EXPRESIONES BOOLENAS

Una expresión booleana es una sucesión de símbolos, que incluyen: a) símbolos que representan valores constantes; estos valores son los elementos del conjunto sobre el que se estableció un álgebra (el *máximo* de cualquier álgebra booleana se representa mediante el 1; y el *mínimo* con el símbolo 0), b) letras que representan variables[1] y c) signos $(+, \cdot, ')$ para representar las operaciones booleanas m.c.s., M.C.I. y *complemento*, respectivamente.

Cálculo Booleano

Tal y como se efectuó con la lógica proposicional, y la cuantificacional, se puede establecer un *cálculo booleano* (L_B); los elementos de este cálculo son: un Alfabeto Booleano (Alf_B) y un conjunto de Reglas de Formación (RF_B).

Alfabeto (Alf_B)

Conjunto de signos de *constantes*: letras minúsculas *italizadas* con o sin subíndice; pueden usarse las primeras letras del alfabeto de la lengua castellana $A_c = \{a, b, c, d, e, \dots, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \dots, 0, 1\}$. El conjunto A_c ha de emplearse para la configuración de una relación binaria L, $L \subseteq A_c \times A_c$, que la convierte en un álgebra booleana.

Conjunto de signos de *variables booleanas*: letras minúsculas *italizadas*, con o sin subíndice $i \in \mathbb{N}$; pueden usarse las últimas letras del alfabeto de la lengua castellana $A_v = \{u, v, w, x, y, z, \dots, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, \dots\}$

Conjunto de signos de *operaciones booleanas*: $\{+, \cdot, '\}$

Conjunto de signos de *agrupación*: $\{(,)\}$

Reglas de formación (RF_B).

- RFB1. Cualquier símbolo de constante es una expresión booleana.
- RFB2. Cualquier símbolo de variable es una expresión booleana.
- RFB3. Si P es una expresión booleana entonces P' es una expresión booleana.
- RFB4. Si P y Q son expresiones booleanas también lo será $\mathrm{P} + \mathrm{Q}$.
- RFB5. Si P y Q son expresiones booleanas lo será también $\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q}$.
- RFB6. Si P es una expresión booleana entonces (P) también será expresión booleana.
- RFB7. Una secuencia de símbolos del alfabeto Alf_B es una fbf del cálculo booleano L_B (expresión booleana) si, y sólo si, puede obtenerse de las anteriores reglas de formación.

En adelante, la descripción del trabajo con expresiones booleanas se restringirá a aquellas en las que las variables toman valores en el álgebra booleana binaria; ello implica que el conjunto de signos constantes se reduce a: $A_c = \{0,1\}$.

Se dice que se está ante una **expresión booleana en n variables** cuando en ella ocurren n apariciones de distintos símbolos de variable (todas las apariciones de un mismo símbolo de variable, o en las que se le observa acompañadas con el signo de complemento se cuentan como una (1) aparición)

Son ejemplos de expresiones booleanas:

a)	$xyz + (x' + y)z + x'yw(z + 0)$	Expresión booleana en 4 variables
b)	$xyz + x'y' + z1$	Expresión booleana en 3 variables

[1] Cada signo de variable puede tomar sus valores de un conjunto o dominio; en este caso, el dominio está compuesto por los elementos de un álgebra booleana.

c)	$(0+y'z)+(wz'xy+w'x')+1$	Expresión booleana en 4 variables
d)	0	Expresión booleana en cualquier número de variables
e)	1	Expresión booleana en cualquier número de variables
f)	$1+0$	Expresión booleana en cualquier número de variables.

Propiedades de las expresiones booleanas

Teoremas
Las propiedades de las expresiones booleanas se derivan directamente de aquellas del álgebra booleana, que, a su vez, hereda varias de sus propiedades de las retículas y éstas últimas de las relaciones de orden. Así pues, si P, Q y R son expresiones booleanas que se construyen en un álgebra booleana $(L, \leq)$, entonces las siguientes son las propiedades que satisfacen:

EB_1a (Lat_8a).	$P+P=P$	Ley de idempotencia
EB_1b (Lat_8b)	$P \cdot P=P$	Ley de idempotencia
EB_2a (Lat_9a).	$P+Q=Q+P$	Ley conmutativa
EB_2b (Lat_9b).	$P \cdot Q=Q \cdot P$	Leyes conmutativas
EB_3a (Lat_12a).	$P+P \cdot Q=P$	Leyes de absorción
EB_3b (Lat_12b).	$P \cdot (P+Q)=P$	Leyes de absorción
EB_4a (Lat_10a).	$P+(Q+R)=(P+Q)+R=P+Q+R$	Ley asociativa
EB_4b (Lat_10b).	$P \cdot (Q \cdot R)=(P \cdot Q) \cdot R=P \cdot Q \cdot R$	Ley asociativa
EB_5a. (Bool 2a)	$P \cdot (Q+R)=P \cdot Q+P \cdot R$	Ley distributiva.
EB_5b. (Bool 2b)	$P+(Q \cdot R)=(P+Q) \cdot (P+R)$	Ley distributiva.
EB_6a. (Bool 3a)	$P+P'=1$	Ley de complementación
EB_6b. (Bool 3b)	$P \cdot P'=0$	Ley de complementación
EB_7 (Bool_4).	$P''=P$	Ley de la doble complementación
EB_8a. (Bool_5a)	$P+1=1$	
EB_8b. (Bool_5b)	$P \cdot 0=0$	
EB_9a. (Bool_6a)	$P+0=P$	Ley modulativa.
EB_9b. (Bool_6b)	$P \cdot 1=P$	Ley modulativa.
EB_10a. (Bool_7a)	$0'=1$	
EB_10b. (Bool_7b)	$1'=0$	
EB_11a. (Bool_9a)	$(P+Q)'=P' \cdot Q'$	Ley de DeMorgan.
EB_11b. (Bool_9b)	$(P \cdot Q)'=P'+Q'$	Ley de DeMorgan.
EB_12a (Bool_10a)	$P+P'Q=P+Q$	
EB_12b (Bool_10b)	$P \cdot (P'+Q)=PQ$	
EB_13a (Bool_11)	$PQ+QR+RP=(P+Q)(Q+R)(R+P)$	
EB_13b (Bool_12)	$P=Q \leftrightarrow PQ'+P'Q=0$	

Dual de una expresión booleana
Sea P una expresión booleana, la *expresión booleana dual* asociada a ella se obtiene reemplazando en P: a) el término máximo (1) por el mínimo (0), y viceversa; b) la operación m.c.s $(+)$ por la M.C.I $(\cdot)$, y viceversa.
Sea P la expresión booleana $xz'1 + xz + x'z + 0$; la expresión dual asociada sería:

$$(x + z' + 0)(x + z)(x' + z)1$$

Sea Q la expresión booleana $(xz'1 + xz)x'z0 + 0$; la expresión dual asociada sería:

$$\big(((x + z' + 0)(x + z)) + (x' + z + 1)\big)1$$

Principio de dualidad (Duality Principle)
Las expresiones duales de dos expresiones booleanas equivalentes, mantienen su equivalencia.
Se puede probar, empleando las propiedades del álgebra booleana que las siguientes dos expresiones son equivalentes:

$xz' + x(y + z) + w$

$x + w$

Ahora, las duales de ambas expresiones son

Dual de $xz' + x(y + z) + w$ es: $(x + z')(x + yz)w$

Dual de $x + w$ es: xw

Ahora, $(x + z')(x + yz)w = \big(x + (z'yz)\big)w = (x + 0)w = xw$

Expresión booleana en Forma Normal Disyuntiva (FND)
Es una expresión booleana conformada por *sumas booleanas* (es decir, la m.c.s.) de *multiplicaciones booleanas* (o sea, la M.C.I.).

Son ejemplos de expresiones booleanas en FND:
a) $xyz + z + x'yw$
b) $y + z + x'$
c) $xyz + zy'x + x'yz$

Minterm (Término Mínimo)
Sea $x_1, \ldots, x_n$ variables booleanas; un **minterm** es una expresión booleana en la que aparece *o cada una de las* n *variables, o sus complementos*; además, la única operación booleana que se aplica "entre" las variables es…la *máxima cota inferior*.

Sean x, y y z 3 variables; se requiere identificar cuáles de las siguientes expresiones booleanas, son minterms para esas 3 variables:

a) xyz	b) $x'y'$	c) $wz'xy$	d) $z1$
e) $x'yz$	f) $x + y + z$	g) $x'y'1$	h) $z'xy$
i) $z'x'y'$	j) $(x' + y + z)'$		

Forma Normal Disyuntiva Estándar (FNDE) [2]
Es una FND conformada por minterms de un mismo conjunto de variables.

- Se puede interpretar que la constante 1 está en FNDE en cualquier número de variables, observe: $x + x'$ (una variable), $xz' + x'z' + xz + x'z$ (dos variables).
- Se puede interpretar que la constante 0 está en FNDE en cualquier número de variables, observe: xx' (una variable), $xx' + y'y$ (dos variables).
- Cuando se tienen n variables $x_1, \dots, x_n$, se pueden formar 2^n minterms diferentes.
- Cuando una FNDE contiene los 2^n minterms posibles, se dice que ella es una FNDE **completa** en *n* variables.

