1.5 EJEMPLOS

1. Establezca la cantidad pedida

Para resolver los casos propuestos, el estudiante debe ser capaz de:

- Usar de manera adecuada el lenguaje propio de la Teoría de conjuntos y de relaciones para la representación y descripción de problemas y soluciones.
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por comprensión
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por extensión
- Identificar los conceptos requeridos y usar las definiciones
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de la cardinalidad de un conjunto

a) Se tiene un conjunto *A* establecido como un alfabeto de 30 caracteres (letras) distintos. ¿Cuántas palabras de longitud 4 pueden formarse considerando que la letra *a* debe aparecer una y sólo una vez en cada palabra?, explique.

Primero se determina la cantidad de palabras en las que en la primera posición pueda aparecer únicamente la letra *a*, mientras que en las otras 3 posiciones pueden aparecer el resto de las 29 letras: $1 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29$. De modo semejante se calcula la cantidad de palabras para los otros 3 casos restantes: "*a* en la segunda posición", "*a* en la tercera posición" y "*a* en la cuarta posición". Finalmente, se suman las cantidades obtenidas en los 4 casos.

En síntesis:

$$1 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 + 29 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 29 + 29 \cdot 29 \cdot 1 \cdot 29 + 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 1 = 4 \cdot 29^3 = 97556$$

Nota explicativa. Aunque ya se ha dado respuesta a la pregunta formulada en este ejercicio, es pertinente revelar la noción de conjunto producto y su cardinalidad en el cálculo realizado.
Cuando se pretende determinar el conjunto de palabras de longitud 4, en las que en una de las posiciones debe aparecer exclusivamente la letra *a* y en las restantes 3 posiciones pueden aparecer las otras 29 letras, lo que está sucediendo es que se está determinando un conjunto producto. Observe, por ejemplo, el conjunto producto que se conforma para el caso en que la letra *a* debe aparecer exclusivamente en la segunda posición: $A-\{a\} \times \{a\} \times A-\{a\} \times A-\{a\}$. Ahora bien, el conjunto $A-\{a\}$ es el *conjunto diferencia* que incluye todos los elementos de A excepto el elemento del conjunto unitario $\{a\}$; en la práctica, $A-\{a\}$ es el conjunto que contiene todos los caracteres del alfabeto excepto la letra *a*. Así entonces, la cantidad de palabras de longitud 4 con la letra *a* en la segunda posición, se calcula como $|A-\{a\} \times \{a\} \times A-\{a\} \times A-\{a\}|$, es decir, $|A-\{a\}| \cdot |a| \cdot |A-\{a\}| \cdot |A-\{a\}| = 29 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 29$

De esa misma manera se "entiende" el cálculo para las otras 3 posibilidades de ubicación de la letra *a*.

b) Suponga que se pretende formar expresiones compuestas por 5 caracteres que, en general, tienen la siguiente configuración: $plolq$

donde $p \in P$, $l \in A$, $o \in O$ y $q \in Q$; además: $P = \{(\}$, $Q = \{)\}$; $O = \{+, -, *, /\}$ y $A = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto español}\}$ donde $|A| = 30$.
¿Cuántas expresiones posibles se darán? Explique.

La cantidad de expresiones posibles se obtienen calculando el número de símbolos que se pueden colocar en cada una de las 5 posiciones, y luego multiplicando esos valores, así:

$$|P| \cdot |A| \cdot |O| \cdot |A| \cdot |Q| = 1 \cdot 30 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 1 = 3600$$

Nota explicativa. Para comprender el papel de la noción de conjunto producto y su cardinalidad en el proceso de solución de este ejemplo, debe entenderse que el conjunto que contiene todas las expresiones factibles con estas indicaciones es: $P \times A \times O \times A \times Q$. La cantidad de estas expresiones, o sea la cantidad de los elementos de $|P \times A \times O \times A \times Q|$ es $|P| \cdot |A| \cdot |O| \cdot |A| \cdot |Q|$.

c) Una pantalla digital puede entenderse como la representación en el plano del *producto cartesiano* de dos conjuntos finitos H, V; donde H es el conjunto de localizaciones en la dirección horizontal que pueden tener los puntos de esa pantalla; V desempeña el mismo papel de H en la dirección vertical. Ahora suponga que en cada punto se ubica un dispositivo que genera un haz de luz que puede encenderse o apagarse. Obtenga la fórmula que calcula la cantidad de imágenes que pueden generarse en esa pantalla.

