LÓGICA PROPOSICIONAL: ENFOQUE AXIOMÁTICO

SISTEMA FORMAL PROPOSICIONAL $SF_0 = \langle L_0, Ax_0, RT_0 \rangle$

CÁLCULO PROPOSICIONAL $L_0 = \langle Alf_0, RF_0 \rangle$	
ALFABETO Alf_0	
SIGNOS PRIMITIVOS,	
Formas declarativas simples A_p (fórmula atómica, átomo, literal, forma declarativa simple)	$\mathrm{l, m, n, o, p, q, r, s, t, \dots, l_i, m_i, n_i, o_i, p_i, q_i, r_i, s_i, t_i, \dots}$ Los subíndices i son números naturales. Cada elemento del conjunto A_p representaría una *proposición simple*. Los subíndices i son números naturales
Signos de puntuación	Paréntesis: (,)
Conectivos lógicos primarios	$\neg, \vee$
SIGNOS COMPLEMENTARIOS	
Conectivos lógicos secundarios:	$\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

REGLAS DE FORMACIÓN DE FÓRMULAS RF_0

BÁSICAS

Definición de forma declarativa simple

RFP1. Cualquier forma declarativa simple es una fórmula bien formada fbf.

Definición de forma declarativa negada

RFP2. Si R es una fbf, entonces $\neg\mathrm{R}$ es una fbf.

Definición de forma declarativa disyuntiva

RFP3. Si R y S son fbfs, entonces $\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$ es una fbf.

Definición de forma declarativa agrupada

RFP4. Si R es una fbf, entonces (R) también es una fbf

COMPLEMENTARIAS

Definición de forma declarativa conjuntiva

RFP5. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$ se considera bien formada y se define como:

$$\neg(\neg\mathrm{R} \vee \neg\mathrm{S})$$

Definición de forma declarativa condicional

RFP6. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}$ se considera bien formada y se define como:

$$\neg\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$$

Definición de forma declarativa bicondicional

RFP7. Sean R y S fbfs, entonces la fórmula $\mathrm{R} \leftrightarrow S$ se considera bien formada y se define como:

$$(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}) \wedge (\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{R})$$

Definición de forma declarativa disyunción excluyente

RFP8. Una secuencia de símbolos del alfabeto Alf_0 es una fbf del cálculo L_0 si, y sólo si, puede obtenerse de las anteriores reglas de formación.

Conceptos Básicos	
Alcance de los signos de operación lógica	
Alcance de la negación	Un signo de negación, ¬, sólo influye a la fbf que le siga inmediatamente.
Alcance de los signos de operación lógica: conjunción, disyunción, condicional, bicondicional ∧, ∨, →, ↔, ⊕	Cada uno de estos signos tiene por alcance las fbfs **más cercanas** a su izquierda y derecha
Alcance de los paréntesis	Es la fbf que se encuentre entre un paréntesis izquierdo y el primer paréntesis derecho que halle.
Jerarquía entre las operaciones lógicas	
Orden de prioridad **descendente** de izquierda a derecha	¬, ∧, ∨, ⊕, →, ↔
El orden de prioridad se modifica con el uso de los signos de puntuación. Los paréntesis, así, superan en prioridad a cualquier operación lógica.	

AXIOMAS Ax_0	
AP1. Adición	$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$
AP2. Idempotencia	$\mathrm{P} \vee \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}$
AP3. Conmutatividad	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{Q} \vee \mathrm{P}$
AP4. Adición con ∨ a la condicional	$(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{R} \vee \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R} \vee \mathrm{Q})$

Otros conceptos	
Una **prueba** o **deducción axiomática** en SF es:	una *secuencia de fórmulas* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$, tal que cada P_i puede ser: ✓ una fbf de Ax, es decir, un axioma. ✓ una fbf generada en la prueba por la aplicación de reglas de validez de SF sobre algún subconjunto de las fbfs previas $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_{i-1}$. Una prueba $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ es llamada una *prueba de* P_n.
Una fbf P es un *teorema* en SF (P es **consistente** en SF) si:	hay una prueba de P en SF; es decir, si se halla una secuencia de fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ tal que $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$. La representación de la deducción axiomática de un teorema en SF se hace por medio de: $\vdash_{SF} \mathrm{P}$ o $\vdash \mathrm{P}$

