Corrección... ¡La revancha!

Recordemos que mediante una función $\varphi : [0,1] \to [0,+\infty]$ continua, estrictamente decreciente y convexa, tal que $\varphi(1) = 0$, se puede construir una función cópula mediante:

$$C(u,v) \;=\; \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big)\,,$$

donde $\varphi^{[-1]} : [0,+\infty] \to [0,1]$ es la *pseudo-inversa* de φ definida mediante:

$$\varphi^{[-1]}(z) \;=\; \begin{cases} \varphi^{-1}(z)\,, & 0 \leq z \leq \varphi(0)\,,\\ 0\,, & \varphi(0) \leq z \leq +\infty\,. \end{cases}$$

Si $\varphi(0) = +\infty$ entonces φ se denomina *generador estricto* y $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, la inversa usual. Si $0 < \varphi(0) < +\infty$ entonces φ se denomina *generador no estricto.*

1. Inventa un generador estricto y construye con él una cópula.

Sea $\varphi(t) = \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) - 1$

-) $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) - 1$

$\exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) \geq \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) - 1$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) =$

$\exp\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)$ por ser continua la exponencial.

Pero $\lim_{t\to 0^+} \frac{1-t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{0} = +\infty$

$+\infty - 1 = +\infty$

$\therefore$ podemos definir a $\varphi(t)$ en 0 como $\varphi(0) := +\infty$

-) $\frac{1-t}{\sqrt{t}}$ es $C^0(0,1]$ y $\exp(\cdot)$ es continua en $(0,1] \Rightarrow$

$\varphi(t) \in C^0(0,1]$, dado que $\varphi(0) = +\infty$

$\therefore \varphi(t) \in C^0[0,1]$.

... Probemos que es decreciente

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{-\sqrt{t} - \left(\frac{1-t}{2\sqrt{t}}\right)}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) > 0 \text{ en } (0,1] \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{t} + \frac{1-t}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{\left(\frac{2t+1-t}{2\sqrt{t}}\right)}{\left(\frac{t}{1}\right)} =$$

$$\frac{t+1}{2t\sqrt{t}} > 0 \Rightarrow -\left(\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right) < 0$$

$$\therefore -\exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right) < 0$$

i.e. es monótona decreciente.

$\therefore$ es un generador estricto $\varphi(t)$.

Para construir la cópula debemos encontrar $\varphi^{-1} \Rightarrow$

$$z = \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) - 1 \iff$$

$$z+1 = \exp\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right) \iff$$

$$\ln(z+1) = \frac{1-t}{\sqrt{t}}$$

$$\iff (\ln(z+1))^2 = \frac{1-2t+t^2}{t}$$

$$\iff t(\ln(z+1))^2 = (t-1)^2 \iff$$

$$t^2 - (2+(\ln^2(z+1))t + 1 = 0$$

$$\iff t = \frac{2+\ln^2(z+1) \pm \sqrt{(2+\ln^2(z+1))^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{2+\ln^2(z+1) \pm \sqrt{\cancel{4}+2\ln^2(z+1)+\ln^4(z+1)-\cancel{4}}}{2}$$

$$= \frac{2+\ln^2(z+1) \pm \sqrt{2\ln^2(z+1)+\ln^4(z+1)}}{2}$$

se toma signo $+$ pues al toma $-$ son da $t<0$ y sale del dominio.

$$\Rightarrow t = \frac{2+\ln^2(z+1) + \sqrt{2\ln^2(z+1)+\ln^4(z+1)}}{2}$$

$$\therefore \varphi^{-1}(z) = \frac{2+\ln^2(z+1) + \sqrt{2\ln^2(z+1)+\ln^4(z+1)}}{2}$$

se sigue lo de la construcción de la cópula y ya se tiene

3. De ser posible, agregando un parámetro trata de generalizar alguna o ambas cópulas anteriores, determinando el conjunto de valores admisibles para dicho parámetro.

El parametro que se propone es

$$\varphi_\theta(t) = \exp\left[\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)^\theta\right] - 1$$

$\frac{1-t}{\sqrt{t}} < 1-t < 1$ con $t \in (0,1)$.

$\Rightarrow z^\theta$ es creciente en $z>0$ así

$$\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)^\theta < (1-t)^\theta < < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta>1}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)^\theta < \lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta>1}} (1-t)^\theta =$$

$$\lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta>1}} e^{\theta \ln(1-t)}$$; pero

$\ln(1-t) <$ con $t \in (0,1)$

$$\therefore \lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta>1}} e^{\theta \ln(1-t)} = 0$$

$$\therefore \lim_{\substack{\theta\to\infty \\ \theta>1}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{t}}\right)^\theta = 0$$

La convergencia es puntual.

y esa sería la familia paramétrica $\square$