E.C.E. Mathématiques 2022-2023

ING 2

Devoir Surveilé du 22 Avril 2023.

Durée: 1h30.

Note. Les copies illisibles, dépourvues d'explications ou de soin seront pénalisées.

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Calculer et **factoriser** le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible. Calculer pour ces valeurs l'inverse de la matrice A.

Exercice 3.

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0,\ x+2y-z+2t=0\big\}.$$

1. Monter que F est sous espace vectoriel.
2. Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4. Soit f l'application linéaire suivante

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner le noyau de f et sa dimension. L'application f est-elle injective ?
3. Donner l'image de f et sa dimension.
4. Soit la base $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ et calculer son rang.
5. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

Exo 1

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \det(L_1+L_2+L_3+L_4, L_2, L_3, L_4) = \begin{vmatrix} a+b+2c & a+b+2c & a+b+2c & a+b+2c \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)\det(C_1, C_2-C_1, C_3-C_2, C_4-C_1)$$

$$= (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-a & 0 \\ c & b-c & a-b & 0 \\ b & c-b & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

développement par rapport à L_1

$$= (a+b+2c)\begin{vmatrix} a-c & b-a & 0 \\ b-c & a-b & 0 \\ c-b & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)(a-b)^2\begin{vmatrix} a-c & -1 & 0 \\ b-c & 1 & 0 \\ c-b & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

développement par rapport à C_3

$$= (a+b+2c)(a-b)^2\begin{vmatrix} a-c & -1 \\ b-c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+2c)(a-b)^2(a-c)(b-c)$$

Exo 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(C_1, C_2 + C_1, C_3) = \begin{vmatrix} 2^{+} & 0^{-} & 0^{+} \\ 1 & a+1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$ développement par rapport à L_1

$$= 2 \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(a+1)$$

Si $a \neq -1$, $\det A \neq 0$ et A est inversible

Si $a = -1$, $\det A = 0$ et A est non inversible

Si $a \neq -1$;

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 2a-1 & -3 & a+1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq -1$; $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} {}^{t}\mathrm{com}(A) = \dfrac{1}{4(a+1)} \begin{pmatrix} 2a-1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ a+1 & 0 & 2a+2 \end{pmatrix}$

Exo 3

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0,\ x+2y-z+2t=0\}.$$

1) • $0+0+0+0=0$, $0+2.0-0+2.0=0$

donc $(0,0,0,0) \in F$

• Soit $u=(x_1,y_1,z_1,t_1) \in F$, $v=(x_2,y_2,z_2,t_2) \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda u+v = (\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2, \lambda z_1+z_2, \lambda t_1+t_2)$

$\lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2+\lambda z_1+z_2+\lambda t_1+t_2$

$= \lambda(x_1+y_1+z_1+t_1)+(x_2+y_2+z_2+t_2)=0$

car $\begin{cases} u \in F \Rightarrow x_1+y_1+z_1+t_1=0 \\ v \in F \Rightarrow x_2+y_2+z_2+t_2=0 \end{cases}$

$\lambda x_1+x_2+2(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2)+2(\lambda t_1+t_2)$

$= \lambda(x_1+2y_1-z_1+2t_1)+(x_2+2y_2-z_2+2t_2)=0$

car $\begin{cases} u \in F \Rightarrow x_1+2y_1-z_1+2t_1=0 \\ v \in F \Rightarrow x_2+2y_2-z_2+2t_2=0 \end{cases}$

donc $\lambda u+v \in F$

F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2) Si $u=(x,y,z,t) \in F$ on a $\begin{cases} x+y+z+t=0 & (L_1) \\ x+2y-z+2t=0 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -y+2z-t=0 & (L_1-L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z-t \\ x=-2z+t-z-t=-3z \end{cases}$

$u = (-3z, 2z - t, z, t) = z(-3, 2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$

$\{(-3, 2, 1, 0); (0, -1, 0, 1)\}$ est génératrice de F, elle est libre car a 2 vecteurs non colinéaires : c'est une base de F

Exo 4

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{array}$$

1) Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u + v) = (2(\lambda x_1 + x_2) + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_2 + 2(\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + 2(\lambda z_1 + z_2))$

$= \lambda(2x_1 + y_1 + z_1, x_1 + 2y_1 + z_1, x_1 + y_1 + 2z_1) + (2x_2 + y_2 + z_2, x_2 + 2y_2 + z_2, x_2 + y_2 + 2z_1)$

$= \lambda f(u) + f(v)$

f est linéaire ; c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

2) Si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = (0, 0, 0)$ et $\begin{cases} 2x + y + z = 0 & (L_1) \\ x + 2y + z = 0 & (L_2) \\ x + y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y = 0 & (L_1 - L_2) \\ x - z = 0 & (L_1 - L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \\ 2x + x + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$ $\quad \dim \operatorname{Ker} f = 0$

f est injective

3) Comme f est un endomorphisme f injective $\Leftrightarrow f$ surjective
$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

$\dim \operatorname{Im} f = 3$

4) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$f(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$
$f(0, 1, 0) = (1, 2, 1)$
$f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Im} f = 3$

5) f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

f est injective et surjective donc bijective

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$