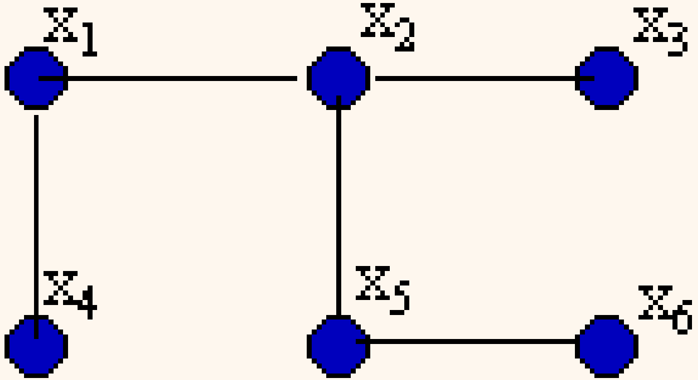
TEORIA DOS GRAFOS

Profª Laura Pacifico

2025 | SETEMBRO

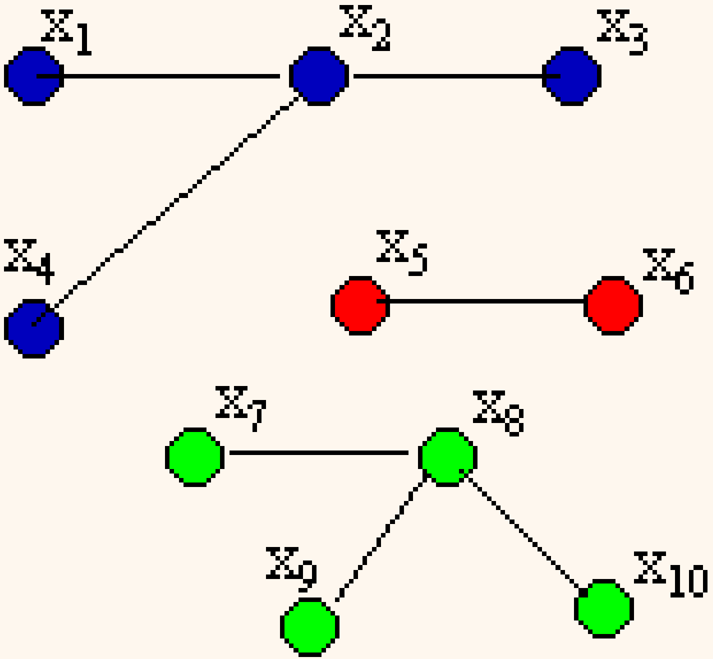
O que é uma Árvore?

Uma **árvore** é um grafo conexo, não orientado e sem circuitos simples. Ou seja, entre quaisquer dois vértices existe um único caminho simples, e não há ciclos.



Floresta: Conjunto de Árvores

Uma **floresta** é um grafo cujas componentes conexas são árvores. Ou seja, é um conjunto de árvores disjuntas, cada uma sem ciclos.



