1. EJEMPLOS

1. Se definirán, por extensión, unos conjuntos. Con base en esas definiciones, determine la validez, o no, de las afirmaciones que le serán presentadas.

Para resolver los casos propuestos, el estudiante debe ser capaz de:

- Usar de manera adecuada el lenguaje propio de la Teoría de Conjuntos para la representación y descripción de problemas y soluciones.
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por extensión
- Establecer la pertenencia, o no, de un objeto a un conjunto
- Precisar si existe, o no, relación de inclusión entre dos conjuntos
- Definir si existe, o no, relación de igualdad entre dos conjuntos
- Comprender y aplicar el concepto de conjunto de partes.

a) Sean $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, los siguientes conjuntos

$$A = \{\{1,3\},\{2,4,6\},\{8,9\}\}$$
$$B = \{1,2,3,4,6,8,9\}$$
$$C = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{6\},\{8\},\{9\}\}$$

¿Es correcto decir que $A = B = C$? Explique.

NO. La razón es que cada conjunto tiene distintos elementos. Los elementos del conjunto A son $\{1,3\}$, $\{2,4,6\}$ y $\{8,9\}$. Los elementos de B son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9. Los elementos de C son $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{6\},\{8\}$ y $\{9\}$.

Seleccione o señale, las expresiones correctas

$\{1,3\} \in A$ √	$\{1,3\} \subset B$ √	$\{1\} \in A$ X	$\{1\} \subset A$ X
$\{1,3\} \subset A$ X	$\{1,3\} \in C$ X	$\{1\} \in B$ X	$\{1\} \subset B$ √
$\{1,3\} \in B$ X	$\{1,3\} \subset C$ X	$\{1\} \in C$ √	$\{1\} \subset C$ X
$\{\{1\},\{2\}\} \subset B$ X	$\{\{1\},\{2\}\} \subset C$ √	$\{\{1,3\}\} \subset A$ √	

b) Sea $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{0},\{\boldsymbol{0}\},\boldsymbol{3},\boldsymbol{5}\}$

- Determine $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$.

$\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}$

Todos estos subconjuntos serían elementos del conjunto Potencia de A, es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$$

- Determine $\boldsymbol{\mathcal{P}(B)}$.

$\emptyset,\{0\},\{\{0\}\},\{3\},\{5\},\{0,\{0\}\},\{0,3\},\{0,5\},\{\{0\},3\},\{\{0\},5\},\{3,5\},\{0,\{0\},3\},\{0,\{0\},5\},$
$\{0,3,5\},\{\{0\},3,5\},\{0,\{0\},3,5\}$

Todos estos subconjuntos serían elementos del conjunto de partes de B, es decir,

$$\mathcal{P}(B)=\left\{\begin{matrix}\emptyset,\{0\},\{\{0\}\},\{3\},\{5\},\{0,\{0\}\},\{0,3\},\{0,5\},\{\{0\},3\},\{\{0\},5\},\{3,5\},\{0,\{0\},3\},\{0,\{0\},5\},\\ \{0,3,5\},\{\{0\},3,5\},\{0,\{0\},3,5\}\end{matrix}\right\}$$

2. Lleve a cabo las sustentaciones pedidas

Para resolver los casos propuestos, el estudiante debe ser capaz de:

- Usar de manera adecuada el lenguaje propio de la Teoría de Conjuntos para la representación y descripción de problemas y soluciones.
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por comprensión
- Identificar los conceptos requeridos y usar las definiciones
- Aplicar el procedimiento deductivo general (valiéndose de las reglas de validez de las lógicas Proposicional y Cuantificacional) para determinar si existe relación de inclusión entre dos conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las operaciones entre conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las relaciones entre conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de la cardinalidad de un conjunto

a) Sean $\boldsymbol{A=\{x|x\text{ es múltiplo de }4\}}$, y $\boldsymbol{B=\{x|x\text{ es múltiplo de }2\}}$. Demuestre que $\boldsymbol{A\subseteq B}$.

Antes de efectuar la demostración, se hará la simbolización formal de los conjuntos A y B. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto referencia, es decir, el conjunto de números enteros.

