**Teorema TC1a** $\vdash \forall x \text{P} \leftrightarrow \text{P}$

Donde P es una fbf libre de $x$.

$\vdash \forall x \text{P} \rightarrow \text{P}$

1 $\forall x$P Supuesto

2 P E.U. de 1: la particularización no resulta en cambio alguno en la fbf P, pues ésta es libre de la variable x.

3 $\forall x \text{P} \rightarrow \text{P}$ Teorema de la deducción (TdD) entre 1 y 3

$\vdash \text{P} \rightarrow \forall x \text{P}$

1a P Supuesto

2a $\forall x$P G.U. de 1a. No se infringen las restricciones para realizar la G.U.

3a $\text{P} \rightarrow \forall x \text{P}$ TdD entre 1a y 2a

4 $(\forall x \text{P} \rightarrow \text{P}) \wedge (\text{P} \rightarrow \forall x \text{P})$ TP15a (Adjunción) entre 3 y 3a.

5 $\forall x \text{P} \leftrightarrow \text{P}$ Sustitución de 4: RFP7

**Teorema TC1b**

$$\vdash \exists x \text{P} \leftrightarrow \text{P}$$

Donde P es una fbf libre de $x$.

**Teorema C2a (Intercambio de cuantificadores)**

$$\vdash \exists x \text{ P} \leftrightarrow \neg \forall x \neg \text{P}$$

*"Afirmar que existe al menos un elemento que cumple una proposición" es equivalente a "Negar que todos la incumplen"*

1 $\exists x$ P Supuesto

2 $\neg \forall x \neg$P Sustitución de 1: Aplicación de RFC3 (define el cuantificador existencial en términos del universal)

3 $\exists x \text{ P} \rightarrow \neg \forall x \neg \text{P}$ TdD entre 1 y 2.

El hecho de haber aplicado sustitución entre el supuesto y la fbf 2 las hace equivalentes, y el conector de condicional puede cambiarse por el de bicondicional, y la prueba finaliza.

**Teorema C2b (Intercambio de cuantificadores)**

$$\vdash \forall x \text{ P} \leftrightarrow \neg \exists x \neg \text{P}$$

*“Afirmar que todos cumplen una proposición” es equivalente a “Negar que algo la incumple”*

$\vdash \forall x\ P \rightarrow \neg\exists x\ \neg P$

1. $\forall x\ P$ — Supuesto
2. $\neg\neg\forall x \neg\neg P$ — Sustitución en 1: doble aplicación de TP11 (doble negación)
3. $\neg\exists x\ \neg P$ — Sustitución en 2: aplicación de TC2a.
4. $\forall x\ P \rightarrow \neg\exists x\ \neg P$ — TdD entre 1 y 3.

Puesto que se aplicó únicamente la Ley de sustitución entre 1 y 3, la expresión realmente hallada es una equivalencia; por tanto, $\vdash \forall x\ P \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg P$.

**Teorema C2c (Intercambio de cuantificadores)**

$$\vdash \neg\forall x\ P \leftrightarrow \exists x\ \neg P$$

**Teorema C2d (Intercambio de cuantificadores)**

$$\vdash \neg\exists x\ P \leftrightarrow \forall x\ \neg P$$

“*Negar que algo cumple una proposición”, es equivalente a “afirmar que todos la incumplen*”

$\vdash \neg\exists x\ P \rightarrow \forall x\ \neg P$

1. $\neg\exists x\ P$ — Supuesto.
2. $\neg\neg\forall x\ \neg P$ — Sustitución en 1: TC2a.
3. $\forall x\ \neg P$ — Sustitución en 2: TP11 (doble negación).
4. $\neg\exists x P \rightarrow \forall x\ \neg P$ — TdD entre 1 y 3. Sin embargo, dado que se hizo empleo de la sustitución entre el supuesto y la conclusión, la condicional podría reemplazarse por la bi-condicional y así, no se requeriría probar la condicional recíproca.

Ahora,

$\vdash \forall x\ \neg P \rightarrow \neg\exists x\ P$

1. $\forall x\ \neg P$ — Supuesto
2. $\neg\exists x\ \neg\neg P$ — Sustitución en 1: TC2b
3. $\neg\exists x\ P$ — Sustitución en 2: TP11 (doble negación).
4. $\forall x\ \neg P \rightarrow \neg\exists x\ P$ — TdD entre 1 y 3. Sin embargo, y al igual que en la anterior prueba, dado que se hizo empleo de la sustitución entre el supuesto y la conclusión, la condicional podría reemplazarse por la bi-condicional.