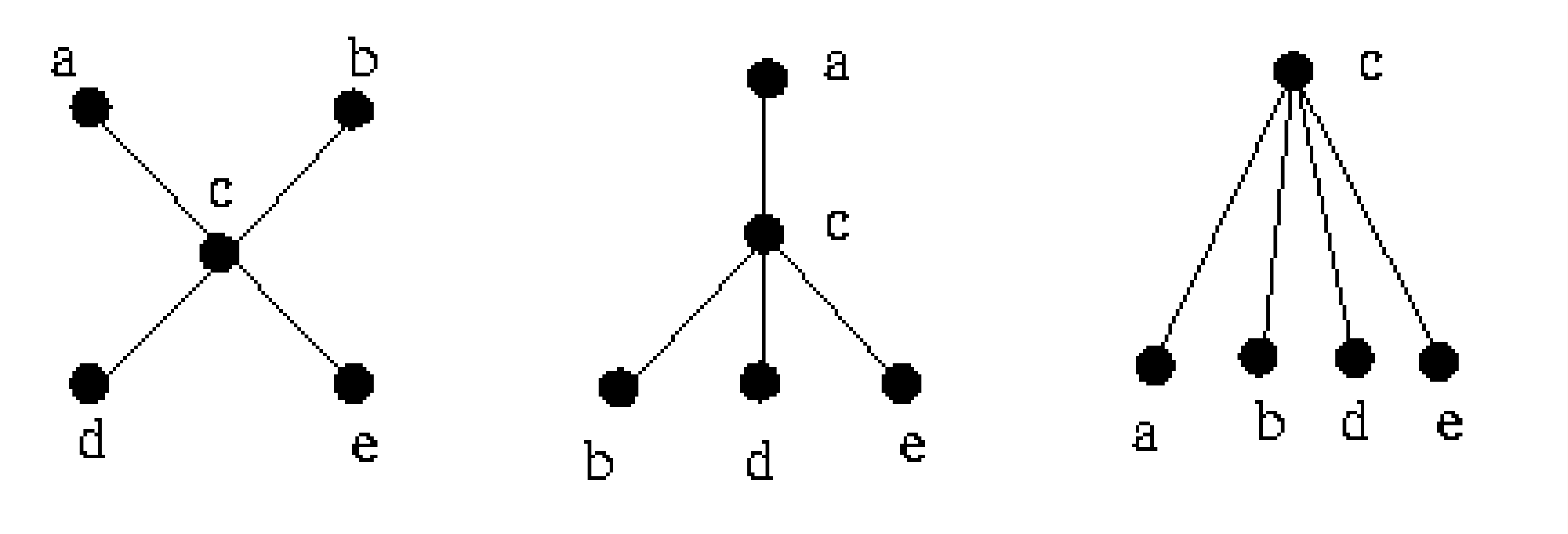
Teorema: Caminhos em Árvores

Um grafo não orientado é uma árvore se e somente se existe um único caminho simples entre qualquer par de vértices.

Dem: Assuma que G é uma árvore. Logo G é um grafo conexo e sem circuitos simples. Sejam x e y dois nós de G. Logo, como G é conexo, existe um caminho simples entre x e y. Adicionalmente, esse caminho é único, pois se existisse um outro caminho, o caminho formado através da combinação do caminho de x até y com o segundo caminho começando por y e chegando a x formaria um circuito, o que contraria a hipótese de que G é uma árvore.

