Modelos de población

EDO en modelos de poblaciones

Miguel Ángel Chávez García [1]

[1]Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.
Licenciatura de Actuaría

18 de agosto de 2025

Contenido

Introducción

Decía el matemático Galileo Galilei: *Las matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el universo.* En este sentido podemos decir que muchos de los fenómenos de la naturaleza se pueden representar y analizar utilizando matemáticas.
El crecimiento de las poblaciones ha despertado interés, el matemático suizo Leonhard Euler en el siglo *XVIII* fue uno de los primeros que estudio del crecimiento de ciertas poblaciones, sin embargo quien profundizo más en ese rubro fue Malthus a finales del mismo siglo.
En esta presentación analizaremos algunos modelos de población utilizando el punto de vista determinístico

Modelos determinísticos de población

Definición

Por población vamos a entender a un conjunto de individuos pertenecientes a la misma especie, que se desarrollan independientemente, sin restricciones, ni competencia entre ellos.

La densidad de la población con estas características en el tiempo t, se denotará por $x(t)$ y vamos a suponer que la función es diferenciable en su dominio.

En principio vamos a suponer una población cerrada; es decir, sin migraciones dentro o fuera de la población. Así los cambios que hay en ella quedan determinados por el nacimiento y muerte de sus integrantes.

Modelos determinísticos de población

Observación

En la biología varios microorganismos se reproducen por división, así que podemos suponer que la velocidad de organismos nacientes es proporcional al número de organismos presentes.

En términos de matemáticas, podemos decir que el tamaño de la población en el tiempo t es $x(t)$. Al transcurrir un tiempo pequeño h tendremos $x(t+h)$, entonces el número de nacimientos es aproximadamente igual a $bhx, b \in \mathbb{R}$. De forma similar se puede pensar las defunciones en el mismo intervalo de tiempo como μhx.

Modelos determiíisticos de población

Lo anterior se puede pensar de la siguiente manera

$$x(t+h) - x(t) \approx (b-\mu)x(t)h$$

entonces

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx (b-\mu)x(t).$$

Al tomar el proceso de límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h\to 0} (b-\mu)x(t).$$

Como $x(t)$ es diferenciable entonces nos queda

$$\dot{x} = (b-\mu)x.$$

Modelos determinísticos de población

Sea $k = b - \mu > 0$, entonces la ecuación que modela este tipo de población es

$$\dot{x} = kx. \tag{1}$$

Cuando se tiene una condición inicial, entonces 1 se le conoce como el problema de Cauchy o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ x(t_0) = x_{t_0} \end{cases} \tag{2}$$

La solución al PVI anterior es

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{e^{kt_0}}\right) e^{kt}$$

Modelo logístico de población

La función $x(t)$ seguirá denotando el tamaño de la población al tiempo t, $\dot{x}(t)$ la velocidad con la cual cambia el tamaño de la población y continuaremos suponiendo que la tasa de crecimiento solo depende del tamaño de la población.
¿Qué sucede cuando las condiciones de la sección anterior no se satisfacen?
El modelo anterior resulta aceptable para organismos simples como son los microorganismos, pero para organismos más complicados como son plantas, animales o seres humanos ya entra en acción otros factores como es la competición intraespecies o que la mortalidad dependa de la densidad poblacional.

Modelo logístico de población

Un modelo simple, en el cual la tasa de crecimiento $\frac{\dot{x}}{x}$ es una función decreciente al tamaño de la población $\lambda - ax$ se puede escribir como

$$\dot{x} = x(\lambda - ax). \tag{3}$$

La ecuación 3 es conocida como ecuación logística y generalmente se escribe de la forma

$$\dot{x} = \lambda x(1 - \frac{a}{\lambda}x)$$

$$\dot{x} = kx(1 - \frac{x}{K}). \tag{4}$$

Sean $k = \lambda$ y $K = \frac{\lambda}{a}$ paramétros tales que $k > 0$ y $K > 0$.

Modelo logístico de población

Observación

En la ecuación 4, si x es muy pequeña entonces se obtiene una ecuación de la forma $\dot{x} \approx kx$; es decir, se recupera el modelo anterior. Cuando x es próximo a K se obtiene $\dot{x} = 0$.

