Técnicas de conteo

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

En algunos experimentos no es fácil enumerar todos los posibles resultados de éste. Se hace necesario entonces proponer métodos que permitan el conteo de dichos resultados.

Principio Aditivo

Principio aditivo

Si en general,

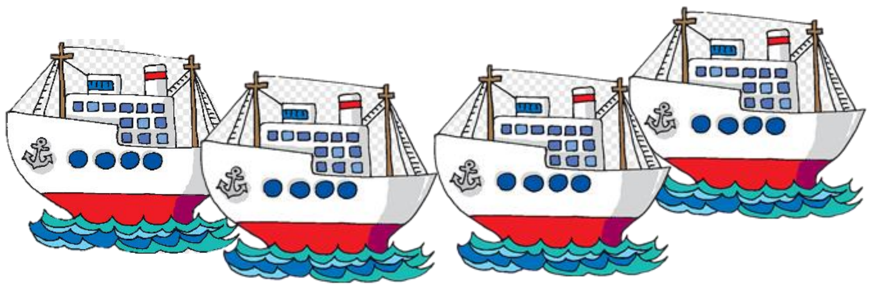
- tienen k operaciones que se pueden hacer de $m_1, m_2, \dots, m_k$ maneras distintas.
- Las alternativas varían de acuerdo con el camino elegido.

El número total de formas en que pueden realizarse las k operaciones en conjunto es:

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

Ejemplo

¿De cuántas formas se puede cruzar un río, sabiendo que se dispone de 3 botes y 4 barcos?



Principio Multiplicativo

Principio multiplicativo

Si en general,

- tienen k operaciones que se pueden hacer de $m_1, m_2, \ldots, m_k$ maneras distintas.
- Los pasos se pueden realizar en sucesión, uno tras otro.
- Las alternativas son las mismas en todos los pasos.

El número total de formas en que pueden realizarse las k operaciones en conjunto es:

$$n = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$$

Ejemplo

¿De cuántas formas se puede vestir una persona que tiene 3 pantalones y 3 camisas?

Ejemplo

En una operación de manufactura se produce una pieza con operaciones de maquinado, pulido y pintado. Existen tres herramientas para maquinado, cuatro para pulido y tres para el pintado. ¿Cuantas rutas distintas (maquinado - pulido - pintura) son posibles para fabricar una pieza?

Ejemplo

La placa de un carro esta formada por 3 letras y tres dígitos ¿Cuántas placas se pueden generar con esta regla?

Ejemplo

Una persona desea comprar una lavadora de ropa, para lo cuál ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática, mientras que la lavadora de la marca E, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora de la marca GE, se presenta en solo un tipo de carga, que es de 11 kilogramos, dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿Cuántas maneras tiene esta persona de comprar una lavadora?

Permutación

Permutación

Una permutación es un arreglo ordenado de r objetos, seleccionados de un grupo de n objetos ($r \leq n$); de tal manera que el orden interesa (los elementos son distinguibles).

Dependiendo del tipo de selección que realicemos, se pueden presentar las siguientes posibilidades:

Permutación con repetición

Considere:

- Los n objetos son distintos.
- Se permite la repetición al seleccionar r de ellos
- El orden importa (objetos distinguibles).

El número de arreglos ordenados de r objetos, seleccionados entre n objetos, es:

$$\# \text{ de arreglos} = n^r$$

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar si se permiten dígitos repetidos?

Ejemplo

Se quiere conocer el número de formas como pueden ser rifados 5 regalos entre nueve personas, si cada persona puede participar en las 5 rifas.

Permutación sin repetición I

Considere:

- Los n objetos son distintos
- Una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo (sin repetición)
- El orden importa (objetos distinguibles).

El número de arreglos posibles utilizanto **todos** los n objetos está dado por:

$$P(n) = n!$$

Notación factorial

Definición: Factorial

El factorial de un número entero positivo n se denota por $n!$ y se define como el producto de los primeros n enteros:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

El factorial de cero se define como: $0! = 1$

El símbolo $n!$ se lee "n factorial". Por ejemplo $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. En general tenemos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden construir con los números 4,5,6 sin repetirlos?

Permutación sin repetición II

Considere:

- Los n objetos son distintos
- Una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo (sin repetición)
- El orden importa (objetos distinguibles).

El número de arreglos de n objetos tomados de a r está dado por:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo

Recuerde las bolas de billar *pool*, las cuales estan enumeradas y con colores diferentes, de tal manera que cada bola es identificable.

¿De cuántas formas se pueden ordenar 3 de las 16 bolas?

Ejemplo

¿De cuántas maneras pueden dos personas cumplir años en fechas distintas? Suponga que en todos los años hay 365 días.

