TEORIA DOS GRAFOS

Profª Laura Pacifico

2025 | SETEMBRO

Agenda da Aula

Fundamentos

Definições, exemplos e observações iniciais

Teoremas

Condições necessárias, Teoremas de Dirac e Ore

TSP

Problema do Caixeiro Viajante

Digrafos

Circuitos hamiltonianos em grafos orientados

Motivação: Euler x Hamilton

Trajeto Euleriano

Percorrer todas as arestas de um grafo exatamente uma vez

Os vértices podem se repetir durante o trajeto

Circuito Hamiltoniano

Visitar todos os vértices de um grafo exatamente uma vez

Retornar ao vértice inicial, formando um circuito

Definições

Definição

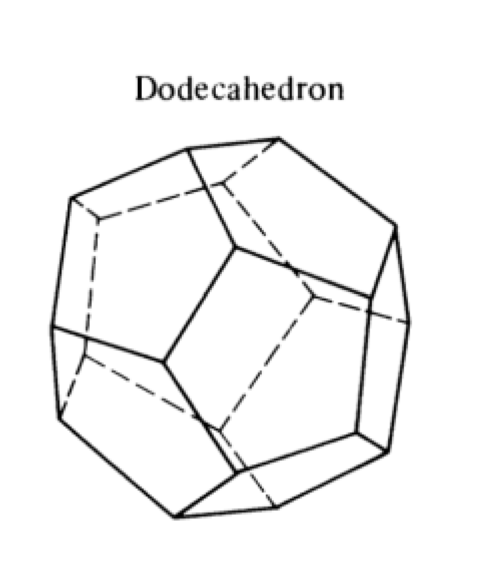
Um **circuito hamiltoniano** em um grafo conexo é um circuito que contém todos os vértices do grafo.

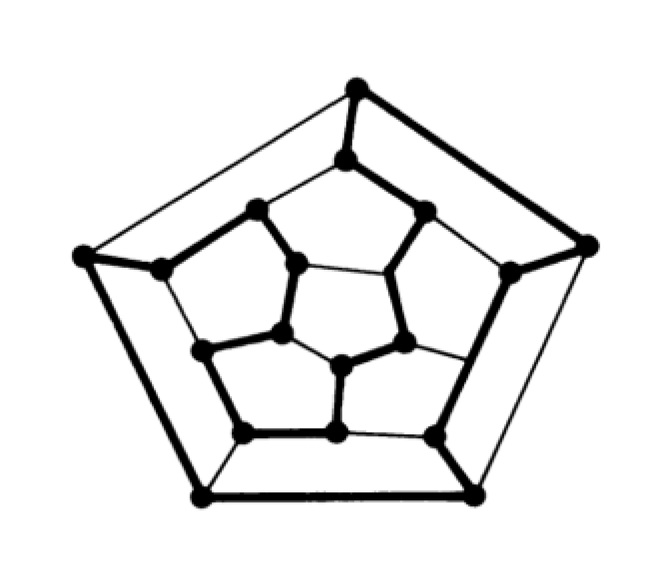
Um grafo é chamado de **grafo hamiltoniano** se possui um circuito hamiltoniano.

Um grafo não-hamiltoniano é **semi-hamiltoniano** se possui um caminho que contém todos os seus vértices.

Definições

O problema de determinar se um grafo é hamiltoniano foi formulado pelo matemático Sir William Hamilton em 1859.

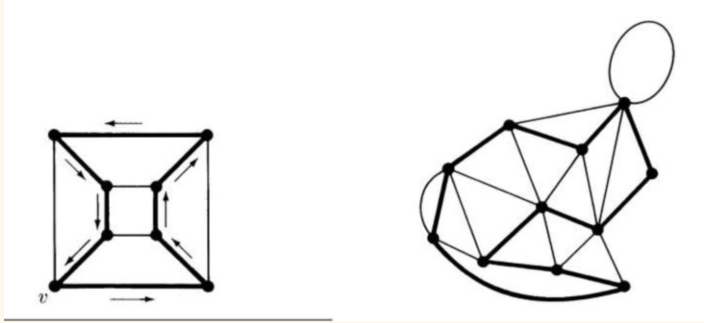




O nome se refere a um jogo desenvolvido onde um jogador deverá especificar um caminho que passa por todas as cidades especificadas. Nome do jogo: “ The traveller’s dodecahedron” ou “ A voyage round the word”.