$A=\{x|x=4r\ \wedge\ r\in\mathbb{Z}\}$ y $B=\{x|x=2s\ \wedge\ s\in\mathbb{Z}\}$. La representación de las relaciones o propiedades que cumplen esos conjuntos, respectivamente, es:

$$x\in A\leftrightarrow x=4r\ \wedge\ r\in\mathbb{Z}$$
$$x\in B\leftrightarrow x=2s\ \wedge\ s\in\mathbb{Z}$$

1. $x\in A$	Supuesto.
2. $x=4r\ \wedge\ r\in\mathbb{Z}$	Sustitución de 1: definición “por comprensión” del conjunto A.
3. $x=4r$	TP15a (simplificación) con 2
4. $r\in\mathbb{Z}$	TP15a (simplificación) con 2
5. $x=2(2r)$	Sustitución en 3: Factorización del entero 4.
6. $r\in\mathbb{Z}\rightarrow 2r\in\mathbb{Z}$	Propiedad de los enteros: la multiplicación de enteros arroja otro entero
7. $2r\in\mathbb{Z}$	Modus ponems (MP) entre 4 y 6.
8. $n=2r$	Simbolización del resultado del producto.
9. $x=2n$	Sustitución en 5, con 8
10. $n\in\mathbb{Z}$	Sustitución en 7, con 8.
11. $x=2n\ \wedge n\in\mathbb{Z}$	TP15b (adjunción) con 9 y 10.
12. $x\in B$	Sustitución de 11: definición “por comprensión” del conjunto B.
13. $x\in A\rightarrow\ x\in B$	Teorema de la deducción entre 1 y 12.
14 $\forall x(x\in A\rightarrow\ x\in B)$	G.U. de 13 (la variable x no ha sido obtenida de la aplicación de la E.E. en algún paso previo)
15. $A\subseteq B$	Sustitución de 13: definición de inclusión de conjuntos.

b) Aplicando las leyes fundamentales para el álgebra de conjuntos, simplifique las siguientes expresiones.

- $ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$

1. $ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$	Fbf original (premisa)
2. $AB(C + C') + AB'(C + C') + A'B(C + C') + A'B'(C + C')$	Sustituciones: 4 aplicaciones de TJ20a (Ley distributiva) en 1
3. $AB1 + AB'1 + A'B1 + A'B'1$	Sustituciones: 4 aplicaciones de TJ27b (Ley tercio excluido) en 2
4. $AB + AB' + A'B + A'B'$	Sustituciones: 4 aplicaciones de TJ23b (Ley modulativa) en 3
5. $A(B + B') + A'(B + B')$	Sustituciones: 2 aplicaciones de TJ20a (Ley distributiva) en 4
6. $A1 + A'1$	Sustituciones: 2 aplicaciones de TJ27b (Ley tercio excluido) en 5
7. $A + A'$	Sustitución: TJ23b (Ley modulativa) en 6
8. 1	Sustitución: TJ27b (Ley tercio Excluido) en 7

c) Dar contraejemplo(s) para el recíproco del Teorema J13:

$$A \subset B \ \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$$

La condicional recíproca de esa proposición es el enunciado: $A \subset C \ \rightarrow A \subset B \ \wedge B \subset C$. Un contraejemplo puede ser el siguiente, sea A el conjunto de *los seres humanos*, sea C el conjunto de *mamíferos* y sea B el conjunto de *los seres vivos*; se tiene que es falsa la siguiente afirmación: *Si los humanos son mamíferos, implica que los humanos son seres vivos y los seres vivos son mamíferos*.

d) Escriba cada una de las siguientes condiciones sobre los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ sin hacer uso del símbolo $\subset$.