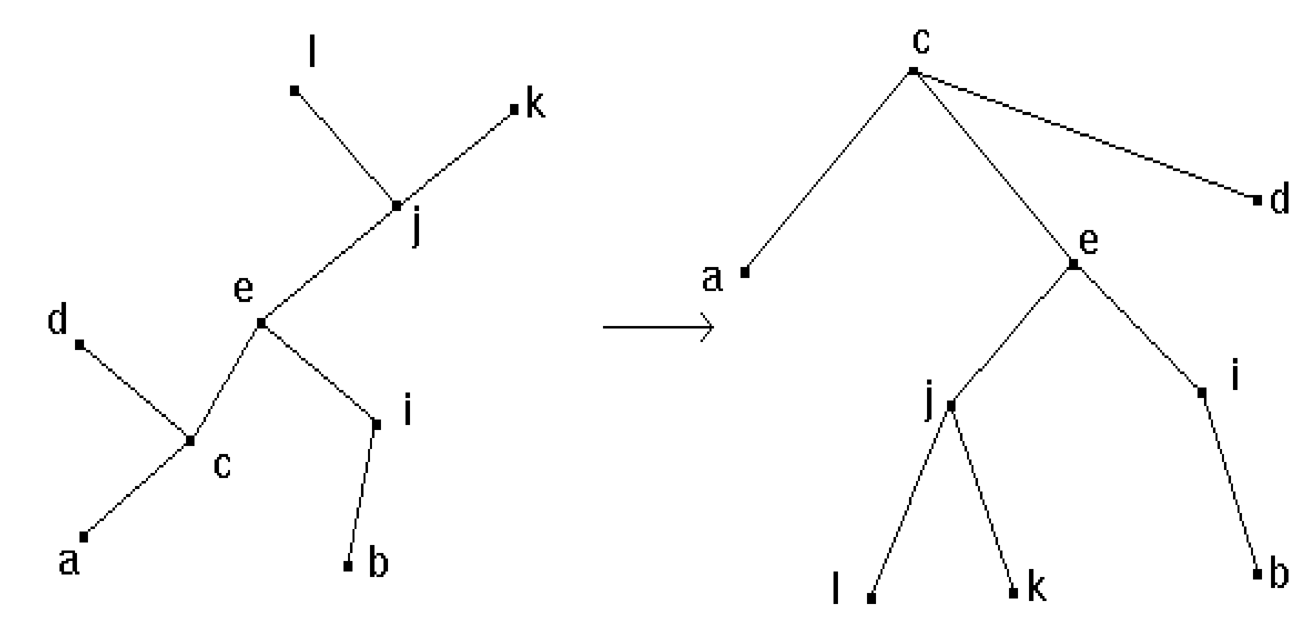
Árvore Enraizada: Definição

Uma árvore T = (V,E) é dita enraizada quando um vértice especial é escolhido como raiz. A raiz serve como ponto de referência para definir relações hierárquicas entre os nós.



Representação Gráfica de Árvores Enraizadas

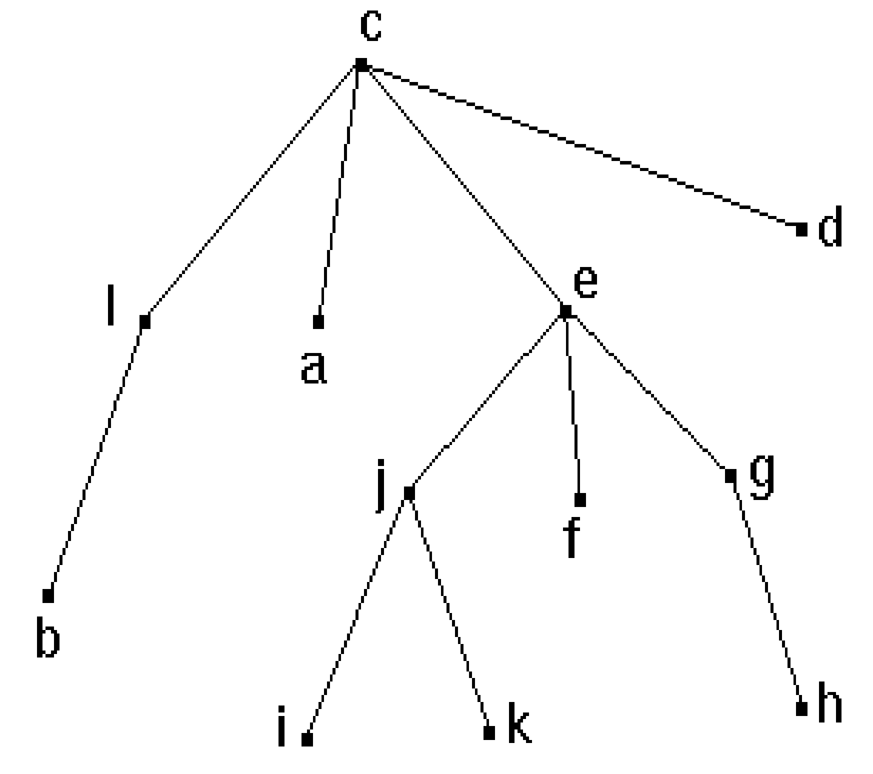
Normalmente, a raiz é representada no topo. Qualquer árvore pode ser transformada em enraizada escolhendo um vértice como raiz.



Nível, Altura e Folhas

- O **nível** de um vértice é o tamanho do caminho da raiz até ele.
- A **altura** da árvore é o maior nível entre os nós.
- **Folhas** são vértices sem filhos.
- Vértices que possuem filhos são chamados de **vértices internos**.