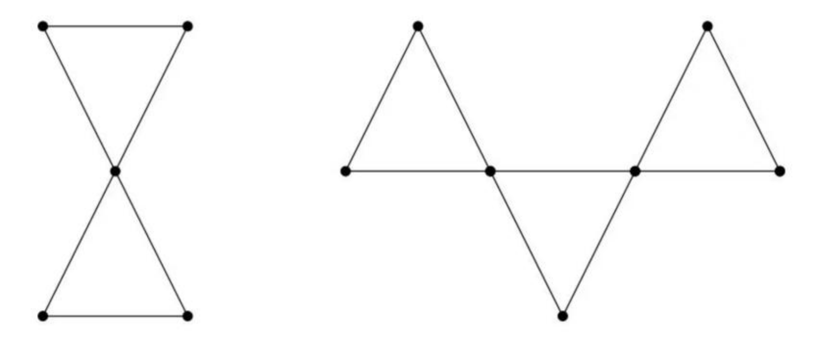
Exemplos

Grafo Hamiltoniano



Possui um circuito que visita todos os vértices exatamente uma vez

Grafo Não-Hamiltoniano



Não é possível formar um circuito que visite todos os vértices exatamente uma vez

Observações Iniciais

Arestas paralelas e laços

Não podem pertencer a um circuito hamiltoniano

Vértices de grau 2

As arestas a ele incidentes devem pertencer ao circuito hamiltoniano

Subcircuitos próprios

Não podem ser formados durante a construção do circuito hamiltoniano

Vértices já incluídos

Arestas incidentes não utilizadas podem ser desconsideradas

Heurísticas de Construção

Inicie em qualquer vértice

Escolha um vértice de partida e marque-o como visitado

Construa um caminho

Adicione vértices adjacentes não visitados ao caminho

Evite subciclos prematuros

Não feche o ciclo antes de visitar todos os vértices

Verifique o fechamento

O último vértice deve ser adjacente ao primeiro para formar o circuito

Teorema de Ore (1960)

Teorema

Se $G(V, A)$ é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se

$$\mathbf{d(v) + d(w) \geq n}$$

para cada par de vértices não-adjacentes v e w, então G é hamiltoniano.

Este teorema fornece uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano, baseada na soma dos graus de vértices não-adjacentes.

Ore - Checklist de Aplicação

1. **Verifique se o grafo é simples**
   Sem arestas paralelas ou laços
2. **Confirme que $n \geq 3$**
   O teorema só se aplica a grafos com pelo menos 3 vértices
3. **Identifique todos os pares de vértices não-adjacentes**
   Pares de vértices que não possuem uma aresta entre eles
4. **Calcule a soma dos graus para cada par**
   $d(v) + d(w)$ para cada par não-adjacente v,w
5. **Verifique se todas as somas são $\geq n$**
   Se sim, o grafo é hamiltoniano pelo Teorema de Ore

Teorema de Dirac (1952)

Teorema

Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se

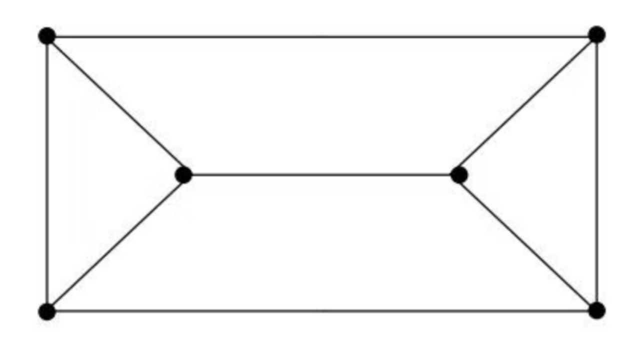
$$d(v) \geq n/2$$

para cada vértice v, então G é hamiltoniano.

