Pruebas de hipótesis

Jessica Nathaly Pulzara Mora
jessica.pulzara@udea.edu.co

Departamento de ingeniería de sistemas

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Muchos problemas de ingeniería, ciencia y administración, requieren que se tome una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Está proposición recibe el nombre de **hipótesis**, y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como **prueba de hipótesis**. Este es uno de los aspectos más útiles de la inferencia estadística.

Hipótesis nula y alterna

Como dicha afirmación puede ser o no cierta, dos hipótesis pueden ser planteadas (antagónicas):

$$H_0 : \text{La hipótesis es cierta} \qquad H_1 : \text{La hipótesis es falsa}$$

Ejemplificación hipótesis nula y alterna

Considere un proceso judicial, en el que hay que decidir si el acusado es inocente o culpable:

$$H_0: \text{ el acusado es inocente}$$
$$H_1: \text{ el acusado es culpable}$$

- Un veredicto de *culpable* (rechazar H_0) es una decisión más fuerte que un vredicto de *inocente* (equivocarse al rechazar H_0).

Rechazo de la hipótesis nula

H_0 se rechaza, solo si la evidencia muestral apoya esta determinación fuertemente. En otro caso diremos que la evidencia muestral no es suficiente para rechazar H_0 y se asume como cierta.

Tipos de errores

Considere un proceso judicial, en el que hay que decidir si el acusado es inocente o culpable:

- Es peor condenar a un inocente que dejar ir al culpable.

$$P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Escoger } H_1 | H_0 \text{ es cierta}) = \alpha$$

$$P(\text{Error tipo II}) = P(\text{Escoger } H_0 | H_1 \text{ es cierta}) = \beta$$

- Es mas grave el error tipo I que el error tipo II

Tipos de pruebas de hipótesis

Sea θ un parámetro de interés desconocido, y sea θ_0 un valor particular de θ.

- Prueba de hipótesis a dos colas
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- Prueba de hipótesis a una cola superior
$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

- Prueba de hipótesis a una cola inferior
$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

Criterios para rechazar H_0

Podemos cualquiera de estos dos criterios:

1. Seleccionamos y calculamos el valor de un **estadístico de prueba**. Si su valor queda en la región de rechazo, rechazamos H_0.

2. Usamos el valor **p**. Se define como la proababilidad de que el estadístico de prueba tenga un valor tan extremo o más extremo que el obtenido, si la hipótesis nula es correcta.

$$\text{Valor p} = P(\theta \lesseqgtr \theta_0 | H_0 \text{ es cierta}) \quad \text{(depende del caso)}$$

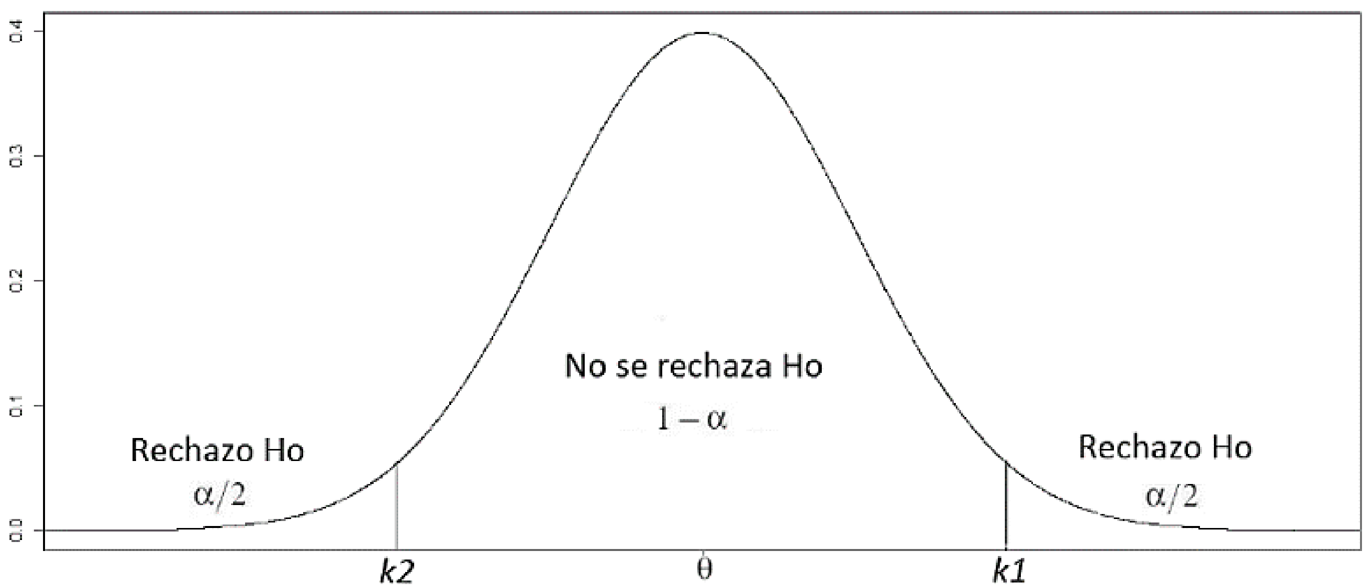
$$\text{Rechazamos } H_0 \text{ si valor p} < \alpha$$

