

**Teorema P1** (Adición)  $P \vdash P \vee Q$

1.  $P \rightarrow P \vee Q$  AP1 (Axioma de adición)
2.  $P$  Premisa
3.  $P \vee Q$  MP (Modus Ponens) entre 1 y 2

**Teorema P2** (Ley de Idempotencia de la disyunción)  $\vdash P \vee P \leftrightarrow P$

$\vdash P \vee P \rightarrow P$

1.  $P \vee P \rightarrow P$  AP2 (Axioma de idempotencia).

$\vdash P \rightarrow P \vee P$

- 1a.  $P \rightarrow P \vee P$  AP1 (Axioma de adición)

**Teorema P3** (Ley de la conmutatividad de la disyunción)  $\vdash P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$

$\vdash P \vee Q \rightarrow Q \vee P$

1.  $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$  AP3 (Axioma de conmutatividad de la disyunción)

$\vdash Q \vee P \rightarrow P \vee Q$

- 1a.  $Q \vee P \rightarrow P \vee Q$  AP3 (Axioma de conmutatividad de la disyunción)

**Teorema P4a** (Adición con  $\vee$  a la condicional)  $P \rightarrow Q \vdash R \vee P \rightarrow R \vee Q$

1.  $P \rightarrow Q$  Premisa.
2.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee P \rightarrow R \vee Q)$  AP4 (Axioma de adición a la condicional)
3.  $R \vee P \rightarrow R \vee Q$  MP (Modus ponens) entre 1 y 2.

**Teorema P4b**  $P \rightarrow Q \vdash R \vee P \rightarrow Q \vee R$

1.  $P \rightarrow Q$  Premisa.
2.  $R \vee P \rightarrow R \vee Q$  TP4a en 1.
3.  $R \vee P \rightarrow Q \vee R$  Sustitución en consecuente de 2: TP3 (Conmutatividad de la disyunción)

Teorema P4c  $P \rightarrow Q \vdash P \vee R \rightarrow Q \vee R$

---

<sup>1</sup> y sus conmutaciones; ver Teoremas: P4b – P4d.

**Teorema P4d**  $P \rightarrow Q \vdash P \vee R \rightarrow R \vee Q$

**Teorema P5** (Silogismo Disyuntivo)  $\neg P, P \vee Q \vdash Q$

1.  $P \vee Q$  Premisa
2.  $\neg P$  Premisa
3.  $\neg P \vee Q$  TP1 (Adición) en 2
4.  $P \rightarrow Q$  Sustitución de 3: RFP6 (equivalencia lógica: definición de condicional).
5.  $P \vee Q \rightarrow Q \vee Q$  TP4c (Adición con  $\vee$ ) en 4.
6.  $Q \vee Q$  MP (Modus Ponens) entre 5 y 1.
7.  $Q$  Sustitución de 6: TP2 (Idempotencia de disyunción)

**Teorema P5a** (Resolución)  $\neg P \vee R, P \vee Q \vdash R \vee Q$

**Teorema P6** (Modus Tollens)  $\neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg P$

**Teorema P7a** (Construcción de condicionales, o leyes de implicación)  $Q \vdash P \rightarrow Q$

1.  $Q$  Premisa
2.  $Q \vee \neg P$  TP1 (Adición) en 1.
3.  $\neg P \vee Q$  Sustitución de 2: TP3 (conmutatividad de la disyunción).
4.  $P \rightarrow Q$  Sustitución de 3: RFP6 (equivalencia lógica: definición de condicional).

**Teorema P7b**  $\neg P \vdash P \rightarrow Q$

**Teorema P8** (Silogismo hipotético)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

**Teorema P9** (Medio excluido)  $\vdash \neg P \vee P$

1.  $P \rightarrow P \vee P$  AP1 (Axioma de adición)
2.  $P \vee P \rightarrow P$  AP2 (Axioma de idempotencia)
3.  $P \rightarrow P$  TP8 (Silogismo hipotético) entre 1 y 2

---

<sup>2</sup> La proposición que aparecería en el consecuente lo determinaría a su conveniencia

4.  $\neg P \vee P$                       Sustitución de 3: RFP6 (definición de condicional)

**Teorema P10**                                       $\neg Q \wedge Q \vdash P$

1.  $\neg Q \wedge Q$                       Premisa
2.  $\neg(\neg\neg Q \vee \neg Q)$       Sustitución de 1: RFP5 (equivalencia lógica: definición de conjunción)
3.  $\neg\neg Q \vee \neg Q \rightarrow P$       TP7b (Ley de implicación) con 2
4.  $\neg\neg Q \vee \neg Q$               TP9 (Ley del medio excluido)
5.  $P$                                   MP (Modus Ponens) entre 3 y 4