Sln. La pantalla se corresponde matemáticamente, entonces, con el conjunto $H \times V$. Luego la cantidad de puntos de la pantalla se calcula como: $|H \times V| = |H| \cdot |V|$. Toda imagen, así tenga sentido o no para quien observe la pantalla, se interpreta como un subconjunto de puntos (encendidos/apagados) de esa pantalla, luego en cada punto existen esos dos estados. Así entonces, la cantidad posible de combinaciones de puntos encendidos-apagados se calcula como:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{|H| \cdot |V| \; veces} = 2^{|H| \cdot |V|}$$

Solución alterna

Toda imagen, así tenga sentido o no para quien observe la pantalla, se interpreta como un subconjunto de puntos de esa pantalla; luego, ¿cuántos subconjuntos se pueden generar en el conjunto $H \times V$?

$$2^{|H| \cdot |V|}$$

Donde $|H|$ es la cantidad de localizaciones en el sentido horizontal, y $|V|$ es la correspondiente en el vertical

d) Sea $T = \{1000, 1001, 1002, \ldots, 9999\}$. ¿Cuántos enteros en T tienen: al menos un dígito que sea 0 (cero), al menos uno que sea 1 (uno) y al menos uno que sea 2 (dos)? Por ejemplo $1072, 2101$ son números de este tipo.

Sea T el conjunto de referencia definido por extensión. Defínase por comprensión, y de manera general, una familia de subconjuntos de T de la siguiente forma:

$A_i = \{n | n \in T \;\wedge\; n \text{ tiene al menos un digito igual a } i\}$;

Se podría definir, también de manera general, cada miembro de otra familia relacionada con la anterior, así: $A'_i = \{n | n \in T \ \wedge$ en n está ausente el digito $i\}$.

De manera que $|A_0\, A_1\, A_2|$ es la cantidad preguntada en el ejercicio.

Usando la propiedad de complemento de conjuntos, TJ26b, se tiene: $A_0\, A_1\, A_2 + (A_0\, A_1\, A_2)' = T$; además, por TJ25a: $A_0\, A_1\, A_2 + (A'_0 + A'_1 + A'_2) = T$.

Finalmente, aplicando TCard7 $|A_0\, A_1\, A_2| + |A'_0 + A'_1 + A'_2| = |T|$; y de ésta se implica: $|A_0\, A_1\, A_2| = |T| - |A'_0 + A'_1 + A'_2|$; donde: $|T| = 9000$.

Restaría encontrar $|A'_0 + A'_1 + A'_2|$. Para ello, observe que: $|A'_0 + A'_1 + A'_2| = |A'_0| + |A'_1| + |A'_2| - |A'_0 A'_1| - |A'_0 A'_2| - |A'_1 A'_2| + |A'_0\, A'_1 A'_2|$; y habría que calcular los valores de cada uno de los miembros del lado derecho de esta ecuación.

Piense a cada número de T compuesto de 4 posiciones; en cada una de ellas se especificarán los dígitos que podrían aparecer dependiendo de lo que se busque cumplir; veamos:

La cantidad posible de números de T que **no tienen un dígito igual a 0** (o sea, $|A'_0|$) se obtiene de la siguiente manera:

Para la primera posición pueden aparecer los dígitos: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9.

Para la segunda posición: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Luego: $|A'_0| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$.

La cantidad posible de números de T que no tienen un dígito igual a 1 (o sea, $|A'_1|$) se obtiene de la siguiente manera:

Para la primera posición: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Luego: $|A'_1| = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

La cantidad posible de números de T que no tienen un dígito igual a 2 (o sea, $|A'_2|$) se obtiene de la siguiente manera:

Para la primera posición: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 9 dígitos posibles.

Luego: $|A'_2| = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

La cantidad posible de números de T que no tienen un dígito igual a 0 y un dígito igual a 1 (o sea, $|A'_0 A'_1|$) se obtiene de la siguiente forma:

Para la primera posición: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Luego: $|A'_0 A'_1| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$.