- $A \subset B' \subset C$

1. $A \subset B' \subset C$	fbf original (premisa)
2. $(A \subset B') \wedge (B' \subset C) \wedge (A \subset C)$	Sustitución: expresión equivalente a 1.
3. $A \subset B'$	TP15a (Simplificación) en 2.
4. $AB' = A$	Sustitución de 3: TJ14b.
5. $A + B' = B'$	Sustitución de 3: TJ14a.
6. $B' \subset C$	TP15a (Simplificación) en 2.
7. $B'C = B'$	Sustitución de 6: TJ14b.
8. $B' + C = C$	Sustitución de 6: TJ14a.
9. $A \subset C$	TJ15a (Simplificación) en 2.
10. $AC = A$	Sustitución de 9: TJ14b.
11. $A + C = C$	Sustitución de 9: TJ14a.

e) Observe las siguientes condiciones para los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{C' \subset A'}$ y $\boldsymbol{C' + D = 1}$. Muestre que $\boldsymbol{D' + C' \subset A'C'}$.

1. $C' + D = 1$	Premisa
2. $D' \subseteq C'$	Sustitución de 1: TJ28c
3. $D' + C' = C'$	MP entre TJ14a y 2.

4. $C' \subset A'$	Premisa
5. $D' + C' \subset A'$	TJ13 entre 3 y 4
6 $(D' + C')C' \subset A'C'$	MP entre 5 y TJ15b
7. $(D' + C')(D' + C') \subset A'C'$	Sustitución de 3 en 6
8. $D' + C' \subset A'C'$	Sustitución de miembro izquierdo de 7: TJ19a (idempotencia de la intersección).

f) Teorema J1. $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \notin \emptyset)$.

Se empleará el método de demostración de reducción al absurdo.

1. $\neg\forall x(x \notin \emptyset)$ Supuesto. En palabras, **suponga que** *no es cierto que: todo x no sea un elemento del conjunto vacío*.

2. $\exists x \neg(x \notin \emptyset)$ Sustitución: Intercambio de cuantificadores. *Existe al menos un elemento que no cumple que: no es un elemento del vacío*.

3. $\exists x(x \in \emptyset)$ Sustitución: *Existe al menos un elemento que cumple que: es un elemento del vacío*.

4. $\exists x(x \in X \ \wedge x \notin X)$. Sustitución al interior del paréntesis en 3: definición de pertenencia al conjunto vacío: *Un elemento, simultáneamente, pertenece y no pertenece a un conjunto*.

5. $x \in X \ \wedge x \notin X$. E.E. Se ha encontrado una contradicción.

Se puede afirmar que suponer $\neg\forall x(x \notin \emptyset)$ nos lleva a una expresión no admitida (la contradicción); luego, no queda otra posibilidad distinta a asegurar que: $\forall x(x \notin \emptyset)$. contradicción); luego, no queda otra posibilidad distinta a asegurar que: $\forall x(x \notin \emptyset)$.

g) Demostrar que: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$

1 $A = B$	Supuesto
2 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	Sustitución de 1: definición de igualdad entre conjuntos
3 $\forall x\big((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)\big)$	Sustitución en 2: RFP7
4 $\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)$	Sustitución de 3: TC8a
5 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	Sustituciones en 4: definición de inclusión de conjuntos.
6 $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	Teorema de la deducción (TdD) entre 1 y 5. El uso exclusivo de sustituciones entre 1 y 5, permite el uso de bicondicional; esto último, autoriza no realizar la demostración $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$

h) Teorema J14b

Demuestre que $A \subseteq B \leftrightarrow AB = A$

Estrategia para obtener la solución:

Paso 1. Demuestre que: $A \subseteq B \to AB = A$. Para ello, efectúe las siguientes dos pruebas:

- $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{AB}$
- $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{AB} \subseteq \boldsymbol{A}$

Paso 2. Demuestre que: $AB = A \rightarrow A \subseteq B$

==========

Paso 1.