Región crítica

Si $\hat{\theta}$ es un estimador puntual para θ, los valores de $\hat{\theta}$ pueden ser usados para tomar una decisión sobre H_0.

- Prueba de dos colas

$$\{\hat{\theta} : \hat{\theta} \geq k_1 \vee \hat{\theta} \leq k_2\}$$

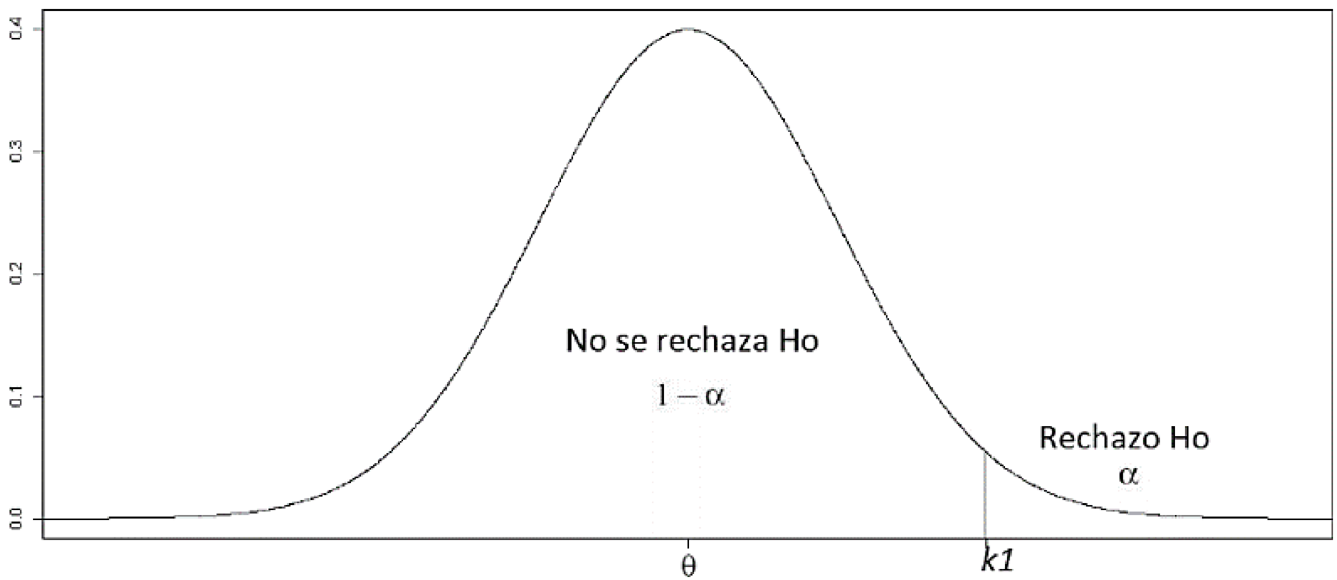


Región crítica

Si $\hat{\theta}$ es un estimador puntual para θ, los valores de $\hat{\theta}$ pueden ser usados para tomar una decisión sobre H_0.