**Teorema P11** (Ley de la doble negación)                       $\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$

Teorema P11a

$\vdash P \rightarrow \neg\neg P$

Teorema P11b

$\vdash \neg\neg P \rightarrow P$

**Teorema P12** (Ley de la Contra-recíproca)                       $\vdash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Teorema P12a       $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Teorema P12b       $\vdash (\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

**Teorema P13**                                       $\vdash P \vee Q \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$\vdash P \vee Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$\vdash (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \vee Q$

**Teorema P14**                                       $\vdash \neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$

$\vdash \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P \wedge \neg Q$

1.  $\neg(P \rightarrow Q)$                       Supuesto

- 2.  $\neg(\neg P \vee Q)$       Sustitución en 1: RFP6 (definición de condicional) en fbf interna a los signos de agrupación
- 3.  $\neg(\neg P \vee \neg\neg Q)$       Sustitución en 2: TP11 (Ley de la doble negación)
- 4.  $P \wedge \neg Q$       Sustitución de 3: RFP5 (definición de conjunción)
- 5.  $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P \wedge \neg Q$       TdD (Teorema de la Deducción) entre 1 y 4

*Se puede omitir la demostración en el sentido recíproco debido a que la fbf 4 se obtuvo mediante sustituciones sucesivas desde el supuesto.*

$\vdash P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

- 1.  $P \wedge \neg Q$       Supuesto
- 2.  $\neg(\neg P \vee \neg\neg Q)$       Sustitución en 1: RFP5 (definición de conjunción)
- 3.  $\neg(P \rightarrow \neg\neg Q)$       Sustitución en 2: RFP6 (definición de condicional) en fbf interna a los signos de agrupación
- 4.  $\neg(P \rightarrow Q)$       Sustitución en 3: TP11 (Ley de la doble negación)
- 5.  $P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$       TdD entre 1 y 4

**Teorema P15a** (Propiedad de la conjunción)       $P \wedge Q \vdash P$

- 1.  $P \wedge Q$       Premisa
- 2.  $\neg P \rightarrow \neg P \vee \neg Q$       AP1 (Axioma de adición)
- 3.  $\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg P$       Sustitución de 2: TP12 (Ley de la contra-recíproca)
- 4.  $\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow P$       Sustitución en consecuente de 3: TP11 (Ley de la doble negación)
- 5.  $P \wedge Q \rightarrow P$       Sustitución en antecedente de 4: RFP5 (definición de conjunción)
- 6.  $P$       MP (Modus Ponens) entre 1 y 5

**Teorema P15b**       $P, Q \vdash P \wedge Q$

**Teorema P16** (Ley de idempotencia de la conjunción)       $\vdash P \wedge P \leftrightarrow P$

**Teorema P17** (Ley de conmutatividad de la conjunción)       $\vdash P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

**Teorema P18** (Reducción al Absurdo)  $\neg P \rightarrow R \wedge \neg R \vdash P$

1.  $\neg P \rightarrow R \wedge \neg R$  Premisa
2.  $\neg(R \wedge \neg R) \rightarrow \neg\neg P$  Sustitución de 1: TP12 (Ley de la contra-recíproca)
3.  $\neg\neg(\neg R \vee \neg\neg R) \rightarrow \neg\neg P$  Sustitución en antecedente 2: RFP5 (definición de conjunción)
4.  $\neg R \vee R \rightarrow P$  Sustituciones en 3: triple aplicación de TP11 (Ley de doble negación)
5.  $\neg R \vee R$  TP9 (ley del medio excluido)
6.  $P$  MP (Modus Ponens) entre 5 y 4

**Teorema P19** (Adición de condicionales con  $\vee$ )  $P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vdash P \vee R \rightarrow Q \vee S$

1.  $P \rightarrow Q$  Premisa.
2.  $R \rightarrow S$  Premisa.
3.  $P \vee R \rightarrow Q \vee R$  TP4c (adición con  $\vee$  a la condicional) en 1.
4.  $Q \vee R \rightarrow Q \vee S$  TP4a (adición con  $\vee$  a la condicional) en 2.
5.  $P \vee R \rightarrow Q \vee S$  TP8 (silogismo hipotético) entre 3 y 4.

**Teorema P20** (Adición de condicionales con  $\wedge$ )  $P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vdash P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$

**Teorema P21** (Dilema Constructivo)  $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow T \vdash R \vee T$

1.  $P \vee Q$  Premisa
2.  $P \rightarrow R$  Premisa
3.  $Q \rightarrow T$  Premisa
4.  $P \vee Q \rightarrow R \vee T$  TP19 (adición disyuntiva de condicionales) con 1 y 2
5.  $R \vee T$  MP (Modus Ponens) entre 1 y 4.