Las siguientes, son expresiones booleanas en FNDE en el número de variables correspondiente:

$xyz' + xy'z + xyz$	FNDE en 3 variables
$xz' + xz + x'z$	FNDE en 2 variables
$x'yz + x'y'z + xyz + xy'z + x'yz' + x'y'z' + xyz' + xy'z'$	FNDE en 3 variables

Complemento de una FNDE
Sea P una FNDE; una manera de obtener P´ es aplicando sobre ella la Ley de DeMorgan (EB_11a) y, posteriormente, la operación complemento a las expresiones que aparecen. Sin embargo, una forma simple de encontrarla es creando una nueva FNDE con los minterms que le hacen falta a P para convertirse en una FNDE completa.

Expresión booleana en Forma Normal Conjuntiva (FNC)
Es una expresión booleana conformada por la *multiplicación* booleana (M.C.I.) de *sumas* booleanas (m.c.s.).

Maxterm (Término Máximo)
Sea $x_1, \dots, x_n$ variables booleanas; un **maxterm** es una expresión booleana en la que aparece *o cada una de las n variables o su complemento*; además, la única operación booleana que se aplica "entre" las variables es la *mínima cota superior*.

Forma Normal Conjuntiva Estándar (FNCE) [3]
Es una FNC conformada por maxterms de un mismo conjunto de variables.

- Se puede interpretar que la constante 1 está en FNCE en cualquier número de variables, observe: $x + x'$ (una variable); $(x + z')(x' + z')(x + z)(x' + z)$ (dos variables).
- Se puede interpretar que la constante 0 está en FNCE en cualquier número de variables, observe: $x \cdot x'$ (una variable); $(x + z')(x' + z')(x + z)(x' + z)$ (dos variables).
- Cuando se tienen n variables, $x_1, \dots, x_n$ se pueden conformar 2^n maxterms diferentes.
- Cuando una FNCE contiene los 2^n maxterms posibles, se dice que ella es una FNCE **completa** en *n* variables.

Complemento de una FNCE
Sea P una FNCE en *n* variables; una manera de obtener P´ es aplicando sobre ella la Ley de DeMorgan (EB_11b) y, posteriormente, la operación complemento a las expresiones que aparecen. Sin embargo,

[2] En varios textos también es referenciada como Forma Normal Disyuntiva Principal
[3] En varios textos también es referenciada como Forma Normal Conjuntiva Principal

una forma simple de encontrarla es creando una nueva FNCE de n variables con los maxterms que le hacen falta a P para convertirse en una FNC completa.

Teorema.
Toda expresión booleana en n variables que no contenga constantes, puede transformarse en FNDE en n variables; es más, también puede transformarse en una FNDE con un número de variables mayor a n, e incluso en una FNDE con un número de variables menor a n (esta simplificación no siempre es posible).

Nota. A menos que se diga otra cosa, cuando se busque la FNDE de cualquier expresión booleana, se referirá a aquella que le es equivalente y esté compuesta por el menor número de variables; es decir, aquella en la que se han suprimido variables por una aplicación adecuada de las propiedades de las expresiones booleanas.

Teorema.
Toda expresión booleana en n variables que no contenga constantes, puede transformarse en FNCE en n variables; es más, también puede transformarse en una FNCE con un número de variables mayor a n, e incluso en una FNCE con un número de variables menor a n (esta simplificación no siempre es posible).

Nota. A menos que se diga otra cosa, cuando se busque la FNCE de cualquier expresión booleana, se referirá a aquella que le es equivalente y esté compuesta por el menor número de variables; es decir, aquella en la que se han suprimido variables por una aplicación adecuada de las propiedades de las expresiones booleanas.

Ejemplo. Encuentre la FNDE de la siguiente expresión booleana en 3 variables: $xy' + z$
Dado que la FNDE es una expresión booleana concebida como una suma booleana de minterms, debemos entonces definir las variables que compondrán esos minterms.

Para este ejemplo, existen originalmente 3 variables booleanas distintas, y con base en ellas se encontrarán los minterms correspondientes, observe el proceso:

1.	$xy' + z$	Expresión original
2.	$xy'1 + z11$	Sustitución en 1: EB_9b aplicada 3 veces.
3.	$xy'(z + z') + z(x + x')(y + y')$	Sustitución en 2: complementación. Propiedad, por definición, de las álgebras booleanas aplicada 3 veces.
4.	$xy'z + xy'z' + zxy + zxy' + zx'y + zx'y'$	Sustitución en 3: distributividad. Propiedad, por definición, de las álgebras booleanas aplicada 3 veces.
5.	$xy'z + xy'z' + zxy + zx'y + zx'y'$	Lat_8a (idempotencia) entre los minterms 1 y 4.

