CONJUNTOS: DEFINICIONES Y CARDINALIDAD

Conceptos básicos

Intuitivamente, un conjunto es: una *colección de objetos*, y a los objetos se los denominará *elementos*.

Cuando un elemento a forma parte de un conjunto A, se dice que *pertenece* a él, y se acostumbra a representar ese hecho como $a \in A$; si no pertenece, se simboliza por $a \notin A$ (o también como: $\neg(a \in A)$)

Conjunto Universal o de referencia es aquel conformado por **todos los elementos de interés en una situación particular**. El universal X puede formalizarse como aquel conjunto que satisface: $\forall x(x \in X)$ donde x es un elemento cualquiera en una situación particular.

Determinación de un conjunto **por comprensión**	…cuando se establece una propiedad o característica de tal forma que aquellos elementos que la satisfacen quedan perfectamente estipulados, y pertenecen, por tanto, al conjunto; y los que no la cumplen, no pertenecen al conjunto. La determinación formal de un conjunto por comprensión se representa como: $A = \{x \mid x \in X \wedge \mathrm{P}\}$ [1] donde x representa cualquier elemento de un conjunto universal X P es una fbf del cálculo cuantificacional (o del proposicional) que hace referencia a un atributo, propiedad, regla, condición, relación o restricción que debe exhibir el elemento x para ser parte de A.
Determinación de un conjunto **por extensión**	cuando se listan todos, y cada uno, de los elementos que pertenecen a él; ejemplo: $A = \{a, b, c, f\}$.

Operaciones con conjuntos

Unión	$A + B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $x \in (A + B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ $x \notin (A + B) \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
Intersección	$A \cdot B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $x \in A \cdot B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ $x \notin A \cdot B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$
Diferencia de A respecto de B	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ $x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ $x \notin (A - B) \leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$
Diferencia Simétrica entre A y B	$A \oplus B = (A - B) + (B - A)$ $= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ $x \in A \oplus B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$ $x \notin A \oplus B \leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \in A)$
Complementación (Conjunto complemento)	$A' = X - A = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$ $x \in A' \leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A$ $x \notin A' \leftrightarrow x \notin X \vee x \in A$ $x \in A'' \leftrightarrow x \notin A'$

Relaciones básicas entre conjuntos

Igualdad Diferencia	$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ $A \neq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \leftrightarrow x \notin B)$

[1] También es usual emplear la siguiente notación $A = \{x \mid x \in X, \mathrm{P}\}$

	$A \neq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
Inclusión No inclusión	$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ $A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$
Inclusión propia No inclusión propia	$A \subset B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \notin A \wedge x \in B)$ $A \not\subset B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$
Exclusión mutua No exclusión mutua	$A <> B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \notin B)$ $A \not< \not> B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \in B)$
Otros conceptos	
Conjunto n-ario	$z \in \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n$ $z \notin \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow z \neq x_1 \wedge \dots \wedge z \neq x_n$
Familia de Conjuntos	$A = \{x \mid s(x)\}$; donde $s(x)$: "x es un conjunto". $A = \{A_i \mid i \in I\}$: i *índice* o *identificador* del conjunto A_i. I *conjunto de identificación o conjunto índice* ($I_n = \mathbb{N}_n = \{1,2, \dots, n\}$)
Conjunto Vacío	$\emptyset = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}$ $x \in \emptyset \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ $x \notin \emptyset \leftrightarrow x \notin A \vee x \in A$
Conjunto Potencia de A (Conjunto de Partes de A)	$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ $B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A$ $B \notin \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \nsubseteq A$
Alcance de las operaciones y relaciones	• De encontrar signo de complementación, $'$, debe aplicársele al conjunto más próximo que le antecede. • De hallar los siguientes signos, aplíquense a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha: $\cdot, +, -, \oplus$. • De hallar los siguientes signos, aplíquense a los conjuntos más próximos a izquierda y derecha: ; $=, \neq$; $\subseteq, \nsubseteq, \subset, \not\subset, <>, \not< \not>$; $\in, \notin$ • De hallar el signo $\neg$, aplíqueselo al enunciado más próximo a su derecha. • De hallar los siguientes signos, aplíquense a los enunciados más próximos a izquierda y derecha: $\wedge$;$\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ • De encontrar signos de agrupación, ( ), deben aplicarse a los conjuntos o enunciados que agrupe
Prioridad, precedencia (jerarquía) de aplicación	( ); $'$; $\cdot$; $+$; $-, \oplus$; $=, \neq$; $\subseteq, \nsubseteq, \subset, \not\subset, <>, \not< \not>$; $\in, \notin$; $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$

Relaciones deducibles entre conjuntos (Teoremas)

