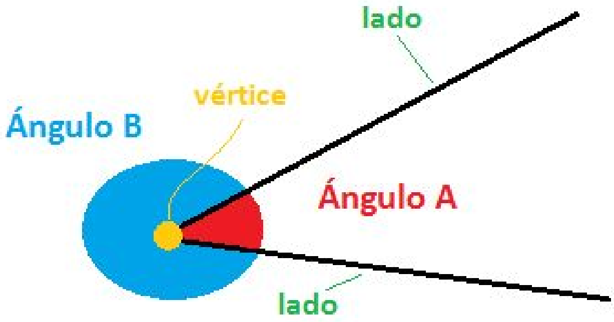
MATEMÁTICAS II

BLOQUE I

Ángulos

Partes de un ángulo

En un plano, dos semirrectas con un origen común siempre generan dos ángulos.
En el dibujo, podemos ver dos, el A y el B.
Están compuestos por dos lados y un vértice en el origen cada uno.

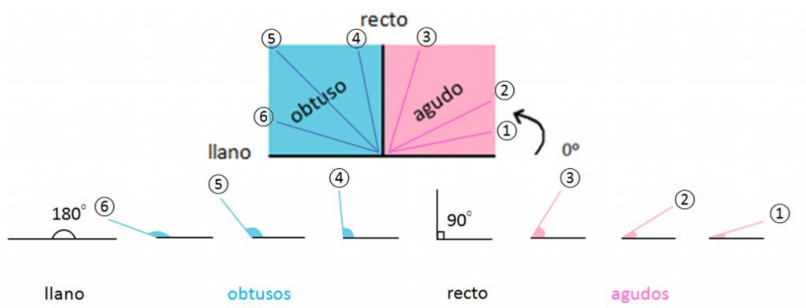


Tipos de ángulos

Hay varios tipos según su tamaño:

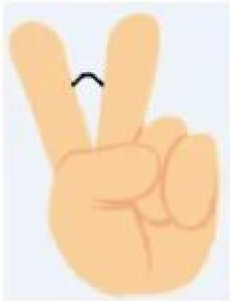
- Ángulo agudo: Mide menos de 90° y más de 0 °.
- Ángulo recto: Mide 90° y sus lados son siempre perpendiculares entre sí.
- Ángulo obtuso: Mayor que 90° pero menor que 180°.
- Ángulo llano: Mide 180°. Igual que si juntamos dos ángulos rectos.

Todo ángulo comprendido en la zona rosa es un ángulo agudo, y todo ángulo comprendido en la zona azul es un ángulo obtuso.

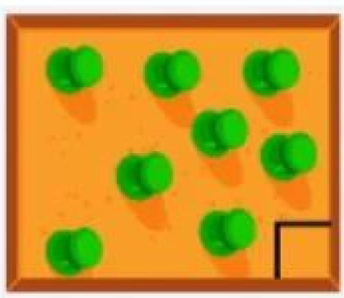
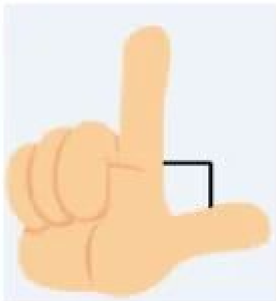


A continuación veremos algunos ángulos en nuestra vida cotidiana.

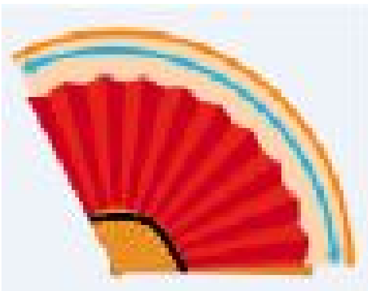
→ En el cono del helado y en la separación de los siguientes dedos tenemos ángulos agudos.

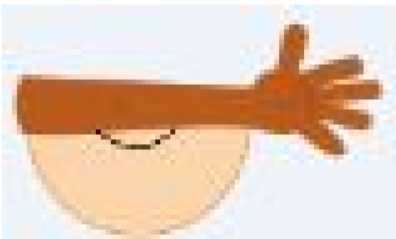
→ En la posición de los siguientes dedos en forma de L y en la esquina del corcho podemos observar los ángulos de 90°, rectos.