Una fbf P es un ***teorema** de, o se deduce necesariamente de,* un conjunto Γ de fbfs, denominado conjunto de *premisas* (al interior de SF), cuando:	existe una secuencia de fbfs $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$, tal que $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$, y cada P_i, puede ser: ✓ una fbf que pertenece al conjunto Γ de premisas. ✓ una fbf de Ax es decir, un axioma. ✓ una fbf generada en la prueba por la aplicación de reglas de validez de SF sobre algún subconjunto de las fbfs previas $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{i-1}$. La representación de la deducción axiomática de un teorema se hace por medio de: $\Gamma \vdash_{SF} \mathrm{P}$ o $\Gamma \vdash \mathrm{P}$ Si Γ está vacío, entonces P es un teorema de SF, es decir $\vdash_{SF} \mathrm{P}$.
Teorema de la deducción	Para probar que $\Gamma \vdash \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{T}$, es suficiente considerar a S como un supuesto y desarrollar la demostración $\Gamma, \mathrm{S} \vdash \mathrm{T}$. En términos prácticos: a) agregue a la *prueba original,* en construcción, una fbf S (el supuesto), b) empléela en alguna subsecuencia de fbfs y de ellas derive una fbf T (esta subsecuencia de fbfs puede entenderse como una *prueba interna*) c) agregue a la prueba original la fbf $\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{T}$ d) **ignore** todo lo realizado en la prueba interna, (ello incluye a las fbfs S y T)
Una fbf P es **inconsistente** en SF cuando:	de ella podría inferirse una forma declarativa contradictoria (por ejemplo, del tipo $\mathrm{S} \wedge \neg \mathrm{S}$).
Un conjunto de fbfs $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ son ***Inconsistentes* entre sí** cuando:	de ellas podría inferirse una forma declarativa contradictoria (por ejemplo, $\mathrm{S} \wedge \neg \mathrm{S}$)

REGLAS DE VALIDÉS, O DE INFERENCIA RT_0 (ARGUMENTOS DEDUCTIVOS VÀLIDOS)	
BÁSICOS	
Modus Ponendo Ponens* **(Modus Ponens)**	$P, P \rightarrow Q \vdash Q$
Sustitución	Sean P y Q fbfs equivalentes desde el punto de vista lógico[1]; en medio de una prueba podría suceder que: a) si se identifica la presencia de una de ellas en la prueba, la otra puede agregarse en algún paso de la demostración como una versión equivalente de la primera, o b) si se detecta la presencia de una de ellas, sea P o sea Q, como parte de una fbf más compleja R; se añade a la argumentación una fbf S que resulta al reemplazar en R, una por la otra.
DEDUCIBLES	
Adición* **Teorema TP1**	$P \vdash P \vee Q$
Idempotencia de la disyunción* **Teorema TP2**	$\vdash P \vee P \leftrightarrow P$
Conmutatividad de la disyunción* **Teorema TP3**	$\vdash P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
Adición con ∨ a la condicional **Teorema TP4a** **Teorema TP4b** **Teorema TP4c** **Teorema TP4d**	$P \rightarrow Q \vdash R \vee P \rightarrow R \vee Q$ $P \rightarrow Q \vdash R \vee P \rightarrow Q \vee R$ $P \rightarrow Q \vdash P \vee R \rightarrow Q \vee R$ $P \rightarrow Q \vdash P \vee R \rightarrow R \vee Q$
Modus Tollendo Ponens * **(Silogismo disyuntivo)** **Teorema TP5a**	$\neg P, P \vee Q \vdash Q$
Resolución* **Teorema TP5b**	$\neg P \vee Q, P \vee R \vdash Q \vee R$
Modus Tollendo Tollens* **(Modus Tollens)** **Teorema TP6**	$\neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg P$
Leyes de condicional **Teorema TP7a** **Teorema TP7b**	$Q \vdash P \rightarrow Q$ $\neg P \vdash P \rightarrow Q$
Silogismo hipotético* **Teorema TP8**	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$
Medio excluido	

[1] Sea mediante una definición, sea a través de una demostración formal previa.