- Cola superior

$$\{\hat{\theta} : \hat{\theta} > k_1\}$$

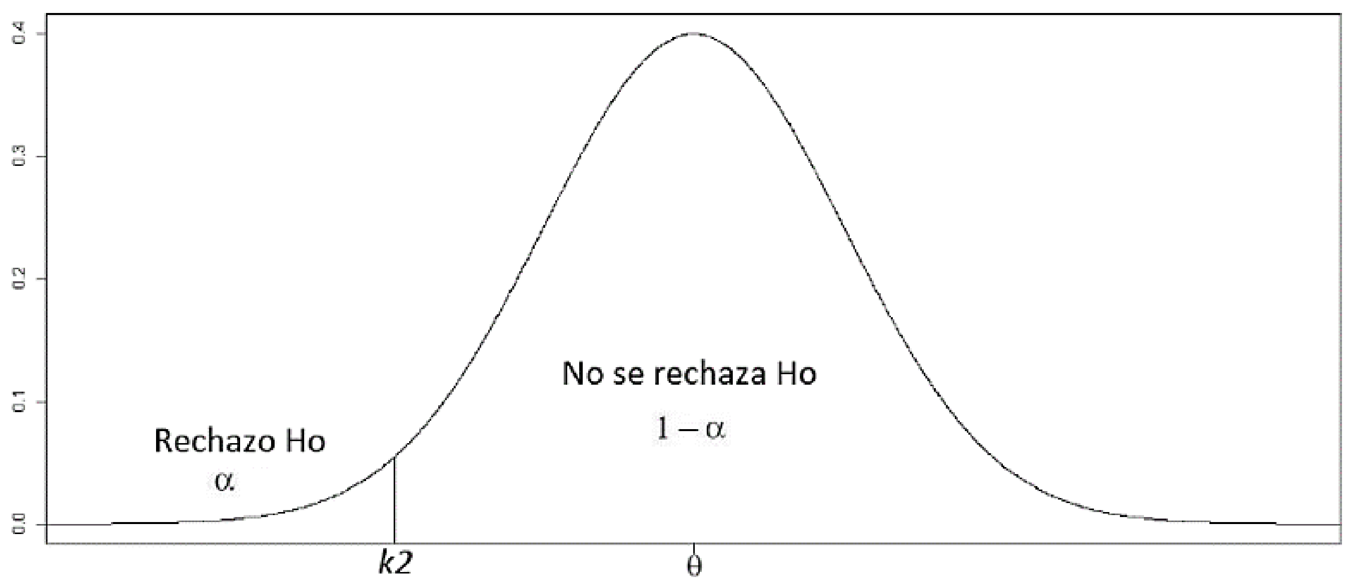


Región crítica

Si $\hat{\theta}$ es un estimador puntual para θ, los valores de $\hat{\theta}$ pueden ser usados para tomar una decisión sobre H_0.

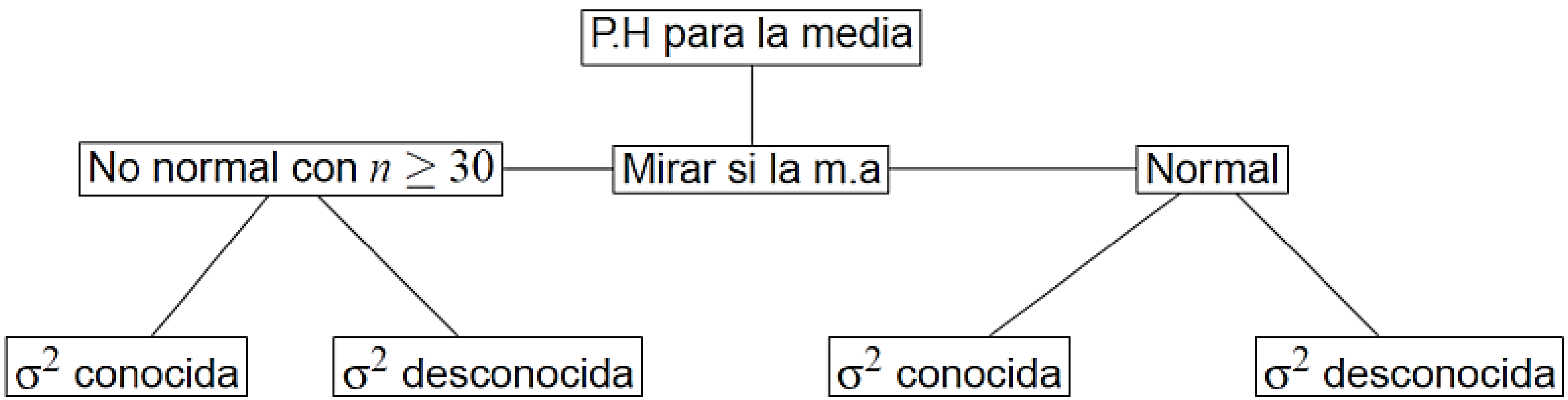
- Cola inferior

$$\{\hat{\theta} : \hat{\theta} < k_2\}$$



Prueba de hipótesis para la media

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_0 : \mu \geq \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$



CASO I: Poblaciones no normales con muestras grandes

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra que viene de una población NO normal, con n grande y σ^2 conocida.

