Parámetros en Sistemas Biológicos

EDO y probabilidad en poblaciones

Miguel Ángel Chávez García [1]

[1]Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.
Licenciatura de Actuaría

8 de septiembre de 2025

Contenido

1. Introducción
2. Proceso de muerte
3. Modelo de distribución de probabilidad exponencial
4. Problemas con poblaciones con recolección
5. Referencias

Introducción

Uno de los retos de la biología matemática es el desarrollo de modelos que incorporen parámetros con significado biológico. La distribución exponencial tiene un papel importante, en esta presentación analizaremos un modelo de matemático que involocra EDO y probabilidad, y posteriormente se interpretará los resultados en cada uno de los ejemplos.

Proceso de muerte

Sea $\mu > 0$ la tasa de mortalidad per capita de una población, dicho proceso esta modelado por el PVI

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\mu N(t), 0 < \mu < \infty \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{1}$$

Donde $N(t)$ es el tamaño de la población al tiempo t. Entonces de la solucón del PVI se sigue

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

$e^{-\mu t}$ denotará la proporción de individuos los cuales estan vivos al tiempo $t = 0$ y que todavía estan vivos en el tiempo t.

Proceso de muerte

Usando probabilidad, $e^{-\mu t}$ denota la probabilidad de que un individuo permanezca vivo en el tiempo $t \geq 0$ dado que estaba vivo en el tiempo $t = 0$. Por ello podemos formar la función

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$F(t)$ denota la probabilidad de morir en el intervalo $[0, t)$. A la función 2 se le conoce como función de distribución. ¿Qué es una función de distribución?

Proceso de muerte

Definición

Una función $F(t)$ es una distribución de probabilidad si y sólo si satisface lo siguiente:

1. $F(t) \geq 0$
2. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$
3. $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$

La función 2 satisface la definición y se le conoce como función de distribución de probabilidad acumulativa exponencial.

Las distribuciones se asocian con variables aleatorias; es decir, variables que toman un valor o un conjunto de valores con una probabilidad.

Modelo de distribución de probabilidad exponencial

Sea X el tiempo de muerte de un individuo, podemos suponer que X es un evento aleatorio y toma los valores de $[0, \infty)$ con alguna probabilidad. Por consiguiente X es una variable aleatoria continua. Modelar el proceso de muerte X con la función 2 es equivalente a la siguiente afirmación de probabilidad:

$$Prob[X \leq t] \equiv F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

entonces podemos proceder de la manera siguiente

$$Prob[t < X \leq t + \Delta] = F(t + \Delta) - F(t),$$

donde $\Delta > 0$ un incremento.

Modelo de distribución de probabilidad exponencial

Entonces

$$\frac{Prob[t < X \leq t + \Delta]}{\Delta} = \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta},$$

así

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{Prob[t < X \leq t + \Delta]}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} =$$

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

La función $f(t)$ satisface la definición 1; por lo tanto, también es una función de distribución de probabilidad.

Modelo de distribución de probabilidad exponencial

La función $f(t)$ satisface

1. $f(t) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
3. $Prob[t < X \leq t + \Delta] = \int_t^{t+\Delta} f(e)de \approx \Delta f(t)$
4. $f(t) = F'(t)$.

El tiempo medio antes de la muerte o la esperanza de vida, viene dado por el valor medio esperado de X es decir:

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt.$$

Entonces

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} t\mu e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu}.$$

Modelo de distribución de probabilidad exponencial

Teorema

Si A, B son dos eventos probabilísticos entonces

$$Prob[A|B] \cdot Prob[B] = Prob[A \cap B]$$

El resultado anterior se le conoce como Teorema de Bayes y lo usaremos de esta manera:
Sean $A = \{X > t\}, B = \{X \leq t + \Delta\}$ entonces

$$Prob[t < X \leq t + \Delta] = Prob[X \leq t + \Delta | X > t] \cdot Prob[X > t],$$

es decir

$$\frac{Prob[t < X \leq t + \Delta]}{Prob[X > t]} = Prob[X \leq t + \Delta | X > t].$$

Modelo de distribución de probabilidad exponencial

Entonces

$$\frac{Prob[t < X \leq t + \Delta]}{Prob[X > t]} = Prob[X \leq t + \Delta | X > t],$$

como $\Delta > 0$, se tiene

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{Prob[t < X \leq t + \Delta]}{\Delta Prob[X > t]} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{Prob[X \leq t + \Delta | X > t]}{\Delta}.$$

Así

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{Prob[X \leq t + \Delta | X > t]}{\Delta} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

Problemas de poblaciones con recolección

Las ecuaciones de población que hemos resuelto hasta el momento son de la forma

$$\dot{x} = f(x).$$

Definición

Un modelo de población sujeto a una función $h(t)$, la cual es la tasa de recolección o cosecha para los individuos por unidad de tiempo, es de la forma

$$\dot{x} = f(x) - h(t)$$

y se le denomina modelo de cosecha o recolección de población.

