

Estruturas de Dados

Árvores 2-4



2025/2026

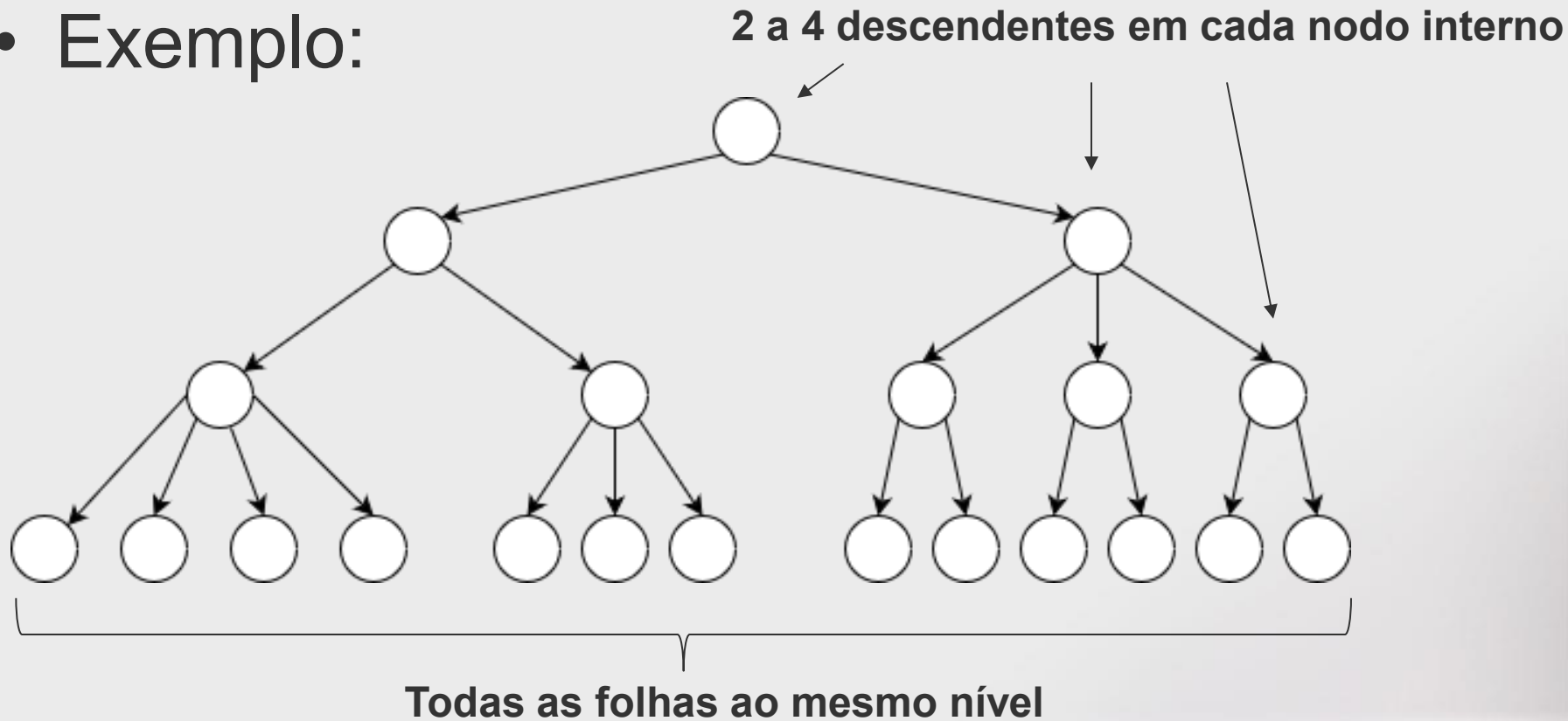
Árvores 2-4

- Uma árvore 2-4 é uma árvore que verifica as seguintes propriedades:
 - **Propriedade 1 (altura)** – Todas as folhas têm a mesma altura
 - **Propriedade 2 (grau)** – Todos os nodos internos têm 2, 3 ou 4 descendentes.
- Uma árvore 2-4 com n folhas tem altura máxima $\log n$.