**Teorema P22a** (Adición con  $\wedge$  a la condicional)  $P \rightarrow Q \vdash P \wedge R \rightarrow Q \wedge R$

1.  $P \rightarrow Q$  Premisa
2.  $\neg Q \rightarrow \neg P$  Sustitución de 1: TP12 (Ley de la contra-recíproca)
3.  $\neg Q \vee \neg R \rightarrow \neg P \vee \neg R$  TP4c (adición con  $\vee$  a la condicional) con 2
4.  $\neg(\neg P \vee \neg R) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg R)$  Sustitución de 3: TP12 (Ley de la contra-recíproca)
5.  $P \wedge R \rightarrow Q \wedge R$  Sustituciones en antecedente y consecuente de 4: RFP5 (definición de conjunción).

Teorema P22b  $P \rightarrow Q \vdash P \wedge R \rightarrow R \wedge Q$

Teorema P22c  $P \rightarrow Q \vdash R \wedge P \rightarrow R \wedge Q$

Teorema P22d  $P \rightarrow Q \vdash R \wedge P \rightarrow Q \wedge R$

Otro conjunto de reglas de inferencia deducibles se expone a continuación; observe que estas reglas de inferencia hacen alusión a bi-condicionales lógicas; es decir, a fbfs lógicamente equivalentes.

**Teorema P23a** (Ley asociativa de la disyunción)  $\vdash (Q \vee P) \vee R \leftrightarrow Q \vee (P \vee R)$

$\vdash Q \vee (P \vee R) \rightarrow (Q \vee P) \vee R$

1.  $Q \rightarrow Q \vee P$  AP1 (Axioma de adición)
2.  $Q \vee P \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  AP1 (Axioma de adición)
3.  $Q \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  TP8 (silogismo hipotético) entre 1 y 2
4.  $P \rightarrow P \vee Q$  AP1 (Axioma de adición)
5.  $P \rightarrow Q \vee P$  Sustitución en consecuente de 4: TP3 (conmutatividad)
6.  $P \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  TP8 (silogismo hipotético) entre 5 y 2
7.  $R \rightarrow R \vee (Q \vee P)$  AP1 (Axioma de adición)
8.  $R \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  Sustitución en consecuente de 7: TP3 (conmutatividad)
9.  $P \vee R \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  Adición de condicionales 6 y 8 con  $\vee$ ; sustitución: TP2 (idempotencia) en el consecuente resultante.

---

<sup>3</sup> Y la de las distintas conmutaciones de la conjunción, ver Teoremas: P22b - P22d.

10.  $Q \vee (P \vee R) \rightarrow (Q \vee P) \vee R$  Adición de condicionales 3 y 9 con  $\vee$ ; sustitución: TP2 (idempotencia) en el consecuente resultante.

$\vdash (Q \vee P) \vee R \rightarrow Q \vee (P \vee R)$

1a.  $R \rightarrow P \vee R$  AP1 (Axioma de adición), y TP2 (teorema de la conmutatividad de la disyunción) en el consecuente resultante

2a.  $P \vee R \rightarrow Q \vee (P \vee R)$  AP1 (Axioma de adición), y TP2 (teorema de la conmutatividad de la disyunción) en el consecuente resultante

3a.  $R \rightarrow Q \vee (P \vee R)$  TP8 (silogismo hipotético) entre 1a y 2a.

4a.  $P \rightarrow P \vee R$  AP1 (Axioma de adición).

5a.  $Q \vee P \rightarrow Q \vee (P \vee R)$  TP4a (Adición con  $\vee$  con 4a)

6a.  $(Q \vee P) \vee R \rightarrow Q \vee (P \vee R)$  TP19 (adición disyuntiva de condicionales) 5a y 3a; TP2 (idempotencia) en el consecuente resultante.

De 10 y 6a se concluye que  $(Q \vee P) \vee (Q \vee R) \leftrightarrow Q \vee (P \vee R)$  por la definición del bicondicional.

**Teorema P23b** (Ley asociativa de la conjunción)  $\vdash (P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

$\vdash (P \wedge Q) \wedge R \rightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

**Teorema P24a** (Ley distributiva de la conjunción respecto de la disyunción)

$\vdash P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

**Teorema P24b** (Ley distributiva de la disyunción respecto de la conjunción)

$\vdash P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\vdash P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

1.  $Q \rightarrow Q \vee P$  AP1 (Axioma de adición).

