RETÍCULA

Es toda relación de orden $(L, \leq)$ que cumple: *cualquier subconjunto* S *de* L posee *mcs y MCI.* Formalmente, sea S cualquier subconjunto de L:

L es retícula si, y sólo, *mcs de* $S \in L$ y *MCI de* $S \in L$

Se le llama **sub-retícula** a cualquier subconjunto S de L en el que, a su vez, "cualquier subconjunto de elementos T de S encuentran su *mcs y su MCI al interior del subconjunto* S.	Sea $S \subseteq L, T \subseteq S$ y $l =$ MCI de T y $u =$ mcs de T: S es una subretícula sii $u \in S$ y $l \in S$ Nota: • `No todo subconjunto S de L se convierte automáticamente en sub-retícula`

PROPIEDADES

Una retícula, por ser una relación de orden, hereda todas sus propiedades; es decir:

Sean a, b y c elementos cualesquiera de L, entonces:

RO1. Reflexiva: $a \leq a$

RO2. Anti-simétrica: $a \leq b \wedge a \leq b \rightarrow a = b$

RO3. Transitiva: $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$

En el desarrollo de la teoría de retículos, son de especial interés los subconjuntos binarios que puedan conformarse en L, es decir, los subconjuntos S de L, tal que $|S| = 2$. Sean, por tanto, a y b dos elementos cualesquiera de L, la m.c.s del subconjunto binario $\{a, b\}$ se representará como $a + b$; y su M.C.I como: $a \cdot b$.

PROPIEDADES DEDUCIBLES DE LAS RETÍCULAS

Sea $(L, \leq)$ una retícula, y sean a, b, c y d elementos cualesquiera de L

Lat2	$a \leq a + b$
Lat3	$ab \leq a$
Lat4	$a \leq b \rightarrow a \leq b + c$
Lat5	$(a \leq c) \wedge (b \leq c) \leftrightarrow a + b \leq c$
Lat6	$(c \leq a) \wedge (c \leq b) \leftrightarrow c \leq ab$
Lat7a	$a \leq b \leftrightarrow a + b = b$
Lat7b	$a \leq b \leftrightarrow ab = a$
Lat7c	$ab = a \leftrightarrow a + b = b$
Lat8a	$a + a = a$
Lat8b	$aa = a$
Lat9a	$a + b = b + a$
Lat9b	$ab = ba$
Lat10a	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
Lat10b	$a(bc) = (ab)c = abc$
Lat11a	$a \leq b \rightarrow (a + c \leq b + c)$
Lat11b	$a \leq b \rightarrow (ac \leq bc)$
Lat12a (absorción)	$a + ab = a$

Lat12b (absorción)	$a(a+b)=a$
Lat13a	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \rightarrow (a+c \leq b+d)$
Lat13b	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \rightarrow (ac \leq bd)$
CARACTERÍSTICAS ASIGNABLES A ALGUNAS RETÍCULAS Sea $(L, \preccurlyeq)$ una retícula y sean a, b, c elementos cualesquiera de L	
Acotada Cuando la retícula posee tanto elemento máximo como elemento mínimo	$\forall x(a \leq x) \wedge \forall x(x \leq b)$ a sería elemento mínimo de L respecto de la relación $\preccurlyeq$. Nota: El símbolo más frecuentemente empleado para representar el elemento mínimo de cualquier retícula (si lo posee) es el 0. b sería elemento máximo de L respecto de la relación $\preccurlyeq$. Nota: El símbolo más frecuentemente empleado para representar el elemento máximo de cualquier retícula (si lo posee) es el 1.
Complemento de un elemento En una retícula acotada, dos elementos *son complemento uno de otro* cuando *su mcs es el elemento máximo de la retícula, y su MCI es el elemento mínimo de la retícula*	a es *elemento complemento* de b (y viceversa) si, y sólo si, $(a+b=1) \wedge (a \cdot b=0)$ Notas: • No se obliga a que todo elemento de L posea complemento. • Es posible que un elemento tenga más de un complemento. • Cuando cada elemento de L posee complemento a la retícula se la denomina *complementada*
Complementada *Cuando a cada elemento de la retícula se le halla al menos un elemento que es su complemento*	L es una retícula complementada, sii $\forall x \exists y(x+y=1 \wedge xy=0)$
Distributiva *Cuando toda terna de elementos de la retícula cumple las dos igualdades* siguientes:	L es una retícula distributiva, sii, $a+bc=(a+b)(a+c)$ $a(b+c)=ab+ac$
Lat_14 *En una retícula distributiva y complementada todo elemento tiene un único complemento.*	