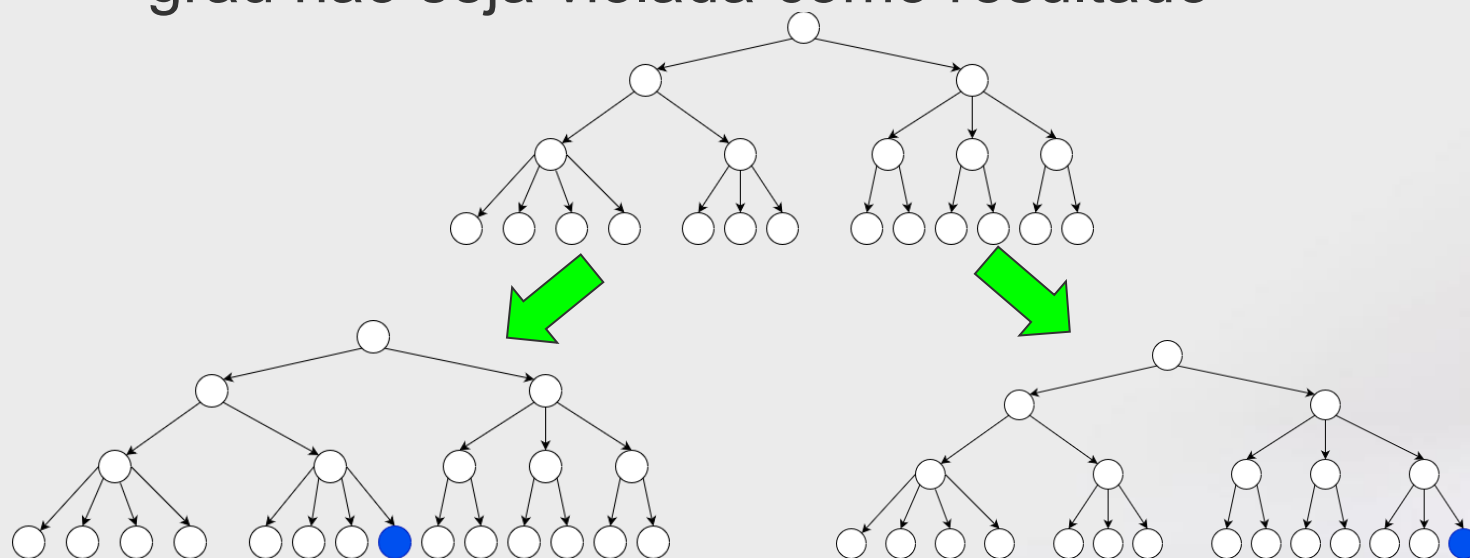
Árvores 2-4

- Exemplo:



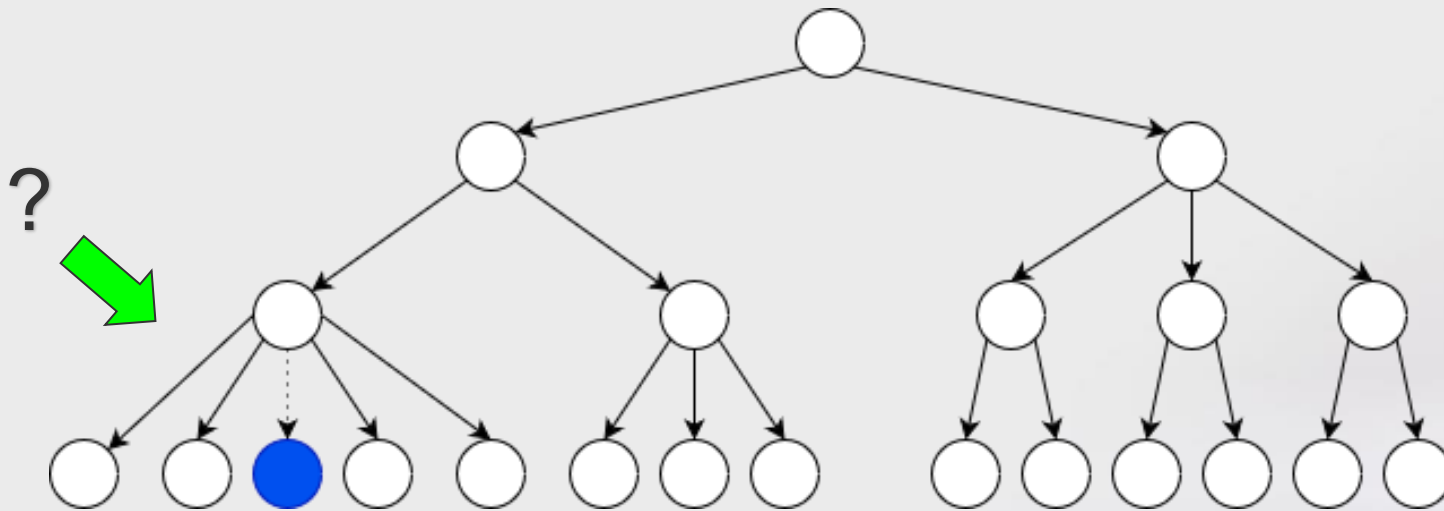
Árvores 2-4

- Acrescentar uma folha:
 - Caso seja acrescentada uma nova folha, ele pode ser simplesmente acrescentada como descendente de um nodo do penúltimo nível, desde a propriedade de grau não seja violada como resultado



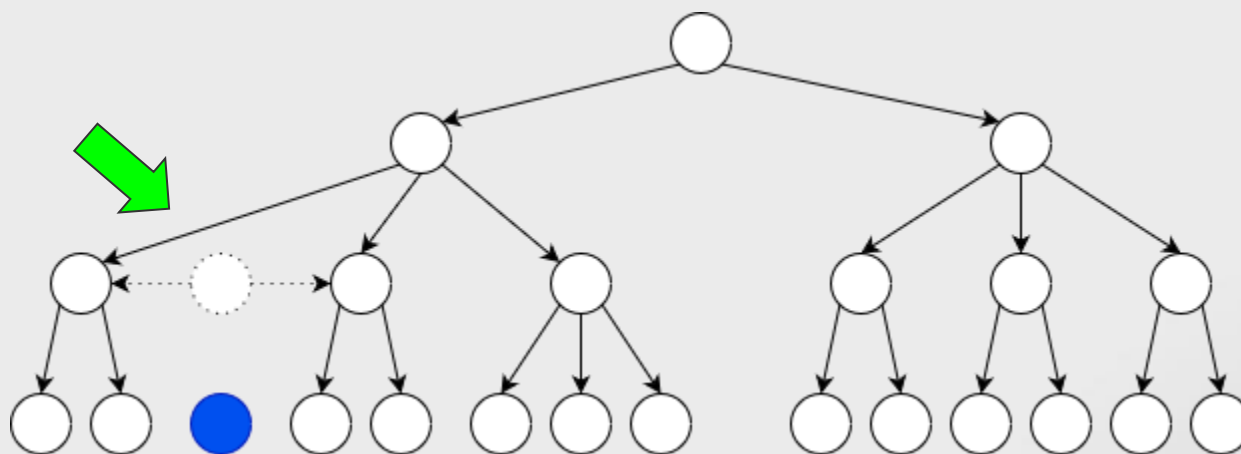
Árvores 2-4

- Acrescentar uma folha:
 - O que acontece se a propriedade de grau for violada como resultado da inserção?



Árvores 2-4

- Acrescentar uma folha:
 - O que acontece se a propriedade de grau for violada como resultado da inserção?