1. $A \subseteq B$	Supuesto
2. $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$	Sustitución: definición de inclusión en 1.
3. $x \in A \rightarrow x \in B$	E.U. en 2.
4. $x \in A$	Supuesto
5. $x \in B$	MP entre 3 y 4
6. $x \in A \wedge x \in B$	TP15b entre 4 y 5.
7. $x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B$	TdD entre 4 y 6.
8. $x \in A \rightarrow x \in AB$	Sustitución en consecuente de 7: definición de pertenencia a la intersección
9. $\forall x(x \in A \rightarrow x \in AB)$	G.U. en 8.
10. $A \subseteq AB$	Sustitución de 9: definición de inclusión.
11. $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq AB$	TdD entre 1 y 10.
12. $x \in AB$	Supuesto
13. $x \in A \wedge x \in B$	Sustitución de 12: definición de pertenencia a intersección.
14. $x \in A$	TP15a (simplificación) con 13
15. $x \in AB \rightarrow x \in A$	TdD entre 12 y 14
16. $\forall x(x \in AB \rightarrow x \in A)$	G.U. de 15.
17. $AB \subseteq A$	Sustitución de 16: definición de inclusión
18. $A \subseteq B \rightarrow AB \subseteq A$	TP7a (Ley condicional) con 17
19. $A \subseteq B \wedge A \subseteq B \rightarrow A \subseteq AB \wedge AB \subseteq A$	TP20 (Adición conjuntiva de condicionales) con 11 y 18;
20 $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq AB \wedge AB \subseteq A$	Sustitución en antecedente de 19: TP16 (idempotencia de conjunción).
21. $A \subseteq B \rightarrow AB = A$	Sustitución en consecuente de 17: definición de igualdad.

Paso 2.

1b. $AB = A$	Supuesto
2b. $AB \subseteq A \wedge A \subseteq AB$	Sustitución de 1b: expresión equivalente a la igualdad.
3b. $A \subseteq AB$	TP15a con 2b (Simplificación).
4b. $\forall x(x \in A \rightarrow x \in AB)$	Sustitución de 3b: definición de inclusión.
5b. $x \in A \rightarrow x \in AB$	E.U. en 4b.
6b. $x \notin A \vee (x \in A \wedge x \in B)$	Sustitución de 5b: definición de pertenencia a intersección en consecuente; Sustitución de la expresión resultante: RFP6.
7b. $(x \notin A \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B)$	Sustitución de 6b: TP24b
8b. $x \notin A \vee x \in B$	TP15a con 7b.
9b. $x \in A \rightarrow x \in B$	Sustitución de 8b: RFP6
10b. $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$	G.U. de 9b
11b. $A \subseteq B$	Sustitución de 10b: definición de inclusión.
12b. $AB = A \rightarrow A \subseteq B$	TdD entre 1b y 11b.
13b. $(A \subseteq B \rightarrow A = AB) \wedge (AB = A \rightarrow A \subseteq B)$	TP15b (Adjunción) con 21 y 12b
14b. $A \subseteq B \leftrightarrow AB = A$	Sustitución de 13b: RFP7.

i) Probar que: $\boldsymbol{AB'}$ y $\boldsymbol{BA'}$ son conjuntos mutuamente excluyentes

Estrategia para obtener la solución:

Demuestre que: $AB' \cdot BA' = \emptyset$. Esto requiere llevar a cabo las siguientes dos pruebas:

- $\boldsymbol{AB' \cdot BA' \subseteq \emptyset}$
- $\boldsymbol{\emptyset \subseteq AB' \cdot BA'}$

1. $x \in (AB' \cdot BA')$	Supuesto
2. $x \in AB' \wedge x \in BA'$	Sustitución de 1: definición de pertenencia a intersección
3. $x \in AB'$	TP15a (simplificación) con 2
4. $x \in BA'$	TP15a (simplificación) con 2
5. $x \in A \wedge x \in B'$	Sustitución de 3: definición de pertenencia a intersección
6. $x \in B \wedge x \in A'$	Sustitución de 4: definición de pertenencia a intersección
7. $x \in A$	TP15a (simplificación) con 5
8. $x \in A'$	TP15a (simplificación) con 6
9. $x \in A \wedge x \in A'$	TP15b (Adjunción) con 7 y 8
10. $x \in \emptyset$	Sustitución de 9: definición de pertenencia a conjunto vacío
11. $x \in (AB' \cdot BA') \rightarrow x \in \emptyset$	TdD entre 1 y 10
12. $\forall x(x \in (AB' \cdot BA') \rightarrow x \in \emptyset)$	G.U. de 11
13. $AB' \cdot BA' \subseteq \emptyset$	Sustitución de 12: definición de inclusión
1a. $\emptyset \subseteq AB' \cdot BA'$	TJ2