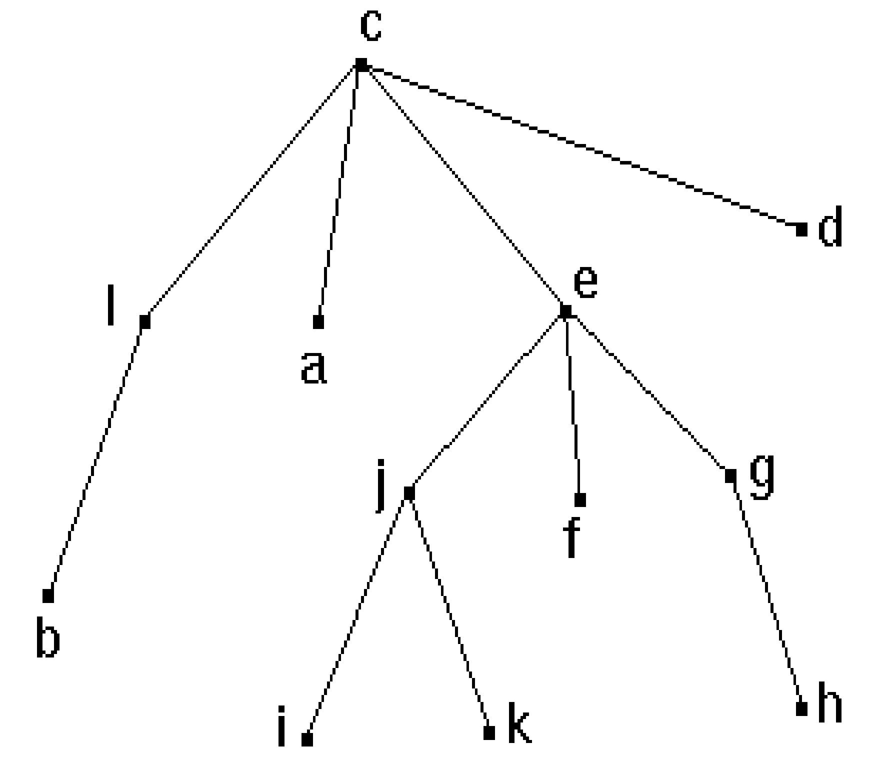
Árvores Enraizadas: Exemplo



Raiz: c

- ancestrais de j
- descendentes de j
- pai de j
- filhos de j
- nível de j
- altura da árvore
- folhas

Árvores Enraizadas



Raiz: c

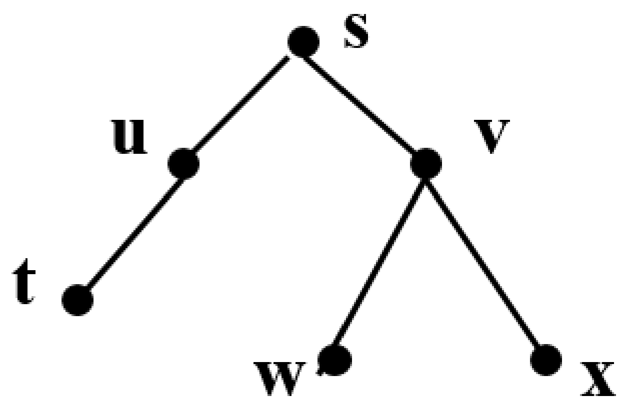
- ancestrais de j={e,c}
- descendentes de j={i,k}
- pai de j=e
- filhos de j={i,k}
- nível de j=2
- altura da árvore = 3
- folhas={b,a,i,k,f,h,d}.

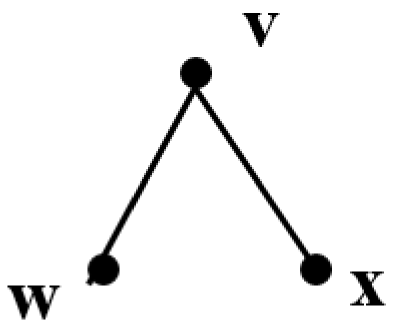
Propriedades Estruturais das Árvores

- A raiz de uma árvore não possui pai, e todo vértice **v** diferente de **r**, possui um único pai.
- Quando a raiz é o único nó do grafo ela é uma folha.
- O nível da raiz é zero, de seus filhos é 1.
- O nível de um nó é igual ao nível de seu pai mais um.
- Para dois vértices irmãos v e w, nível(v)=nível(w).
- A altura de uma árvore é o valor máximo de **nível(r)** para todo vértice **v** de **T**.