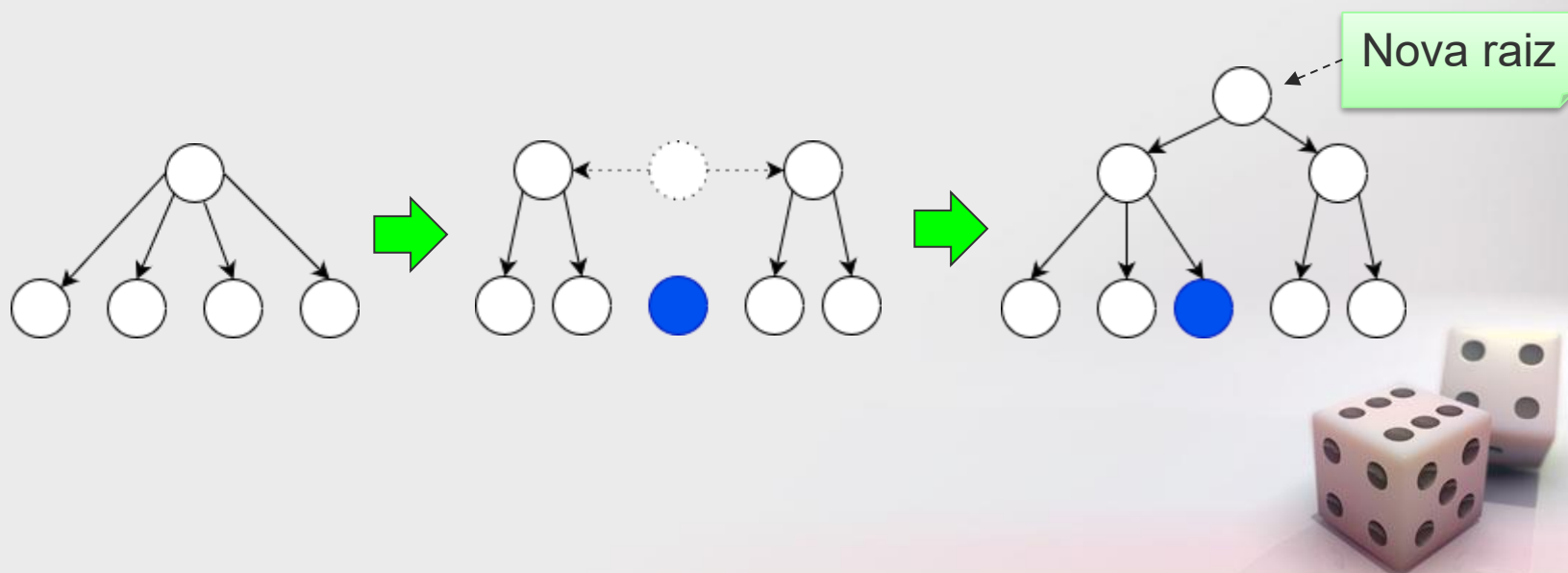
Nesse caso, é possível *dividir* o nodo problemático em 2 nodos com dois descendentes...

- Dado que o nodo original tinha 4 descendentes (o grau máximo), o resultado será dois nodos com 2 descendentes (o grau mínimo)



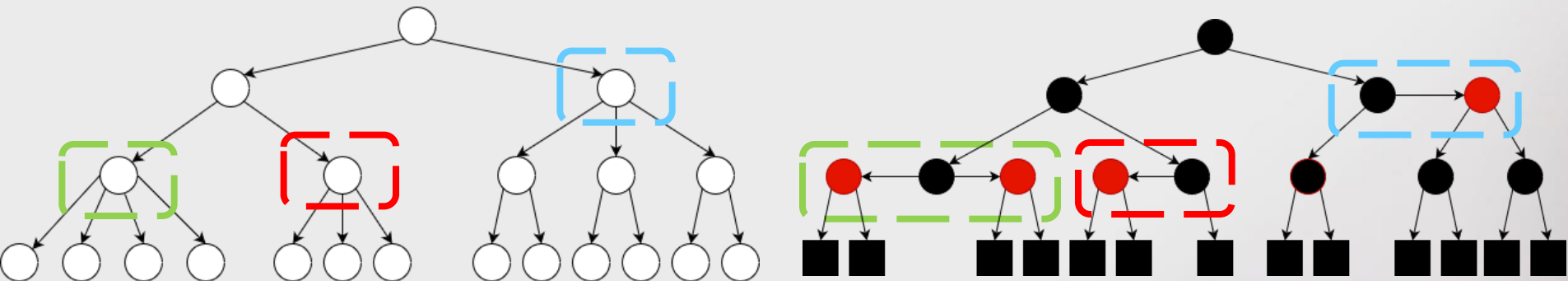
Árvores 2-4

- Acrescentar uma folha:
 - O processo de divisão pode ser aplicado recursivamente se necessário.
 - Caso a raiz seja subdividida, é criada uma nova raiz.
 - Toda a árvore irá então, neste caso, aumentar um nível de profundidade.