De 13 y 1a $AB' \cdot BA' = \emptyset$

j) Teorema Card6 $\boldsymbol{|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B|}$

Del Teorema TJ31a se puede afirmar que $B = A'B + AB$ y $A = AB' + AB$

La unión de los subconjuntos A y B, se tiene: $A + B = A'B + AB' + AB + AB$

Aplicando Idempotencia de la unión (TJ19b) en lado derecho de la igualdad $A + B = A'B + AB' + AB$

Todos los conjuntos del lado derecho de la igualdad son excluyentes, por lo que:

$$|A + B| = |AB'| + |BA'| + |AB| \tag{1}$$

Ahora bien, $A = AB' + AB$; donde, igualmente, los conjuntos del lado derecho son excluyentes; de ese modo: $|A| = |AB'| + |AB|$ y, por tanto:

$$|AB'| = |A| - |AB| \tag{2}$$

De manera análoga, $B = A'B + AB$ y de allí:

$$|A'B| = |B| - |AB| \tag{3}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1): $|A + B| = |A| - |AB| + |B| - |AB| + |AB| = |A| + |B| - |AB|$

3. Determine la cantidad pedida.

Para resolver los casos propuestos, el estudiante debe ser capaz de:

- Usar de manera adecuada el lenguaje propio de la Teoría de Conjuntos para la representación y descripción de problemas y soluciones.
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por comprensión
- Identificar los conceptos requeridos y usar las definiciones
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las operaciones entre conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las relaciones entre conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de la cardinalidad de un conjunto

- Traducir enunciados: lenguaje cotidiano-lenguaje de conjuntos- lenguaje cotidiano.
- Construir Diagramas de Benn, ubicar elementos e identificar subconjuntos.

a) En una batalla muy reñida por lo menos el 70% de los combatientes perdieron un ojo, por lo menos el 75% perdieron una oreja, por lo menos el 80% perdieron un brazo y por lo menos un 85% perdieron una pierna. ¿Cuántos combatientes perdieron las cuatro cosas?

Sea $X = \{x|\mathrm{t}(x)\}$, el conjunto referencia para el ejemplo.

Donde, $\mathrm{t}(x)$: x es combatiente de la batalla

Se definen, por comprensión, los siguientes subconjuntos de X.

$O = \{x|x \in X, \mathrm{o}(x)\}$; donde $\mathrm{o}(x)$: x perdió un ojo
$J = \{x|x \in X, \mathrm{j}(x)\}$; donde $\mathrm{j}(x)$: x perdió una oreja
$B = \{x|x \in X, \mathrm{b}(x)\}$; donde $\mathrm{b}(x)$: x perdió un brazo
$P = \{x|x \in X, \mathrm{p}(x)\}$; donde $\mathrm{p}(x)$: x perdió una pierna

Con base en esta representación, el problema solicita calcular el valor b, tal que: $b \leq |O\ J\ B\ P|$

La representación de la información ofrecida para este problema es, en tales términos:

$$0.7\ |X| \leq |O| \leq\ |X| \quad (1)$$
$$0.75\ |X| \leq |J| \leq |X| \quad (2)$$
$$0.8\ |X| \leq |B| \leq |X| \quad (3)$$
$$0.85\ |X| \leq |P| \leq |X| \quad (4)$$

Estrategia general de solución:

Con ayuda de la información suministrada en la formulación del problema se calculará $|O' + J' + B' + P'|$ para luego obtener el valor de $|O\ J\ B\ P|$

Pasos específicos:

1. Determine los intervalos de valores correspondientes a cada una de las siguientes cardinalidades $|O'|$, $|J'|$, $|B'|$ y $|P'|$

2. Con base en los intervalos encontrados en el paso 1, determine el intervalo de valores para la cardinalidad Calcule $|O' + J' + B' + P'|$.

