Variables aleatorias

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Variables aleatorias

Variables aleatorias

- Es una función cuyo dominio es el espacio muestral S y cuyo rango son los números reales.

$$\begin{aligned} X : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow X(s) = x \end{aligned}$$

- Es un símbolo que representa un número que se asocia a los resultados del espacio muestral.

- **Ojo:** Es diferente X mayúscula de x minúscula. X es la definición de la variable, y x es el valor (realización de la variable).

Rango

- Es el conjunto de valores asociados a los resultados de la variable aleatoria.
- Si la variable aleatoria es X, se le denota como A_X.

Ejemplo

Tres monedas no cargadas son lanzadas simultáneamente.
¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras? Hallar A_X

Solución: Definamos lo siguiente:

- C representa un resultado equivalente a *Cara*, R representa *Sello*.
- La variable aleatoria es X: número de caras obtenidas.
- El espacio muestral es el siguiente:

$$S = \{CCC, CCR, CRC, CRR, RCC, RCR, RRC, RRR\}$$

Los valores de la variable aleatoria se asocian a eventos:

$$
\begin{aligned}
\{CCC\} &\rightarrow X = 3 \\
\{CCR, CRC, RCC\} &\rightarrow X = 2 \\
\{CRR, RCR, RRC\} &\rightarrow X = 1 \\
\{RRR\} &\rightarrow X = 0
\end{aligned}
$$

El rango de X es: $A_X = \{0, 1, 2, 3\}$

La probabilidad de que salgan dos caras, se escribe matemáticamente así:

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

y se calculó con el concepto clásico ("casos favorables sobre casos posibles").

Ejemplo

Se lanzan dos dados no cargados. Nos interesa indagar por la suma de los resultados de los dados y por el máximo de ambos resultados.

1. Formule las variables aleatorias.
2. Halle el rango de ambas variables aleatorias.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de ambos resultados sea igual a 5?

Solución:

Sean:

$$\begin{aligned} X &: \text{ suma de los resultados en las caras del dado.} \\ Y &: \text{ máximo de ambos resultados.} \end{aligned}$$

- Espacio muestral: $S = \{(1,1),(1,2),...,(2,1),(2,2),...,(6,5),(6,6)\}$.
- El rango de X es: $A_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.
- El rango de Y es: $A_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Solución:

La probabilidad de que la suma de ambos resultados sea igual a 5 la calculamos en varios pasos:

- Casos posibles: $n(S) = 6 \times 6$ (principio multiplicativo).
- Casos favorables: $n(X = 5) = 4$, porque la suma resulta 5 cuando $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\ \}$.
- Entonces:
$$P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Ejemplo

Un grupo de n sujetos es sometido a un tratamiento clínico y después de varios meses se registra cuantos lograron mejorar su salud con dicho tratamiento. Defina la variable aleatoria y su rango.

Solución:

- X : número de sujetos que mejoran con el tratamiento.

- $A_X : \{0, 1, 2, ..., n\}$

Ejemplo

En una gran población se encuestan de manera aleatoria sujetos hasta encontrar el primero que responde afirmativamente a una pregunta de interés. Defina la variable aleatoria y su rango.

Solución:

- X : número de sujetos encuestados hasta encontrar el primero que responde afirmativamente.

- $A_X : \{1, 2, 3, ...\}$

Ejemplo

En un laboratorio que produce jabones, se escoge diariamente uno de ellos al azar y se mide su pH (el pH es una escala de medición de la acidez). Defina la variable aleatoria y su rango.

Solución:

- X : pH del jabón seleccionado.
- A_X : $[0, 14]$ (estos son los límites físicos de esta escala de medición).

Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas .

Una variable aleatoria (v.a) X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (finito o infinito), y estos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con número enteros.

Variables aleatorias continua .

Una v.a X es continua si sus valores consisten en un intervalo o la unión de intervalos de los números reales.

Variables aleatorias discretas

Función de masa de probabilidad

La función de masa de probabilidad de una v.a discreta X definida en el espacio muestral S, es una función matemática que asigna una probabilidad a cada realización x de la variable X. Se define así:

$$p(x) = P(X = x), \quad \forall x \in A_X$$

Propiedades función de masa de probabilidad

La f.m.p satisface las siguientes propiedades:

- $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in A_X.$

- La sumatoria de todas las probabilidades es la unidad:

$$\sum_{x} p(x) = 1$$

- Si $A \subseteq A_X$, entonces:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

Ejemplo

Tres monedas no cargadas son lanzadas simultáneamente. Continuando con el ejemplo inicial, se tiene interés en el número de caras que salen. Tabular la f.m.p.

Solución:

El espacio muestral es el siguiente:

$$S = \{CCC, CCR, CRC, CRR, RCC, RCR, RRC, RRR\}$$

Solución:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Recordemos,

$$\sum_{x=1}^{3} p(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Ejemplo

El experimento consiste en lanzar un dado corriente y escribir el resultado. Defina la v.a y escriba la f.m.p.

Solución:

Sea X el número correspondiente al resultado del dado. Cada uno de los resultados es igualmente posible, entonces, la f.m.p es:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo

Una variable X tiene la siguiente función de probabilidad:

x	1	2	3	4	Total
$P(X=x)$	0.30	C	$C/2$	$C/4$	1

- Hallar el valor de la constante C
- Calcular: $P(X < 2)$, $P(2 < X \leq 4)$, $P(X \leq 3 | X > 1)$