Modelos de iteracción entre poblaciones

Modelo Presa - Depredador

Miguel Ángel Chávez García [1]

[1]Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.
Licenciatura de Actuaría

8 de noviembre de 2025

Contenido

Introducción

Uno de los primeros modelos matemáticos que se produjeron para explicar la iteracción entre poblaciones de especies se llevo a cabo durante los años $20's$ del siglo XX. El biólogo italiano U. D'Ancona estaba estudiando la variación poblacional de algunas especies de peces que interactuan entre ellas. En concreto la población de selacios y pescado comestible, esto a partir de los años de la Primera guerra mundial. D'Ancona trató de explicar biologicamente el comportamiento de la iteracción, sin embargo habia una inconsistencia en su argumentación, por ello consulto al matemático Vito Volterra para que hiciera la modelación matemática del fenómeno, en 1926 Volterra encontro el modelo que explicaba el fenómeno, cabe mencionar que en 1925 Alfred Lotka encontro el mismo modelo.

Origen del problema

U. D'Ancona estudiaba desde 1914 las variaciones problacionales de algunas especies de peces y encontró información referente al porcentaje de captura de selacios en los puertos del Mar Adriático; los cuales no se consideran comestibles. Dichos pocentajes aumentaron durante el tiempo que duro la Primera Guerra Mundial y argumento que el aumento del procentaje de selacios se debía a la reducción de la pesca durante dicho periodo. La pregunta que quería responder era ¿cómo afecta la intensidad de la pesca a la población de peces?

Origen del problema

La explicación proporcionada por el biólogo D' Ancona tenía una incosistencia, ya que la población de peces comestibles también había incrementado durante ese tiempo. En resumen él probo que si se realiza la pesca a un intensidad baja entonces hay más selacios, pero no explica por qué una baja intensidad de pesca es más benefico para el depredador que para la presa. Aquí la intensidad de la pesca se refiere a la cantidad de pesca realizada.

Planteamiento del problema

Al agotar la argumentación biológica, D'Ancona consulta con el matemático italiano Vito Volterra para que pueda formular un modelo matemático del crecimiento de los selacios y sus presas; por ende explicar la inconsistencia antes mencionada.
Volterra comenzo por separar e identificar a la población de peces de la siguiente forma:

1. $x(t)$ para los peces comestibles (sardinas, merluzas, bacalao) presas.
2. $y(t)$ para los selacios (tiburones y rayas), depredador.

Planteamiento del problema

Las siguientes condiciones solicito en cada una de las poblaciones de los peces

- Los peces comestibles no compiten entre sí por su alimentación.
- En ausencia de depredadores los peces comestibles crecen de acuerdo a $\dot{x} = ax, a > 0$.
- El número de contacto que se tiene por unidad de tiempo de las dos poblaciones será $bxy, b > 0$.
- La primer ecuación es

$$\dot{x} = ax - bxy \tag{1}$$

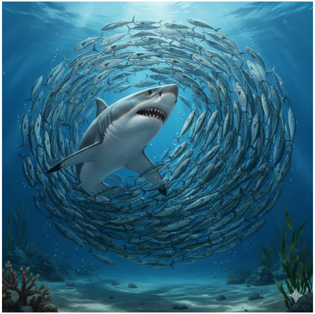
- Los selacios su tasa de decrecimiento es $\dot{y} = -cx, c > 0$ y tasa de contacto con los peces comestibles es dxy.
- La segunda ecuación es

$$\dot{y} = -cy + dxy \tag{2}$$

Planteamiento del problema

Así el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la dinámica de los peces, i.e. la iteracción entre los dos grupos de peces, sin pesca de por medio esta dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \tag{3}$$



Análisis del sistema de Lotka - Volterra

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 3 se le conoce como sistema depredador - presa o de Lokta - Volterra. Los puntos de equilibrio son $(x(t), y(t)) = (0,0)$ y $(x(t), y(t)) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$; es decir cuando $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$. Observe que