3. Dado que los conjuntos $O\ J\ B\ P$ y $O' + J' + B' + P'$ son complemento el uno del otro, utilizando el resultado de 3 determine el intervalo de $|O\ J\ B\ P|$.

4. Elija el límite inferior del intervalo obtenido en 3 para dar respuesta al problema.

Paso 1.
De acuerdo con el TCard8, el conjunto de desigualdades (1) – (4), se expresan como:

$$0 \leq |O'| \leq 0.3\ |X| \quad (6)$$
$$0 \leq |J'| \leq 0.25\ |X| \quad (7)$$
$$0 \leq |B'| \leq 0.2\ |X| \quad (8)$$
$$0 \leq |P'| \leq 0.15\ |X| \quad (9)$$

Observe que la cardinalidad de cada uno de los conjuntos O', J', B' y P' es incierta, pues su valor puede ser cualquiera de los que se encuentran en su intervalo respectivo. Existe, por tanto, un número infinito de combinaciones posibles de valores de las cardinalidades de estos conjuntos (de las posibles combinaciones de (6) a (9)). Se tomarán, sin embargo, varios casos representativos: a) cuando cada conjunto tiene el valor de la cardinalidad más alto posible, b) cuando cada uno tenga un valor de cardinalidad intermedio, c) cuando cada uno tenga el valor de la cardinalidad más bajo.

Paso 2.

Con fundamento en los valores máximos de la cardinalidad de cada conjunto O', J', B' y P', es decir $\max(|O'|) = 0.30|X|, \max(|J'|) = 0.25\,|X|, \max(|B'|) = 0.2\,|X|, \max(|P'|) = 0.15\,|X|$, se calcula el valor de $|O' + J' + B' + P'|$. De acuerdo con el TCard9, $|O' + J' + B' + P'|$ se encuentra en un intervalo que se calcula así:

$$\max(0.30|X|, 0.25|X|, 0.2|X|, 0.15|X|) \leq |O' + J' + B' + P'| \leq \min(0.3|X| + 0.25|X| + 0.2|X| + 0.15|X|, |X|) \tag{10}$$

De (10) se puede afirmar que:

$$0.3|X| \leq |O' + J' + B' + P'| \leq 0.9|X| \tag{11}$$

Ahora se efectúa la definición del intervalo de valores para $|O' + J' + B' + P'|$, con base **los valores mínimos de la cardinalidad de cada conjunto** O', J', B' y P', es decir, $|O'| = |J'| = |B'| = |P'| = 0|X|$, el cual produce:

$$\max(0|X|, 0|X|, 0|X|, 0|X|) \leq |O' + J' + B' + P'| \leq \min(0|X| + 0|X| + 0|X| + 0|X|, |X|)$$

$$0|X| \leq |O' + J' + B' + P'| \leq 0|X| \tag{12}$$

De la propiedad de la unión de intervalos **numéricos** aplicada a (11) y (12) se puede afirmar que:

$$\min(0|X|, 0.3|X|) \leq |O' + J' + B' + P'| \leq \max(0.9|X|, 0|X|)$$

$$0|X| \leq |O' + J' + B' + P'| \leq 0.9|X| \tag{13}$$

Paso 3.

De (13), del Teorema J26a y Card8 se puede obtener:

$$|X| - 0.9|X| \leq |O\ J\ B\ P| \leq |X| - 0|X|$$

$$0.1|X| \leq |O\ J\ B\ P| \leq |X| \tag{14}$$

Paso 4. Al revisar el límite inferior del intervalo (14), se puede afirmar que **al menos el 10% de los combatientes perdieron las cuatro cosas**.

b) Al finalizar el semestre de estudios se observó, analizando las siguientes tres asignaturas Matemáticas Discretas I (M), Introd. a la Ing. de Sistemas (S) y Español (E), que el 2% reprobó las tres materias, el 6% reprobó M y S, el 5% reprobó S y E, el 10% reprobó M y E, el 19% reprobó M, el 32% reprobó S y el 16% reprobó E.