El estadístico de prueba es:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Prueba de dos colas: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : |Z_c| > Z_{\alpha/2}\}$
- Prueba de cola superior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c > Z_\alpha\}$
- Prueba de cola inferior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c < -Z_\alpha\}$

Caso II

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra que viene de una población NO normal, con n grande y σ^2 **desconocida**.

El estadístico de prueba es:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Prueba de dos colas: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : |Z_c| > Z_{\alpha/2}\}$
- Prueba de cola superior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c > Z_\alpha\}$
- Prueba de cola inferior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c < -Z_\alpha\}$

Caso III

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra que viene de una población normal, con n cualquiera y σ^2 conocida.

El estadístico de prueba es:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Prueba de dos colas: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : |Z_c| > Z_{\alpha/2}\}$
- Prueba de cola superior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c > Z_\alpha\}$
- Prueba de cola inferior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c < -Z_\alpha\}$

Valor P

$$V_p = \begin{cases} 2[1-\Phi(|Z_c|)] & \text{Prueba de dos colas: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \\ 1-\Phi(Z_c) & \text{Prueba de cola superior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \\ \Phi(Z_c) & \text{Prueba de cola inferior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Reachazo H_0 si valor p $< \alpha$.

Ejemplo

Un proceso manufacturero usado por una fábrica durante los últimos años da una producción media de 100 unidades por hora con una desviación estándar de 8 unidades.

Se acaba de introducir en el mercado una nueva máquina para manufacturar el mismo producto. Aunque es mucho más cara, si la media de la producción de esta máquina es de más de 150 unidades por hora, su adopción dará bastantes beneficios. Para decidir si se debería comprar la nueva máquina a la gerencia se le suministra una de estas máquinas. Se realiza un experimento durante 35 horas, donde se halló un promedio de 160 unidades por hora,y el fabricante afirma que la desviación estándar del proceso se va a mantener. ¿Qué decisión se debe tomar, asumiendo un nivel de confianza del 99 %?

Ejemplo

La duración promedio de las llantas de un fabricante, según la experiencia, es de 46050 km. Se desea probar si el promedio poblacional ha cambiado; para ello se toma una muestra aleatoria de 60 llantas, con las cuales se realiza un experimento y se obtiene una duración promedio de 45050 km y una desviación estándar de 3070 km.

¿Ha cambiado o no a cambiado el promedio poblacional?

Caso IV

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra que viene de una población normal, con n pequeña y σ^2 **desconocida**.

El estadístico de prueba es:

$$T_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- Prueba de dos colas: Rechazo H_0 cuando $\{T_c : |T_c| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$
- Prueba de cola superior: Rechazo H_0 cuando $\{T_c : T_c > t_{\alpha}(n-1)\}$
- Prueba de cola inferior: Rechazo H_0 cuando $\{T_c : T_c < -t_{\alpha}(n-1)\}$

