INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Representación de un número en diferentes sistemas numéricos

A excepción de la romana, cuando de números se trata, la enseñada desde los primeros niveles de escolaridad corresponde a la del sistema numérico *decimal*; como se verá, el decimal es sólo uno de los sistemas numéricos posibles. Antes de ingresar al campo formal, será apropiado observar el siguiente ejercicio.

Considere el número 167; a no ser que se especifique otra cosa, es común asumir que él está representado bajo el sistema de numeración decimal. Ahora observe cómo el número puede ser representado mediante la siguiente *forma polinomial*: $167 = 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Es evidente, en esta representación, el papel que juegan algunas de las potencias del entero 10 para definir el número.

Dos formas alternas de comprender esta representación se muestran a continuación. En la primera se utiliza de forma reiterativa el *teorema de la división*, donde el divisor siempre será el número 10:

$$\begin{aligned} 167 &= 16 \cdot 10 + 7 \\ &= (10 + 6) \cdot 10 + 7 \\ &= 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Los números que acompañan a cada una de las potencias de 10, es decir, *los dígitos, determinan de manera única al número*; al uso de los dígitos para representar a un número se le denominará *notación digital*.

La segunda forma de obtener un resultado análogo emplea *divisiones sucesivas*, donde el divisor es el entero 10:

$$\begin{array}{r|l} 167 & 10 \\ \cline{2-2} 67 & 16 \;\; \begin{array}{|l} 10 \\ \hline \end{array} \\ 7 & 6 \quad\; 1 \end{array}$$

Observe todos los residuos y el último cociente de las divisiones sucesivas, haga la lectura de derecha a izquierda y compare con el resultado obtenido por medio de la primera forma (teorema de la división)

Es posible que un mismo número sea simbolizado mediante un polinomio de potencias de un entero diferente al 10. Pruébese, por ejemplo, con el 2.

Usando sucesivamente el teorema de la división para obtener la forma polinomial correspondiente a las potencias del entero 2:

$$\begin{aligned} 167 &= 83 \cdot 2 + 1 \\ &= (41 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= 41 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\ &= (20 \cdot 2 + 1) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\ &= 20 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
167 &= (10 \cdot 2) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 10 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= (5 \cdot 2) \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 5 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= (2 \cdot 2 + 1) \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 2 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= (1 \cdot 2) \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1
\end{aligned}
$$

Rescribiendo la anterior expresión en la que se incluirán las potencias faltantes de 2 (obviamente con coeficiente 0), se obtiene:

$$167 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Recordando la observación hecha párrafos arriba para realizar la representación digital, el número original queda representado de manera única con los números que acompañan las potencias de 2, es decir 10100111.

Empleando el procedimiento de divisiones sucesivas:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
167 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & & & & \\ \cline{2-2}
1 & 83 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & & & \\ \cline{3-3}
 & 1 & 41 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & & \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 20 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{5-5}
 & & & 0 & 10 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{6-6}
 & & & & 0 & 5 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{7-7}
 & & & & & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{8-8}
 & & & & & & 0 & 1
\end{array}
$$

Comenzando desde el cociente en la parte inferior, recorra todos los residuos hacia arriba. Con base en este ejercicio se puede presentar ahora, un teorema que formaliza la representación de cualquier número.

Teorema fundamental de la numeración. Todo número N puede expresarse mediante la forma polinómica: $N = d_k B^k + \cdots + d_1 B^1 + d_0 B^0$.
Donde B es la *base*[1] del sistema numérico particular, y los valores d_i, $i = 0, \dots, k$ son los *dígitos* que identifican al número N en ese sistema.

La representación polinómica del número N se simplifica en su notación digital así: $d_k\, d_{k-1} \dots d_1\, d_{0_{(B)}}$.

En un sistema numérico que emplea la base B, la cantidad de dígitos distintos requeridos para identificar los posibles números representables en él, es B. Si se emplean los números enteros iniciando desde el 0, entonces se requerirían $0,1, \dots ,9, \dots , B-1$ símbolos diferentes para usarse como dígitos.