Justifique la respuesta a cada una de las siguientes preguntas, usando las propiedades de la cardinalidad.

(a) ¿Qué porcentaje de estudiantes aprobó las tres materias? R/ 52%
(b) ¿Qué porcentaje reprobó exactamente una? R/ 31%
(c) ¿Qué porcentaje reprobó al menos una? R/ 48%
(d) ¿Qué porcentaje aprobó al menos dos? R/ 83%
(e) ¿Qué porcentaje aprobó a lo sumo una? R/ 17

R/

Defínase por comprensión el conjunto referencia así: $X = \{x |\ \mathrm{t}(x)\}$; donde, $\mathrm{t}(x)$: x es un estudiante

Defínase por comprensión, los siguientes subconjuntos de X:

M: $\{x |\ x \in X, \mathrm{m}(x)\}$; donde $\mathrm{m}(x)$: x aprobó el curso de Matemáticas Discretas I
S: $\{x |\ x \in X, \mathrm{s}(x)\}$; donde $\mathrm{s}(x)$: x aprobó el curso de Introd. a la Ing. de Sistemas
E: $\{x |\ x \in X, \mathrm{e}(x)\}$; donde $\mathrm{e}(x)$: x aprobó el curso de Español

Los datos suministrados para el ejemplo son:

$|M'| = 19$, $|S'| = 32$; $|E'| = 16$; $|M'S'| = 6$; $|M'E'| = 10$; $|E'S'| = 5$; $|M'S'E'| = 2$.

¿Qué se pide?

(a): Porcentaje de estudiantes que aprobó las tres materias: $|MSE|$

(b): Porcentaje que reprobó exactamente una de las tres asignaturas: $|M'SE + S'ME + E'MS|$

(c): Porcentaje que reprobó al menos una de las tres asignaturas: $|M' + S' + E'|$

(d): Porcentaje que aprobó al menos dos asignaturas $|MS + ME + SE|$

(e): Porcentaje que aprobó a lo sumo una asignatura: $|MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S'|$

Una solución:

(a) El porcentaje de estudiantes que aprueba las tres materias puede representarse mediante $|MSE|$.

De acuerdo con el TJ27b, $MSE + (MSE)' = X$;

según TJ26a, $MSE + (M' + S' + E') = X$.

Con base en TCard7, $|MSE| = |X| - |M' + S' + E'|$.

Una generalización del TCard6 permite asegurar que: $|M' + S' + E'| = |M'| + |S'| + |E'| - |M'S'| - |M'E'| - |E'S'| + |M'S'E'|$.

Con el remplazo de las expresiones con los valores correspondientes se obtiene: $|M' + S' + E'| = 48$.

Observe que $M' + S' + E'$ o $(MSE)'$ representan al *conjunto de estudiantes que reprobaron al menos una asignatura*; de modo que con $|M' + S' + E'| = 48$ queda resuelta la inquietud (c).

Además, y puesto que $|MSE| = 100 - 48 = 52$, se ha obtenido la respuesta a la pregunta (a).

(b) La siguiente expresión calcula *el porcentaje de estudiantes que reprobaron exactamente una materia* es $|M'SE + S'ME + E'MS|$.

Además, se puede efectuar la siguiente afirmación: "*el conjunto de estudiantes que <u>reprueban exactamente una materia</u>, y el conjunto de aquellos que <u>o reprueban dos asignaturas o las aprueban todas</u>, son* ***complementarios***" [8]

El TCard7 permite afirmar: $|M'SE + S'ME + E'MS| = 100 - |(M'E' + M'S' + S'E') + MSE|$

Una generalización del TCard_6 para calcular $|M'E' + M'S' + S'E' + MSE|$, es:

$$
\begin{aligned}
&|M'E' + M'S' + S'E' + MSE| \\
&\quad = |M'E'| + |M'S'| + |S'E'| + |MSE| - |M'E'M'S'| - |M'E'\ S'E'| - |M'E'MSE| \\
&\quad - |M'S'S'E'| - |M'S'MSE| - |S'E'MSE| + |M'E'M'S'S'E'| + |M'E'M'S'MSE| \\
&\quad + |M'E'S'E'MSE| + |M'S'S'E'MSE| - |M'E'M'S'S'E'MSE|
\end{aligned}
$$