Subárvore: Definição e Propriedades

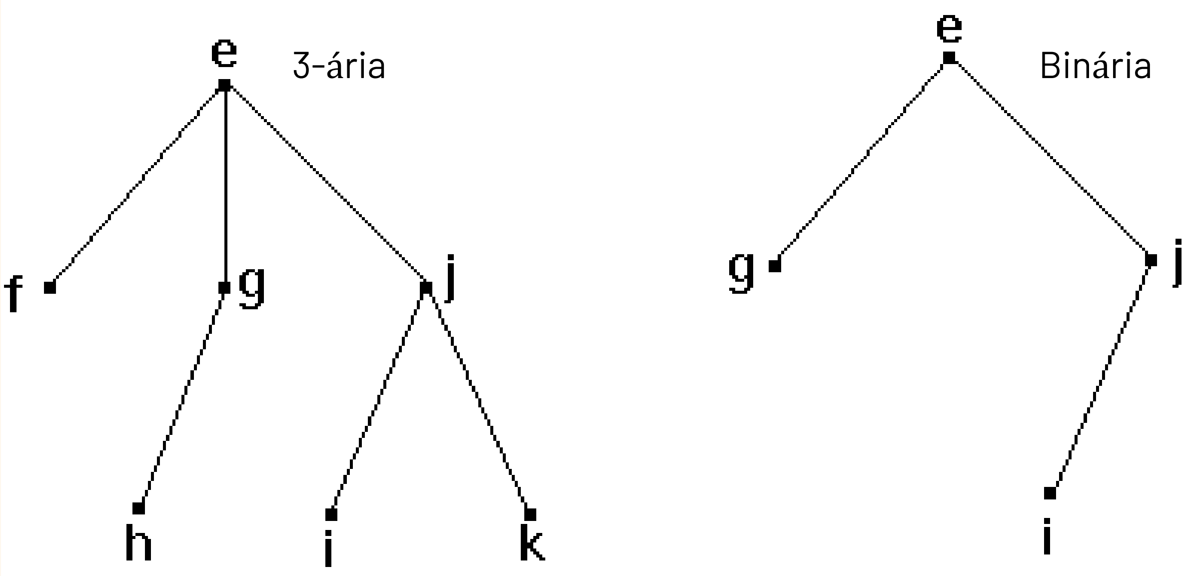
Seja T(V,E) uma árvore enraizada e $v \in V$. Uma subárvore Tv de T é uma árvore enraizada cuja raiz é v, definida pelo subgrafo induzido pelos descendentes de v mais o próprio v. A subárvore de raiz v é única para cada $v \in V$.





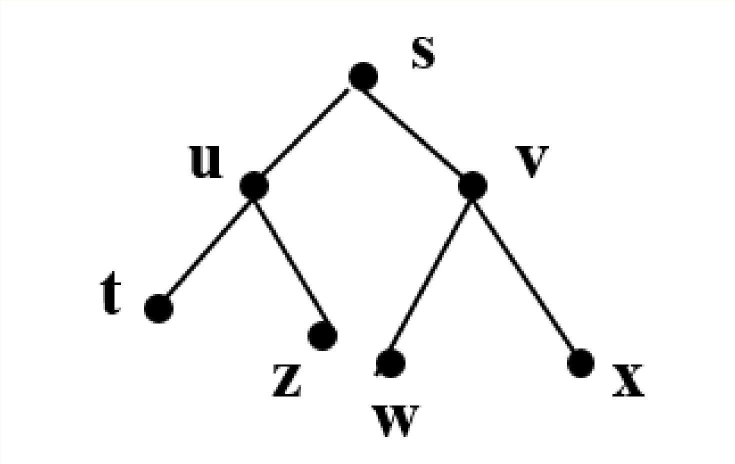
Árvore m-ária: Definição

Uma árvore enraizada é chamada de m-ária se todo nó interno não possui mais que **m** filhos. A árvore é chamada **árvore m-ária cheia** se todo nó interno possui exatamente m filhos. Uma árvore m-ária com m=2 é chamada de árvore binária.