**Teorema C3a (Negación de expresiones con varios cuantificadores)**

$$\vdash \neg\forall x\forall y\ P \leftrightarrow \exists x\exists y\ \neg P$$

*“Negar que toda pareja de elementos cumple una proposición” es equivalente a “afirmar que existe al menos una pareja que la incumple”*

$\vdash \neg\forall x\forall y\ P \rightarrow \exists x\exists y\ \neg P$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\forall x\forall y$ P | Supuesto |
| 2. $\exists x\neg\forall y$ P | Sustitución: TC2c en 1 |
| 3. $\exists x\exists y\neg$P | Sustitución: TC2c en 2 |
| 4. $\neg\forall x\forall y$ P $\rightarrow \exists x\exists y\neg$P | TdD entre 1 y 3 |

El uso exclusivo de la sustitución entre 1 y 3, permite afirmar la existencia de una equivalencia entre ellas; lo que implica que no es necesario efectuar el sentido recíproco de la demostración.

**Teorema C3b (Negación de expresiones con varios cuantificadores)**

$$\vdash \neg\exists x\exists y\, \mathrm{P} \leftrightarrow \forall x\forall y\, \neg\mathrm{P}$$

**Teorema C3c (Negación de expresiones con varios cuantificadores)**

$$\vdash \neg\forall x\exists y\, \mathrm{P} \leftrightarrow \exists x\forall y\, \neg\mathrm{P}$$

*"Negar que cada elemento x está relacionado con al menos un elemento y con el que se cumpla una proposición" es equivalente a "afirmar que existe un elemento x con el que todos los elementos y la incumple"*

$\vdash \neg\forall x\exists y$ P $\rightarrow \exists x\forall y\neg$P

| | |
|---|---|
| 1 $\neg\forall x\exists y$ P | Supuesto |
| 2 $\exists x\neg\exists y$ P | Sustitución en 1: TC2c |
| 3 $\exists x\neg\neg\forall y\neg$P | Sustitución en 2: RFC3 (define el cuantificador existencial en términos del universal) |
| 4 $\exists x\forall y\neg$P | Sustitución en 3: TP11 (doble negación). |
| 5 $\neg\forall x\exists y$ P $\rightarrow \exists x\forall y\neg$P | TdD entre 1 y 4. El hecho de haber aplicado sustitución entre el supuesto y la fbf 4 las hace equivalentes, y el conector de condicional puede cambiarse por el de bicondicional, y la prueba finaliza. |

**Teorema C3d (Negación de expresiones con varios cuantificadores)**

$$\vdash \neg\exists x\forall y\, \mathrm{P} \leftrightarrow \forall x\exists y\, \neg\mathrm{P}$$

**Teorema C4a (Conmutación de cuantificadores universales)**

$$\vdash \forall x\forall y\, \mathrm{P} \leftrightarrow \forall y\forall x\, \mathrm{P}$$

*"Afirmar que todo elemento de x relacionado con cualquier elemento y cumplen una proposición", es equivalente a "afirmar que todo elemento de y relacionado con cualquier elemento x la cumplen"*

$\vdash \forall x\forall y$ P $\rightarrow \forall y\forall x$ P

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x\forall y$ P | Supuesto |
| 2. $(\forall y\ \mathrm{P})_{x\vert x}$ | E.U. en 1 |
| 3. $\left(\mathrm{P}_{y\vert y}\right)_{x\vert x}$ | E.U. en 2 |
| 4. $\forall x \mathrm{P}_{y\vert y}$ | G.U en 3 |

| | |
|---|---|
| 5. $\forall y \forall x$ P | G.U en 4 |
| 6. $\forall x \forall y$ P $\rightarrow \forall y \forall x$ P | TdD entre 1 y 5 |

De manera análoga se desarrolla $\vdash \forall y \forall x$ P $\rightarrow \forall x \forall y$ P

Ejemplo de una afirmación que emplea doble cuantificación universal:

**Identidad** trigonométrica

$$\forall x \forall y\ (\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

**Teorema C4b (Conmutación de cuantificadores existenciales)**

$$\vdash \exists x \exists y \text{ P} \leftrightarrow \exists y \exists x \text{ P}$$

Ejemplo de una afirmación que emplea doble cuantificación existencial

**Ecuación** de la circunferencia

$$\exists x \exists y\ ((x - \mathrm{a})^2 + (y - \mathrm{b})^2 = \mathrm{r}^2)$$