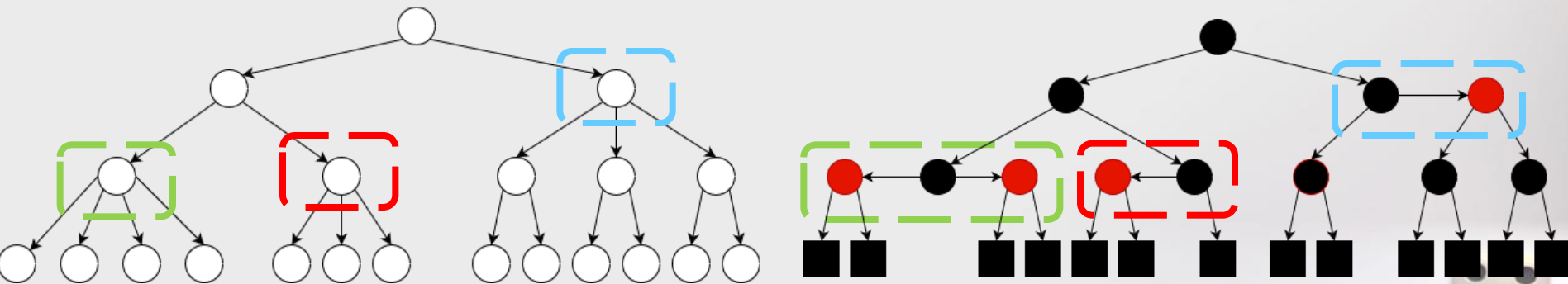
Representação alternativa de árvore 2-4

- Podem ser usados nodos de duas cores diferentes para representar uma árvore 2-4 usando uma árvore binária.



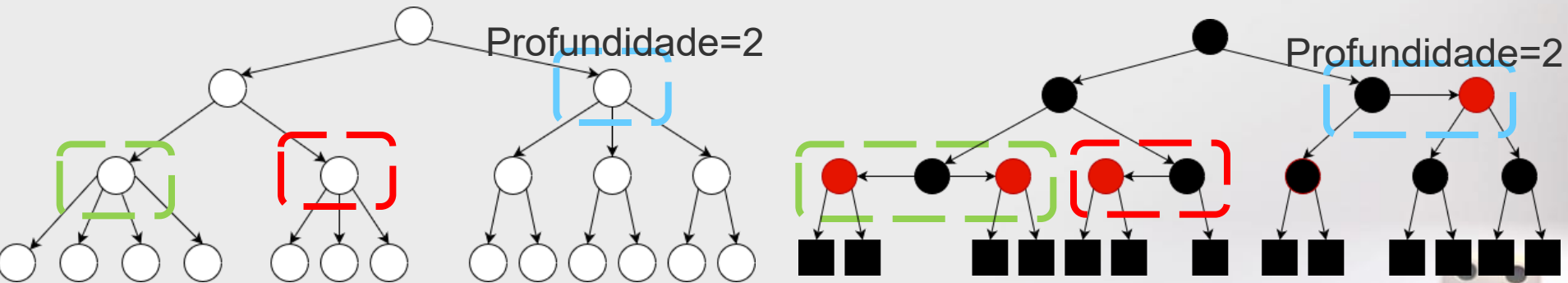
Representação alternativa de árvore 2-4

- Podem ser usados nodos de duas cores diferentes para representar uma árvore 2-4 usando uma árvore binária.
 - Um nodo vermelho representa uma “parte” do nodo da árvore 2-4, correspondendo à mesma altura na árvore 2-4 que o seu antecessor.