Combinaciones

Combinación

Considere:

1. n objetos diferentes.
2. Una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo (sin repetición)
3. El no orden importa (objetos indistinguibles).

El número de arreglos de n objetos utilizando $r \leq n$ de ellos es:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La notación $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$ representa el número de combinaciones de n objetos distintos utilizando r de ellos.

Ejemplo

La junta directiva de un sindicato compuesta por 6 miembros, debe nombrar una comisión compuesta por 3 de ellos para estudiar una propuesta que se quiere pasar a la presidencia de la compañia,relacionada con modificaciones en los turnos actuales.

¿De cuántas formas posibles puede formarse la comisión?

Ejemplo

¿De cuántas maneras se puede formar un comité compuesto por 4 ingenieros y 3 arquitectos, si se cuenta con 8 ingenieros y 6 arquitectos elegibles para formar parte de él?

Permutaciones vs Combinaciones

Permutaciones vs combinaciones

En permutaciones importa el orden, mientras que en combinaciones no.

Considere 10 competidores de atletismo

¿De cuántas maneras se pueden ganar las medallas de oro, plata y bronce?

¿Cuántos tríos de competidores se pueden ubicar en el podio?

En permutaciones importa el orden, mientras que en combinaciones no.

Considere 10 competidores de atletismo

¿De cuántas maneras se pueden ganar las medallas de oro, plata y bronce?

$$P(10, 3) = 720$$

El orden importa, por el significado que tiene el metal (color) de cada medalla.

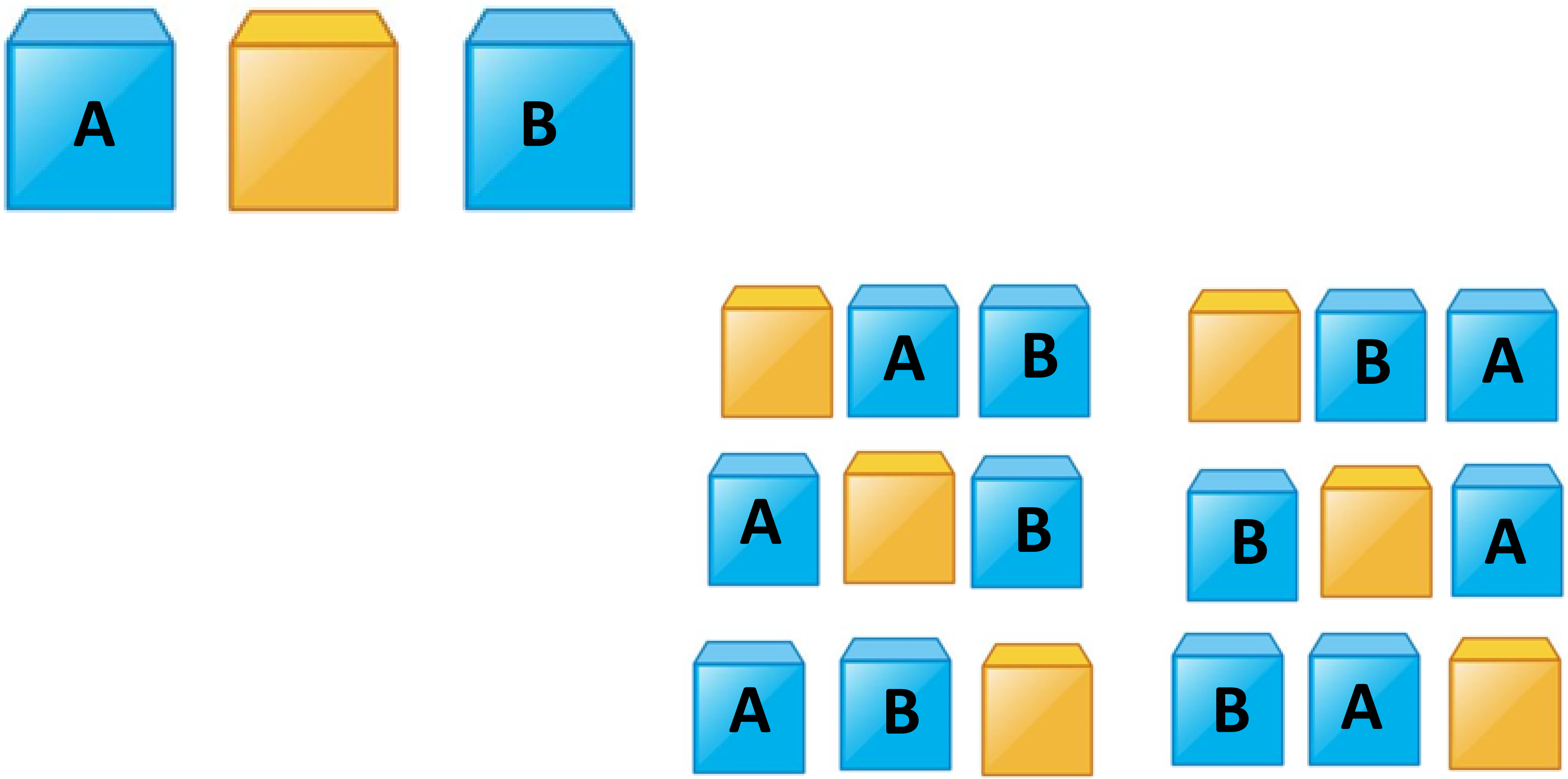
¿Cuántos tríos de competidores se pueden ubicar en el podio?