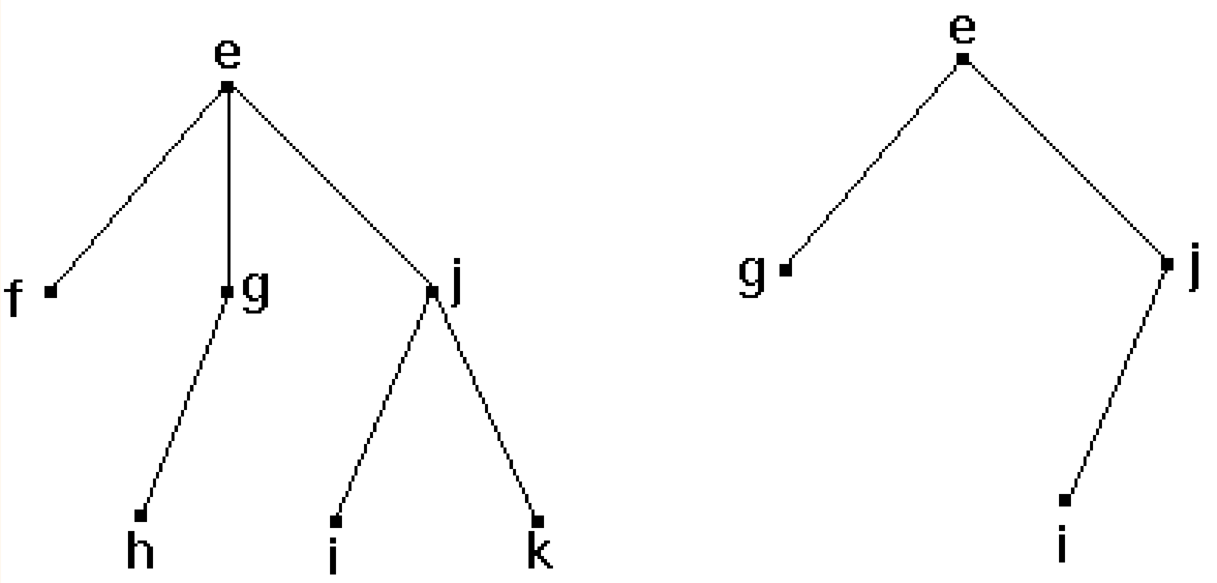
Árvore m-ária Cheia e Binária

A árvore é chamada árvore m-ária cheia se todo nó interno possui exatamente m filhos. Uma árvore m-ária com m=2 é chamada de árvore binária.