Al desarrollar 4 se puede escribir de la forma

$$\dot{x} = \frac{k}{K}x(K - x)$$

entonces

$$\int \frac{\dot{x}}{x(K-x)} = \frac{k}{K}\int dt.$$

Al usar la integración por fracciones parciales se tiene

$$\frac{k}{K}t + c_0 = \frac{1}{K}(\ln x - \ln(K - x)) + c_1.$$

Modelo logístico de población

Si $c = c_0 - c_1$ entonces

$$\frac{k}{K}t + c = \ln \sqrt[K]{\frac{x}{K-x}} \tag{5}$$

entonces

$$\begin{aligned}
e^{(\frac{k}{K}t+c)} &= \sqrt[K]{\frac{x}{K-x}} \\
e^{kt}e^{Kc} &= \frac{x}{K-x} \\
(K-x)e^{kt}e^{Kc} &= x \\
Ke^{Kc}e^{kt} &= x(1+e^{kt}e^{Kc}) \\
\frac{Ke^{Kc}e^{kt}}{1+e^{kt}e^{Kc}} &= x(t).
\end{aligned}$$

Modelo logístico de población

Para el PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{k}{K} x(K - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

la solución es

$$x(t) = \frac{K e^{Kc} e^{kt}}{1 + e^{kt} e^{Kc}}, \quad \text{donde} \quad c = \ln \sqrt[K]{\frac{x(t_0)}{K - x(t_0)}} - \frac{k}{K} t_0.$$

Observación

De la ecuación 5 se tiene que la solución tiene sentido si y sólo si

1. $K - x > 0.$
2. $x(t_0) > 0.$

Geometría del modelo logístico

Analicemos

$$\dot{x} = \frac{k}{K}x(K - x).$$

Sea $f(x) = \dfrac{k}{K}x(K - x)$ entonces

1. Las raíces son $x_1 = 0$ y $x_2 = K$; es decir, las raíces de $f(x)$ son las asíntotas de $x(t)$.
2. $-\dfrac{k}{K} < 0$ esto implica que la gráfica es cóncava.
3. $f'(x) = -\dfrac{2k}{K}x + k$ entonces, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{K}{2}$.
4. $f''(x) = -\dfrac{2k}{K}$, por lo tanto en $\dfrac{K}{2}$ alcanza un máximo.

Geometría del modelo logístico

El análisis anterior se puede ver en la gráfica

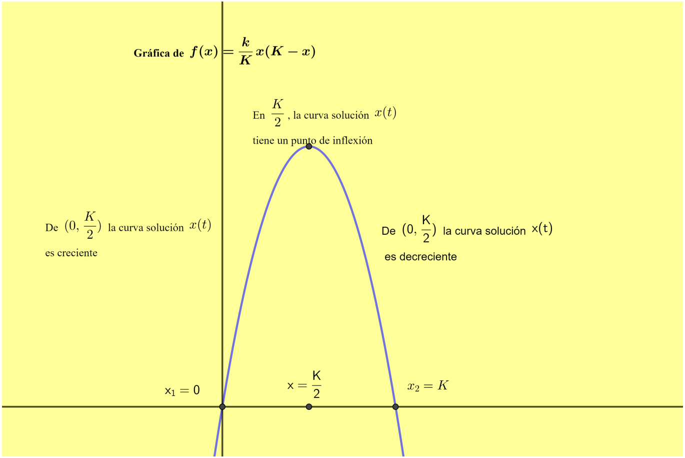

Figura: Plano fase de $x(t)$

Geometría del modelo logístico

La gráfica de la curva solución

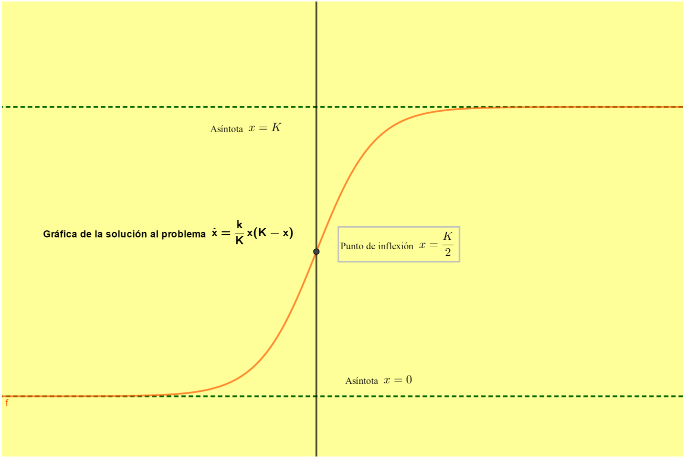

Figura: Comportamiento de $x(t)$

Modelo logístico en epidemiología

El modelo logístico surge de forma natural al estudiar los sistemas epidemiológicos, como ejemplo vamos a analizar la dinámica de la transmisión de la gonorrea en una población de humanos sexualmente activa. Para ello se harán los siguientes supuestos

1. $S(t)$ denotará todos los individuos sexualmente activos no infectados.
2. $I(t)$ a todos los individuos sexualmente activos infectados.
3. $N(t) = S(t) + I(t)$ el tamaño de la población total en estudio.
4. Los nuevos individuos sexualmente activos llegan a una tasa de $\mu N(t)$ y que ninguna de ellas esta infectado.
5. Los individuos abandonan la clase sexualmente activos a una tasa de $\mu N(t)$.
6. Los individuos que abandonan la clase infecciosa y se recuperaron vuelven a la clase susceptible a una tasa de $\lambda I(t)$.

