Recordemos que mediante una función $\varphi : [0,1] \to [0,+\infty]$ continua, estrictamente decreciente y convexa, tal que $\varphi(1) = 0$, se puede construir una función cópula mediante:

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big),$$

donde $\varphi^{[-1]} : [0,+\infty] \to [0,1]$ es la *pseudo-inversa* de φ definida mediante:

$$\varphi^{[-1]}(z) = \begin{cases} \varphi^{-1}(z), & 0 \le z \le \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \le z \le +\infty. \end{cases}$$

Si $\varphi(0) = +\infty$ entonces φ se denomina *generador estricto* y $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, la inversa usual. Si $0 < \varphi(0) < +\infty$ entonces φ se denomina *generador no estricto*.

1. Inventa un generador estricto y construye con él una cópula.

Sol: Propongo la función $\phi(t) = e \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right)$

esta función satisface i) $\phi(0) = e \cdot \exp\left(-\frac{1}{1}\right) = e \cdot e^{-1} = 1 \therefore \phi(0) = 1$.

ii) $\mathrm{Dom}\,\phi(t) = [0,1]$ pues $\phi(t)$ esta definida en $t \geq 0$

iii) $\phi(t) \in C^0$ pues $1-\sqrt{t}$ es continua en $[0,1]$

así $\frac{1}{1-\sqrt{t}}$ es continua en $[0,1] \Rightarrow -\frac{1}{1-\sqrt{t}}$ es $C^0[0,1]$.

Dado que $\exp(z)$ es continua en $\mathbb{R} \Rightarrow \exp(z)\big|_{[0,1]} \in C^0[0,1]$

Como composición de continuas es continua $\Rightarrow$

$\exp\left(-\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right) \in C^0[0,1]$

$\therefore e \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right) \in C^0[0,1]$

por ende $\phi(t) \in C^0[0,1]$.

iiii) probemos que es decreciente $\Rightarrow$

$$\dot{\phi}(t) = e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\cdot(-1)\left(1-\sqrt{t}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}}\right) < 0$$

$\forall t \in (0,1)$ $\therefore$ $\phi(t) \downarrow$ monotona en $[0,1]$.

....) i.e.

$$\ddot{\phi}(t) = e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}}\right)^{2}$$

$$+ e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}}\right)\left[\frac{-\left(\frac{(1-\sqrt{t})^{2}}{2\sqrt{t}} - \frac{2\sqrt{t}\cdot 2(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\right)}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}}\right]$$

Para que sea convexo $\ddot{\phi}(t) > 0$ en $(0,1)$ basta probar que

$$\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}} > \frac{(1-\sqrt{t})^{2} - 2(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^{2}}$$

i.e. $1 > (1-\sqrt{t})^{2} - 2(1-\sqrt{t}) =$

$1 - \cancel{2\sqrt{t}} + t - 2 + \cancel{2\sqrt{t}} = t - 1$

lo cual es verdadero $\forall t \in (0,1)$

$\therefore$ $\phi(t)$ es convexa.

Para que sea estricto, nuestra función debe satisfacer que en cero valga infinito.

Sabemos que $\ln(0) = \infty$ y $\ln z$ es cóncava $\Rightarrow$ $-\ln(0) = -\infty$ y $-\ln(z)$ ya es convexa.

Por otra parte sabemos que composición de funciones decrecientes es decreciente

Sea $\psi(t) = -\ln\left(e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{x}}\right)\right)$

me falta probar que $\psi(t)$ es convexa.

$\Rightarrow \psi(t) = -\ln(\phi(t)) \Rightarrow$

$\dot{\psi}(t) = -\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} \Rightarrow \ddot{\psi}(t) = \frac{-(\ddot{\phi}\phi - \dot{\phi}\dot{\phi})}{\phi^2(t)}$

$= \frac{(\dot{\phi})^2 - \ddot{\phi}\phi}{\phi^2(t)}$. Tenemos que probar $(\dot{\phi})^2 - \ddot{\phi}\phi > 0$ (Supongo la igualdad)

$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\phi} > \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \Leftrightarrow \ln|\phi| > \ln|\dot{\phi}| + c$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right| > c \Leftrightarrow \frac{\dot{\phi}}{\phi} > e^c \Leftrightarrow \ln\phi(t) > e^c\cdot t$

$\Leftrightarrow \phi(t) > ke^{e^c\cdot t} > 0 \ \forall t>0$ y $k>0$ $\therefore$ si es convexa.