La cantidad posible de números de T que no tienen un dígito igual a 0 y un dígito igual a 2 (o sea, $|A'_0 A'_2|$) se obtiene de la siguiente forma:

Para la primera posición: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Luego: $|A'_0 A'_2| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$.

La cantidad posible de números de *T* que no tienen un dígito igual a 1, y tampoco un dígito igual a 2 (o sea, $|A'_1 A'_2|$) se obtiene de la siguiente forma:

Para la primera posición: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 7 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la tercera posición: $0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 8 dígitos posibles.

Luego: $|A'_1 A'_2| = 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$.

La cantidad posible de números de T que no tienen un dígito igual a 0, ni un dígito igual a 1, y tampoco un dígito igual 2 (o sea, $|A'_0\ A'_1 A'_2|$) se obtiene de la siguiente forma:

Para la primera posición: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 7 dígitos posibles.

Para la segunda posición: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 7 dígitos posibles.

Para la tercera posición dígito: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 7 dígitos posibles.

Para la cuarta posición: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; es decir 7 dígitos posibles.

Luego: $|A'_0\ A'_1 A'_2| = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$.

Así pues, $|A'_0 +\ A'_1 + A'_2| = |A'_0| + |A'_1| + |A'_2| - |A'_0 A'_1| - |A'_0 A'_2| - |A'_1 A'_2| + |A'_0\ A'_1 A'_2|$

$|A'_0 +\ A'_1 + A'_2| = 6561 + 5832 + 5832 - 4096 - 4096 - 3584 + 2401 = 8850$

Finalmente, $|A_0\ A_1\ A_2| = 9000 - |A'_0 + A'_1 + A'_2| = 9000 - 8850 = 150$.

2. Lleve a cabo las sustentaciones pedidas

Para resolver los casos propuestos, el estudiante debe ser capaz de:

- Usar de manera adecuada el lenguaje propio de la Teoría de conjuntos y relaciones para la representación y descripción de problemas y soluciones.
- Comprender el concepto de determinación de un conjunto por comprensión
- Identificar los conceptos requeridos y usar las definiciones
- Aplicar el procedimiento deductivo general (valiéndose de las reglas de validez de las lógicas Proposicional y Cuantificacional) para determinar si existe relación de inclusión entre dos conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las operaciones entre conjuntos
- Identificar y aplicar los teoremas sobre las propiedades de las relaciones entre conjuntos
- Definir si existe, o no, relación de igualdad entre dos conjuntos

a) Teorema R2 $A \times B = \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

$A = \emptyset \vee B = \emptyset \rightarrow A \times B = \emptyset$

1 $A = \emptyset \vee B = \emptyset$	Supuesto
2 $\forall x(x \notin A) \vee \forall y(y \notin B)$	Sustituciones en 1: TJ3
3 $\forall x \forall y(x \notin A \vee y \notin B)$	Doble sustitución en 2: TC6a
4 $\forall x \forall y\big((x, y) \notin A \times B\big)$	Sustitución de 3: definición de no pertenencia a conjunto cruz
5 $A \times B = \emptyset$	Sustitución de 4: TJ3
6 $A = \emptyset \vee B = \emptyset \leftrightarrow A \times B = \emptyset$	Teorema de la deducción (TdD) entre 1 y 5. (el uso reiterado de sustituciones entre estos pasos permite establecer "la bi-condicionalidad" en lugar de sólo la condicionalidad)

b) Teorema R6 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$ Ley asociativa del producto.