Modelo logístico en epidemiología

Sea $B(S, I)$ la tasa de incidencia; i.e. el número de nuevos casos de infección por unidad de tiempo, así el modelo que se propone es el siguiente

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N(t) - B(S, I) - \mu S + I \\ \dot{I} = B(S, I) - (\mu + \lambda) I \end{cases} \tag{7}$$

Observación

De acuerdo con los supuestos que hemos realizado, entonces

$$B(S, 0) = B(0, I) = B(0, 0) = 0.$$

Es decir, sin susceptibles o sin infectados o sin ambos, la tasa es cero.

Por ello es viable pensar que

$$B(S, I) \propto SI.$$

Modelo logístico en epidemiología

Es decir, la tasa de incidencia $B(S, I)$ es proporcional al producto de las poblaciones susceptibles $S(t)$ por los infectados $I(t)$. Vamos a hacer más suposiciones

1. Denotemos por c el número de promedio de parejas sexuales por individuo por unidad de tiempo.
2. φ el número promedio de contactos por pareja.
3. Tanto c, φ se consideran constantes entonces $x\varphi S(t)$ denotará el número total de contactos por unidad de tiempo de todos los individuos susceptibles en el tiempo t.
4. Se considera que la población se mezcla de forma homogénea; i.e. al azar entonces el número de contactos sexuales por unidad de tiempo entre susceptibles es

$$\varphi c \frac{S(t)}{N(t)}.$$

Modelo logístico en epidemiología

Recordemos que $N(t) = S(t) + I(t)$, entonces podemos pensar que el número de contactos sexuales por unidad de tiempo entre susceptibles e infectados es

$$\varphi c \frac{I(t)}{N(t)}.$$

Con lo anterior

$$B(S, I) \propto \varphi c S(t) \frac{I(t)}{N(t)},$$

Como última suposición vamos a pensar que $q \in [0, 1]$ es la proporción de contactos en la cual se desarrolla en nuevos casos de infección.

Modelo logístico en epidemiología

Definición

La tasa de transmisión es $\beta = q\varphi c$, así la tasa de incidencia en una población homogénea es

$$B(S, I) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N(t)}$$

De esta manera el sistema de ecuaciones 7 se escribe en su forma PVI:

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N(t) - \beta S(t)\dfrac{I(t)}{N(t)} - \mu S + I \\ \dot{I} = \beta S(t)\dfrac{I(t)}{N(t)} - (\mu + \lambda)I \\ S(0) = S_0 > 0 \\ I(0) = I_0 > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Modelo logístico en epidemiología

Como $N(t) = S(t) + I(t)$ entonces $0 = \dot{N} = \dot{S} + \dot{I}$ por consiguiente $S(t) = N - I(t)$. Al sustituir en 8 se tiene

$$\begin{cases} -\dot{I} = \mu N(t) - \beta(N - I(t))\dfrac{I(t)}{N(t)} - \mu(N - I(t)) + I \\ \dot{I} = \beta(N - I(t))\dfrac{I(t)}{N(t)} - (\mu + \lambda)I. \end{cases} \tag{9}$$

Entonces basta analizar $\dot{I}$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \beta I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{N}\right) - (\mu + \lambda)I(t) \\ &= \frac{I(t)}{N}\Big(\beta(N - I(t))) - (\mu + \lambda)N\Big) \\ &= \frac{I(t)}{N}\Big((\beta - (\mu + \lambda))N - \beta I(t)\Big) \end{aligned}$$

Modelo logístico en epidemiología

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\beta-(\mu+\lambda))I(t)}{N}\Big(N - \frac{\beta I(t)}{\beta-(\mu+\lambda)}\Big)\\
&= (\beta-(\mu+\lambda))I(t)\Big(1 - \frac{\beta I(t)}{N(\beta-(\mu+\lambda))}\Big)\\
&= (\beta-(\mu+\lambda))I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{N(1-\frac{(\mu+\lambda)}{\beta})}\right)\\
\therefore \quad \dot{I}(t) &= \beta\left(1-\frac{(\mu+\lambda)}{\beta}\right)I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{N(1-\frac{(\mu+\lambda)}{\beta})}\right).
\end{aligned}
$$

Sea $\mathcal{R}_0 = \dfrac{\beta}{\mu+\lambda}$ entonces la última ecuación se puede escribir como

Modelo logístico en epidemiología

$$\dot{I}(t) = \beta\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)I(t)\left(1-\frac{I(t)}{N(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0})}\right).$$

Sean $r = \beta\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ y $K = N\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$, entonces la ecuación que se obtiene es

$$\dot{I}(t) = rI(t)\left(1-\frac{I(t)}{K}\right) \tag{10}$$

la cual es una ecuación logística.

Referencias

- Brauer, F., Castillo Chávez C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Second Edition, Springer Verlag, NY, 2010.
- Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*,Second Edition, Springer Verlag, NY, 1993.