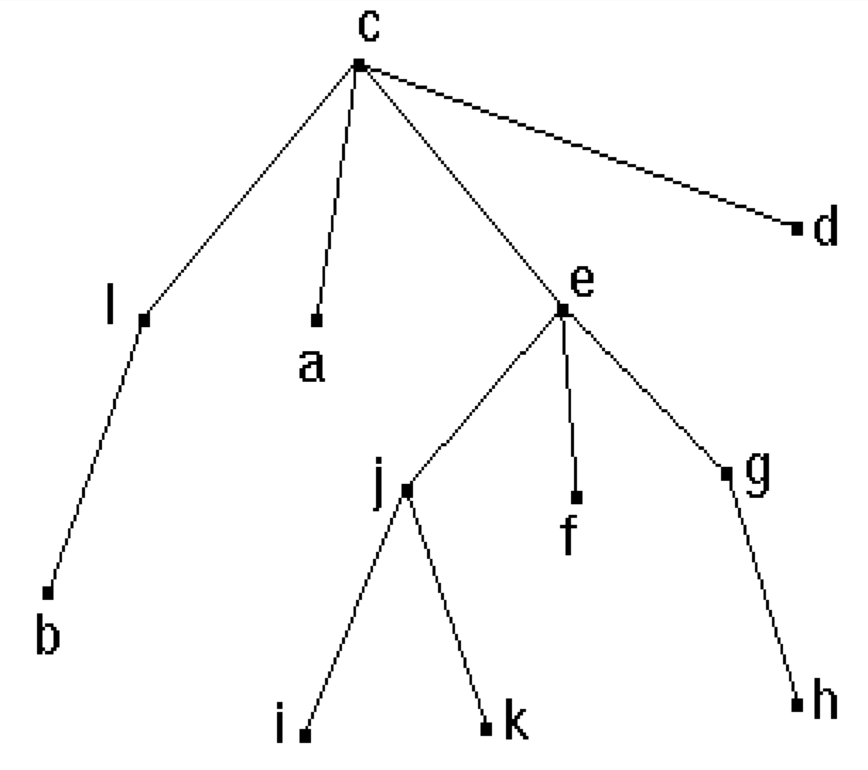


Árvore m-ária Balanceada

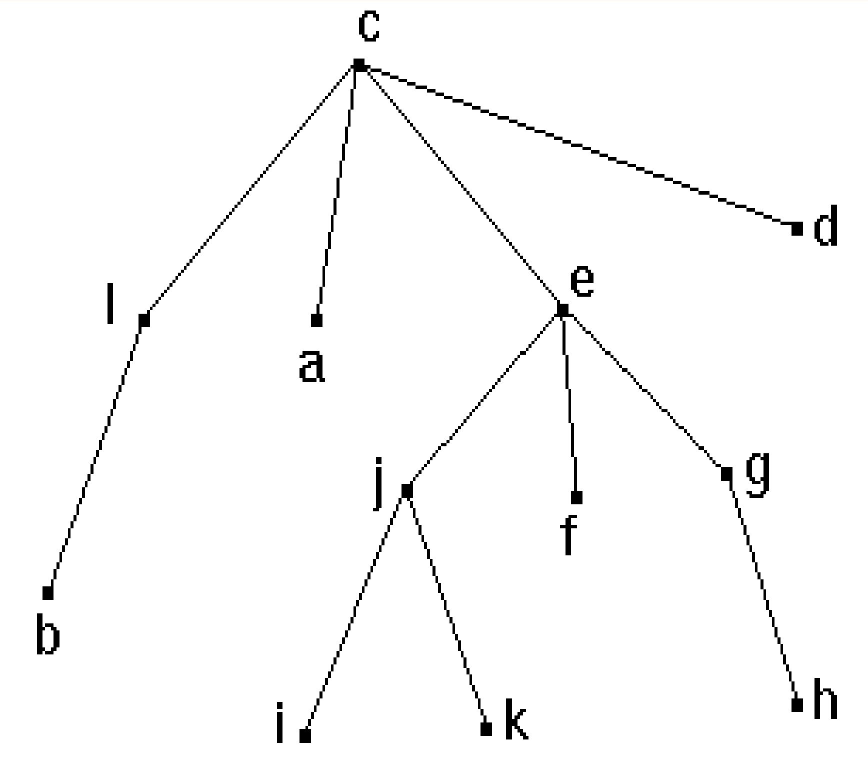
Uma árvore m-ária de altura h é balanceada se todas as folhas estão no nível h ou h-1. Isso garante uma distribuição mais uniforme dos nós e eficiência em operações.



Exemplo : a árvore está balanceada?



Exemplo : a árvore está balanceada?



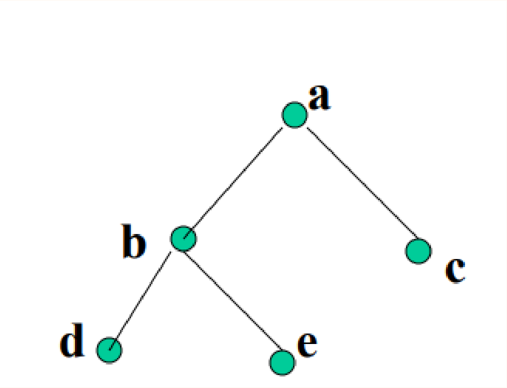
h=3
Nível(a) =1

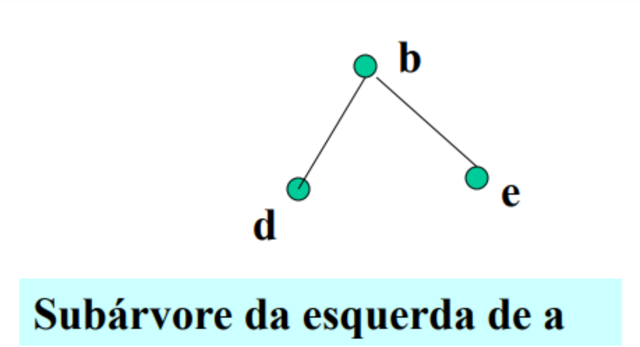
Não está balanceada

Árvore Enraizada Ordenada

No caso de árvores binárias, se um nó interno possui dois filhos, temos o filho da esquerda e o filho da direita.

