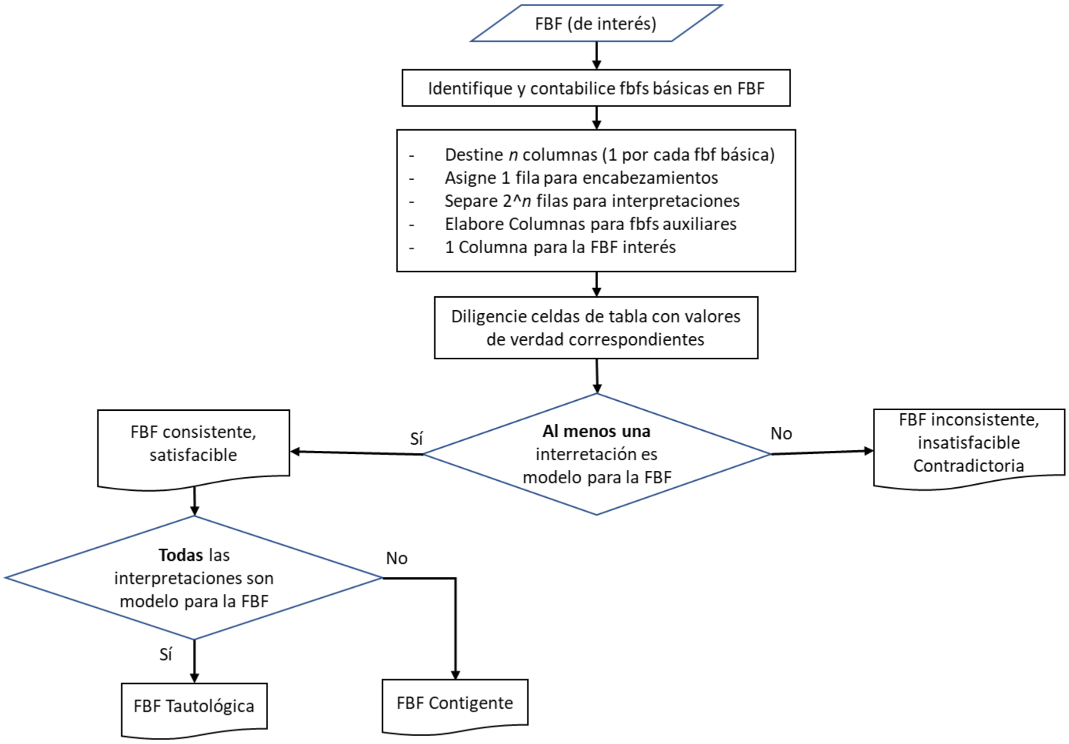


DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS CONSISTENCIA ENTRE FBFS: TABLAS DE VERDAD

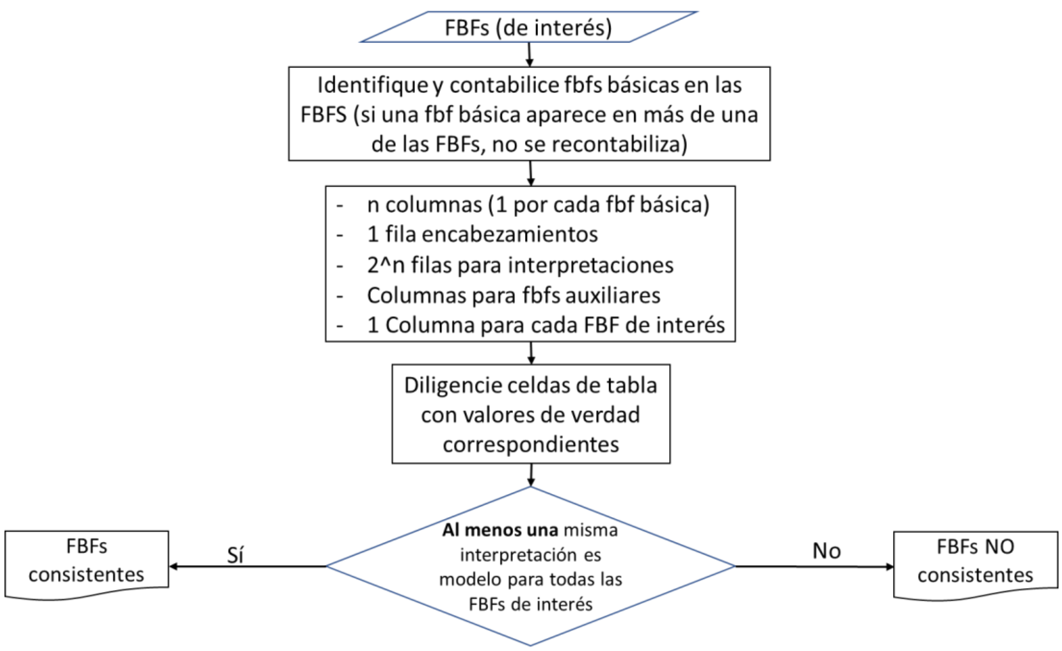


DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS VALIDEZ DE ARGUMENTO DEDUCTIVO: TABLAS DE VERDAD FORMA 1

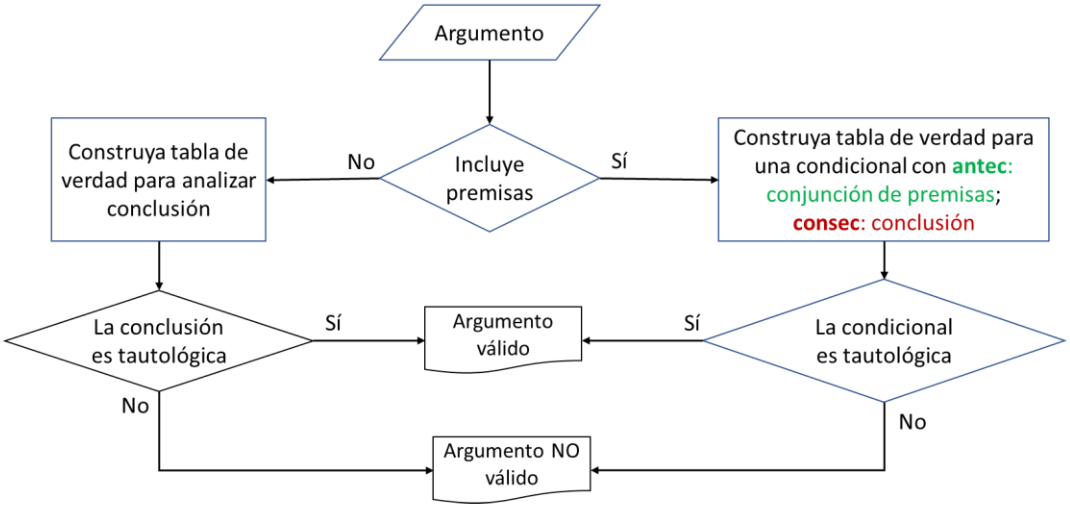


DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS VALIDEZ ARGUMENTO DEDUCTIVO: TABLAS DE VERDAD FORMA 2