[1] Todo número entero mayor a 1 puede desempeñar la función de *base*.

Un sistema numérico empleado para las aplicaciones computacionales es el *sistema numérico binario*. Este sistema numérico tiene como base al número 2, y como dígitos los símbolos 0 y 1.[2]

Cambio de sistema numérico (cambio de base)
Un procedimiento sencillo para realizar un cambio de sistema numérico base B_1 a base B_2, es el siguiente:

a) Tome la representación digital del número en la base B_1, simbolícelo mediante su polinomio y efectúe todas las operaciones indicadas en ese polinomio, la cantidad resultante es el número expresado en el sistema decimal.
b) Efectúe divisiones sucesivas sobre el número decimal obtenido en el paso anterior, donde el divisor es la base B_2.
c) Para configurar el número en la notación digital en la nueva base, desde el mayor al menor dígito significativo (es decir de izquierda a derecha), empiece con el *último cociente* de las divisiones sucesivas e inserte los residuos obtenidos en el paso b), recorridos de derecha a izquierda.

INQUIETUDES

1 Señale sólo las afirmaciones necesariamente ciertas

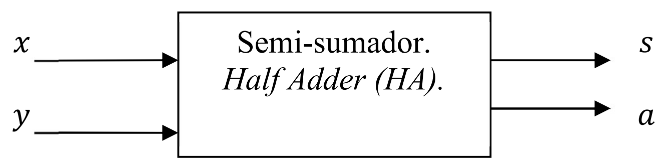
a. La secuencia de símbolos 4BEE1F es una representación válida de un número en la base 17
b. Para sumar dos números de una misma base, es obligatorio seguir el siguiente procedimiento: a) transformar cada número a la base 10, b) sumarlos y c) el resultado de *b)* transformarlo a la base original.
c. No se puede transformar un número de un sistema numérico, a otro sistema cuya base sea superior
d. Cuando se van a sumar dos números binarios de n dígitos, se requieren $n-1$ semisumadores
e. En un sistema numérico base B, se requieren $B-1$ dígitos para representar números

[2] El sistema decimal tiene como base al entero 10, y los símbolos para los dígitos son $0,1,\ldots,9$.

A continuación, será presentada una aplicación de la lógica booleana y la representación numérica binaria, en el diseño de dos tipos de sumadores de dos números binarios de 1 dígito cada uno.

Diseño de un *Sumador de dos números binarios de 1 dígito*, sin acarreo previo (semi-sumador o Half Adder: *H.A.*)

Un semi-sumador es un circuito lógico que se emplea para efectuar la suma de dos números binarios de 1 dígito cada uno. Es un sistema compuesto por dos entradas: dos números binarios a sumar, de 1 dígito cada uno, x y y; y dos salidas: una que corresponde al resultado de la suma de los números, s; y la otra, al acarreo de la suma a.



Entradas:

- Dígitos a sumar: x y y.

Salidas:

- Resultado de la suma: s
- Acarreo de salida: a.

La tabla de verificación para un semi-sumador es:

x	y	s	a
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$x \oplus y$

La expresión booleana de la salida s, en términos de la FND, es $s = x'y + xy'$; mientras que la FND para la salida a es: $a = xy$. El circuito lógico correspondiente al semi-sumador se presenta a continuación.

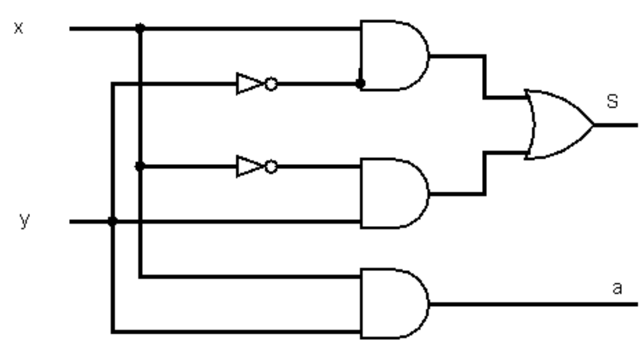


Figura Circuito Lógico: Semisumador de dos número binarios de 1 dígito cada uno

halfadder.circ

El mismo semi-sumador puede simplificarse al emplear la compuerta *xor*, ya que: $s = x'y + xy' = x \oplus y$, luego:

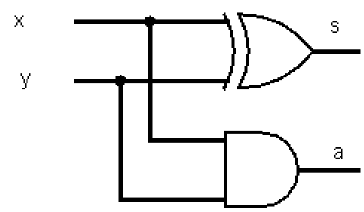
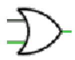


Figura Circuito Lógico: Semisumador de dos números binarios de 1 dígito cada uno

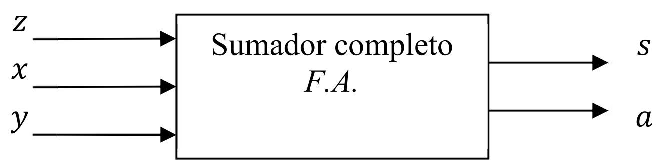


halfadder2.circ

Diseño de un *Sumador de dos números binarios de 1 dígito*, con acarreo previo (sumador completo o Full Adder: *F.A.*)

Como es sabido cuando se suman dos dígitos, x y y, es posible que tenga que considerarse un tercer dígito: aquel que se genera cuando el resultado de la suma de dos dígitos **previos** ha superado *la base* del sistema numérico utilizado. A tal tercer dígito se le conoce como *acarreo previo*, o *acarreo de entrada*, y denotado como z.

La representación del sistema *sumador completo* se muestra a continuación:



Entradas:
- Dígitos a sumar: x y y.
- Acarreo de entrada: z.

Salidas:
- Resultado de la suma: s.
- Acarreo de salida: a.

La tabla de verificación que le corresponde al comportamiento del sistema *F.A.* es:

x	y	z	s	a
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Algunas de las combinaciones de los valores de x, y y z, junto con los resultados correspondientes de s y de a, se obtienen así:

Fila 1

$$\begin{array}{llll} x: & & 0 & \\ y: & & 0 & \\ \hline a_0: & 0 & 0 & :s_0 \\ & & 0 & :z \\ \hline a_1 & 0 & 0 & :s \\ \hline a & 0 & & \end{array}$$

Fila 4

$$\begin{array}{llll} x: & & 0 & \\ y: & & 1 & \\ \hline a_0: & 0 & 1 & :s_0 \\ & & 1 & :z \\ \hline a_1 & 1 & 0 & :s \\ \hline a & 1 & & \end{array}$$

Fila 8

$$\begin{array}{llll} x: & & 1 & \\ y: & & 1 & \\ \hline a_0: & 1 & 0 & :s_0 \\ & & 1 & :z \\ \hline a_1 & 0 & 1 & :s \\ \hline a & 1 & & \end{array}$$

La FND para la función correspondiente al resultado de la suma es: $s = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$. Una expresión equivalente se obtiene aplicando propiedades y leyes del álgebra booleana:

$$s = (x'y + xy')z' + (x'y' + xy)z$$

$$s = \underbrace{(x'y + xy')}_{s_0} z' + \underbrace{(x'y' + xy)}_{s'_0} z \quad [3]$$

La expresión booleana para el acarreo de salida a, en términos de la FND, es: $a = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

Una expresión equivalente para a, se obtiene aplicando propiedades y leyes del álgebra booleana:

$$a = (x'y + xy')z + xy(z + z')$$

$$a = \underbrace{(x'y + xy')}_{s_o} z + xy(z + z')$$

$$a = \underbrace{s_0\, z}_{a_1} + \underbrace{x\, y}_{a_0} \quad [4]$$

[3] $S = (x'y + xy')z' + (x'y' + xy)z = (x \oplus y)z' + (x \oplus y)'z = x \oplus y \oplus z$