→ La apertura del abanico es mayor que 90° y menor que 180°, por lo cual tenemos un ángulo obtuso.

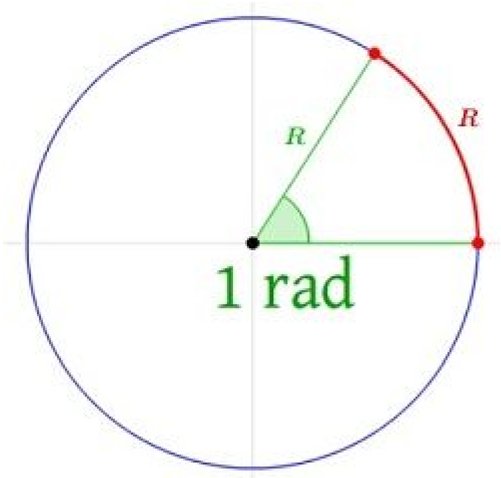


→ Y por último tenemos un brazo estirado formando un ángulo llano de 180°.



Sistemas de medida de ángulos
Radianes

Un radián es la unidad de medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados delimitan un arco de circunferencia que tiene la misma longitud que el radio. El radián (rad) es la unidad de medida para ángulos en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.).



La relación del radián con la otra unidad de medida para ángulos más ampliamente utilizada, los grados sexagesimales o simplemente grados (º), es la siguiente:

1 vuelta completa de la circunferencia = 360º = $2 \cdot \pi$ radianes

Para entender la anterior igualdad, se parte de saber que la medida en radianes de un ángulo (θ) medido en una circunferencia es igual a la longitud del arco que abarca dividida entre el radio de dicha circunferencia, es decir:

$$\theta_{(radianes)} = \frac{\text{Longitud del arco}}{\text{Radio}}$$

Por tanto, cuando se trata del ángulo correspondiente a una circunferencia completa, cuya longitud total es $2 \cdot \pi \cdot r$ (siendo r el radio de la circunferencia) le corresponden en radianes un ángulo de:

$$\theta_{(circunferencia\ completa)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2 \cdot \pi \ \text{radianes}$$

En el sistema sexagesimal, el ángulo que abarca la circunferencia completa mide 360º, por lo que se puede establecer la ya vista relación entre grados y radianes:

$$1 \text{ vuelta completa} = 360º = 2 \cdot \pi \text{ radianes}$$

Otras equivalencias útiles entre grados y radianes son las siguientes:

- $0º = 0$ rad
- $90º = \pi/2$ rad
- $180º = \pi$ rad

Sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal es un sistema de unidades muy empleado cuyo fundamento es que cada unidad se divide en 60 unidades de una orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60. Se aplica en la actualidad fundamentalmente para la medida de ángulos y también en la medida del tiempo.

La unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado (º), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales, o bien un ángulo recto en 90 partes, o un ángulo completo en 360 partes. A cada una de esas partes se les llama grado (º). Así, un ángulo llano mide 180º, un ángulo recto 90º y un ángulo completo 360º.

A su vez, cada grado se subdivide en otras unidades inferiores, en concreto, en sesenta partes iguales. De esta manera, cada grado se divide en 60 minutos (1º = 60´) y cada minuto, a su vez, en 60 segundos (1´ = 60´´).

- Medidas de ángulos: 1 grado (º) → 60 minutos (´) → 60 segundos (´´)
- Medidas de tiempo: 1 hora → 60 minutos (´) → 60 segundos (´´)

Por tanto, en general, un ángulo en el sistema sexagesimal vendrá expresado en grados, minutos y segundos, de la forma, por ejemplo: 38º 50´ 35´´ (38 grados, 50 minutos y 35 segundos). Si se omiten los minutos y segundos, por ejemplo, 45º, es porque se entiende que es 45º 0´ 0´´.