Nuestro primer problema que vamos a considerar es la ecuación logística con recolección

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \alpha N(t)$$

Problemas de poblaciones con recolección

Si N es muy pequeño con respecto de K entonces de la ecuación se sigue

$$\dot{N}(t) \approx rN(t)$$

y su solución es $N(t) = N_0 e^{rt}, 0 \leq t < t_0$. t_0, N_0 lo suficientemente pequeñas. r denota la tasa de crecimiento intrínseca; es decir la tasa de crecimiento por individuo en ausencia de competencia.

Si $\alpha \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{\alpha}\dot{N}(t) = \frac{r}{\alpha}N(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - N(t).$$

Sea $\mathcal{R}_0 = \dfrac{r}{\alpha} =$ tasa de crecimiento por tiempo promedio antes de morir.

Problemas de poblaciones con recolección

Si $\alpha = r$ o $\mathcal{R}_0 = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\dot{N}(t) &= N(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - rN(t) \\ \dot{N}(t) &= rN(t) - r\frac{N(t)}{K} - rN(t) \\ &= -\frac{rN(t)}{K}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{N}^2(s)}{N(s)} &= -\frac{r}{K}\int_{t_0}^{t} ds \\ -\Big(\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{N(t_0)}\Big) &= -\frac{r}{K}(t - t_0) \\ N(t) &= \frac{1}{\frac{1}{N(t_0)} + \frac{r}{K}(t - t_0)}. \end{aligned}$$

Problemas de poblaciones con recolección

Así

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(t_0)} + \frac{r}{K}(t-t_0)} = 0.$$

Cuando $\mathcal{R}_0 \neq 1$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\dot{N}(t) &= \mathcal{R}_0 N(t)\Big(1-\frac{N(t)}{K}\Big) - N(t)\\
\dot{N}(t) &= rN(t)\Big(1-\frac{N(t)}{K}\Big) - \frac{r}{\mathcal{R}_0}N(t)\\
&= rN(t)\Big[\Big(1-\frac{r}{\mathcal{R}_0}\Big) - \frac{N(t)}{K}\Big]\\
&= rN(t)\Big(1-\frac{r}{\mathcal{R}_0}\Big)\left(1-\frac{N(t)}{K(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0})}\right)
\end{aligned}$$

Problemas de poblaciones con recolección

Si $\mathcal{R}_0 > 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} rN(t)\Big(1-\frac{r}{\mathcal{R}_0}\Big)\left(1-\frac{N(t)}{K(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0})}\right)\\ &= K\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{R}_0 < 1$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} rN(t)\Big(1-\frac{r}{\mathcal{R}_0}\Big)\left(1-\frac{N(t)}{K(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0})}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Con lo anterior se puede concluir lo siguiente

Problemas de poblaciones con recolección

1. $\mathcal{R}_0$ denota el número de descendientes de la pequeña población inicial N_0 de fundadores.
2. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, entonces $N(t)$ crece, pero se estabiliza en $K\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$.
3. Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, entonces $N(t)$ tiende a cero y la población se extingue.

Problemas de poblaciones con recolección

Del modelo de la transmisión de la gonorrea entre una población sexualmente activa, se había llegado a la ecuación logística

$$\dot{I}(t) = rI(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right) \tag{4}$$

La EDO con recoleccción es

$$\dot{I}(t) = \beta I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right) - \xi I(t),$$

Donde $\beta = q\varphi_c$ es el coeficiente de transmisión y ξ es la tasa de recuperación o de tratamiento. Al hacer un análisis similar, sea $\mathcal{R}_0 = \dfrac{\beta}{\xi} =$ contactos efectivos por periodo efectivo de infección.

Problemas de poblaciones con recolección

Si $\mathcal{R}_0 > 1$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = K\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_I}\right).$$

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$$

$$\dot{I}(t) = rI(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right) \tag{5}$$

Entonces

1. $\mathcal{R}_0$ denota el número de infecciones secundarias (descendientes) de la pequeña población inicial I_0 de infectados.
2. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, entonces $I(t)$ crece, pero se estabiliza en $K\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$.
3. Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, entonces $I(t)$ tiende a cero y la infección se extingue.

Referencias

- BRAUER, F., CASTILLO CHÁVEZ C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Second Edition, Springer Verlag, NY, 2010.
- BRAUN, M., *Differential Equations and Their Applications*,Second Edition, Springer Verlag, NY, 1993.
- RINCÓN, L., *Introducción a la probabilidad*,Primera Edición, La prensa en Ciencias, UNAM, México, 2014.