Teóricamente no existe obstáculo para representar la expresión booleana original, en otra que contenga un número mayor de variables; por ejemplo, se podría pedir que se encontrara la FNDE de esa expresión original, tal que contenga la variable booleana *w*; observe:

1. $xy' + z$ — Expresión booleana original
2. $xy'11 + z111$ — Sustitución en 1: Bool_3 aplicada 5 veces.
3. $xy'(z + z')(w + w') + z(x + x')(y + y')(w + w')$ — Sustitución en 2: complementación. Propiedad, por definición, de las álgebras booleanas aplicada 5 veces.
4. $xy'zw + xy'zw' + xy'z'w + xy'z'w' + zxyw + zxyw' + zxy'w + zxy'w' + zx'yw + zx'yw' + zx'y'w + zx'y'w'$ — Sustitución en 3: distributividad, por definición, de las álgebras booleanas aplicada 10 veces.
5. $xy'zw + xy'zw' + xy'z'w + xy'z'w' + zxyw + zxyw' + zx'yw + zx'yw' + zx'y'w + zx'y'w'$ — Lat_8 entre los minterms 1 y 7; 2 y 8.

Teorema
Dos expresiones booleanas son equivalentes si, y sólo si, sus respectivas FNDE, en algún número de variables, son iguales.

Teorema
Dos expresiones booleanas son equivalentes si, y sólo si, sus respectivas FNCE en algún número de variables, son iguales.

Función Booleana
Una función booleana f declara *la dependencia* de una variable y, respecto de otras variables $x_1, \dots, x_n$, así: $y = f(x_1, \dots, x_n)$; una función booleana f puede concretarse en términos de una expresión booleana[6]. El valor que puede tomar la variable y depende de cada combinación de valores de las variables $x_1, \dots, x_n$; si cada una de esas variables toman sus valores de un conjunto A_c, entonces *la cantidad de combinaciones posibles de valores* para esas variables es $|A_c|^n$. Puesto que se había anunciado que se trabajará en algebras booleanas con dos elementos, es decir $A_c = \{0,1\}$, entonces el número completo de combinaciones es 2^n.

Tablas de Verificación
Otra manera bastante común de expresar la dependencia de una variable y, respecto de otras variables $x_1, \dots, x_n$ es a través de una *tabla de verificación.* Análogo a cómo se realizó con las tablas de verdad de la lógica proposicional, las de verificación también son arreglos de columnas y filas. Cada una de las n variables $x_1, \dots, x_n$ ocupa una columna en la tabla (organizadas de izquierda a derecha), la columna $n + 1$ se destina para la variable dependiente y. Luego, el número de columnas de la tabla de verificación es $n + 1$, y el número de filas es *la cantidad de combinaciones posibles de valores asignables a las variables* $x_1, \dots, x_n$, es decir, 2^n. (sin contar la fila de "encabezamiento", es decir, donde se colocan los símbolos de todas las variables)

Teorema

[4] Esto implica que la FND completa es igual a 1.
[5] Esto implica que la FND completa es igual a 1.
[6] Si los valores de $y, x_1, \dots, x_n$ se adquieren de A_c, donde $|A_c| = m$, la cantidad de funciones booleanas posibles es: m^{m^n}.

Para establecer la equivalencia de dos expresiones booleanas, es suficiente verificar la igualdad del valor obtenido en cada una de ellas para cada una de las 2^n combinaciones que pueda asignarse a las variables.

Relación entre Expresiones Booleanas y Tablas de Verificación

Ya se indicó que una relación funcional entre la variable dependiente y (variable de salida), y las independientes $x_1, \ldots, x_n$ (variables de entrada) puede especificarse a través de una expresión booleana o mediante una tabla de verificación; cada una de las dos "formas" puede conducir a la otra; a continuación, se mostrará cómo.

Obtención de Tabla de Verificación con base en una Expresión Booleana

Se emplearán dos cursos de acción de acuerdo a si requiere conversión de la expresión booleana original a una de las formas normales, o no.