Este teorema é um caso especial do Teorema de Ore, mais fácil de verificar na prática.

Exemplos

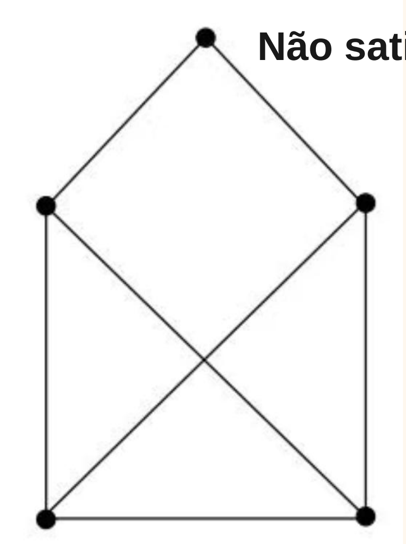
Satisfaz Dirac



Todos os vértices têm grau $\geq n/2$

Logo, o grafo é hamiltoniano

Não satisfaz Dirac



Alguns vértices têm grau $< n/2$

Não podemos concluir pelo Teorema de Dirac

Grafos Completos Kn

Definição

Um grafo completo é um grafo simples tal que existe uma aresta entre cada par de vértices.

Um grafo completo com n vértices é denotado por Kn.

Todo grafo completo Kn com $n \geq 3$ é hamiltoniano, pois satisfaz trivialmente o Teorema de Dirac:

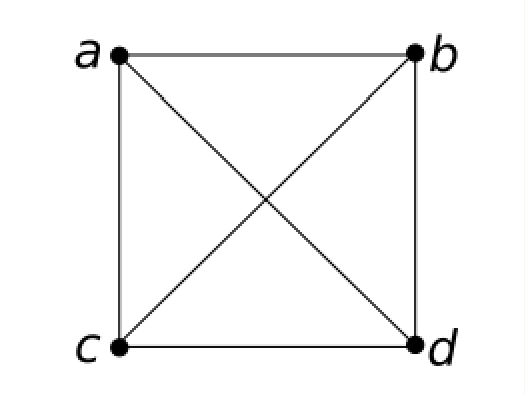
$d(v) = n-1 \geq n/2$ para todo vértice v (quando $n \geq 2$).

Circuito em Kn

Como obter um circuito hamiltoniano?

Numere os vértices do grafo de 1 a n.

Como existe uma aresta entre cada par de vértices, a sequência 1, 2, ..., n, 1 é um circuito hamiltoniano.



Os circuitos {a, b, c, d, a} e {a, d, c, b, a} são diferentes ou iguais?

Contagem de Circuitos em Kn

Teorema

Em um grafo completo Kn com $n \geq 3$ vértices, o número de circuitos hamiltonianos distintos é:

$$(n-1)!/2$$

Ciclos Aresta-Disjuntos em K_n

Teorema

Em um grafo completo com n vértices, existem $(n-1)/2$ circuitos hamiltonianos aresta-disjuntos, se $n \geq 3$ é ímpar.

Intuição: As $(n(n-1))/2$ arestas de K_n podem ser particionadas em $(n-1)/2$ conjuntos, cada um formando um circuito hamiltoniano com n arestas.

O Problema do Caixeiro Viajante

Formulação do Problema

Um viajante necessita visitar um certo número de cidades durante uma viagem e retornar ao lugar de origem de tal maneira que:

- Cada cidade é visitada exatamente uma vez
- A distância total percorrida seja a menor possível

Dada a distância entre as cidades, que rota ele deve escolher?