Aplicando TJ27a en la expresión anterior produce:

$$
\begin{aligned}
&|M'E' + M'S' + S'E' + MSE| \\
&\quad = |M'E'| + |M'S'| + |S'E'| + |MSE| - |M'E'S'| - |M'E'\ S'| - |\emptyset| - |M'S'E'| - |\emptyset| - |\emptyset| \\
&\quad + |M'E'S'| + |\emptyset| + |\emptyset| + |\emptyset| - |\emptyset|
\end{aligned}
$$

Y empleando el TCard_1:

$|M'E' + M'S' + S'E' + MSE| = |M'E'| + |M'S'| + |S'E'| + |MSE| - 2 \cdot |M'E'S'|$

Reemplazando los valores respectivos, se obtiene:

$|M'E' + M'S' + S'E' + MSE| = 10 + 6 + 5 + 52 - 2 \cdot 2 = 69$

Por tanto, $|M'SE + S'ME + E'MS| = 100 - 69 = 31$

(e) *El porcentaje de estudiantes que aprobó <u>a lo sumo</u> una asignatura* puede expresarse y calcularse mediante:

$$|MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S'|$$ [9]

Por TJ20a: $MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S' = MS'E' + SM'E' + M'S'(E + E')$

Por TJ27b y TJ23b: $MS'E' + SM'E' + M'S'(E + E') = MS'E' + SM'E' + M'S'$

Se puede comprobar que los 3 subconjuntos son disyuntos; luego por TCard3:

$$|MS'E' + SM'E' + M'S'| = |MS'E'| + |SM'E'| + |M'S'|$$

Las propiedades TJ23b, TJ27b y TJ20a permiten afirmar que: $S'E' = MS'E' + M'S'E'$,

Puesto que los conjuntos $MS'E'$ y $M'S'E'$ son disyuntos, y aplicando TCard3:

$$|MS'E'| + |M'S'E'| = |S'E'|$$

Así: $|MS'E'| = |S'E'| - |M'S'E'| = 5 - 2 = 3$.

Usando la misma secuencia de justificaciones, $|SM'E'| = |M'E'| - |M'S'E'| = 10 - 2 = 8$

Por tanto, $|MS'E' + SM'E' + M'S'| = 3 + 8 + 6 = 17$

---

[8] Es decir $(M'SE + S'ME + E'MS)' = M'E' + M'S' + S'E' + MSE$. Efectúe la comprobación.

[9] Trate de probar la igualdad entre los conjuntos $M'E' + M'S' + E'S'$ y $MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S'$.

d) *El porcentaje de estudiantes que aprobó al menos dos asignaturas* se establece como: $|MS + ME + SE + MSE|$

Por la propiedad TJ21a, se simplifica a $|MS + ME + SE|$.

Para reducir el proceso de cálculo, se puede afirmar que: "*el conjunto de estudiantes que aprobó al menos dos asignaturas, y el de los que aprobaron a lo sumo una asignatura, son complementarios*" [10]

El porcentaje de estudiantes que *a lo sumo aprobaron una asignatura* fue obtenido en (e), es decir, $|MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S'| = 17$.

Por tanto, el TCard_7 permite afirmar que:

$|MS + ME + SE| = 100 - |MS'E' + SM'E' + EM'S' + S'M'E'|$

y así: $|MS + ME + SE| = 100 - 17 = 83$

==

[10] Haga el ejercicio de confirmar $(MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S')' = MS + ME + SE$.
[11] Es decir $(M'SE + S'ME + E'MS)' = M'E' + M'S' + S'E' + MSE$. Efectúe la comprobación.
[12] Trate de probar la igualdad entre los conjuntos $M'E' + M'S' + E'S'$ y $MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S'$.
[13] Haga el ejercicio de confirmar $(MS'E' + SM'E' + EM'S' + E'M'S')' = MS + ME + SE$.