1 $\big(x, (y, z)\big) \in A \times (B \times C)$	Supuesto
2 $x \in A \wedge (y, z) \in B \times C$	Sustitución de 1: definición de pertenencia a conjunto producto
3 $x \in A \wedge (y \in B \wedge z \in C)$	Sustitución de 2: definición de pertenencia a conjunto producto
4 $(x \in A \wedge y \in B) \wedge z \in C$	Sustitución en 3: TP23b (asociatividad de proposiciones conjuntivas)
5 $(x, y)\ A \times B \wedge z \in C$	Sustitución en 4: definición de pertenencia a conjunto producto
6 $\big((x, y), z\big) \in (A \times B) \times C$	Sustitución en 5: definición de pertenencia a conjunto producto
7 $\big(x, (y, z)\big) \in A \times (B \times C) \leftrightarrow \big((x, y), z\big) \in (A \times B) \times C$	TdD entre 1 y 6 (el uso de sustituciones reiteradas en todos los pasos permite establecer la bicondicionalidad)

8 $\forall x \forall y \forall z \big((x,(y,z)) \in A \times (B \times C) \leftrightarrow ((x,y),z) \in (A \times B) \times C \big)$ G.U. en 7

9 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ Definición de igualdad de conjuntos en 8

c) Teorema R9. R es reflexiva en $A \leftrightarrow I_A \subseteq R$

1 R es reflexiva en A	Supuesto
2 $\forall x((x,x) \in R)$	Sustitución de 1: definición de relación reflexiva
3 $(x,x) \in R$	E.U. en 2
4 I_A es reflexiva en A	TR7
5 $\forall x((x,x) \in I_A)$	Sustitución de 4: definición de relación reflexiva
6 $(x,x) \in I_A$	E.U. en 5
7 $(x,x) \in I_A \rightarrow (x,x) \in R$	TP7a (construcción de condicional con 6 y 3)
8 $\forall x((x,x) \in I_A \rightarrow (x,x) \in R)$	G.U. en 7
9 $I_A \subseteq R$	Sustitución de 8: definición de relación de inclusión entre conjuntos
10 R es reflexiva en $A \rightarrow I_A \subseteq R$	TdD entre 1 y 9

1a $I_A \subseteq R$	Supuesto
2a $\forall x \forall y((x,y) \in I_A \rightarrow (x,y) \in R)$	Sustitución de 1a: definición de la relación de inclusión entre conjuntos
3a I_A es reflexiva en A	TR7
4a $\forall x((x,x) \in I_A)$	Sustitución de 3a: definición de relación reflexiva
5a $(x,x) \in I_A$	E.U. en 4a
6a $(x,x) \in I_A \rightarrow (x,x) \in R$	Doble E.U. en 2a
7a $(x,x) \in R$	Modus ponems (MP) entre 5a y 6a
8a $\forall x((x,x) \in R)$	G.U. en 7a
9a R es reflexiva en A	Sustitución: definición de relación reflexiva en 8a
10a $I_A \subseteq R \rightarrow R$ es reflexiva en A	TdD entre 1a y 9a
R es reflexiva en $A \leftrightarrow I_A \subseteq R$	De 10 y 10a

d) Teorema R11. R es simétrica en $A \leftrightarrow R = R^{-1}$

1 $R = R^{-1}$	Supuesto
2 $\forall x \forall y((x,y) \in R \leftrightarrow (x,y) \in R^{-1})$	Sustitución de 1: definición de igualdad de conjuntos
3 $\forall x \forall y((x,y) \in R \leftrightarrow (y,x) \in R)$	Sustitución en 2: definición de pertenencia a la inversa de una relación

4 $\forall x \forall y \big(((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R) \wedge ((y,x) \in R \rightarrow (x,y) \in R) \big)$ Sustitución en 3: definición de bicondicional RFP7.

5 $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big) \land \forall x \forall y\Big(\big((y,x) \in R \to (x,y) \in R\big)\Big)$ Sustituciones en 4: doble aplicación TC8a

6 $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big)$ TP15a en 5

7 R es simétrica Sustitución de 6: definición de relación simétrica

8 $R = R^{-1} \to R$ es simétrica TdD entre 1 y 7.

1a $R\ es\ simétrica$ Supuesto

2a $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big)$ Sustitución de 1a: definición de relación simétrica

3a $(x,y) \in R \to (y,x) \in R$ Doble E.U. de 2a

4a $(x,y) \in R \to (x,y) \in R^{-1}$ Sustitución en consecuente de 3a: pertenencia a la inversa de una relación

5a $\forall x \forall y\big((y,x) \in R \to (x,y) \in R\big)$ Sustitución de 1a: definición de relación simétrica

6a $(y,x) \in R \to (x,y) \in R$ Doble E.U. en 5a.