[4] $a = (x'y + xy')z + xy = (x \oplus y)z + xy$

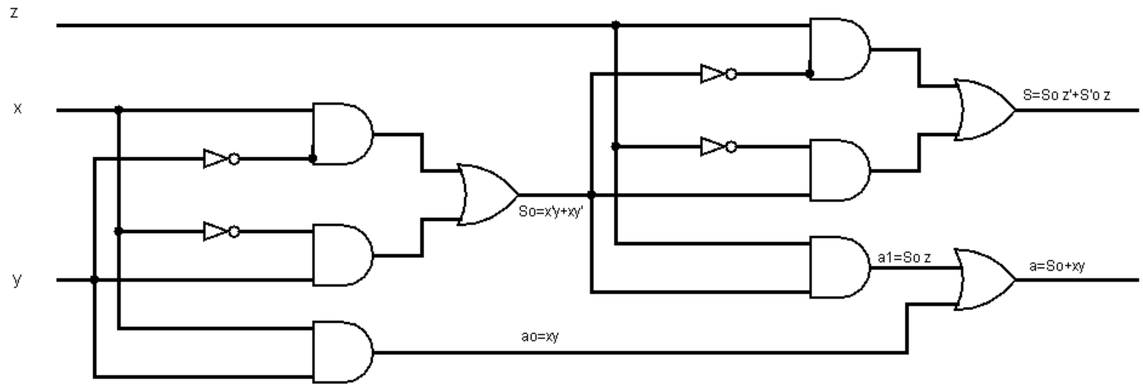


Figura Circuito Lógico: Sumador completo de dos números binarios de 1 dígito cada uno

fulladder.circ

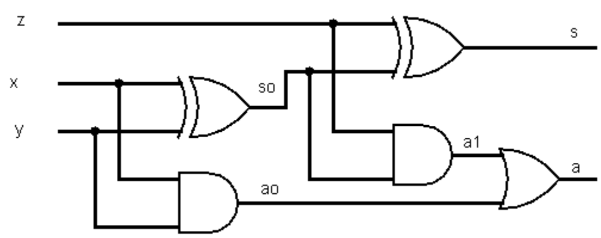


Figura Circuito Lógico: Sumador Completo de dos números binarios de 1 dígito cada uno

fulladderXor.circ

Enfoque alternativo para analizar la suma binaria

La construcción de la tabla de verificación para un sumador completo se apoya en la expresión general: $x + y + z = b * a + s$, o $s = x + y + z - b * a$; donde b es la base del sistema numérico. Esta fórmula, puede verse como una interpretación del proceso: **i)** adicione los sumandos x e y; **ii)** agregue el acarreo de la columna anterior z; **iii)** calcule cuantas veces, en este caso representado por el número a, se alcanza la base b para "aproximarse" al resultado producido con i) y ii); **iv)** el dígito s es la cantidad faltante en esa aproximación.

Otra forma de interpretar esa fórmula se deriva de la aplicación del Teorema de la división:

$$\begin{array}{r|l} x+y+z & \underline{\;b\;} \\ s & \;a \end{array}$$

$$x + y + z = b * a + s$$

Luego s correspondería al residuo (dígito) y a al cociente (acarreo)

Observe los siguientes casos, cuando se trata de la base $b = 2$ (dígitos para x, y, z son 0 o 1)

Caso: $x + y + z \leq 1$ (ello implica que, a lo sumo, uno de los valores de entrada vale 1)

$$a = 0$$
$$s = x + y + z = 1$$

Caso: $x + y + z > 1$ (por lo menos dos valores de entrada valen 1)

$$a = 1$$
$$s = x + y + z - 2$$

Si son 2: $s = 1 + 1 + 0 - 2 = 0$

Si son 3: $s = 1 + 1 + 1 - 2 = 1$

Así que para diligenciar la tabla con la anterior información:

x	y	z	s	a
0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	1
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	1
1	**1**	**0**	**0**	1
1	**1**	**1**	**1**	1

INQUIETUDES

2 Señale sólo las afirmaciones necesariamente ciertas

a. Cuántos *semisumadores,* como “máximo”, puedo emplear para sumar 2 números binarios de 10 dígitos
b. Cuántos *sumadores completos* deben emplearse para sumar 2 números binarios de 10 dígitos
c. Cuando se van a sumar dos números binarios de n dígitos, se requieren $n-1$ semisumadores