**Teorema C5**

$$\exists x \forall y \text{ P} \vdash \forall y \exists x \text{ P}$$

*"Afirmar que con al menos uno de los elementos $x$ todos los elementos $y$ satisfacen la proposición" es suficiente para asegurar que "para cada elemento $y$ existe al menos un elemento $x$ con el que cumple la proposición"*

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x \forall y \mathrm{P}$ | Premisa |
| 2. $(\forall y \mathrm{P})_{x\|x}$ | E.E. en 1. |
| 3. $\left(\mathrm{P}_{y\|y}\right)_{x\|x}$ | E.U. en 2. |
| 4. $\exists x \mathrm{P}_{y\|y}$ | G.E. en 3. |
| 5. $\forall y \exists x \mathrm{P}$ | G.U. en 4. |

Ejemplo de una afirmación que emplea la combinación cuantificación universal-cuantificación existencial:

**Ecuación** de línea recta

$$\forall x \exists y (ax + by + c = 0)$$

**Teorema C6a**

$$\vdash \forall x\,(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \leftrightarrow \mathrm{P} \vee \forall x \mathrm{Q}$$

Donde la fbf P es libre de la variable $x$.

**Teorema C6b**

$$\vdash \exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \leftrightarrow \exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$$

Donde la fbf Q es libre de la variable $x$.

*"Afirmar que al menos un elemento cumple dos proposiciones conjuntamente - una de ellas independiente de tales elementos"*, es equivalente a "*afirmar que se cumple conjuntamente la proposición independiente y aquella en la que al menos uno de los elementos cumple la otra proposición*"

Se efectuará primero: $\vdash \exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow \exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ | Supuesto |
| 2. $\neg \forall x\, \neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ | Sustitución: TC2a en 1 |
| 3. $\neg \forall x\,(\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q})$ | Sustitución: T25b (DeMorgan) en 2 |
| 4. $\neg(\forall x \neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q})$ | Sustitución: TC6a en 3 |
| 5. $\neg(\neg \exists x \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q})$ | Sustitución: TC2d en 4 |
| 6. $\exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ | Sustituciones: T25a (DeMorgan) en 5, y doble aplicación de TP11 (doble negación) en expresión resultante. |
| 7. $\exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow \exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ | TdD entre 1 y 6. |

De hecho, por la aplicación reiterada de sustituciones para obtener 6 desde 1, ya se podría afirmar que las dos expresiones son formalmente equivalentes, y no sería necesario efectuar la demostración en sentido recíproco, es decir, $\vdash \exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$; sin embargo, con el propósito de exponer argumentaciones formales, se realizará tal prueba.

Ahora; $\vdash \exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$

| | |
|---|---|
| 1a. $\exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ | Supuesto |
| 2a. Q | TP15a (propiedad de la conjunción) en 1a. |
| 3a. $\exists x \mathrm{P}$ | TP15a (propiedad de la conjunción) en 1a. |
| 4a. $\mathrm{P}_{x\|x}$ | E.E. en 3a. |
| 5a. $\mathrm{P}_{x\|x} \wedge \mathrm{Q}$ | TP15b (propiedad de la conjunción) entre 4a y 2a. |
| 6a. $\exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ | G.E. en 5a. se toma a $\mathrm{P}_{x\|x} \wedge \mathrm{Q}$ como una fbf en la que se presenta ocurrencia libre de la variable $x$. |
| 7a. $\exists x \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \exists x\,(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ | TdD entre 1a y 6a. |

**Teorema C7a**

$$\forall x \mathrm{P} \vee \forall x \mathrm{Q} \vdash \forall x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$$

*"Cuando todos los elementos satisfacen una proposición o todos satisfacen a otra", se afirma necesariamente que "todos los objetos satisfacen al menos una de las dos proposiciones"*

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x \mathrm{P} \vee \forall x \mathrm{Q}$ | Premisa |
| 2. $\forall x \mathrm{P}$ | Supuesto |
| 3. $\mathrm{P}_{x\vert x}$ | E.U. aplicada en 2. |
| 4. $\forall x \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}_{x\vert x}$ | TdD entre 2 y 3. |
| 5. $\forall x \mathrm{Q}$ | Supuesto |
| 6. $\mathrm{Q}_{x\vert x}$ | E.U. aplicada en 5. |
| 7. $\forall x \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{Q}_{x\vert x}$ | TdD entre 5 y 6. |
| 8. $\mathrm{P}_{x\vert x} \vee \mathrm{Q}_{x\vert x}$ | TP21 entre 1, 4 y 7. |
| 9. $\forall x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | G.U. en 8. La fbf de 8 cumple con las restricciones establecidas: el término (en este caso, la variable $x$) por el cual se generalizó no resultó de una E.E. en algún paso previo. |