$\therefore \psi(t) = -\ln\left(e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{x}}\right)\right)$

es nuestro generador estricto

Siguiendo la actividad.

La cópula se construye así:

$C(u,v) := \psi^{[-1]}(\psi(u) + \psi(v))$

donde $\psi^{[-1]} : [0,+\infty] \to [0,1]$

es la pseudoinversa de ψ, definida por:

$$\psi^{[-1]}(z) = \begin{cases} \psi^{-1}(z), & z \in [0, \psi(0)] \\ 0, & z \in (\psi(0), +\infty] \end{cases}$$

Busquemos ψ^{-1}!

Como $\psi(t) = -\ln\left(e \cdot \exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\right) = z$

$\Rightarrow \ln\left(e \cdot \exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)\right) = -z \iff$

$e \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right) = e^{-z}$

$\iff \exp\left(-\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{-z}}{e}$

$\iff \frac{-1}{1-\sqrt{t}} = \ln\left(\frac{e^{-z}}{e}\right) = \ln(e^{-z}) - 1$

$= -z - 1$

$\iff \frac{1}{1-\sqrt{t}} = z+1$

$\iff \frac{1}{z+1} = 1 - \sqrt{t} \iff \sqrt{t} = 1 - \frac{1}{z+1}$

$\iff \sqrt{t} = \frac{z}{z+1} \iff t = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2$

$\therefore \psi^{-1} = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 \quad z \in [0, +\infty].$ $\square$

2. Inventa un generador no estricto y construye con él una cópula.

Para el no estricto sería la función $\varphi(t) = e \cdot \exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right)$ y ya demostré que satisface lo que pide $\varphi(t)$. Resta encontrar la inversa para su pseudoinversa y de ahí su cópula.

Sea $z = e\cdot\exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right) \iff$

$$\frac{z}{e} = \exp\left(\frac{-1}{1-\sqrt{t}}\right) \iff$$

$$\ln\frac{z}{e} = -\frac{1}{1-\sqrt{t}} \iff$$

$$-\ln\frac{z}{e} = \frac{1}{1-\sqrt{t}} \iff$$

$$\ln\frac{z}{e} = \frac{1}{\sqrt{t}-1} \iff$$

$$\sqrt{t}-1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{e}\right)}$$

$$\iff \sqrt{t} = 1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{e}\right)}$$

$$\iff t = \left(1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{e}\right)}\right)^2$$

$$\therefore \varphi^{-1}(z) = \left(1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{e}\right)}\right)^2.$$

y la cópula se define como se indica en la actividad.

3. De ser posible, agregando un parámetro trata de generalizar alguna o ambas cópulas anteriores, determinando el conjunto de valores admisibles para dicho parámetro.

Las propuestas son:

$$\psi_\theta(t) = -\ln\left(e\cdot\exp\left(\frac{-1}{(1-\sqrt{t})^\theta}\right)\right), \text{ con } \theta > 1$$

$$\varphi_\theta(t) = e\cdot\exp\left(-\frac{1}{(1-\sqrt{t})^\theta}\right), \text{ con } \theta > 1$$

la razón para poner $\theta > 0$ es

$$\lim_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} \frac{-1}{(1-\sqrt{t})^{\theta}} = -\lim_{\theta \to \infty} \frac{1}{(1-\sqrt{t})^{\theta}}$$

$1-\sqrt{t} \geq 0 \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{1-\sqrt{t}} > 0$

$\Rightarrow \left\|\frac{1}{1-\sqrt{t}}\right\|_{\infty} = \infty \neq 0$ la convergencia no es uniforme. Sin embargo es puntual. $\Rightarrow$

i) Si $t=0$ ent. $-\lim\limits_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} \frac{1}{1^{\theta}} = \underline{1}$

ii) Si $t=1$ en $-\lim\limits_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} \frac{1}{0} = +\infty$

Pero si $t \in (0,1)$ entonces

$$-\lim_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} \frac{1}{(1-\sqrt{t})^{\theta}} = -\lim_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} (1-\sqrt{t})^{-\theta}$$

$$= -\lim_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 1}} e^{-\theta \ln(1-\sqrt{t})}$$

, dado que $\ln(1-\sqrt{t}) < 0 \therefore -\lim\limits_{\substack{\theta \to \infty \\ \theta > 0}} e^{-\theta \ln(1-\sqrt{t})} = -0 = 0.$

4. Escribe código en `Julia` para graficar las curvas de nivel de cada una de las cópulas.

Ese esta en un archivo aparte.