Valor p

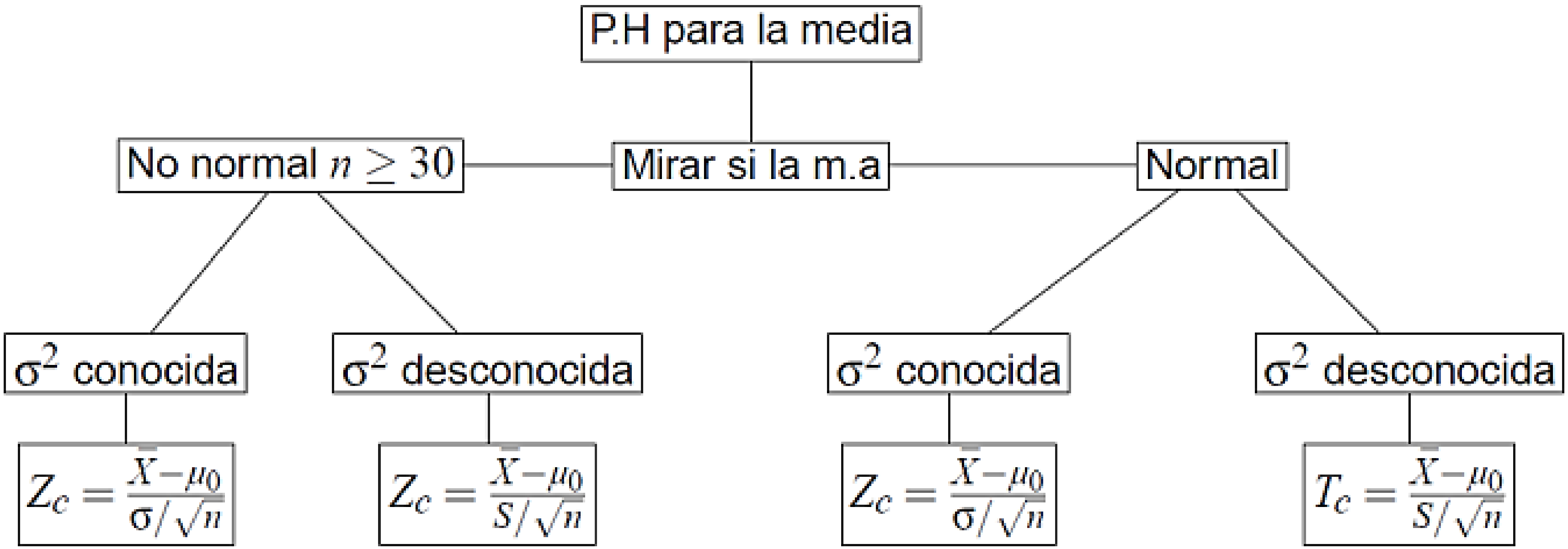
$$V_p = \begin{cases} 2P(T > |T_c|) & \text{Prueba de dos colas: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \\ P(T > T_c) & \text{Prueba de cola superior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \\ P(T < T_c) & \text{Prueba de cola inferior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Reachazo H_0 si valor p $< \alpha$.

Ejemplo

El instituto Edison publica cifras del consumo anual de energía en kilowatt-hora que gastan varios electrodomésticos. Se afirma que una aspiradora, por ejemplo, gasta un promedio de 46 kilowatt-hora al año.

Se realiza un estudio con una muestra aleatoria de 25 hogares, cuyas aspiradoras gastan en promedio 42 kilowatt-hora al año con una desviación estándar de 13.9 kilowatt-hora. Si la población del consumo es normal, ¿se puede afirmar con una significancia del 5 % que las aspiradoras gastan en promedio menos de 46 kilowatt-hora?


P.H para la media
No normal $n \geq 30$
Mirar si la m.a
Normal
σ^2 conocida
σ^2 desconocida
σ^2 conocida
σ^2 desconocida
$Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
$Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$
$Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Prueba de hipótesis para la proporción

$$H_0 : p = p_0 \qquad H_0 : p \leq p_0 \qquad H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

Prueba de hipótesis para la proporción

Sea $X \sim Binom(n, p)$, con n grande .

El estadístico de prueba es:

$$Z_c = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \sim N(0, 1)$$

- Prueba de dos colas: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : |Z_c| > Z_{\alpha/2}\}$
- Prueba de cola superior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c > Z_\alpha\}$
- Prueba de cola inferior: Rechazo H_0 cuando $\{Z_c : Z_c < -Z_\alpha\}$
- Reachazo H_0 si valor p $< \alpha$.

Valor P

$$V_p = \begin{cases} 2[1 - \Phi(|Z_c|)] & \text{Prueba de dos colas: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \\ 1 - \Phi(Z_c) & \text{Prueba de cola superior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \\ \Phi(Z_c) & \text{Prueba de cola inferior: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Reachazo H_0 si valor p $< \alpha$.

Ejemplo

En una gran ciudad se quiere saber si los jóvenes de 12 a 19 años tienen problemas de sobrepeso en la misma proporción que los jóvenes a nivel nacional en el mismo rango etáreo. De los datos nacionales se sabe que el 35 % de los jóvenes de esas edades tiene sobrepeso u obesidad. Se ha tomado una muestra de 300 jóvenes en ese rango de edad y 90 de ellos tienen sobrepeso.
¿Qué puede concluir con un 93 % de confianza?