$$C(10, 3) = 120$$

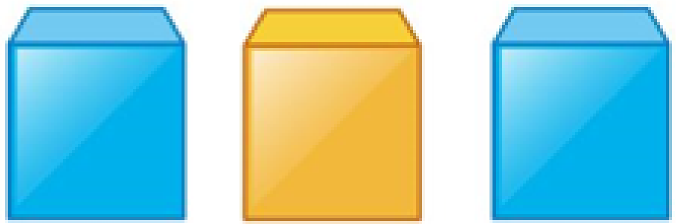
Se quieren contar los trios, pero no se distingue la identidad de los corredores que lo forman.

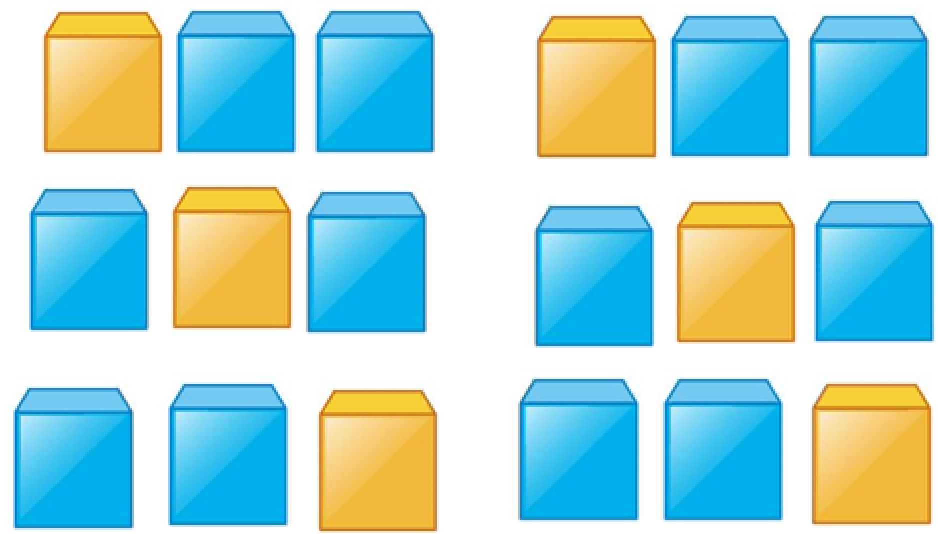
Permutaciones con objetos indistinguibles

Permutaciones con objetos indistinguibles



Permutaciones con objetos indistinguibles





Permutaciones con objetos indistinguibles

- En ocasiones hay interés en permutar ciertos objetos de los cuales hay algunos que, si bien son diferentes objetivamente hablando, para fines prácticos son considerados como si fuesen iguales e idénticos.

- Este tipo de objetos se denominan objetos indistinguibles.

- Dentro de cada grupo, los objetos NO se diferencian.

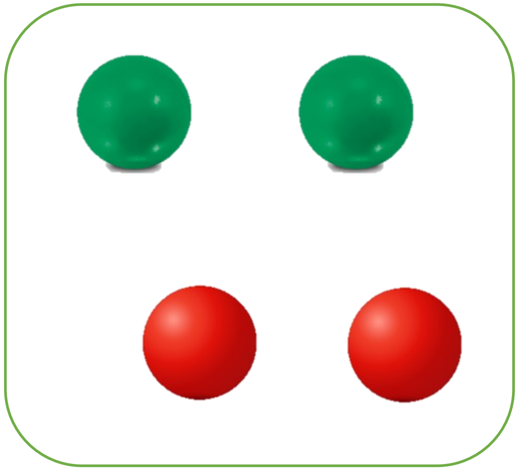
- El número de permutaciones posibles de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, $\ldots, n_k$ son de un $k-$ésimo tipo, está dada por:

$$\# \text{ de arreglos} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes pueden extraerse dos bolas verdes y dos bolas rojas plásticas de una bolsa?



Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes pueden extraerse dos bolas verdes y dos bolas rojas plásticas de una bolsa?