Modelagem em Grafo Valorado

Vértices

Representam as cidades a serem visitadas

Arestas

Representam as estradas entre as cidades

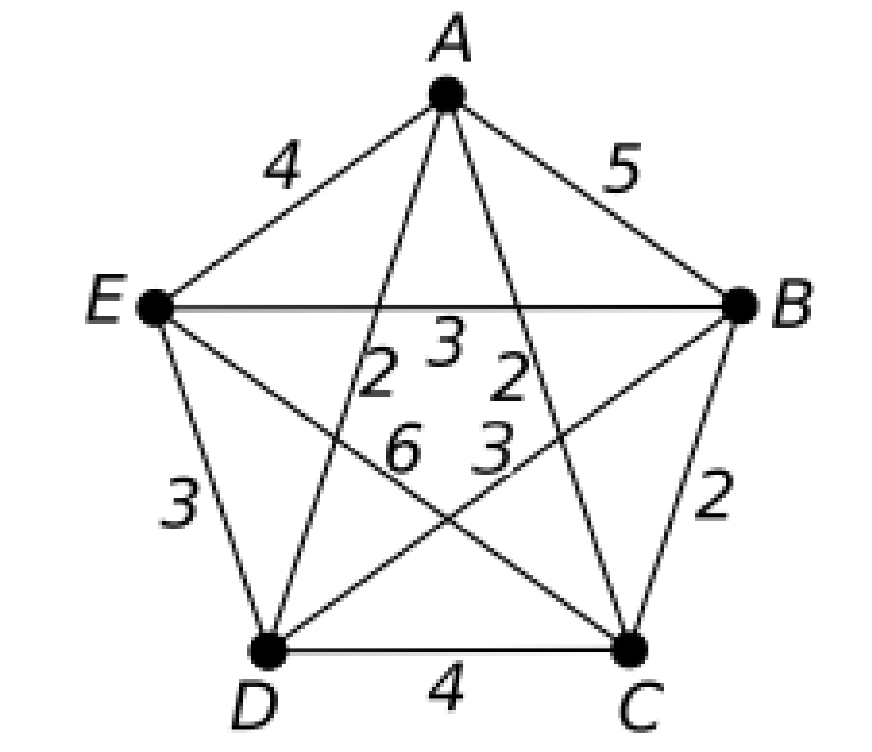
Pesos

Representam as distâncias entre as cidades

Objetivo

Encontrar o circuito hamiltoniano de menor custo total

Exemplo com 5 Cidades



Rota 1: {A, B, C, D, E, A}

Distância: 5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 18km

Explosão Combinatória

9!	19!	0,36s	3.800 anos
10 cidades	**20 cidades**	**Tempo para 10 cidades**	**Tempo para 20 cidades**
362.880 rotas possíveis	$1{,}22 \times 10^{17}$ rotas possíveis	Processando 1 milhão de rotas/segundo	Mesmo processando 1 milhão de rotas/segundo

Digrafos Hamiltonianos

Definição

Um digrafo D é dito ser hamiltoniano se possuir um circuito orientado que inclua todos os seus vértices.

Um digrafo não-hamiltoniano é dito ser semi-hamiltoniano se possuir um caminho orientado que inclua todos os seus vértices.

Pouco se sabe sobre digrafos hamiltonianos. Muitos teoremas para grafos hamiltonianos não são generalizados facilmente para digrafos.

Dirac para Digrafos

Teorema

Seja D um digrafo simples com n vértices. Se

$$\mathbf{ds(v) \geq n/2} \text{ e } \mathbf{de(v) \geq n/2}$$

para todo vértice v de D, então D é hamiltoniano.

Grau de saída (ds)

Número de arestas que saem do vértice

Grau de entrada (de)

Número de arestas que entram no vértice

Ore para Digrafos

Teorema

Seja D um digrafo simples com n vértices. Se

$$\mathbf{ds(v) + de(w) \geq n}$$

para todo par de vértices não-adjacentes v e w de D, então D é hamiltoniano.

Observe a analogia com o Teorema de Ore para grafos não-orientados.

Observações

Conhecimento Limitado

"Sabe-se pouco em geral" sobre digrafos hamiltonianos

Generalização Difícil

Teoremas para grafos não-orientados não se generalizam facilmente

Condições Mais Restritivas

As condições para digrafos são mais exigentes que para grafos não-orientados

Aplicações Práticas

Modelam problemas com restrições de direção (ruas de mão única, fluxos, etc.)

Dúvidas?

Laura Alves Pacifico
laps@cesar.school
Slack: Laura Pacifico