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Entonces

$$\frac{(a - by)\dot{y}}{y} = \frac{(-c + dx)\dot{x}}{x},$$

al integrar se sigue

$$a \ln y - by + c_1 = -c \ln x + dx + c_2$$

Análisis del sistema de Lotka - Volterra

$$a \ln y - by + c_1 + c \ln x - dx = c, c = c_2 - c_1,$$

así

$$\ln(x^c y^a) = dx + by + c \implies x^c y^a = ke^{dx+by}, k = e^c.$$

$$\therefore \quad \frac{x^c y^a}{e^{by} e^{dx}} = k. \tag{4}$$

6 es la solución de 3. Cuando no hay contacto entre la presa y depredador entonces el sistema 3 es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = & ax \\ \dot{y} = & -cy \end{cases} \tag{5}$$

Entonces los valores propios son reales y de signo opuesto; por consiguiente $(0, 0)$ es un punto silla.

Análisis del sistema de Lotka - Volterra

$$a \ln y - by + c_1 + c \ln x - dx = c, c = c_2 - c_1,$$

así

$$\ln(x^c y^a) = dx + by + c \implies x^c y^a = k e^{dx+by}, k = e^c.$$

$$\therefore \quad \frac{x^c y^a}{e^{by} e^{dx}} = k. \tag{6}$$

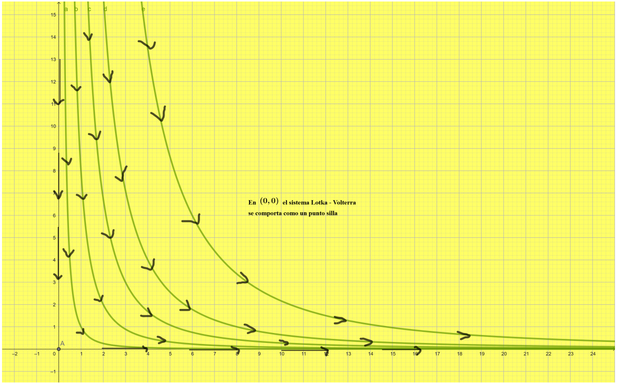
6 es la solución de 3. Cuando no hay contacto entre la presa y depredador entonces el sistema 3 es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = & ax \\ \dot{y} = & -cy \end{cases} \tag{7}$$

Entonces los valores propios son reales y de signo opuesto; por consiguiente $(0,0)$ es un punto silla.

Análisis del sistema de Lotka - Volterra

Es decir en el punto de equilibrio $(0, 0)$ el comportamiento del sistema es



¿Qué sucede en el punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ de la ecuación 3?

Análisis del sistema de Lotka - Volterra

Para ello se hagamos lo siguiente: Sea

$$F(x,y) = (ax - bxy, -cy + dxy),$$

entonces la matriz de Jacobi formada por las derivadas parciales es:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}.$$

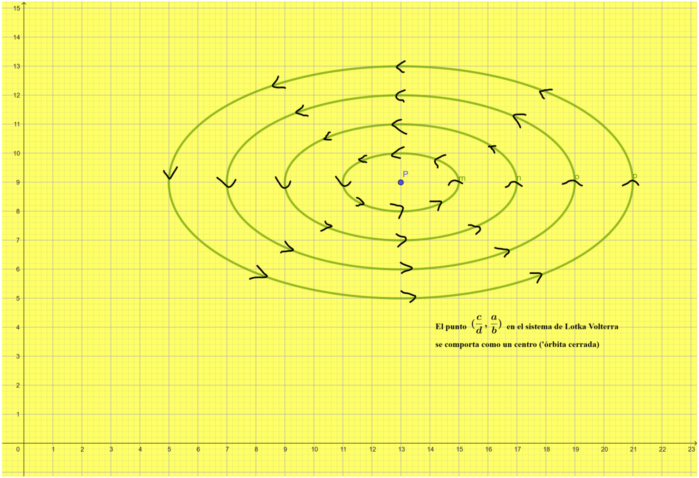
Al evaluar en el punto críticoo o de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ se tiene

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{a} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz son complejos, por ende las curvas solución alrededor del punto critico es un centro.