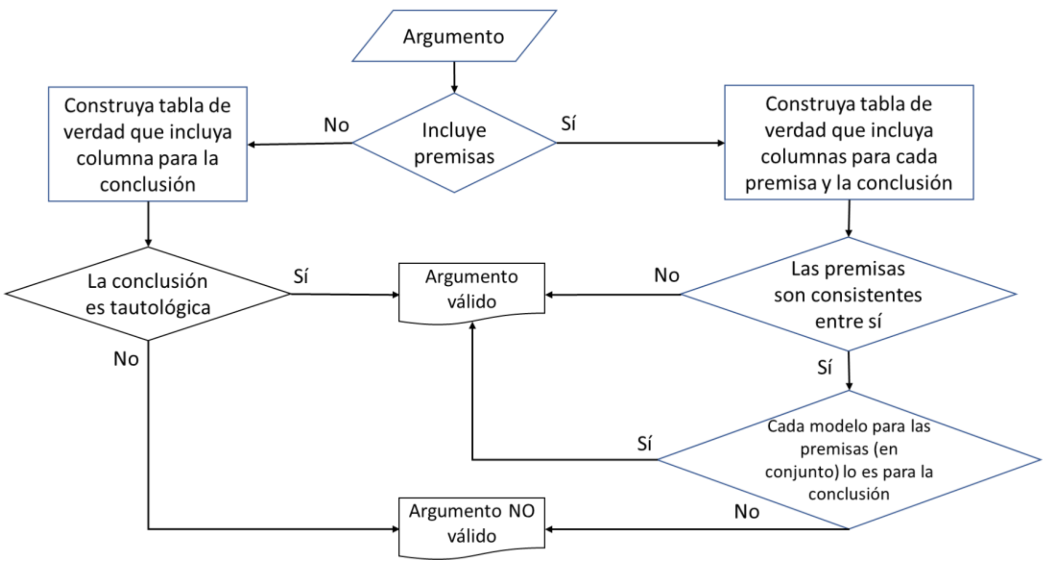


DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS VALIDEZ ARGUMENTO DEDUCTIVO: ANÁLISIS INTERPRETACIONES FORMA 1

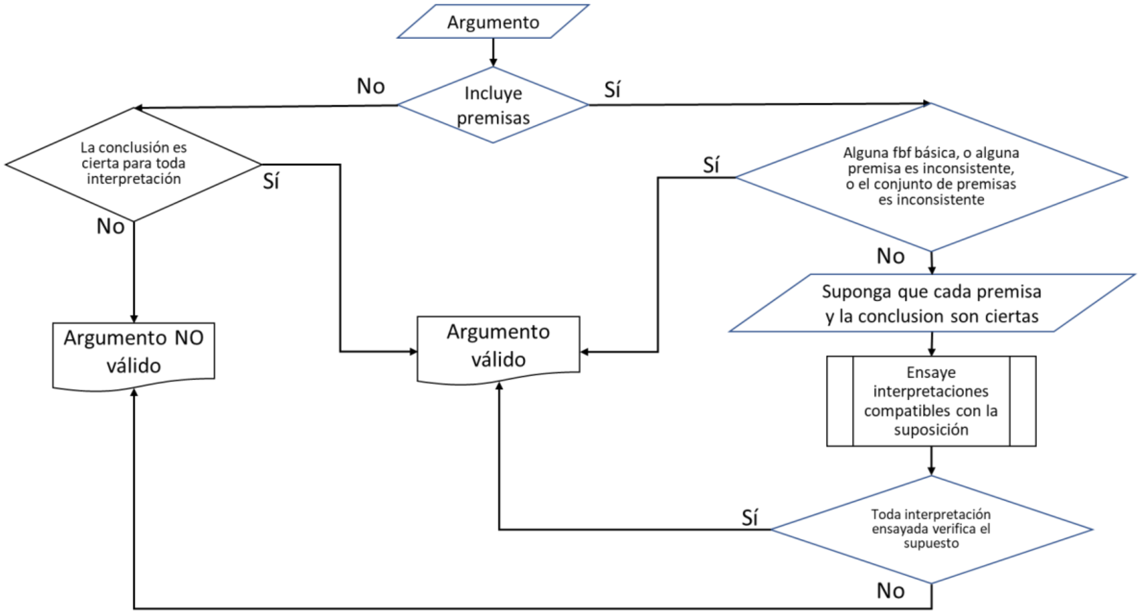
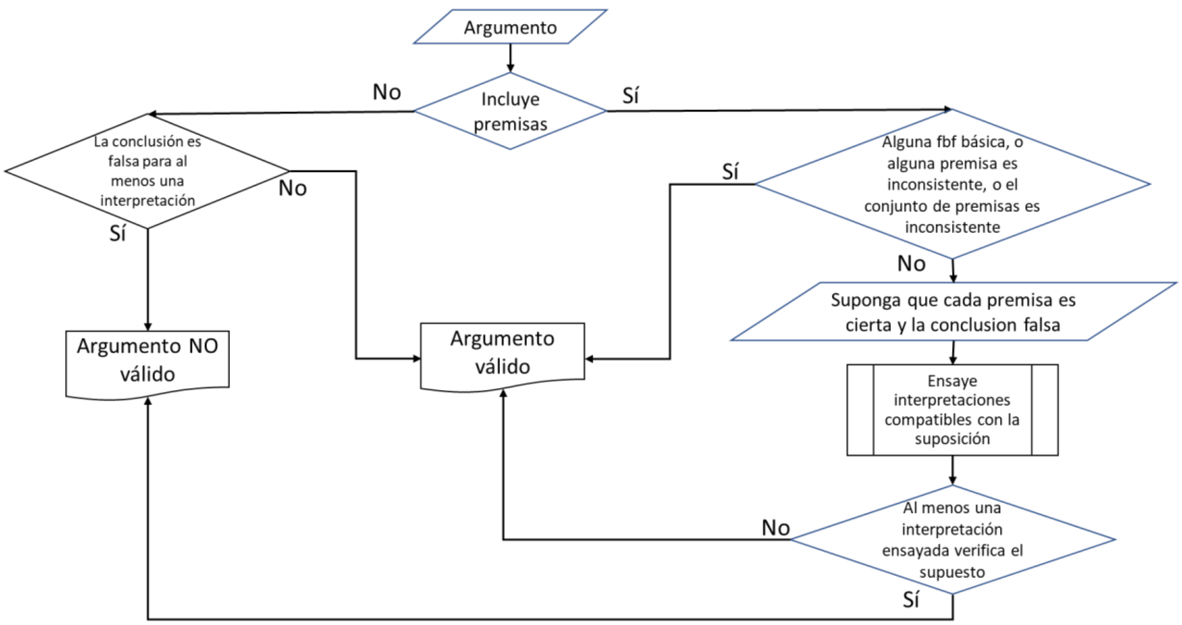