Cuando un ángulo se mide en grados, minutos y segundos, se dice que está expresado con medida compleja, mientras que si se expresa con una sola clase de unidades, se dice que es una medida incompleta o simple, por ejemplo:

- 32º → medida simple
- 11´´ → medida simple
- 52º 17´ 45´´ → medida compleja
- 4º 22´ → medida compleja

Para sumar grados expresados en medidas complejas, primero se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos, y se suman, como se indica en el siguiente ejemplo de la figura:

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32^\circ \quad 24' \quad 48'' \\ +\ 43^\circ \quad 49' \quad 25'' \\ \hline 75^\circ \quad 73' \quad 73'' \end{array} = 75^\circ \; 74' \; 13'' = 76^\circ \; 14' \; 13''$$

Como se ve en el ejemplo anterior, si los segundos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se añadirá a los minutos. Se hace lo mismo para los minutos, si estos terminaran también en una cantidad mayor de 60.

A continuación, se incluyen ejercicios resueltos de suma, resta y divisiones de ángulos expresados en grados, minutos y segundos.

Operaciones con medidas de ángulos

SUMA DE ÁNGULOS

Para sumar los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$, cuyas medidas son $\hat{a} = 34^\circ\ 13'\ 54''$ y $\hat{b} = 18^\circ\ 40'\ 27''$, se realizan los siguientes pasos:

1.° Se colocan las medidas de los ángulos una debajo de otra, de modo que coincidan en cada columna las unidades del mismo nombre.

2.° Se suma cada columna por separado.

$$\begin{array}{r} 34^\circ\ 13'\ 54'' \\ +\ 18^\circ\ 40'\ 27'' \\ \hline 52^\circ\ 53'\ 81'' \end{array}$$

3.° Como el número de segundos (81) es mayor que 60, se pasan 81'' a minutos (81'' = 1' 21'').

4.° Se suman los minutos (53' + 1' = 54').

5.° Como el número de minutos (54) es menor que 60, la suma está terminada.

$$\begin{array}{r} 52^\circ\ 53'\ 81'' \\ 1'\ 21'' \\ \hline 52^\circ\ 54'\ 21'' \end{array}$$

Ángulo suma: $52^\circ\ 54'\ 21''$

1 **Calcula.**

$42^\circ\ 13'\ 20'' + 17^\circ\ 56'\ 31''$

$$\begin{array}{r} 42^\circ\ 13'\ 20'' \\ +\ 17^\circ\ 56'\ 31'' \\ \hline 59^\circ\ 69'\ 51'' \end{array}$$

$38^\circ\ 40'\ 53'' + 12^\circ\ 5'\ 27''$

$25^\circ\ 18'\ 36'' + 41^\circ\ 23'\ 17''$

$30^\circ\ 42'\ 29'' + 7^\circ\ 35'\ 41''$

RESTA DE ÁNGULOS

Para restar los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$, cuyas medidas son $\widehat{a} = 38^\circ\ 13'\ 41''$ y $\widehat{b} = 25^\circ\ 47'\ 6''$, se realizan los siguientes pasos:

1.° Se colocan las medidas de los ángulos una debajo de otra, de modo que coincidan en cada columna las unidades del mismo nombre.

2.° Se restan los segundos.

$$\begin{array}{r} 38^\circ\ 13'\ 41'' \\ -\ 25^\circ\ 47'\ \ 6'' \\ \hline 35'' \end{array}$$

3.° Como a 13' no se pueden restar 47', se convierte un grado en minutos (38° = 37° 60'; 13' + 60' = 73') y después se restan los minutos (73' - 47'= 26').

4.° Se restan los grados (37° - 25° = 12°).

$$\begin{array}{r} 37^\circ\ \ 73'\ \ \ \ \ \\ \cancel{38^\circ}\ \cancel{13'}\ 41'' \\ -\ 25^\circ\ 47'\ \ 6'' \\ \hline 12^\circ\ 26'\ 35'' \end{array}$$

Ángulo resta

1 **Calcula.**

53° 38' 23" - 27° 41' 19"

$$\begin{array}{r} 52° \quad 98' \quad \\ \cancel{53°}\ \cancel{38'}\ 23'' \\ -\ 27°\ 41'\ 19'' \\ \hline \end{array}$$

28° 43' 26" - 15° 30' 52"

39° 40' 28" - 15° 7' 26"

72° 21' 16" - 49° 35' 50"

47° 23' 10" - 18° 54' 6"

52° 30' 23" - 12° 41' 29"

PRODUCTO DE UN ÁNGULO POR UN NÚMERO NATURAL

Para multiplicar un ángulo $\hat{a}$, por ejemplo $\hat{a}$ = 27° 18' 34", por un número natural n por ejemplo n = 4, se realizan los siguientes pasos:

1.° Se multiplican por 4 los segundos, los minutos y los grados.