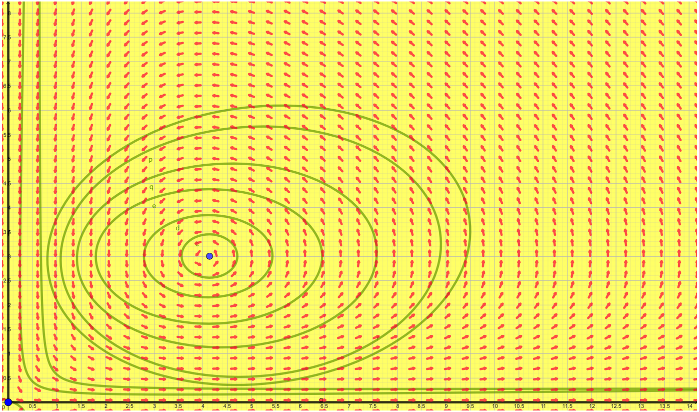
Análisis del sistema de Lotka - Volterra

Así las curvas para el segundo punto crítico son de la siguiente forma



Análisis del sistema de Lotka - Volterra

Por consiguiente el sistema 3 tiene el siguiente comportamiento



Sistema de Lotka - Volterra con pesca

Con base al análisis anterior, ahora es posible considerar los efectos de la acción del hombre en la población de peces: La pesca. Dicha acción reduce la población de selacios y peces comestibles y las tasas de reducción vienen dadas por

- $\varepsilon x(t)$ para los peces comestibles.
- $\varepsilon y(y)$ para los selacios.

Es decir, ε es la medida de la intensidad de la pesca que hace el hombre, por consiguiente el sistema que representa ahora la dinámica de los peces y la repercusión de la pesca es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = & ax - bxy - \varepsilon x \\ \dot{y} = & -cy + dxy - \varepsilon y \end{cases}$$

Sistema de Lotka - Volterra con pesca

El cual se reescribe como el sistema 3 de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{x} = & (a-\varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = & -(c+\varepsilon)y + dxy \end{cases} \tag{8}$$

Observemos que se preserva el punto de equilibrio $(0,0)$, sin embargo ahora tenemos uno nuevo, a saber

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{c+\varepsilon}{d}, \frac{a-\varepsilon}{b}\right).$$

El análisis es análogo al que se relizó anteriormente, si $a-\varepsilon > 0$ y $c+\varepsilon > 0$.

Sistema de Lotka - Volterra con pesca

Las conclusiones que se llegan son:

1. Si $a > \varepsilon$, se incrementa el número de peces somestibles. Es decir la pesca es moderada y disminuye el número de selacios.
2. Un nivel bajo de pesca incrementa el número de selacios y disminuye el de peces comestibles.

Esta conclusión se le conoce como el *Principio de Volterra* y explica el problema de D' Ancona.

Todos los modelos son erroneos, pero algunos son útiles

George E. P. Box estadístico britanico dijo:*All models are wrong, but some are useful.* En ese sentido la solución que dió Vito Volterra no fue totalmente aceptado por la comunidad de biologos. Experimentos posteriores mostraron que el modelo presa - depredador en otras especies no da un resultado análogo.
Hay un modelo donde la competencia por los recursos disponibles entre los grupos de presa y depredador es más intensa y esta basado en el sistema 3

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & ax - bxy - ex^2 \\ \dot{y} = & -cy + dxy - fy^2 \end{array} \right. \qquad (9)$$

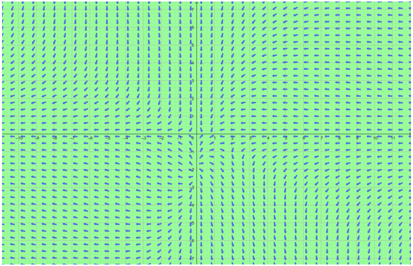
Los términos a, b, c, d son los mismos del modelo analizado previamente.

Todos los modelos son erroneos, pero algunos son útiles

y las restantes significa los siguiente:

1. ex^2 representa la competeición interna de las presas por los recursos externos limitados.
2. fy^2 representa la competición de los depredadores por las presas, las cuales también son límitadas.

Aún así, hay experimentos que tampoco es suficiente el sistema general 9



Referencias

- Brauer. F, Castillo Chávez C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Second Edition, Springer Verlagg, NY, 2010.
- Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*, First Edition, Cambridge University Press, NY, 2001.
- Kot M., *Elements of Mathematical Ecology*, Second Edition, Springer Verlag, NY, 2010.