- **Tabla de verificación con base en la expresión Booleana original**

Construya la tabla de verificación, con el número de filas y columnas correspondiente. Tome una de las 2^n combinaciones de valores que pueden asumir las n variables independientes, reemplace los valores que aparecen en esa combinación en la expresión booleana, calcule el valor para la variable dependiente y registre los valores presentes en la combinación y el calculado para la variable dependiente combinación en una cualquiera de las filas disponibles. Repita el proceso hasta que se agoten las combinaciones de valores de entrada.

- **Tabla de verificación con base en una de las Formas Normales de la expresión Booleana original**

Se pueden emplear dos procedimientos, dependiendo del tipo de forma normal (Disyuntiva o Conjuntiva) con la que prefiera trabajar.

Procedimiento para FND

- Convierta la expresión booleana en FNDE
- Por cada minterm de la FNDE diríjase a cualquier fila disponible de la tabla (puede mecanizarlo, haciéndolo de arriba hacia abajo):
  - detengase una a una en las variables del minterm: si la variable aparece en su versión complementada asigne un cero (0) en la columna que le corresponda a esa variable, de lo contrario asigne un uno (1)
  - asigne un uno (1) -en la fila a la que se dirigió- en la columna que corresponda a la salida.
- Asigne el resto de combinaciones faltantes en la tabla; en la fila de cada combinación registre un cero (0) en la columna de la variable de salida

Procedimiento para FNC:

- Convierta la expresión booleana en FNCE
- Por cada maxterm de la FNCE diríjase a cualquier fila disponible de la tabla (puede mecanizarlo, haciéndolo de arriba hacia abajo):
  - deténgase una a una en las variables del maxterm: si la variable aparece en su versión complementada asigne un uno (1) en la columna que le corresponda a esa variable, de lo contrario asigne un cero (0)
  - asigne un cero (0) - en la fila a la que se dirigió- en la columna que corresponda a la salida.

- Asigne el resto de combinaciones faltantes en la tabla; en la fila de cada combinación registre un uno (1) en la columna de la variable de salida.

Obtención de Expresión Booleana con base en una Tabla de Verificación
En este caso también podemos seleccionar uno de dos procedimientos, la elección depende de si se pretende obtener de la tabla una FND, o si se prefiere una FNC.

Procedimiento para obtener FNDE:

- Elija todas las combinaciones (filas) de la tabla que muestren un uno (1) en la columna de la variable de salida.
- Por cada una de esas filas se creará un minterm así:
  - detengase uno en uno en cada valor de la combinación: si el valor es un uno (1) añada la variable correspondiente al minterm, de lo contrario, añada la variable complementada.
- Construya una FNDE en n variables, agregando cada minterm mediante la operación m.c.s $(+)$.
- En caso de que, se le pida o lo vea conveniente, (y sea posible) simplifique la FNDE.

Procedimiento para obtener FNCE:

- Elija todas las combinaciones (filas) de la tabla que muestren un cero (0) en la columna de la variable de salida.
- Por cada una de esas filas se creará un maxterm así:
  - detengase uno en uno en cada valor de la combinación: si el valor es un cero (0) añada la variable correspondiente al maxterm, de lo contrario, añada la variable complementada.
- Construya una FNC en n variables, agregando cada maxterm mediante la operación M.C.I $(\cdot)$.
- En caso de que, se le pida o lo vea conveniente, (y sea posible) simplifique la FNCE.

INQUIETUDES

1 Señale sólo las afirmaciones necesariamente ciertas

a. Las álgebras booleanas son relaciones reflexivas, anti-simétricas y transitivas
b. La FND es una expresión booleana compuesta sólo por minterns
c. Una FNDE, que contenga 4 variables diferentes, debe poseer 16 maxterms
d. Una FNDE, que contenga 3 variables diferentes, debe poseer 9 minterms
e. Cualquier expresión booleana la puedo transformar en una FNCE completa
f. Cualquier expresión booleana la puedo transformar en una FND
g. Toda expresión booleana se puede simplificar
h. Toda álgebra booleana es asimétrica
i. Dos expresiones booleanas son iguales si, y sólo si, sus respectivas Tablas de verificación son iguales
j. Las retículas son un tipo de álgebra booleana
k. Las álgebras booleanas son un tipo de relación de orden
l. Las expresiones booleanas solo pueden tomar valores de un álgebra booleana de 2 elementos

m. Una expresión booleana que contenga n variables, sólo puede tomar valores de un álgebra booleana que contenga n valores
n. La expresión dual de una FNCE es una FNDE
o. El complemento de una FNDE ha de ser una FNCE
p. Cualquier expresión booleana la puedo transformar en una FNCE completa
q. La compuerta NAND equivale a la Ley de DeMorgan Bool9a.