Teorema J1	$\forall x(x \notin \emptyset)$
Teorema J2	$A \subseteq 1 \rightarrow \emptyset \subseteq A$
Teorema J3	$A = \emptyset \leftrightarrow \forall x(x \notin A)$
Teorema J4	$x \in A \leftrightarrow \{x\} \subseteq A$
Teorema J5	$A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Teorema J6	$A \subseteq A + B$
Teorema J7	$A \cdot B \subseteq A$
Teorema J8	$A \cdot B \subseteq A + B$
Teorema J9	$(A + B \subseteq A \cdot B) \rightarrow A = B$
Teorema J10	$A \subseteq B \rightarrow A \subseteq B + C$
Teorema J11	$(A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C) \leftrightarrow A + B \subseteq C$
Teorema J12	$(C \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq B) \leftrightarrow C \subseteq A \cdot B$
Teorema J13	$(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$
Teorema J14a	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A + B = B)$
Teorema J14b	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cdot B = A)$
Teorema J15a	$(A \subseteq B) \rightarrow (A + C \subseteq B + C)$
Teorema J15b	$(A \subseteq B) \rightarrow (A \cdot C \subseteq B \cdot C)$
Teorema J16a	$(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \rightarrow (A + C \subseteq B + D)$
Teorema J16b	$(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \rightarrow (A \cdot C \subseteq B \cdot D)$
Teorema J17a (Conmutatividad)	$A \cdot B = B \cdot A$
Teorema J17b (Conmutatividad)	$A + B = B + A$
Teorema J18a (Asociatividad)	$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Teorema J18b (Asociatividad)	$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
Teorema J19a (Idempotencia)	$A \cdot A = A$
Teorema J19b (Idempotencia)	$A + A = A$
Teorema J20a (Distributividad de la intersección respecto a la unión)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Teorema J20b (Distributividad de la intersección respecto a la intersección)	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
Teorema J21a (Absorción)	$A + A \cdot B = A$
Teorema J21b (Absorción)	$A \cdot (A + B) = A$

Teorema J22a (Acotación)	$A \cdot \emptyset = \emptyset$
Teorema J22b (Acotación)	$A + 1 = 1$
Teorema J23a (Elemento neutro de la unión)	$A + \emptyset = A$
Teorema J23b (Elemento neutro de la intersección)	$A \cdot 1 = A$
Teorema J24a	$\emptyset' = 1$
Teorema J24b	$1' = \emptyset$
Teorema J25 (Involución)	$A'' = A$
Teorema J26a (DeMorgan)	$(A \cdot B)' = A' + B'$
Teorema J26b (DeMorgan)	$(A + B)' = A' \cdot B'$
Teorema J27a (Tercio excluido)	$A \cdot A' = \emptyset$
Teorema J27b (Tercio excluido)	$A + A' = 1$
Teorema J28a	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (B' \subseteq A')$
Teorema J28b	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A \cdot B' = \emptyset)$
Teorema J28c	$(A \subseteq B) \leftrightarrow (A' + B = 1)$
Teorema J29	$(A + B = 1) \leftrightarrow (A' \subseteq B)$
Teorema J30	Si $x \in 1$, $A \subseteq 1$ y $B \subseteq 1$, entonces sólo una de las siguientes relaciones es válida: $x \in A \cdot B$ $x \in A \cdot B'$ $x \in A' \cdot B$ $x \in A' \cdot B'$
Teorema J31a	$(A \cdot B + A \cdot B') = A$
Teorema J31b	$\big((A + B) \cdot (A + B')\big) = A$

CARDINALIDAD

Conceptos básicos	
Si A es un conjunto finito, la cardinalidad se define como el número de elementos que lo componen. La cardinalidad de un conjunto A se denota $\|A\|$, o $card(A)$.	
Postulados	
Card1	$\|\emptyset\| = 0$
Card2	$A \subseteq B \to \|A\| \leq \|B\|$
Card3	$(A \cdot B = \emptyset) \to \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$
Teoremas	
Teorema Card4	$\|A \cdot B\| \leq \|A\|$
Teorema Card5	$\|A\| \leq \|A + B\|$
Teorema Card6	$\|A + B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cdot B\|$
Teorema Card7	$\|A'\| = \|X\| - \|A\|$ donde $\|X\|$ es la cardinalidad del conjunto referencia X.
Teorema Card8	$(a \leq \|A\| \leq b) \leftrightarrow (\|X\| - b \leq \|A'\| \leq \|X\| - a)$
Teorema Card9a	$\underbrace{\max(\|A\|, \|B\|)}_{uno\ incluye\ al\ otro} \leq \|A + B\| \leq \underbrace{\|A\| + \|B\|}_{\|A\|+\|B\| \leq \|X\|}$
Teorema Card9b	$\underbrace{\max(\|A\|, \|B\|)}_{uno\ incluye\ al\ otro} \leq \|A + B\| \leq \underbrace{\min(\|A\| + \|B\|, \|X\|)}_{\|A\|+\|B\|>\|X\|\ (implica\ que\ A \cdot B \neq \emptyset\ )}$
Teorema Card10a	$\underbrace{0}_{A \cdot B = \emptyset} \leq \|A \cdot B\| \leq \underbrace{\min(\|A\|, \|B\|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro}$
Teorema Card10b	$\underbrace{\max(0, (\|A\| + \|B\|) - \|X\|)}_{A\ y\ B\ no\ necesariamente\ excluyentes} \leq \|A \cdot B\| \leq \underbrace{\min(\|A\|, \|B\|)}_{uno\ está\ incluido\ en\ el\ otro}$