2.° Como el número de segundos (136) es mayor que 60, se pasan los 136" a minutos (136" = 2' 16") y se suman con los minutos (72' + 2' = 74').

3.° Como el número de minutos (74) es mayor que 60, se pasan a grados (74' = 1° 14') y se suman con los grados (108° + 1° = 109°).

$$\begin{array}{r} 27°\ 18'\ 34'' \\ \times\ 4 \\ \hline 108°\ 72'\ 136'' \\ 2'\ \ 16'' \\ \hline 108°\ 74'\ 16'' \\ 1°\ 14'\ \quad \\ \hline 109°\ 14'\ 16'' \end{array}$$

Ángulo producto: 109° 14' 16"

1 **Calcula.**

18° 25' 46" x 2

$$\begin{array}{r} 18^\circ\ 25'\ 46'' \\ \times\ \ 2 \\ \hline 92'' \end{array}$$

32° 41' 5" x 3

27° 13' 38" x 4

9° 24' 36" x 5

DIVISIÓN DE ÁNGULOS POR UN NÚMERO NATURAL

Para dividir un ángulo $\hat{a}$, por ejemplo $\hat{a}$ = 46° 53' 18", por un número natural n, por ejemplo n = 3, se realizan los siguientes pasos:

1.° Se dividen los grados por 3 y el resto ob tenido se pasa a minutos (1° = 60').

2.° Se suman los minutos (53' + 60' = 113') y se dividen por 3.

3.° El resto se pasa a segundos (2' = 120").

4.° Se suman los segundos (18" + 120" = 138") y se dividen por 3.

$$\begin{array}{llll|l} 46^\circ & 53' & 18'' & & 3 \\ \cline{5-5} 16 & & & & 15^\circ\ 37'\ 46'' \\ 1^\circ = & \underline{60'} & & & \\ & 113' & & & \\ & 23 & & & \\ & 2' = & \underline{120''} & & \\ & & 138'' & & \\ & & 18'' & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

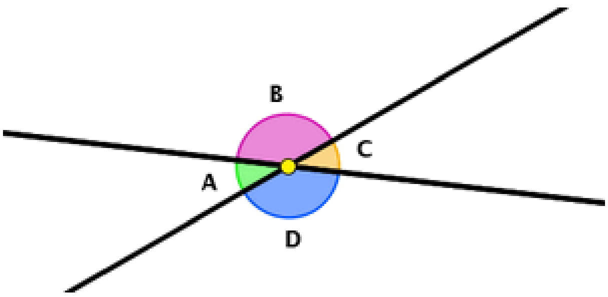
1 Calcula.

29º 41' 36" | 2 9 — 14º 1º = 60'	17º 35' 48" | 3
50º 6' 24" | 4	38º 17' 45" | 5

Ángulos entre paralelas

Dos rectas que se cortan decimos que son secantes. Al cortarse determinan 4 ángulos, como puedes ver en la figura. Pero estos ángulos están relacionados entre sí, de modo que si conociéramos cuanto mide uno de ellos, podríamos determinar inmediatamente los otros tres.

Según la posición de los ángulos con respecto a las rectas, reciben distintos nombres. Los llamamos ángulos opuestos por el vértice cuando comparten el vértice y los lados de uno son prolongación de los lados del otro, como sucede en los ángulos A y C. Decimos que son ángulos adyacentes cuando tienen el vértice y un lado común y los otros lados tales que uno es prolongación del otro. Son adyacentes, por ejemplo, el A y el B.