**Teorema C7b**

$$\exists x(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vdash \exists x \mathrm{P} \wedge \exists x \mathrm{Q}$$

**Teorema C8a**

$$\vdash \forall x(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \leftrightarrow \forall x \mathrm{P} \wedge \forall x \mathrm{Q}$$

**Teorema C8b**

$$\vdash \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \leftrightarrow \exists x \mathrm{P} \vee \exists x \mathrm{Q}$$

*"Afirmar que existe un elemento que satisface al menos una de dos proposiciones" es equivalente a "afirmar que al menos una de las dos proposiciones es satisfecha por algún elemento"*

$\vdash \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \rightarrow \exists x \mathrm{P} \vee \exists x \mathrm{Q}$

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | Supuesto |
| 2. $\neg\forall x \neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | Sustitución de 1: TC2b (intercambio de cuantificadores) |
| 3. $\neg\forall x(\neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q})$ | Sustitución en 2: TP25a (DeMorgan) |
| 4. $\neg(\forall x \neg\mathrm{P} \wedge \forall x \neg\mathrm{Q})$ | Sustitución en 3: TC8a. |
| 5 $\neg\forall x \neg\mathrm{P} \vee \neg\forall x \neg\mathrm{Q}$ | Sustitución de 4: TP25b (DeMorgan) |
| 6. $\exists x \mathrm{P} \vee \exists x \mathrm{Q}$ | Doble sustitución en 5: TC2a. |

7. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \leftrightarrow \exists x \mathrm{P} \vee \exists x \mathrm{Q}$ TdD entre 1 y 6 (aplicación reiterada de la regla de sustitución desde 1 a 6, permite reemplazar condicional por bicondicional).

**Solución alternativa**

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | Supuesto |
| 2. $\mathrm{P}_{x\|x} \vee \mathrm{Q}_{x\|x}$ | E.E. de 1. |
| 3. $\mathrm{P}_{x\|x}$ | Supuesto |
| 4. $\exists x\mathrm{P}$ | G.E de 3. |
| 5. $\mathrm{P}_{x\|x} \rightarrow \exists x\mathrm{P}$ | TdD entre 3 y 4. |
| 6. $\mathrm{Q}_{x\|x}$ | Supuesto |
| 7. $\exists x\mathrm{Q}$ | G.E de 6. |
| 8. $\mathrm{Q}_{x\|x} \rightarrow \exists x\mathrm{Q}$ | TdD entre 6 y 7. |
| 9. $\exists x\mathrm{P} \vee \exists x\mathrm{Q}$ | TP21 (Ley Disyunción de casos) entre 2, 5 y 8. |
| 10. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \rightarrow \exists x\mathrm{P} \vee \exists x\mathrm{Q}$ | TdD entre 1 y 9. |

$\vdash \exists x\mathrm{P} \vee \exists x\mathrm{Q} \rightarrow \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x\mathrm{P}$ | Supuesto |
| 2. $\mathrm{P}_{x\|x}$ | E.E. de 1. |
| 3. $\mathrm{P}_{x\|x} \vee \mathrm{Q}_{x\|x}$ | TP1 (Adición) en 2. |
| 4. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | G.E. de 3. |
| 5. $\exists x\mathrm{P} \rightarrow \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | TdD entre 1 y 4. |
| 6. $\exists x\mathrm{Q}$ | Supuesto |
| 7. $\mathrm{Q}_{x\|x}$ | E.E. en 6. (Puedo emplear el término $x$ nuevamente, porque en el momento de realizar la conexión del supuesto en 1 con la fbf 4, a través del Teorema de la deducción, la existencia previa de $x$ en la demostración cesó) |
| 8. $\mathrm{P}_{x\|x} \vee \mathrm{Q}_{x\|x}$ | TP1 (Adjunción) y TP3 (conmutatividad) en 7. |
| 9. $\exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | G.E. de 8. |
| 10. $\exists x\mathrm{Q} \rightarrow \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | TdD entre 6 y 9. |
| 11. $\exists x\mathrm{P} \vee \exists x\mathrm{Q} \rightarrow \exists x(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ | TP19 (Adición disyuntiva de condicionales) entre 5 y 10; TP2 (idempotencia) en el consecuente resultante. |

**Teorema C9**

$$\vdash \forall x\mathrm{P} \vee \forall y\mathrm{Q} \leftrightarrow \forall x\forall y(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$$

Donde la fbf P es libre de la variable $y$, y la fbf Q es libre de la variable $x$.