Teorema TP9	$\vdash \neg P \vee P$
Teorema TP10	$\neg Q \wedge Q \vdash P$
Doble negación* **Teorema TP11**	$\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$
Ley del contra-recíproco* **Teorema TP12**	$\vdash (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
Teorema TP13	$\vdash P \vee Q \leftrightarrow (\neg P \to Q)$
Teorema TP14	$\vdash \neg(P \to Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$
Propiedades de la conjunción* **Teorema TP15a (Simplificación)** **Teorema TP15b (Adjunción)**	$P \wedge Q \vdash P$ $P, Q \vdash P \wedge Q$
Idempotencia de la conjunción* **Teorema TP16**	$\vdash P \wedge P \leftrightarrow P$
Conmutatividad de la conjunción* **Teorema TP17**	$\vdash P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$
Ley de reducción al absurdo **Teorema TP18**	$\neg P \to R \wedge \neg R \vdash P$
Adición de condicionales con ∨ **Teorema TP19**	$P \to Q, R \to S \vdash P \vee R \to Q \vee S$
Adición de condicionales con ∧ **Teorema TP20**	$P \to Q, R \to S \vdash P \wedge R \to Q \wedge S$
Dilema constructivo* **Teorema TP21**	$P \vee Q, P \to R, Q \to T \vdash R \vee T$
Adición con ∧ a la condicional **Teorema TP22a** **Teorema TP22b** **Teorema TP22c** **Teorema TP22d**	$P \to Q \vdash P \wedge R \to Q \wedge R$ $P \to Q \vdash P \wedge R \to R \wedge Q$ $P \to Q \vdash R \wedge P \to R \wedge Q$ $P \to Q \vdash R \wedge P \to Q \wedge R$
Ley asociativa de la disyunción* **Teorema TP23a**	$\vdash (P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
Ley asociativa de la conjunción* **Teorema TP23b**	$\vdash (P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Ley distributiva de la conjunción respecto de la disyunción* **Teorema TP24a**	$\vdash P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Ley distributiva de la disyunción respecto de la conjunción* **Teorema TP24b**	$\vdash P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Ley de DeMorgan sobre la disyunción*	$\vdash \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

Teorema TP25a	
Ley de DeMorgan sobre la conjunción **Teorema TP25b**	$\vdash \neg(P \land Q) \leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$
OTROS ARGUMENTOS VÀLIDOS DEDUCIBLES	
Conmutatividad de la bi-condicional **Teorema TP26a**	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$
Teorema TP26b	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
Teorema TP26c*	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)\big)$
Teorema TP27a **Teorema TP27b** **Teorema TP27c**	$\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$ $\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$ $\vdash (P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$
Teorema TP28a	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((R \to P) \leftrightarrow (R \to Q)\big)$
Teorema TP28b	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \to R) \leftrightarrow (Q \to R)\big)$
Teorema TP28c	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \big((P \leftrightarrow R) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)\big)$
Teorema TP29a	$\vdash (P \to Q) \land (R \to Q) \leftrightarrow (P \lor R \to Q)$
Teorema TTP29b	$\vdash (P \to Q) \land (P \to R) \leftrightarrow (P \to Q \land R)$
Teorema TP30	$\vdash (P \to Q \lor R) \leftrightarrow (P \land \neg Q \to R)$
Teorema TP31	$P \to Q \vdash \big((Q \to R) \to (P \to R)\big)$
Teorema TP32	$P \vdash (Q \to P \land Q)$
Teorema TP33*	$\vdash \big(P \to (Q \to R)\big) \leftrightarrow (P \land Q \to R)$
Teorema TP33b	$\vdash \big(P \to (Q \to R)\big) \leftrightarrow \big(Q \to (P \to R)\big)$
Teorema TP33c	$\vdash \big(P \to (P \to R)\big) \leftrightarrow (P \to R)$
Teorema TP33d	$\vdash P \to (R \to P)$
Ley de absorción **Teorema TP34a**	$\vdash P \leftrightarrow P \land (P \lor Q)$
Ley de absorción **Teorema TP34b**	$\vdash P \leftrightarrow P \lor (P \land Q)$
Ley del medio excluido2 **Teorema TP35**	$\vdash \neg P \lor P \leftrightarrow \neg(\neg P \land P)$
O excluyente **Teorema TP36a**	$\vdash (P \lor Q) \land \neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$
O excluyente **Teorema TP36b**	$\vdash (P \lor Q) \land \neg(P \land Q) \leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$

* Aparecen en Texto Copi & Cohen