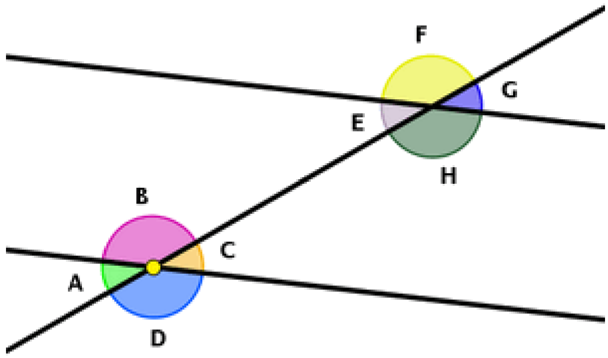


Cuando dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, a la que llamaremos transversal se forman 8 ángulos, como puedes ver en la figura. Estos ocho ángulos también guardan una estrecha relación entre sí, de modo que, como en el caso anterior, en cuanto conocemos uno de ellos podemos averiguar lo que valen los demás.

La posición relativa de los ángulos con respecto a las rectas hace que esos ángulos reciban unos nombres específicos. Así, llamamos ángulos correspondientes a los que están situados al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal. Son correspondientes, por ejemplo, el A y el E, o también el B y el F.

Llamamos ángulos alternos internos los que están a distinto lado de las paralelas y a distinto lado de la transversal. Son alternos internos el B y el H y también el C y el E.

Son ángulos alternos externos los que están en la parte exterior de las paralelas, a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

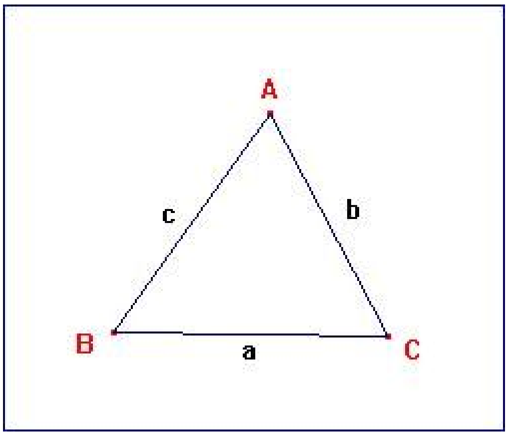


Material audiovisual de apoyo:
https://www.youtube.com/watch?v=2OPoYzg_E58

TRIÁNGULOS

Un triángulo es el polígono que resulta de unir 3 puntos con líneas rectas.

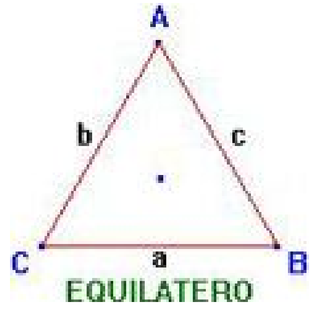
Todo triángulo tiene 3 lados (a, b y c), 3 vértices (A, B y C) y 3 ángulos interiores (A, B y C) Habitualmente se llama lado a al lado que no forma parte del ángulo A. Lo mismo sucede con los lados b y c y los ángulos B y C.



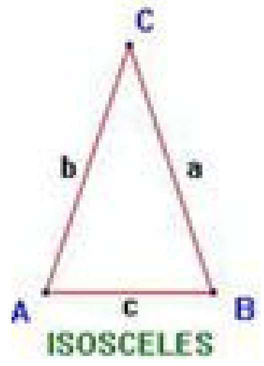
Los triángulos podemos clasificarlos según 2 criterios:

Según la medida de sus lados

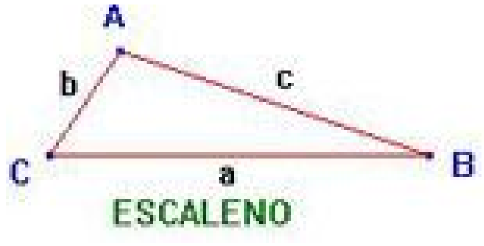
- Equilátero
    - Los 3 lados (a, b y c) son iguales
    - Los 3 ángulos interiores son iguales