2.  $Q \rightarrow P \vee Q$  Sustitución en consecuente de 1: TP3 (conmutatividad de la disyunción)

3.  $R \rightarrow P \vee R$  AP1 (Axioma adición); y TP3 (conmutatividad de la disyunción)

4.  $Q \wedge R \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  TP20 (Adición de condicionales con  $\wedge$ ) entre 2 y 3.
5.  $P \rightarrow P \vee Q$  AP1 (Axioma de adición).
6.  $P \rightarrow P \vee R$  AP1 (Axioma de adición).
7.  $P \wedge P \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  TP20 (Adición de condicionales con  $\wedge$ ) entre 5 y 6
8.  $P \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  Sustitución en antecedente de 7: TP16 (idempotencia de la conjunción).
9.  $P \vee (Q \wedge R)$  Supuesto.
10.  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  TP21 (Dilema constructivo) entre 9, 4 y 8. TP16 (idempotencia de la conjunción) en fbf resultante.
11.  $P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  TdD entre 9 y 10.

$\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow P \vee (Q \wedge R)$

- 1a.  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  Supuesto
- 2a.  $P \vee Q$  TP15a (Propiedad de la conjunción) en 1a.
- 3a.  $P \vee R$  TP15a (Propiedad de la conjunción) en 1a.
- 4a.  $\neg P \rightarrow Q$  Sustitución de 2a: TP13.
- 5a.  $\neg P \rightarrow R$  Sustitución de 3a: TP13.
- 6a.  $\neg P \wedge \neg P \rightarrow Q \wedge R$  TP20 (Adición de condicionales  $\wedge$ ) entre 4a y 5a.
- 7a.  $\neg P \rightarrow Q \wedge R$  Sustitución en antecedente de 6a: TP16 (idempotencia de conjunción).
- 8a.  $P \vee (Q \wedge R)$  Sustitución en 7a: TP13.
- 9a.  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow P \vee (Q \wedge R)$  TdD entre 1a y 8a.

En este punto ya se ha obtenido la segunda condicional buscada. Con base en 11 y 9a, se puede afirmar que:

10a.  $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

**Teorema P25a** (Ley de DeMorgan sobre la disyunción)  $\vdash \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\vdash \neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \vee Q)$



1.  $\neg P \wedge \neg Q$  Supuesto
2.  $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$  Sustitución en 1: RFP5 (definición de conjunción).
3.  $\neg(P \vee Q)$  Sustituciones en fbf interna a los signos de agrupación en 2: doble aplicación de TP11 (doble negación)
4.  $\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \vee Q)$  TdD entre 1 y 3

*Se puede omitir la demostración en el sentido recíproco debido a que la fbf 3 se obtuvo mediante sustituciones sucesivas desde el supuesto; sin embargo, se llevará a cabo:*

$\vdash \neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P \wedge \neg Q$

- 1a.  $\neg(P \vee Q)$  Supuesto
- 2a.  $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$  Sustituciones en fbf interna a los signos de agrupación en 1a: doble aplicación de TP11 (doble negación)
- 3a.  $\neg P \wedge \neg Q$  Sustitución en 2a: RFP5 (definición de conjunción)
- 4a.  $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P \wedge \neg Q$  TdD entre 1a y 3ª

**Teorema P25b** (Ley de DeMorgan sobre la conjunción)

$$\vdash \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

**Teorema P26a** Conmutatividad de la bi-condicionalidad

$$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$$

**Teorema P26b** Conmutatividad de la bi-condicionalidad

$$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$$

**Teorema P26c**

$$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$$

**Teorema P27a** Negación de bi-condicionalidad

$$\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$$

**Teorema P27b** Negación de bi-condicionalidad

$$\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$$

**Teorema P27c**  $\vdash (P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$

**Teorema P28a**  $\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((R \rightarrow P) \leftrightarrow (R \rightarrow Q))$

**Teorema P28b**  $\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow R) \leftrightarrow (Q \rightarrow R))$

**Teorema P28c**  $\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \leftrightarrow R) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R))$

**Teorema P29**  $\vdash (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee R \rightarrow Q)$

**Teorema P29b**  $\vdash (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow Q \wedge R)$

**Teorema P30**  $\vdash (P \rightarrow Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q \rightarrow R)$

**Teorema P31**  $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

**Teorema P32**  $P \vdash Q \rightarrow P \wedge Q$

**Teorema P33**  $\vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \rightarrow R)$

**Teorema TP34a** (Ley de absorción)  $\vdash P \leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$

**Teorema TP34b** (Ley de absorción)  $\vdash P \leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$