7a $(x,y) \in R^{-1} \to (x,y) \in R$ Sustitución en antecedente de 6a: pertenencia a la inversa de una relación

8a $\big((x,y) \in R \to (x,y) \in R^{-1}\big) \land \big((x,y) \in R^{-1} \to (x,y) \in R\big)$ TP15b entre 4a y 7a.

9a $\big((x,y) \in R \leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}\big)$ Sustitución de 8a: RFP7 (def. de bi-condicional)

10a $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}\big)$ Doble G.U. en 9a.

11a $R = R^{-1}$ Sustitución de 10a: def. de igualdad enre conjuntos

12a $R\ es\ simétrica \to R = R^{-1}$ TdD entre 1a y 11a.

13a $R\ es\ simétrica \leftrightarrow R = R^{-1}$ TP15b entre 8 y 12a; RFP7 (def. de bi-condicional) en la expresión resultante

e) Sea $R \subseteq A \times B$; pruebe que $R \subseteq \delta(R) \times \gamma(R)$

1 $(x,y) \in R$ Supuesto

2 $\forall x \forall y\big((x,y) \in R \to (x,y) \in A \times B\big)$ Premisa

3 $(x,y) \in R \to (x,y) \in A \times B$ Doble aplicación de E.U. en 2

4 $(x,y) \in A \times B$ MP entre 1 y 3

5 $x \in A\ \land y \in B$ Sustitución de 4: definición de pertenencia a $A \times B$

6 $x \in A$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 5

7 $\exists y\ \big((x,y) \in R\big)$ G.E. en 1

8 $x \in A \land \exists y\ \big((x,y) \in R\big)$ TP15b (Propiedad de la conjunción) entre 6 y 7

9 $x \in \delta(R)$ Sustitución de 8: definición de pertenencia al dominio de una relación

10 $y \in B$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 5

11 $\exists x\left((x,y) \in R\right)$ G.E. en 1

12 $y \in B \wedge \exists x\left((x,y) \in R\right)$ TP15b (Propiedad de la conjunción) entre 10 y 11

13 $y \in \gamma(R)$ Sustitución de 12: definición de pertenencia al dominio de una relación

14 $x \in \delta(R) \wedge y \in \gamma(R)$ TP15b (Propiedad de la conjunción) entre 9 y 13

15 $(x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R)$ Sustitución de 14: definición de pertenencia a un producto cartesiano

16 $(x,y) \in R \rightarrow (x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R)$ TdD entre 1 y 15

17 $\forall x \forall y\left((x,y) \in R \rightarrow (x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R)\right)$ Doble aplicación de G.U. en 16.

18 $R \subseteq \delta(R) \times \gamma(R)$ Sustitución de 17: definición de inclusión

f) Pruebe que $\delta(R) \times \gamma(R) \subseteq A \times B$

1 $(x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R)$ Supuesto

2 $x \in \delta(R) \wedge y \in \gamma(R)$ Sustitución de 1: definición de pertenencia a producto cartesiano

3 $x \in \delta(R)$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 2

4 $x \in A \wedge \exists y\left((x,y) \in R\right)$ Sustitución de 3: definición de pertenencia al dominio de una relación

5 $x \in A$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 4

6 $y \in \gamma(R)$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 2

7 $y \in B \wedge \exists x\left((x,y) \in R\right)$ Sustitución de 6: definición de pertenencia al rango de una relación

8 $y \in B$ TP15a (Propiedad de la conjunción) en 7

9 $x \in A \wedge y \in B$ TP15b (Propiedad de la conjunción) entre 5 y 8.

10 $(x,y) \in A \times B$ Sustitución de 9: definición de pertenencia a producto cartesiano

11 $(x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R) \rightarrow (x,y) \in A \times B$ TdD entre 1 y 10

12 $\forall x \forall y\left((x,y) \in \delta(R) \times \gamma(R) \rightarrow (x,y) \in A \times B\right)$ Doble aplicación de G.U. en 11

13 $\delta(R) \times \gamma(R) \subseteq A \times B$ Sustitución de 14: definición de inclusión