- Isósceles
    - Tienen 2 lados iguales (a y b) y un lado distinto ©
    - Los ángulos A y B son iguales, y el otro agudo es distinto

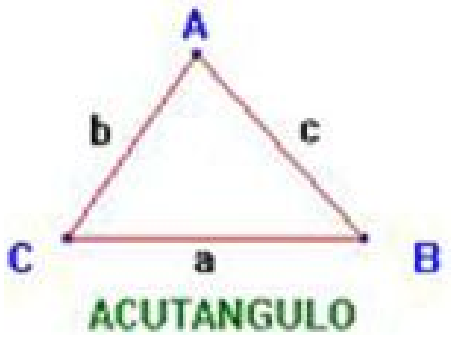


- Escaleno
    - Los 3 lados son distintos
    - Los 3 ángulos son también distintos

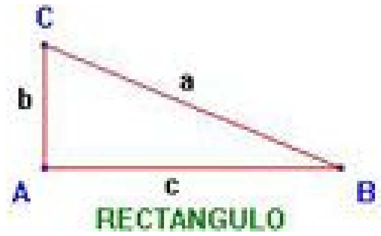


Según la medida de sus ángulos

- Acutángulo
  - Tienen los 3 ángulos agudos (menos de 90 grados)



- Rectángulo
  - El ángulo interior A es recto (90 grados) y los otros 2 ángulos son agudos
  - Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (c y b), el otro lado hipotenusa



- Obtusángulo
  - El ángulo interior A es obtuso (más de 90 grados)
  - Los otros 2 ángulos son agudos

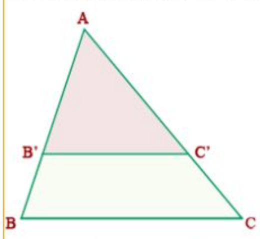
Material audiovisual de apoyo
https://www.youtube.com/watch?v=BmdSryOOC4w

Teorema de Tales

Cuando en geometría hablemos del Teorema de Tales (o Thales) , debemos aclarar a cuál nos referimos ya que existen dos teoremas atribuidos al matemático griego Tales de Mileto en el siglo VI a. C.
Primer teorema

Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre sí. El primer teorema de Tales recoge uno de los postulados más básicos de la geometría, a saber, que:Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.Entonces, veamos el primer Teorema de Tales en un triángulo :

Dado un **triángulo ABC** , si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'** , cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC** .



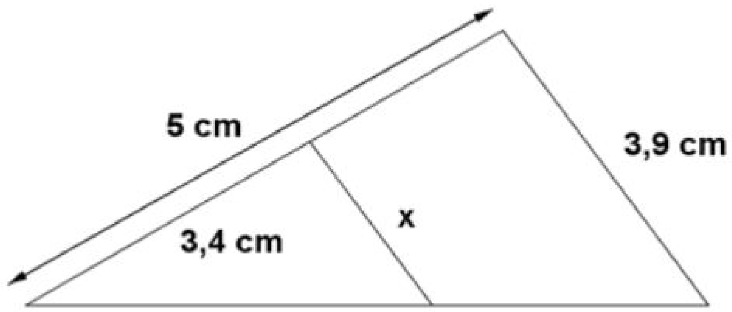
Lo que se traduce en la fórmula

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

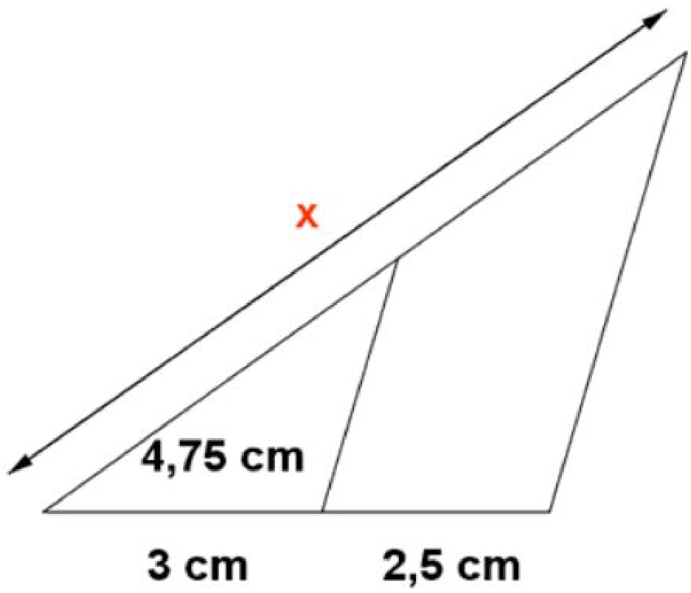
Material audiovisual de apoyo
https://youtu.be/JOhOHCNevVw
https://youtu.be/1IfktMhL5P0
https://youtu.be/6YM8KZ4eFMQ
https://youtu.be/ifjbo-RyfNE
https://youtu.be/ryRPSOQQJtc