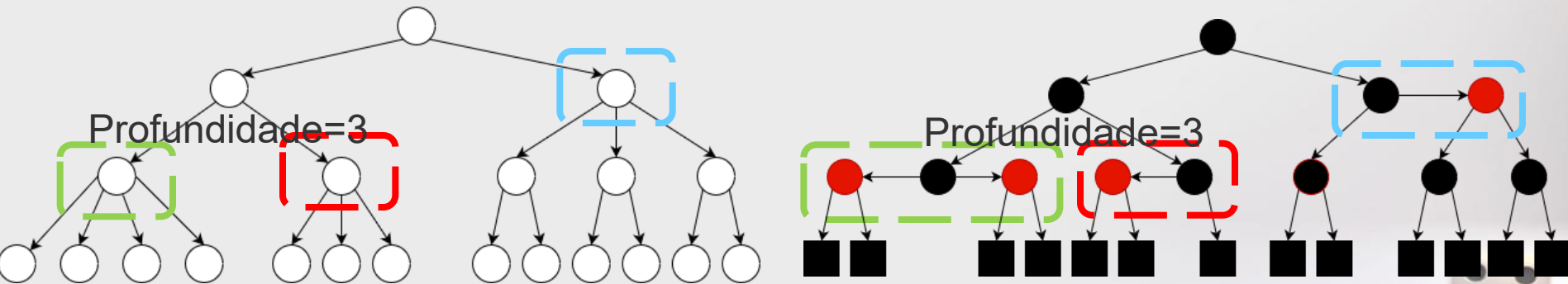
Representação alternativa de árvore 2-4

- Podem ser usados nodos de duas cores diferentes para representar uma árvore 2-4 usando uma árvore binária.
 - Um nodo vermelho representa uma “parte” do nodo da árvore 2-4, correspondendo à mesma altura na árvore 2-4 que o seu antecessor.



Representação alternativa de árvore 2-4

- Podem ser usados nodos de duas cores diferentes para representar uma árvore 2-4 usando uma árvore binária.
 - Um nodo vermelho representa uma “parte” do nodo da árvore 2-4, correspondendo à mesma altura na árvore 2-4 que o seu antecessor.



Representação alternativa de árvore 2-4

- Qual seria a vantagem de fazer isto?
- Não estamos a desperdiçar a vantagem inerente de uma árvore 2-4 ao substituí-la por uma “simulação” com uma árvore binária ?...



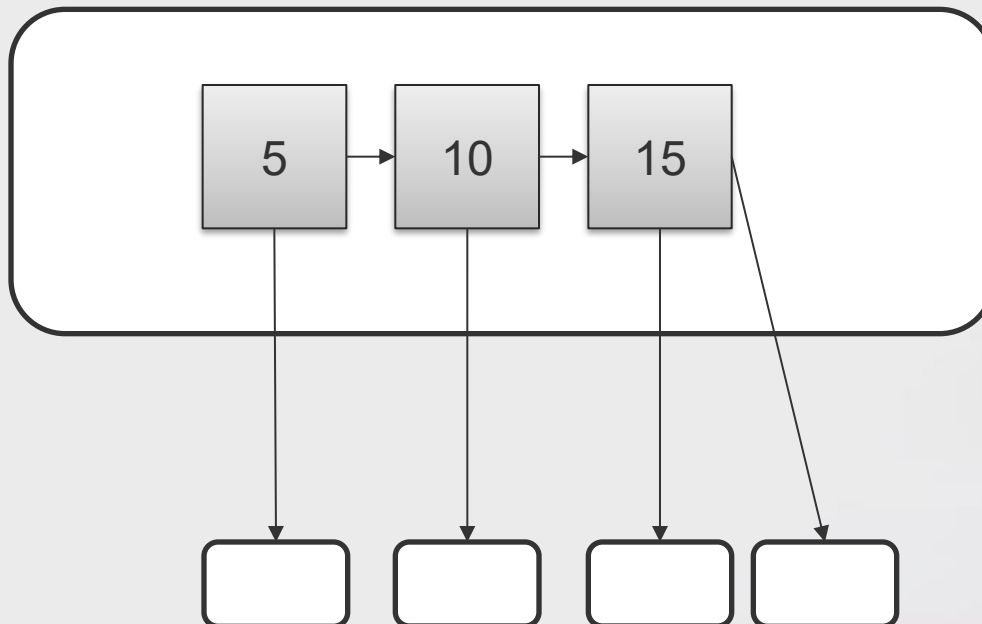
Representação alternativa de árvore 2-4

- Qual seria a vantagem de fazer isto?
- Não estamos a desperdiçar a vantagem inerente de uma árvore 2-4 ao substituí-la por uma “simulação” com uma árvore binária ?...
- **Nem por isso...**



Representação alternativa de árvore 2-4

- Representação de um nodo de uma árvore 2-4:
 - Usamos uma lista para conter os valores e referências para descendentes (se fosse um array o mesmo raciocínio é aplicável)



Representação alternativa de árvore 2-4

- Modificando um pouco a representação, vemos que na verdade o que temos é, *em termos práticos*, uma árvore binária:
 - A representação de uma árvore 2-4 como uma árvore binária é uma implementação normal do conceito de árvore 2-4