A árvore cuja raiz é o filho da esquerda de um vértice é chamada de subárvore da esquerda desse vértice.





Teorema: Número de Arestas em uma Árvore

Uma árvore com n nós possui $n-1$ arestas

Teorema: Nós Internos em Árvores m-árias

Uma árvore m-ária cheia com i nós internos contem $n = mi + 1$ nós.

Teorema: Nós Internos em Árvores m-árias

Uma árvore m-ária cheia com i nós internos contem $n = mi + 1$ nós.

Dem: Cada vértice com exceção da raiz é filho de um nó interno. Como cada um dos **i** nós internos possui **m** filhos, existem **mi** nós na árvore além da raiz. Consequentemente, a árvore contem **n = mi + 1** nós.

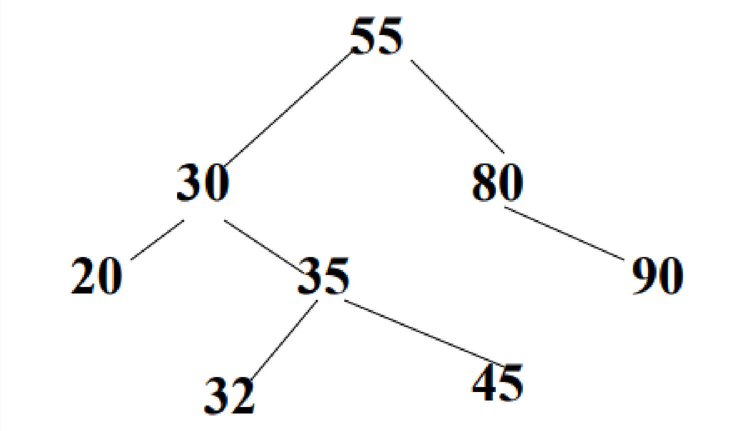
Teorema: Máximo de Folhas em Árvores m-árias

Em uma árvore m-ária de altura h, há no máximo m^h folhas.

Árvore binária de busca

Busca de itens numa lista.

Cada vértice é rotulado por uma chave de forma que a chave de um vértice é maior do que as chaves de todos os nós da subárvore da esquerda e menor do que as chaves dos nós da subárvore da direita.



Construindo uma árvore binária de busca

Procedimento recursivo que recebe uma lista de itens.

- O primeiro item da lista é a raiz da árvore.
- Para adicionar um novo item compare-o com os nós que já estão na árvore: comece pela raiz e siga para a esquerda se o item é menor que o item que rotula o nó que está sendo comparado ou siga para a direita, caso contrário.
- Quando o novo item é menor que um item cujo nó não tem filho da esquerda, adicione-o como filho da esquerda desse nó.
- Analogamente, quando o item é maior que o item cujo nó não tem filho da direita, adicione-o como filho da direita desse nó.

Construindo uma árvore binária de busca: Exemplo

Construa uma árvore binária de busca a partir da seguinte lista:
7, 3, 9, 1, 5

Construindo uma árvore binária de busca: Exemplo

Construa uma árvore binária de busca a partir da seguinte lista:
7, 3, 9, 1, 5

```
    7
   / \
  3   9
 / \
1   5
```

Construindo uma árvore binária de busca: Exercício

1) Construa uma árvore binária de busca a partir da seguinte lista: 55,30,80,90,35,32,20,45

2) Use a ordem alfabética para construir uma árvore binária de busca com as palavras da seguinte frase: “A inteligência artificial está transformando o futuro da educação e da tecnologia.”

Construindo uma árvore binária de busca: Exercício

3) Suponha que alguém iniciou uma corrente de cartas. Cada pessoa que recebe a carta é convidada a enviá-la para outras quatro pessoas. Quantas pessoas receberam a carta, incluindo a pessoa que iniciou a corrente, se nenhuma pessoa recebeu mais que uma carta e se a corrente acabou depois que 64 pessoas leram a carta e não mais a enviaram? Quantas pessoas enviaram a carta?

Dúvidas?

Laura Alves Pacifico
laps@cesar.school
Slack: Laura Pacifico