RESUELVE Y APRENDE

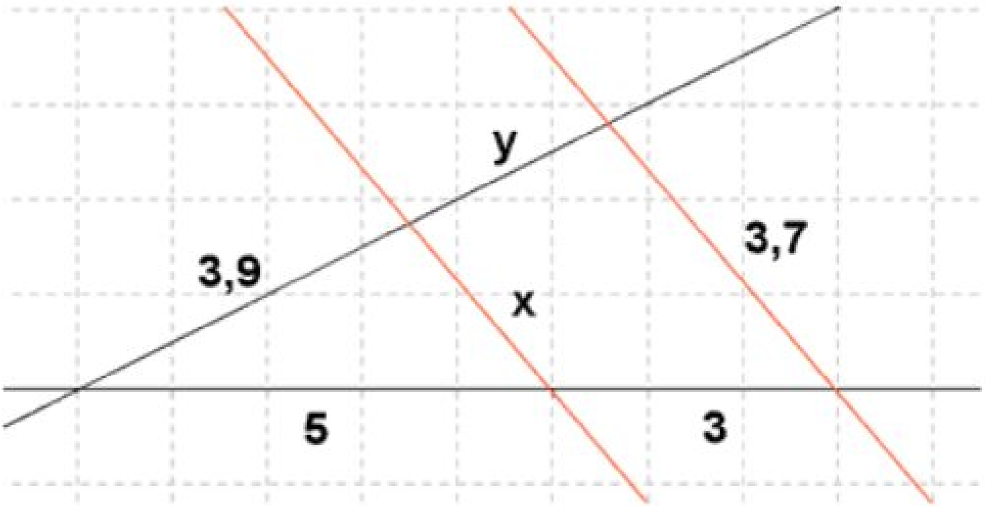
1) Usa el teorema de Tales para calcular x



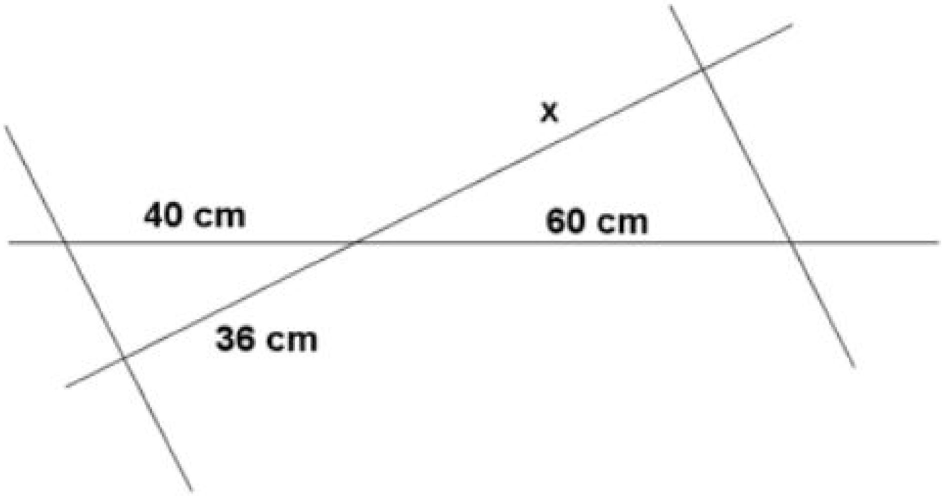
2) Calcula el valor de x aplicando el teorema de Tales