DIAGRAMA FLUJO ANÁLISIS VALIDEZ ARGUMENTO DEDUCTIVO: ANÁLISIS INTERPRETACIONES FORMA 2



Argumentos Deductivos Formales Válidos
(Reglas de Validez, o Reglas de Inferencia Deductiva) RT_0

Modus Ponendo Ponens	$P, P \to Q \vDash Q$
Adición **Teorema TP1**	$P \vDash P \vee Q$
Idempotencia de la disyunción **Teorema TP2**	$\vDash P \vee P \leftrightarrow P$
Conmutatividad de la disyunción **Teorema TP3**	$\vDash P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
Adición con $\vee$ a la condicional **Teoremas TP4a** **Teoremas TP4b** **Teoremas TP4c** **Teoremas TP4d**	$P \to Q \vDash R \vee P \to R \vee Q$ $P \to Q \vDash R \vee P \to Q \vee R$ $P \to Q \vDash P \vee R \to Q \vee R$ $P \to Q \vDash P \vee R \to R \vee Q$
Modus Tollendo Ponens **(Silogismo disyuntivo)** **Teorema TP5a**	$\neg P, P \vee Q \vDash Q$
Resolución **Teorema TP5b**	$\neg P \vee Q, P \vee R \vDash Q \vee R$
Modus Tollendo Tollens **Teorema TP6**	$\neg Q, P \to Q \vDash \neg P$
Leyes de condicional **Teorema TP7a** **Teorema TP7b**	$Q \vDash P \to Q$ $\neg P \vDash P \to Q$
Silogismo hipotético **Teorema TP8**	$P \to Q, Q \to R \vDash P \to R$
Medio excluido **Teorema TP9**	$\vDash \neg P \vee P$
Teorema TP10	$\neg Q \wedge Q \vDash P$
Doble negación **Teorema TP11**	$\vDash P \leftrightarrow \neg\neg P$
Ley del contra-recíproco **Teorema TP12**	$\vDash (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
Teorema TP13	$\vDash P \vee Q \leftrightarrow (\neg P \to Q)$
Teorema TP14	$\vDash \neg(P \to Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$
Propiedades de la conjunción **Teorema TP15a** **(Simplificación)**	$P \wedge Q \vDash P$