**Teorema C10**

$$\forall x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}), \forall x\mathrm{P} \vdash \forall x\mathrm{Q}$$

*Cuando se establece que "para cada elemento una proposición se vuelve suficiente para otra", y se ha verificado que "todos los elementos cumplen la proposición suficiente", es necesariamente cierto que "todos los elementos satisfacen la proposición consecuente"*

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})$ | Premisa |
| 2. $\forall x\mathrm{P}$ | Premisa |
| 3. $\mathrm{P}_{x\mid x} \rightarrow \mathrm{Q}_{x\mid x}$ | E.U. de 1 |
| 4. $\mathrm{P}_{x\mid x}$ | E.U. de 2 |
| 5. $\mathrm{Q}_{x\mid x}$ | Modus Ponems entre 3 y 4. |
| 6. $\forall x\mathrm{Q}$ | G.U. de 5. |

**Teorema C11**

$$\forall x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \vdash \forall x\mathrm{P} \rightarrow \forall x\mathrm{Q}$$

**Teorema C12**

$$\vdash \forall x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\exists x\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})$$

Donde la fbf Q es libre de la variable $x$.

**Teorema C13**

$$\vdash \exists x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\forall x\mathrm{P} \rightarrow \exists x\mathrm{Q})$$

**Teorema C14**

$$\exists x\mathrm{P} \rightarrow \forall x\mathrm{Q} \vdash \forall x(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})$$

**Teorema C15**

$$\exists x\mathrm{P} \rightarrow \forall x\mathrm{Q} \vdash \forall x\mathrm{P} \rightarrow \forall x\mathrm{Q}$$

**Teorema C16**

$$\vdash \forall x\forall y\forall z(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}) \leftrightarrow \forall x\forall z(\exists y(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{R})$$

La fbf P es libre de la variable $z$, la fbf Q es libre de la variable $x$, y la fbf R es libre de la variable $y$.

*"Afirmar que cualquier trío de elementos torna a la conjunción de dos proposiciones P, Q – proposiciones que comparten su dependencia de los elementos representados mediante y- suficiente para una proposición R" es equivalente a "afirmar que para todo par de elementos* $x$, $z$, *se puede encontrar al menos un elemento y que torna a la conjunción de proposiciones P, Q suficiente para la proposición R"*

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x\forall y\forall z(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})$ | Supuesto. |
| 2. $\forall x\forall z\forall y(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})$ | Sustitución en 1: TC4a |
| 3 $\forall x\forall z(\exists y(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{R})$ | Sustitución en 2: TC12 (La fbf R es libre de $y$) |

4. $\forall x\forall y\forall z(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}) \rightarrow \forall x\forall z(\exists y(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{R})$ TdD entre 1 y 3; que resultó en equivalencia.

En este punto ya no se requiere más demostración, pues sólo fue empleada la sustitución como regla de validez entre el supuesto y la fbf 3.

Teorema C17a $\quad \forall x(P \leftrightarrow Q) \vdash \forall xP \leftrightarrow \forall xQ$

| | |
|---|---|
| 1 $\forall x(P \leftrightarrow Q)$ | Premisa |
| 2 $\forall x\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\big)$ | Sustitución en 1: RFP7 (definición de fbf bicondicional) |
| 3 $\forall x(P \rightarrow Q) \wedge \forall x(Q \rightarrow P)$ | Sustitución de 2: TC8a |
| 4 $\forall x(P \rightarrow Q)$ | TP15a (simplificación) de 3 |
| 5 $\forall x(Q \rightarrow P)$ | TP15a (simplificación) de 3 |
| 6 $\forall xP \rightarrow \forall xQ$ | TC11 en 4 |
| 7 $\forall xQ \rightarrow \forall xP$ | TC11 en 5 |
| 8 $\forall xP \leftrightarrow \forall xQ$ | TP15b (conjunción) entre 6 y 7; sustitución en la fbf resultante: RFP7 (definición de fbf bicondicional) |