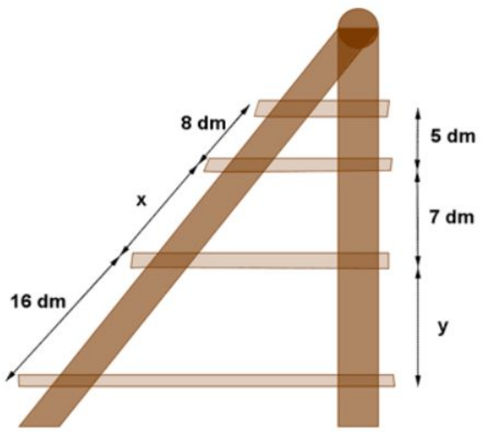
3) **Halla x e y aplicando el teorema de Tales**



4) **Halla x aplicando el teorema de Tales**



9) Las baldas de una repisa representada en la figura son paralelos. Calcula las longitudes de la repisa representadas como x e y.



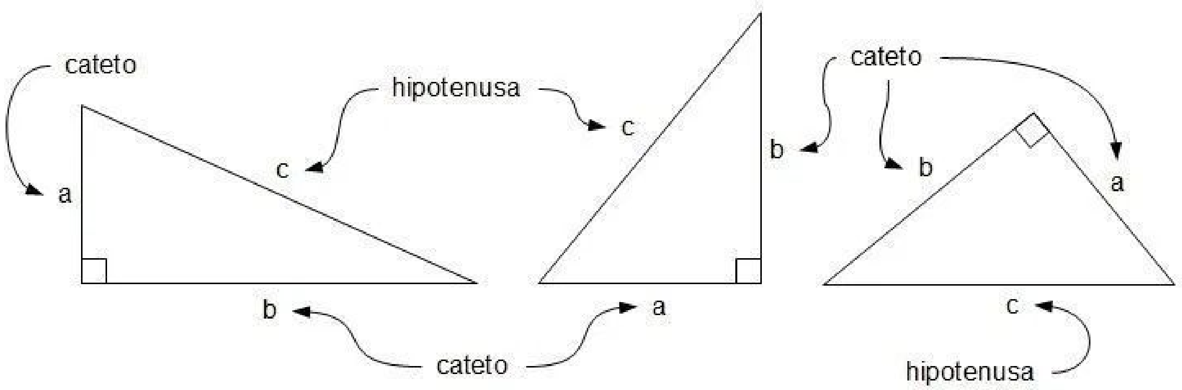
Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras es un teorema que nos permite relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de ellos y queremos saber el valor del tercero.

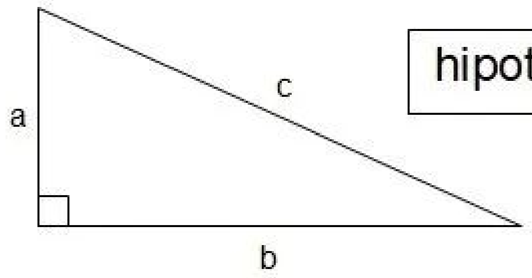
También nos sirve para comprobar, conocidos los tres lados de un triángulo, si un triángulo es rectángulo, ya que si lo es sus lados deben cumplirlo.

Como ya sabréis, un triángulo rectángulo es aquél en el que uno de sus tres ángulos mide 90 grados, es decir, es un ángulo recto. Está claro que si uno de los ángulos es recto, ninguno de los otros dos puede serlo, pues deben sumar entre los tres 180 grados.

En los triángulos rectángulos se distinguen unos lados de otros. Así, al lado mayor de los tres y opuesto al ángulo de 90 grados se le llama hipotenusa, y a los otros dos lados catetos.



Pues bien, el Teorema de Pitágoras dice que: «En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos



$$\boxed{\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^{\,2} + \text{cateto}_2^{\,2}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Si lo expresamos de forma geométrica, el Teorema de Pitágoras quiere decir que el área de un cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de otros dos cuadrados cuyos lados son cada uno de los catetos respectivamente.