Teorema TP15b (Adjunción)	$P, Q \vDash P \wedge Q$
Idempotencia de la conjunción **Teorema TP16**	$\vDash P \wedge P \leftrightarrow P$
Conmutatividad de la conjunción **Teorema TP17**	$\vDash P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$
Ley de reducción al absurdo **Teorema TP18**	$\neg P \rightarrow R \wedge \neg R \vDash P$
Adición de condicionales con $\vee$ **Teorema TP19**	$P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vDash P \vee R \rightarrow Q \vee S$
Adición de condicionales con $\wedge$ **Teorema TP20**	$P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vDash P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$
Dilema constructivo **Teorema TP21**	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow T \vDash R \vee T$
Adición con $\wedge$ a la condicional **Teorema TP22a** **Teorema TP22b** **Teorema TP22c** **Teorema TP22d**	$P \rightarrow Q \vDash P \wedge R \rightarrow Q \wedge R$ $P \rightarrow Q \vDash P \wedge R \rightarrow R \wedge Q$ $P \rightarrow Q \vDash R \wedge P \rightarrow R \wedge Q$ $P \rightarrow Q \vDash R \wedge P \rightarrow Q \wedge R$
Ley asociativa de la disyunción **Teorema TP23a**	$\vDash (P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
Ley asociativa de la conjunción **Teorema TP23b**	$\vDash (P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Ley distributiva de la conjunción respecto de la disyunción **Teorema TP24a**	$\vDash P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Ley distributiva de la disyunción respecto de la conjunción **Teorema TP24b**	$\vdash P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Ley de DeMorgan sobre la disyunción **Teorema TP25a**	$\vDash \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
Ley de DeMorgan sobre la conjunción **Teorema TP25b**	$\vDash \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
OTRAS REGLAS DE VALIDÉS, O DE INFERENCIA	
Conmutatividad de la bi-condicional **Teorema TP26a**	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$
Teorema TP26b	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
Teorema TP26c	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big)$

Teorema TP27a **Teorema TP27b** **Teorema TP27c**	$\vDash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$ $\vDash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$ $\vDash (P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$
Teorema TP28a	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((R \rightarrow P) \leftrightarrow (R \rightarrow Q)\big)$
Teorema TP28b	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \rightarrow R) \leftrightarrow (Q \rightarrow R)\big)$
Teorema TP28c	$\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \leftrightarrow R) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)\big)$
Teorema TP29a	$\vDash (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee R \rightarrow Q)$
Teorema TTP29b	$\vDash (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow Q \wedge R)$
Teorema TP30	$\vDash (P \rightarrow Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q \rightarrow R)$
Teorema TP31	$P \rightarrow Q \vDash \big((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)\big)$
Teorema TP32	$P \vDash (Q \rightarrow P \wedge Q)$
Teorema TP33	$\vDash (P \wedge Q \rightarrow R) \leftrightarrow \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big)$
Ley de absorción **Teorema TP34a**	$\vDash P \leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$
Ley de absorción **Teorema TP34b**	$\vDash P \leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$
Ley del medio excluido2 **Teorema TP35**	$\vDash \neg P \vee P \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge P)$
O excluyente **Teorema TP36a**	$\vDash (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
O excluyente **Teorema TP36b**	$\vDash (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$